

مشتق از دیدگاه کاراتئودوری

س. کوهن

مترجم: محمد صال مصلحیان

چکیده. تعریف کاراتئودوری از مشتق چنین است: می‌گوییم تابع f در نقطه $a \in D_f$ مشتق‌پذیر است هرگاه یک تابع φ وجود داشته باشد که در a پیوسته باشد و برای هر x در یک بازه باز U شامل a ،

$$f(x) - f(a) = \varphi(x)(x - a).$$

در این مقاله به بررسی این تعریف از مشتق می‌پردازیم. نشان می‌دهیم که با تعریف استاندارد (کوشی) از مشتق معادل است و می‌تواند در اثبات ساده‌تری از بعضی قضایای مقدماتی مشتق به کار رود.

مقدمه

همه ما با تعریف زیر که توسط لویی کوشی (در سال ۱۸۲۳) برای مشتق ارائه شده‌است آشنا هستیم: ”فرض کنید f روی بازه باز U تعریف شده باشد و $a \in U$. می‌گوییم تابع f در a مشتق‌پذیر است هرگاه

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

و یا به طور معادل

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

موجود و متناهی باشد و در این صورت مشتق f در a را با $f'(a)$ نشان داده و آن را برابر

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \left(= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right)$$

تعریف می‌کنیم.

می‌دانیم بر اساس این تعریف از نظر آموزشی درک برهان قضیه مشتق‌پذیری تابع مرکب و قضیه مشتق‌پذیری تابع معکوس (برای دانشجویان درس ریاضی عمومی) مشکل است. ولی می‌توان تعریفی معادل برای مشتق ارائه داد و به کمک آن قضایای مزبور (و نیز قضایای مهم دیگری) را به طور ساده‌تر (برای دانشجویان درس آنالیز ریاضی و حتی دانشجویان مستعد ریاضی عمومی) اثبات نمود.

چنین تعریفی را اولین بار کنستانتین کاراتئودوری (۱۸۷۳-۱۹۵۰) ارائه داد. وی تعریفش را بر اساس این نکته به دست داد که اگر تابعی در نقطه‌ای به مفهوم کلاسیک مشتق‌پذیر باشد، آنگاه در آن نقطه پیوسته است.

تعریف کاراتئودوری از مشتق چنین است:

می‌گوییم تابع f در نقطه $a \in D_f$ مشتق‌پذیر است هرگاه یک تابع φ وجود داشته باشد که در a پیوسته باشد و برای هر x در یک بازه باز U شامل a ,

$$f(x) - f(a) = \varphi(x)(x - a).$$

از نظر هندسی وقتی $x \neq a$ ، $\varphi(x)$ شیب قاطعی است که دو نقطه $(x, f(x))$ و $(a, f(a))$ را به هم وصل می‌کند و لذا وقتی x به سمت a میل می‌کند این قاطع به طور پیوسته به خط مماس نزدیک می‌شود.

به سادگی می‌توان مشتق‌پذیری از راست (چپ) f در یک نقطه را بر حسب پیوستگی از راست (چپ) φ در این نقطه تعریف نمود.

حال در رابطه با تعریف کاراتئودوری به چند مطلب اشاره می‌نمائیم.

۱- تابع φ به نقطه بستگی دارد بدین معنی که در بررسی مشتق‌پذیری (به معنای کاراتئودوری) در دو نقطه متمایز

a_1 و a_2 احتمالاً توابع φ_1 و φ_2 متفاوتی ظاهر می‌شود.

۲- اگر f در a به معنای کاراتئودوری مشتق‌پذیر باشد، آنگاه f در a پیوسته است زیرا

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} (f(a) + \varphi(x)(x - a)) = f(a) + \varphi(a)(a - a) = f(a)$$

۳- حداکثر یک تابع φ وجود دارد که در شرایط تعریف کاراتئودوری صدق می‌کند. زیرا اگر ψ تابعی دیگر باشد،

آنگاه برای هر $x \neq a$ در یک بازه باز شامل a ,

$$\psi(x) = \varphi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

و لذا بنا به پیوستگی φ و ψ در a ، $\varphi(a) = \psi(a)$. پس φ و ψ در یک بازه باز شامل a مساوی خواهند بود.

بنابراین اگر f در a به معنای کاراتئودوری مشتق‌پذیر باشد، می‌توان مشتق کاراتئودوری f در a را برابر $\varphi(a)$ تعریف کرد.

۴- تابع f در a به معنای کلاسیک مشتق‌پذیر است اگر و فقط اگر بر حسب تعریف کاراتئودوری مشتق‌پذیر باشد

زیرا اگر f به معنای کلاسیک مشتق‌پذیر باشد، آنگاه تابع

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} & x \neq a \\ f'(a) & x = a \end{cases}$$

در تعریف کاراتئودوری از مشتق صدق می‌کند و اگر f به معنای کاراتئودوری مشتق‌پذیر باشد، آنگاه چون φ

در a پیوسته است،

$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

موجود است و بنابراین f به معنای کلاسیک مشتق‌پذیر است.

۵- اگر f مشتق‌پذیر باشد، بنا به رابطه

$$\varphi(a) = \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

می‌توان $f'(a)$ را برای نمایش مشتق کاراتئودوری f در a نیز به کار برد. بنابراین از اکنون به بعد ما تفاوتی بین معنای کاراتئودوری و معنای کلاسیک مشتق‌پذیری قائل نمی‌شویم. به عنوان نمونه با استفاده از تعریف کاراتئودوری نشان می‌دهیم که مشتق تابع $f(x) = x^n$ در a برابر $f(a) = na^{n-1}$ است: چون برای هر x ,

$$x^n - a^n = (x^{n-1} + ax^{n-2} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1})(x - a)$$

تابع همه جا پیوسته

$$\varphi(x) = x^{n-1} + ax^{n-2} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1}$$

در شرایط تعریف کاراتئودوری از مشتق صدق می‌کند و لذا

$$f'(a) = \varphi(a) = na^{n-1}.$$

اینک به اثبات بعضی از قضایای مهم مشتق‌پذیری با استفاده از صورت‌بندی کاراتئودوری از مشتق می‌پردازیم: (قاعده خطی بودن مشتق و قاعده لایب‌نیتز) اگر توابع f و g در a مشتق‌پذیر باشند و α و β دو عدد حقیقی دلخواه باشند، آنگاه توابع $\alpha f + \beta g$ و fg نیز در a مشتق‌پذیرند و

$$(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a) \quad (\text{آ})$$

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a). \quad (\text{ب})$$

اثبات. (آ) واضح است.

(ب) چون f و g در a مشتق‌پذیرند توابعی مانند φ و ψ وجود دارند که در a پیوسته‌اند و به ترتیب روی بازه‌های باز U و V تعریف شده‌اند به قسمی که برای هر $x \in U$,

$$f(x) - f(a) = \varphi(x)(x - a)$$

و برای هر $x \in V$,

$$g(x) - g(a) = \psi(x)(x - a).$$

بنابراین برای هر $x \in U \cap V$,

$$\begin{aligned} (fg)(x) - (fg)(a) &= f(x)g(x) - f(a)g(a) \\ &= f(x)(g(x) - g(a)) + g(a)(f(x) - f(a)) \\ &= f(x)\psi(x)(x - a) + g(a)\varphi(x)(x - a) \\ &= (f(x)\psi(x) + g(a)\varphi(x))(x - a). \end{aligned}$$

اما تابع $f(x)\psi(x) + g(a)\varphi(x)$ در a پیوسته است. پس fg در a مشتق‌پذیر است و

$$(fg)'(a) = f(a)\psi(a) + g(a)\varphi(a) = f(a)g'(a) + g(a)f'(a).$$

□

(قاعده زنجیری) اگر تابع f در نقطه a و تابع g در نقطه $b = f(a)$ مشتق پذیر باشند، آنگاه تابع $h = g \circ f$ در a مشتق پذیر است و

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

اثبات. چون g در b مشتق پذیر است یک تابع ψ وجود دارد که در b پیوسته است و برای هر s در یک بازه باز شامل b مانند V

$$g(s) - g(b) = \psi(s)(s - b).$$

همچنین چون f در a مشتق پذیر است، یک تابع φ وجود دارد که در a پیوسته است و برای هر x در یک بازه باز شامل a مانند U

$$f(t) - f(a) = \varphi(t)(t - a).$$

بنا به پیوستگی f در a می توان U را به قسمی اختیار کرد که اگر $t \in U$ ، آنگاه $f(t) \in V$ ، اینک مشاهده می شود که برای هر $x \in U$

$$\begin{aligned} h(t) - h(a) &= g(f(t)) - g(f(a)) = \psi(f(t))(f(t) - f(a)) \\ &= (\psi \circ f)(t)\varphi(t)(t - a). \end{aligned}$$

همچنین تابع $\varphi(\psi \circ f)$ در a پیوسته است و مقدارش در a ، $g'(f(a))f'(a)$ می باشد. لذا h در a مشتق پذیر است و

$$h'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

□

(قضیه تابع معکوس) فرض کنید f روی یک بازه باز I شامل c پیوسته و یک به یک باشد و نیز $f'(c)$ موجود و مخالف صفر باشد. در این صورت $g = f^{-1}$ در $d = f(c)$ مشتق پذیر است و

$$g'(d) = \frac{1}{f'(c)}$$

اثبات. چون f در c مشتق پذیر است، تابعی مانند φ وجود دارد که در c پیوسته است و برای هر x در یک بازه باز شامل c (که می توان آن را با I یکی انگاشت)،

$$f(x) - f(c) = \varphi(x)(x - c)$$

چون f روی I پیوسته و یک به یک است، برای هر $x \in I$ ، $\varphi(x) \neq 0$. اما نقش یک بازه باز تحت یک تابع یک به یک و پیوسته یک بازه باز است. پس نقش I تحت f ، که مشمول در حوزه تعریف g است، بازه بازی مانند J است، (و به علاوه g روی J پیوسته است).

اینک برای هر $y \in J$ داریم

$$y - d = f(g(y)) - f(c) = \varphi(g(y))(g(y) - c)$$

یا

$$g(y) - c = \frac{1}{\varphi(g(y))}(y - d).$$

چون $\frac{1}{\varphi \circ g}$ در d پیوسته است، پس g در d مشتق پذیر است و

$$g'(d) = \frac{1}{\varphi(g(d))} = \frac{1}{f'(c)}.$$

□

یادداشت: این مقاله ترجمه ای آزاد از [۱] همراه با اضافاتی چند است.

مراجع

[1] S. Kuhn, The derivative à la Carathéodory, *Amer. Math. Monthly*, **98** no. 1 (1991) 40–44.

محمد صال مصلحیان

مشهد، دانشگاه فردوسی مشهد، گروه ریاضی، صندوق پستی ۱۱۵۹، کدپستی ۹۱۷۷۵

moslehian@um.ac.ir

دکتر محمد صال مصلحیان استاد گروه ریاضی محض دانشگاه فردوسی مشهد است. تحقیقاتش در حوزه های آنالیز تابعی، نظریه عملگرها و آنالیز ماتریسی بوده و مقالاتی نیز در حوزه عمومی کردن ریاضیات به رشته تحریر در آورده است. ایشان عضو شورای اجرایی انجمن ریاضی ایران، سردبیر خبرنامه و نیز سردبیر بولتن انجمن ریاضی ایران بوده و در حال حاضر سردبیر دو مجله بین المللی معتبر سالنامه آنالیز تابعی و مجله آنالیز ریاضی باناخ است.

