

جای خالی عدد نپر در کتاب‌های متوسطه

مهدی حسنی* و عزیزه احمدی

چکیده. مطالب اندکی که درباره‌ی عدد e در کتب دبیرستانی وجود داشت ما را بر آن داشت که مقاله‌ی حاضر را در دفاع از این که می‌توان حرف‌های بیشتری در ارتباط با این عدد در سطح متوسطه بیان نمود، به رشته‌ی تحریر درآوریم. کارمان را با ارائه‌ی تاریخچه‌ای از این عدد آغاز می‌کنیم، و سپس به اثبات نامساوی $1/(n \cdot n!) < e - \sum_{k=0}^n 1/k! < 1/(n \cdot n!)$ که برای هر عدد طبیعی $n \geq 1$ برقرار است، می‌پردازیم. با کمک این نامساوی گنگ بودن e را استنتاج کرده، مقدار مجموع $\sum_{k=0}^n P(n, k)$ را محاسبه می‌کنیم. مجموع مذکور، ما را به شمارش تعداد مسیرهای متمایز بین دو رأس دلخواه از یک گراف کامل رهنمون می‌دارد. در پایان، اثباتی از نامساوی میانگین‌های حسابی، هندسی و همساز را بر اساس نامساوی $x^e \leq e^x$ که برای هر $x > 0$ برقرار است، بیان می‌کنیم. تمامی برهان‌ها و استنتاج‌ها بر اساس مطالبی است که در سال آخر متوسطه بیان می‌شود.

۱. مقدمه

۱.۱. تاریخچه‌ی عدد e . در سال ۱۶۱۸ در ضمیمه‌ی مقاله‌ای از نپر^۱ درباره‌ی لگاریتم، جدولی منتشر شد که لگاریتم طبیعی^۲ اعداد مختلف را می‌داد. هر چند لگاریتم‌های آن جدول در مبنای e بودند، با این وجود مقاله‌ی نپر توضیحی راجع به خود عدد e نمی‌داد. به هر حال این عدد به قدری با نام نپر عجین شده است که به افتخار مخترع لگاریتم یعنی نپر، گاهی اوقات عدد e را عدد نپر نیز می‌نامند. در سال ۱۶۲۴ بریگز^۳ تقریب عددی برای لگاریتم ۱۰ در مبنای e ارائه داد اما به خود عدد e در این کار اشاره‌ای نکرد. در سال ۱۶۴۷، ساینٹ وینسنت^۴ مساحت زیر هذلولوی قائم‌الزاویه را محاسبه کرد، و در سال ۱۶۶۱، هوینگنس^۵ رابطه‌ی بین ناحیه‌ی زیر هذلولوی قائم‌الزاویه‌ی $yx = 1$ و لگاریتم را با وضوح کامل درک نمود. عدد e طوری است که مساحت زیر هذلولوی قائم‌الزاویه از ۱ تا e مساوی ۱ است. این خاصیتی است که e را مبنای لگاریتم طبیعی قرار می‌دهد. علاوه بر این، وی لگاریتم e در مبنای ۱۰ را تا ۱۷ رقم اعشار محاسبه کرد. اگر چه کار روی لگاریتم‌ها ادامه یافت اما هنوز عدد e مستقیماً ظاهر نشده است. در سال ۱۶۶۸ نیکولاس مرکاتور^۶ اثر معروفش تحت عنوان فن لگاریتم^۸ را منتشر کرد که شامل بسط سری‌هایی از عبارت $\log(1+x)$ بود. وی در این کار برای نخستین بار نام لگاریتم طبیعی را برای لگاریتم در مبنای e به کار برد، اما خود e باز هم ظاهر نشد و باز در حاشیه باقی ماند.

عبارت و کلمات کلیدی. عدد نپر، عدد گنگ، اتحاد ترکیباتی، گراف کامل، نامساوی حسابی- هندسی.

* نام نویسنده مسئول

تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۰۲/۰۹ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۳/۱۰/۰۲

^۱ به طور معمول منظورمان از لگاریتم طبیعی همان لگاریتم در مبنای e می‌باشد.

^۷ نتیجه شود که این مرکاتور را نباید با جراردز مرکاتور که در حدود یک قرن قبل تر می‌زیسته اشتباه گرفت.

^۱ John Napier (1550-1617) ^۳ Henry Briggs (1561-1630) ^۴ Gregorius Saint-Vincent (1584-1667) ^۵ Christiaan Huygens (1629-1695)

^۶ Nicolaus Mercator (1620-1687) ^۸ Logarithmotechnia



شکل ۱: جان نپر، کریستین هویگنس و ژاکوب برنولی

با کمال تعجب، نخستین بار نه در بحث لگاریتم، بلکه در مبحث بهری مرکب^۹ بود که عدد e کشف شد. در سال ۱۶۸۳ ژاکوب برنولی^{۱۰} مسأله‌ای از بهری مرکب را بررسی نمود و جهت آزمودن پیوستگی بهری مرکب، سعی کرد حد عبارت $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ وقتی n به بی‌نهایت میل می‌کند را محاسبه کند. او با استفاده از قضیه‌ی دوجمله‌ای نشان داد که مقدار حد فوق بین ۲ و ۳ قرار می‌گیرد. این نخستین تقریبی است که برای e پیدا شده است. همچنین اگر این حد را به عنوان تعریف e قبول کنیم، این نخستین بار است که یک عدد به کمک عمل حدگیری تعریف می‌شود. در این کار وی هیچ توجهی به ارتباط نتیجه‌ی کارش با لگاریتم نداشت.

در بالا به این اشاره کردیم که در سال‌های اولیه‌ی ظهور لگاریتم، هیچ رابطه‌ای بین آن و نما به نظر نمی‌رسید. اما بعدها این رابطه در نظر گرفته شد که، از معادله‌ی $x = a^t$ نتیجه می‌گیریم $t = \log_a x$. در این نگرش ما لگاریتم را به عنوان یک تابع در نظر می‌گیریم در حالی که قبلاً به لگاریتم به عنوان عددی که به حساب کمک می‌کرد، توجه می‌شد. شاید ژاکوب برنولی نخستین کسی باشد که فهمید تابع لگاریتم وارون تابع نمایی است. از طرفی با احتمال بیشتر، شاید نخستین کسی که رابطه‌ی بین لگاریتم و توان را مشخص ساخت، جیمز گریگوری^{۱۱} باشد. به هر حال وی در سال ۱۶۸۴ به طور قطع رابطه‌ی بین لگاریتم‌ها و نماها را تشخیص داد، گرچه ممکن است قبل از او این کار صورت گرفته باشد. در سال ۱۶۹۰ لایبنیتز^{۱۲} نامه‌ای به هویگنس نوشت و در آن از نماد b برای آنچه ما حالا e می‌نامیم، استفاده کرد. نماد e نخستین بار در سال ۱۷۳۱ در نامه‌ای از اوایلر^{۱۳} به گلدباخ^{۱۴} ظاهر شده است^{۱۵}.

اوایلر در سال‌های بعد تا سال ۱۷۴۸، یافته‌های گوناگونی راجع به e به دست آورد و در آن سال مقدمه‌ای در تحلیل بی‌نهایت‌ها^{۱۶} را که حاوی ایده‌هایی کامل حول e بود منتشر ساخت. او نشان داد که

$$(۱) \quad e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!},$$

^{۱۵} این ادعا که اوایلر نخستین بار نماد e را استفاده کرده، چون اول نام خودش بود، دور از واقع می‌نماید. حتی ادعای این که e از exponential (نمایی) گرفته شده نیز به نظر درست نمی‌آید. در واقع با در نظر گرفتن سطح و حجم بالای کارهای اوایلر، آنچه که معقول به نظر می‌رسد این است که چون e حرف باصدای بعد از a است و اوایلر در کارهایش از a به کرات استفاده می‌کرده است، لذا از e برای نشان دادن این ثابت ریاضی استفاده کرده است.

^۹Compound interest ^{۱۰}Jacob (Jacques) Bernoulli (1654-1705) ^{۱۱}James Gregory (1638-1675) ^{۱۲}Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) ^{۱۳}Leonhard Euler (1707-1783) ^{۱۴}Christian Goldbach (1690-1764) ^{۱۶}Introductio in Infinitorum Analysis

و این مقدار برابر $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ نیز می‌باشد. اویلر همچنین تقریبی تا ۱۸ رقم اعشار برای e ، بدون اشاره‌ای به نحوه‌ی محاسبه‌ی آن، به صورت زیر ارائه نمود.^{۱۷}

$$e = ۲,۷۱۸۲۸۱۸۲۸۴۵۹۰۴۵۲۳۵.$$

در بین نتایج قابل توجه دیگر در کارهای اویلر رابطه‌ی

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta,$$

را می‌توان مشاهده نمود، که وی با دستور دموآور^{۱۸} آن را استنتاج کرده است. یکی از نتایج این رابطه با قرار دادن $\theta = \pi$ به صورت $e^{i\pi} = -1$ به دست می‌آید، که ارتباطی بین چهار ثابت مهم ریاضی، یعنی e ، π ، i و -1 برقرار می‌کند. او همچنین بسط‌هایی از e به شکل کسره‌ای مسلسل ارائه نمود، که یکی از آنها عبارت است از

$$(۲) \quad \frac{e-1}{2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{10 + \frac{1}{14 + \frac{1}{18 + \dots}}}}}.$$

اویلر برای بسط‌های بالا برهانی نداد، اما او می‌دانست در صورت ارائه‌ی برهان، ثابت می‌شود که e گنگ است. زیرا اگر در کسر مسلسل (۲) الگوی $۶, ۱۰, ۱۴, ۱۸, ۲۲, ۲۶, \dots$ را دنبال کنیم، مختوم نمی‌شود. در واقع در این الگو اختلاف هر دو جمله‌ی متوالی ۴ است. بنابراین $\frac{e-1}{2}$ نمی‌تواند گویا باشد. هر چند با قطعیت نمی‌توان گفت، اما به احتمال بسیار زیاد و به اعتقاد بسیاری، اویلر اولین کسی است که اصم بودن e را اثبات نمود. و در نهایت، برای اولین بار، هرمیت^{۱۹} در سال ۱۸۷۳ ثابت کرد که e متعالی است، به این معنا که هیچ چند جمله‌ای با ضرایب صحیح نمی‌توان یافت که e ریشه‌ای از آن باشد.



شکل ۲: جیمز گریگوری، گاتفرید ویلهلم فون لایبنیتز و لئونارد اویلر

^{۱۷}البته با محاسبه‌ای ساده مشاهده می‌شود که با محاسبه‌ی ۲۰ جمله‌ی نخست از رابطه‌ی (۱)، می‌توان با همان دقت اعشاری اویلر، e را محاسبه کرد. به احتمال زیاد اویلر نیز به همین روش محاسبه‌اش را انجام داده است.

^{۱۸}Abraham de Moivre (1667-1754) ^{۱۹}Charles Hermite (1822-1901)

۲.۱. هدف از نگارش این مقاله. به این صورت عدد e متولد شده و در بحثهای مختلف ریاضی ظاهر گشته است. در اینجا به ریاضیات دبیرستانی خودمان برمیگردیم. در صفحه ۳۷ کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره‌ی متوسطه [۹] می‌خوانیم:

سری $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ همگراست. مقدار سری را با e نمایش می‌دهند. می‌توان ثابت کرد e عددی گنگ بین ۲ و ۳ و مقدار تقریبی آن 2.7183 است. در حقیقت اثبات می‌کنند

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

هدف ما از نگارش این مقاله، علاوه بر ارائه‌ی اطلاعات تاریخی که ملاحظه نمودید، عمدتاً این است که نشان دهیم چگونه می‌توان بر اساس رابطه‌ی (۱)، که امروزه به عنوان تعریف عدد e شناخته می‌شود، نتایج بسیاری در رابطه با دروس متوسطه ارائه نمود. شاید این امر در تجدید نظرهای بعدی کتاب‌های متوسطه، مخصوصاً سال آخر متوسطه، مؤثر واقع شود. در پایان مقدمه لازم است اشاره کنیم که تمامی مطالب تاریخی این مقاله، همچنین تصاویر ریاضی‌دانان مستخرج از سایتی می‌باشد که در [۸] معرفی گردیده است. ضمناً برخی از سطور مطالب تاریخی مقاله‌ی حاضر در [۱۲] با شرح و تفصیل بیشتری آمده است.

۲. یک نامساوی مهم درباره‌ی عدد e

با توجه به رابطه‌ی (۱)، برای هر عدد طبیعی $n \geq 1$ داریم:

$$\begin{aligned} 0 < e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots \\ &= \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots \right) < \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots \right). \end{aligned}$$

از آنجایی که $n \geq 1$ فرض شده است لذا $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}$. در نتیجه سری

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots,$$

یک سری هندسی با قدرنسبت مثبت و کمتر از واحد است که همگرا خواهد بود. مقدار این سری برابر است با

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots = \frac{\frac{1}{n+1}}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n}.$$

در نتیجه نامساوی مهم زیر را برای هر عدد طبیعی $n \geq 1$ به دست می‌آوریم.^{۲۰}

$$(۳) \quad 0 < e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < \frac{1}{n(n!)}.$$

^{۲۰} می‌توان نشان داد

$$\frac{1}{(n+a)n!} \leq e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < \frac{1}{(n+b)n!},$$

که در آن ثابت‌های a و b دارای بهترین مقادیر ممکن $0.39 \approx 1 - \frac{1}{e}$ و $a = 0$ و $b = 0$ هستند، و تساوی سمت چپ تنها برای $n = 1$ برقرار است. در واقع، این حکم حالت خاصی از حکمی کلی‌تر است که در [۵] مورد بحث و بررسی قرار گرفته است.

در ادامه با ارائه‌ی چندین کاربرد، اهمیت نامساوی (۳) را توضیح می‌دهیم.

۱.۲. محاسبه‌ی عدد نپر با تعداد ارقام اعشاری دلخواه. نامساوی (۳) می‌گوید که $\frac{1}{k!} \approx \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ و مقدار خطای این تقریب کمتر از $\frac{1}{n(n!)}$ می‌باشد. پس اگر بخواهیم عدد e را با سری متناهی $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ تا رقم اعشار تقریب بزنیم باید داشته باشیم $\frac{1}{n(n!)} \leq 10^{-m}$ و یا به طور معادل $n(n!) \geq 10^m$. پس باید در جستجوی n ای باشیم که نامساوی اخیر را به ازای m داده شده برقرار می‌کند. مثلاً فرض کنید می‌خواهیم عدد e را تا شش رقم اعشار تقریب بزنیم. پس باید به دنبال n ای باشیم که

$$(۴) \quad \frac{1}{n(n!)} < 10^{-6}.$$

جدول زیر مقادیر $n(n!)$ را برای $1 \leq n \leq 10$ نشان می‌دهد.

جدول ۱: مقادیر $n(n!)$ برای $1 \leq n \leq 10$

n	$n(n!)$	$\frac{1}{n(n!)}$	n	$n(n!)$	$\frac{1}{n(n!)}$
۱	۱	۱	۶	۴۳۲۰	۰/۰۰۰۲۳
۲	۴	۰/۲۵	۷	۳۵۲۸۰	۰/۰۰۰۲۸۳
۳	۱۸	۰/۰۵۵۵۵	۸	۳۲۲۵۶۰	۰/۰۰۰۰۰۳۱
۴	۹۶	۰/۰۱۰۴	۹	۳۲۶۵۹۲۰	۰/۰۰۰۰۰۰۳۰۶
۵	۶۰۰	۰/۰۰۱۶	۱۰	۳۶۲۸۸۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۲۷

با توجه به جدول بالا مشاهده می‌شود که $n = 9$ کوچکترین عدد طبیعی است که نامساوی (۴) را برقرار می‌کند. لذا عدد e تا شش رقم اعشار با نوشتن سری $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ تا $n = 9$ به دست می‌آید. یعنی

$$e \approx \sum_{k=0}^9 \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{9!} = ۲,۷۱۸۲۸۱.$$

۲.۲. عدد نپر گنگ است. فرض کنید e گویا باشد. قرار می‌دهیم $e = \frac{a}{b}$ که a و b اعداد صحیح مثبت و $b \neq 0$ است. با استفاده از نامساوی (۳) به ازای $n = b$ داریم

$$0 < \frac{a}{b} - \sum_{k=0}^b \frac{1}{k!} < \frac{1}{b(b!)}.$$

با ضرب طرفین در $b!$ نتیجه می‌شود

$$0 < a(b-1)! - \sum_{k=0}^b \frac{b!}{k!} < \frac{1}{b} \leq 1.$$

چونکه $a(b-1)!$ و $\sum_{k=0}^b \frac{b!}{k!}$ اعداد صحیح هستند، تفاضل‌شان نیز باید صحیح باشد. اما هیچ عدد صحیحی در بازه‌ی $(0, 1)$ وجود ندارد. این تناقض نشان می‌دهد که e گنگ است.

۳.۲. یک اتحاد ترکیبیاتی. در مبحث آنالیز ترکیبی از کتاب ریاضیات ۲ [۱۱]، نشان داده می‌شود که $\sum_{k=0}^n C(n, k) = 2^n$. طبیعی است که در مورد $\sum_{k=0}^n P(n, k)$ نیز سؤال شود. اما جای این سؤال نه تنها در کتاب ریاضیات ۲، بلکه در طول دوره‌ی متوسطه هم خالی است. در این بخش با کمک نامساوی (۳) حاصل این مجموع را می‌یابیم. در واقع نخست نشان می‌دهیم که برای هر عدد طبیعی $n \geq 1$ داریم

$$(5) \quad \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} = [en!].$$

ایده‌ی کار مشابه اثبات گنگ بودن عدد e است. با ضرب طرفین رابطه‌ی (۳) در $n!$ داریم $0 < en! - \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} < \frac{n!}{n!}$. پس عدد $en! - \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!}$ در بازه‌ی $(0, 1)$ قرار می‌گیرد، و لذا جزء صحیح این عدد باید برابر صفر باشد. یعنی

$$\left[en! - \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} \right] = 0.$$

اما $\sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!}$ برای هر $n \geq 1$ ، عددی طبیعی می‌باشد. پس می‌توان آن را از داخل تابع جزء صحیح بیرون آورد و تساوی (۵) را نتیجه گرفت. حال توجه می‌کنیم که

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n P(n, k) &= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n!}{n!} + \frac{n!}{(n-1)!} + \cdots + \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{0!} \\ &= \frac{n!}{0!} + \frac{n!}{1!} + \cdots + \frac{n!}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} = [en!]. \end{aligned}$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم

$$(6) \quad \sum_{k=0}^n P(n, k) = [en!].$$

در اینجا سؤالی را مطرح می‌کنیم. تعبیر ترکیبیاتی اتحاد $\sum_{k=0}^n C(n, k) = 2^n$ روی زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی n عضوی صورت می‌گیرد. سؤال این است که تعبیر ترکیبیاتی تساوی (۶) چه می‌تواند باشد؟ موضوع بخش بعد پاسخی به این سؤال خواهد داد.

۴.۲. محاسبه‌ی تعداد مسیرهای متفاوت در گراف کامل. در کتاب ریاضیات گسسته ([۱۰]، صفحه‌ی ۱۵) تمرینی به صورت زیر آمده است:

در گراف کامل K_p ، $2 \leq p \leq 4$ تعداد مسیرهای «متفاوت» از یک رأس u به یک رأس v ، $u \neq v$ را بیابید.

این مسأله را در حالت کلی برای گراف K_n که $n \geq 3$ ، حل می‌کنیم. فرض کنید u و v دو رأس دلخواه متمایز در گراف K_n باشند. فقط یک مسیر به طول ۱ بین u و v وجود دارد. اگر $u \circ v$ مسیری به طول ۲ باشد، آنگاه $\circ$ می‌تواند به $P(n-2, 1)$ طریق انتخاب شود. لذا تعداد مسیرهای به طول ۲ برابر همین عدد است. به همین ترتیب اگر $u \circ \circ v$ یک مسیر به طول ۳ باشد آنگاه تعداد مسیرهای به طول ۳ برابر $P(n-2, 2)$ است. با ادامه‌ی این روند تعداد مسیرهای به طول $1, n-2, n-1$ تا $P(n-2, n-2)$ است. بنابر آنچه گفته شد تعداد مسیرهای متفاوت بین دو رأس u و v برابر است با

$$1 + P(n-2, 1) + P(n-2, 2) + \cdots + P(n-2, n-2) = \sum_{k=0}^{n-2} P(n-2, k).$$

حال به کمک رابطه‌ی (۶)، داریم

$$\sum_{k=0}^{n-2} P(n-2, k) = [e(n-2)!].$$

در نتیجه تعداد مسیرهای متمایز بین دو رأس دلخواه متمایز در گراف K_n با شرط $n \geq 3$ برابر است با $[e(n-2)!]$. این راه‌حل، یک تعبیر ترکیبیاتی برای رابطه‌ی (۶) نیز می‌باشد. با روشی مشابه بالا می‌توان موارد زیر را نیز استدلال نمود^{۲۱} [۲].

۱. مجموع طول‌های مسیرهای متفاوت بین دو رأس دلخواه متمایز در گراف کامل K_n که $n > 2$ ، برابر است با $[e(n-2)!] + 1$.

۲. تعداد دورهای موجود از هر رأس در گراف کامل K_n ، $n > 2$ ، برابر است با $[e(n-1)!] - n$ و مجموع طول‌های آنها برابر است با $[e(n-1)!] - 2n + 1$.

۳. نامساوی‌های بین میانگین‌های حسابی، هندسی و همساز

فرض کنید $a_1, a_2, \dots, a_n$ اعداد حقیقی مثبت باشند. برای این اعداد، میانگین حسابی، A ، میانگین هندسی، G ، و میانگین همساز، H ، به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n},$$

$$G = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n},$$

$$H = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}}.$$

نامساوی میانگین‌های حسابی، هندسی و همساز بیان می‌کند که

$$(V) \quad A \geq G \geq H,$$

که در آن تساوی فقط زمانی روی می‌دهد که تمام a_i ها با هم برابر باشند. در این بخش قصد داریم اثبات‌هایی از این نامساوی را ارائه دهیم که در سطح متوسطه قابل بیان هستند. اثباتی مقدماتی برای این نامساوی وجود دارد که در بخش بعدی آورده‌ایم. اثبات‌های دیگری که در آنها از خواص عدد e و تابع e^x استفاده شده است نیز وجود دارد. یکی از معروفترین این قبیل اثبات‌ها توسط جورج پولیا^{۲۲} ارائه شده است. در بخش بعد به فراخور موضوع مقاله، اثباتی دیگر که همچنان بر مبنای خواص ابتدایی تابع e^x است [۷]، از نامساوی‌های بین میانگین‌های حسابی، هندسی و همساز ارائه می‌کنیم.

^{۲۱} در اینجا لازم است متذکر شویم که این‌ها تنها مواردی نیستند که عدد نپر در شمارش بکار می‌آید. در واقع یکی از موارد شناخته شده و معروف، ظهور این عدد در محاسبه‌ی تعداد پریش‌های یک مجموعه n عضوی است، که با نماد $d(n)$ نشان داده می‌شود، و عبارت است از تعداد جایگشت‌هایی روی مجموعه‌ای n عضوی که هیچ عضو را به خودش تصویر نمی‌کند (و اصطلاحاً نقطه‌ی ثابت ندارد). ثابت می‌شود [۳] که برای $n \geq 2$ داریم

$$d(n) = [(e + e^{-1})n!] - [en!].$$

همچنین ثابت می‌شود که برای $n \geq 1$ رابطه‌ی زیر نیز برقرار است

$$d(n) = \left\lfloor \frac{n! + 1}{e} \right\rfloor.$$

^{۲۲}George Polya (1887-1985)

۱.۳. اثباتی بر اساس خواص عدد نپر. کلید اثبات، تابع

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}}$$

است. داریم $\ln f(x) = \frac{1}{x} \ln x$ بنابراین، با مشتق‌گیری از طرفین این رابطه نتیجه می‌شود

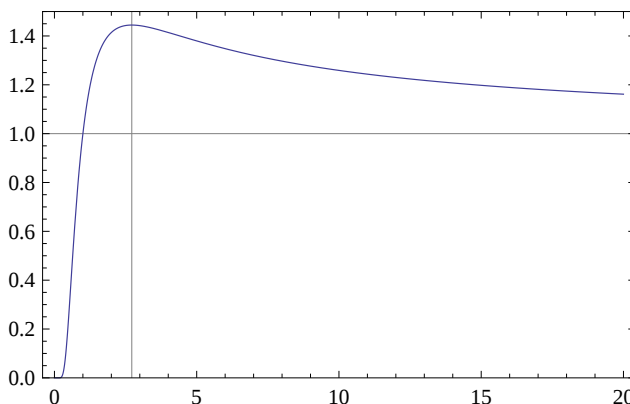
$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{1}{x^2} \ln x + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} (1 - \ln x).$$

پس اگر $f'(x) = 0$ داریم $\ln x = 1$ ، یا معادلاً $x = e$. برای $0 < x < e$ ، $f'(x) > 0$ می‌باشد (دقت کنید $f(x) > 0$ است). همچنین برای $x > e$ ، داریم $f'(x) < 0$. لذا $x = e$ نقطه‌ی ماکزیمم نسبی تابع $f(x)$ می‌باشد. از آنجا که

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1,$$

و این که $f(x)$ در سراسر بازه‌ی $(0, \infty)$ پیوسته و مشتق‌پذیر است، لذا $x = e$ در عمل ماکزیمم مطلق تابع $f(x)$ نیز می‌باشد. بنابراین به ازای هر $x > 0$ داریم $f(x) \leq f(e)$. به طور معادل $x^{\frac{1}{x}} \leq e^{\frac{1}{e}}$. در نتیجه نامساوی زیر برای هر $x > 0$ نتیجه می‌شود^{۲۳}.

$$(۸) \quad x^e \leq e^x.$$



شکل ۳: نمودار تابع $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ به همراه خطوط $x = e$ و $y = 1$

در نامساوی (۸) قرار می‌دهیم $x = x_i = \frac{a_i e}{G}$. لذا برای $i = 1, 2, \dots, n$ خواهیم داشت $\left(\frac{a_i e}{G}\right)^e \leq e^{\frac{a_i e}{G}}$. با ضرب این نامساوی‌ها نتیجه می‌شود

$$\left(\frac{a_1 \cdots a_n e^n}{G^n}\right)^e \leq e^{\frac{e}{G}(a_1 + \cdots + a_n)}.$$

^{۲۳} می‌توان ثابت کرد [۴] که برای هر $x > 0$ نامساوی $x^e \leq e^{-x}(x-e)^2 + x^e \leq e^x$ برقرار است. از این نامساوی نظریف زیر از نامساوی میانگین‌های حسابی و هندسی را نتیجه می‌گیریم:

$$A \geq G + \frac{G}{ne} \log \left(1 + \frac{1}{e^{ne}} \prod_{i=1}^n \left(\frac{a_i}{G} - 1 \right)^e \right) \geq G.$$

حال با توجه به این که $a_1 \cdots a_n = G^n$ و $a_1 + \cdots + a_n = nA$ ، نامساوی اخیر را می‌توان به صورت $e^{ne\frac{A}{G}} \leq e^{ne\frac{A}{G}}$ نوشت. اما چون تابع e^x پیوسته و صعودی است لذا $\frac{A}{G} \geq 1$ یعنی $A \geq G$. در نهایت نشان می‌دهیم $H \leq G$. برای این کار با جایگذاری $\frac{1}{a_i}$ در نامساوی $A \geq G$ به جای هر a_i داریم

$$\frac{1}{n} \left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \right) \geq \left(\frac{1}{a_1} \cdots \frac{1}{a_n} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

پس

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leq \left(\frac{1}{a_1} \cdots \frac{1}{a_n} \right)^{-\frac{1}{n}},$$

یا به طور معادل $H \leq G$. این موضوع اثبات نامساوی (۷) را کامل می‌کند.

۲.۳. اثبات مقدماتی. در این بخش اثباتی مقدماتی از نامساوی بین میانگین‌های حسابی و هندسی ارائه می‌کنیم. این اثبات از [۶] اقتباس شده است. اساس استدلال نامساوی جالب و مفید^{۲۴} زیر است. فرض کنید $0 < a \leq b$ و $0 < x$ باشد. در این صورت $a \leq x \leq b$ است اگر و تنها اگر

$$(9) \quad a + b \geq x + \frac{ab}{x}.$$

در واقع $a \leq x \leq b$ معادل است با $x^2 - (a+b)x + ab = (x-a)(x-b) \leq 0$ و با تقسیم طرفین بر x به رابطه (۹) می‌رسیم. همچنین توجه می‌کنیم که اگر $a = b$ آنگاه نامساوی‌های بالا تبدیل به تساوی می‌شوند، و اگر $a \neq b$ آنگاه نامساوی‌های بالا اکید خواهند بود.

حال با فرضیات بخش پیشین نامساوی‌های بین میانگین‌های حسابی و هندسی را با استقرا روی n ثابت می‌کنیم. برای $n = 2$ کافی است در رابطه (۹) قرار دهیم $a = a_1$ ، $b = a_2$ و $x = \sqrt{a_1 a_2}$. فرض می‌کنیم که حکم برای $n - 1$ متغیر مثبت نیز برقرار است. در حالت n متغیر مثبت، اگر $a_1 = \cdots = a_n$ آنگاه $A = G$ و حکم به وضوح برقرار است. اگر متغیرها همگی با هم برابر نباشند، بدون کاستن از کلیت استدلال فرض می‌کنیم

$$a_1 = \min\{a_1, \dots, a_n\}, \quad a_n = \max\{a_1, \dots, a_n\}$$

و $a_1 < a_n$ باشد. در این صورت داریم $a_1^n < a_1 \cdots a_n < a_n^n$ ، و لذا $a_1 < G < a_n$. با در نظر گرفتن این نامساوی و با استفاده از رابطه (۹) نتیجه می‌گیریم

$$a_1 + a_n > G + \frac{a_1 a_n}{G}.$$

با افزودن $a_2 + \cdots + a_{n-1}$ به طرفین نامساوی اخیر و با توجه به این که $a_1 + \cdots + a_n = nA$ ، نتیجه می‌گیریم

$$nA > G + \frac{a_1 a_n}{G} + a_2 + \cdots + a_{n-1}.$$

حال دقت می‌کنیم که بنا به فرض استقرا نامساوی‌های بین میانگین‌های حسابی و هندسی برای $n - 1$ متغیر مثبت برقرار است. این فرض را روی اعداد $\frac{a_1 a_n}{G}, a_2, \dots, a_{n-1}$ استفاده می‌کنیم. بنابراین داریم

$$\frac{\frac{a_1 a_n}{G} + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n-1} \geq \left(\frac{a_1 a_n}{G} a_2 \cdots a_{n-1} \right)^{\frac{1}{n-1}} = \left(\frac{G^n}{G} \right)^{\frac{1}{n-1}} = G.$$

^{۲۴} در [۱] توضیحاتی در رابطه با کارایی نامساوی (۹) آمده است، از جمله این که اشاره شده است که با قرار دادن $x = \sqrt[m+n]{a^m b^n}$ در رابطه (۹) نتیجه می‌شود

$$a + b \geq \sqrt[m+n]{a^m b^n} + \sqrt[m+n]{a^n b^m}.$$

با تلفیق نامساوی‌های اخیر نتیجه می‌گیریم

$$nA > G + \frac{a_1 a_n}{G} + a_2 + \dots + a_{n-1} \geq G + (n-1)G = nG,$$

و لذا حکم به دست می‌آید. توجه می‌کنیم که حالت تساوی قبلاً در بالا بحث شده است.

تشکر و قدردانی

داور محترم مقاله علاوه بر مطالعه دقیق مقاله و بررسی جزئیات مختلف پیشنهاد افزودن بخش اثبات مقدماتی از نامساوی‌های بین میانگین‌های حسابی و هندسی، و منابع مربوط را ارائه کردند، که این توصیه باعث ارتقای ارائه مقاله گردید. لذا بدین وسیله از ایشان تقدیر می‌کنیم. همچنین از خانم دکتر امامیاری که متن این مقاله را با دقت بسیار مطالعه کرده و پیشنهادات سازنده‌ی فراوانی در بهبود نگارش آن ارائه کردند سپاسگزاریم.

2.

718281828459045235360287471352662497757247093699959574966967627724076630353
547594571382178525166427427466391932003059921817413596629043572900334295260
595630738132328627943490763233829880753195251019011573834187930702154089149
934884167509244761460668082264800168477411853742345442437107539077744992069
551702761838606261331384583000752044933826560297606737113200709328709127443
747047230696977209310141692836819025515108657463772111252389784425056953696
770785449969967946864454905987931636889230098793127736178215424999229576351
482208269895193668033182528869398496465105820939239829488793320362509443117
301238197068416140397019837679320683282376464804295311802328782509819455815
301756717361332069811250996181881593041690351598888519345807273866738589422
879228499892086805825749279610484198444363463244968487560233624827041978623
209002160990235304369941849146314093431738143640546253152096183690888707016
768396424378140592714563549061303107208510383750510115747704171898610687396
965521267154688957035035402123407849819334321068170121005627880235193033224
74501585390473041995777093503660416997329725088687696640355570716226844716
256079882651787134195124665201030592123667719432527867539855894489697096409
754591856956380236370162112047742722836489613422516445078182442352948636372
141740238893441247963574370263755294448337998016125492278509257782562092622
648326277933386566481627725164019105900491644998289315056604725802778631864
155195653244258698294695930801915298721172556347546396447910145904090586298

عدد e تا ۱۵۰۰ رقم اعشار بعد از ممیز. هر سطر شامل ۷۵ رقم می‌باشد.

مراجع

- [1] A. Azarang, The Persian Tarof in Mathematics, *Math. Intelligencer*, **33** no. 4 (2011) pp. 1.
- [2] M. Hassani, Cycles in graphs and derangements, *Math. Gaz.*, **88** (2004) 123–126.
- [3] M. Hassani, Derangements and Applications, *J. Integer Seq. (JIS)*, **6** (2003) no. 1 pp. 8, Article 03.1.2.
- [4] M. Hassani, On the Arithmetic–Geometric mean inequality, *Tamkang J. Math.*, **44** (2013) 453–456.
- [5] M. Hassani and A. Sofo, Sharp bounds for the constant e, *Vietnam Journal of Mathematics*, to appear.
- [6] O. A. S. Karamzadeh, One-line proof of the AM-GM inequality, *Math. Intelligencer*, **33** no.2 (2011) pp. 3.

[7] N. Schaumberger, The AM-GM Inequality via $x^{1/x}$, *College Mathematics Journal*, **20** (1989) 320.

[8] J. J. O'Connor and Edmund F. Robertson, The MacTutor History of Mathematics archive:

<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/index.html>

- [۹] حساب دیفرانسیل و انتگرال ۱ و ۲، دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتابهای درسی، چاپ سیزدهم ۱۳۸۶.
- [۱۰] ریاضیات گسسته، دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتابهای درسی، چاپ هفدهم ۱۳۹۰.
- [۱۱] ریاضیات ۲، دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتابهای درسی، چاپ دوم ۱۳۸۹.
- [۱۲] غ. یاسی‌پور، عدد e، رشد برهان متوسطه، دوره‌ی نوزدهم شماره‌ی ۳ (۱۳۸۹) ۱۰-۱۲.

مهدی حسنی

زنجان، بلوار دانشگاه، دانشگاه زنجان، دانشکده علوم، گروه ریاضی، کدپستی ۳۸۷۹۱-۴۵۳۷۱
mehdi.hassani@znu.ac.ir

مهدی حسنی متولد مرداد ماه ۱۳۵۸ در شهر زنجان است. وی از رساله دکتراي خود به راهنمایی مشترک پروفسور مهرداد شهشهانی از ایران و پروفسور ژان-مارک دیزوئییه از فرانسه در سال ۱۳۸۹ در گرایش نظریه‌ی اعداد دفاع کرد و از همان سال به عضویت هیأت علمی گروه ریاضی دانشگاه زنجان در آمد. حوزه‌های پژوهشی وی شامل نظریه مقدماتی، تحلیلی و احتمالاتی اعداد، شمارش تحلیلی و کاربرد توابع خاص در موارد فوق است.



عزیزه احمدی

زنجان، میدان دارالقرآن کریم، اداره کل آموزش و پرورش استان زنجان، کدپستی ۶۹۹۹۶-۴۵۱۳۸
ahmadi.azizeh@yahoo.com

عزیزه احمدی متولد آذر ماه ۱۳۶۰ در شهر زنجان است. وی دبیر ریاضی بوده و در سال ۱۳۹۰ مقطع کارشناسی ارشد را در رشته‌ی ریاضی محض دانشگاه زنجان با موفقیت به اتمام رساند. علاقه پژوهشی وی آموزش ریاضی می‌باشد و تاکنون مقالاتی آموزشی با عناوین «پیشنهادهایی برای کتاب درسی ریاضی اول متوسطه»، «چرا دانش‌آموزان از ابتدای ورود به دبیرستان انتخاب رشته نمی‌کنند» و «اثبات‌های بدون کلام توسط منحنی جادویی» از وی در فصلنامه‌ی رشد آموزش ریاضی به چاپ رسیده است.

