http://math-sci.iranjournals.ir

ریاضی و جامعه
شاپا (چاپی): ۶۴۹۳-۲۳۴۵، شاپا(الکترونیکی): ۶۵۰۷-۲۳۴۵
جلد ۱، شماره ۳ (۱۳۹۵)، صص. ۱۲-۷

http://www.ui.ac.ir

پیراحاصلضرب چیست؟

مژده شیرانی‌راد

چکیده. پیراحاصلضرب‌ها در مسیر پیدایش عملگرهای پیرادیفرانسیل پذیر به وجود آمدند، که این نظریه خود نقطه عطفی در نظریه‌ی عملگرهای شبه دیفرانسیلی است، آنچه از نام پیراحاصلضرب انتظار می‌رود وجود خواصی به مراتب بیشتر از خواص ضرب معمولی است. پیراحاصلضرب‌ها از زمان پیدایش خود در سال ۱۹۶۵ نقش محوری در آنالیز و معادلات دیفرانسیل جزئی بازی کرده اند این مفاهیم با نظریه‌ی دوخطی کالدرون_زیگموند ارتباط دارد و زیر بنای بسیاری از عملگرهای دوخطی دیگر را تشکیل می‌دهند. اگر بخواهیم برخی از کاربردهای آنها را نام ببریم می‌توان به قضیه‌های مشهورT۱، Tb، کرانداری جابه‌جاگرهای کالدرون، تبدیل دوخطی هیلبرت، نظریه‌های ضرایب نقطه‌ای فضاهای تابعی و نظریه‌ی فشردگی تصحیح شده اشاره کرد.

۱. مقدمه

اصطلاح پیراحاصلضرب[۱] امروزه در مقالات برای نشان دادن یک عملگر دوخطی استفاده می‌شود و با وجود این که ناجابه‌جایی[۲] است تا حدودی از ضرب معمولی توابع خوش رفتارتر است.

۲. پیراحاصلضرب چیست؟

پیراحاصلضرب‌ها اولین بار در نظریه‌ی عملگرهای پیرا دیفرانسیل‌پذیر [۳] بانی[۴] ظهور پیدا کردند [۱]. این نظریه نقطه عطفی در نظریه‌ی عملگرهای شبه دیفرانسیلی[۵] بود که کافمن[۶] و مِیِر[۷] در [۳] از پیشگامان آن بودند. کلمه‌ی یونانی $\pi\alpha\rho\alpha(para)$ در زبان انگلیسی به «پیرا» [۸] و در فرانسه، دقیقاً مانند تیتر مقاله‌ی [۳]، به au délà ترجمه شده است. بنابراین خواص تعریف کننده‌ی یک پیراحاصلضرب باید ورائ خواص مطلوب ضرب باشد. به عنوان اولین گام و برای نشان دادن این ویژگی‌ها عملگر دوخطی زیر را در نظر می‌گیریم

$$\Pi_\circ(f,g)(s)=\int_{-\infty}^{s} f'(t)g(t)dt \quad f,g\in C_\circ^{1}(\mathbb{R}).$$

با استفاده از قاعده‌ی لیب_نیتز[۹] داریم

$$fg=\Pi_\circ(f,g)+\Pi_\circ(g,f)$$

عبارات و کلمات کلیدی. پیراحاصلضرب، عملگر دوخطی، قاعده‌ی لیب‌نیتز_گونه، نامساوی هولدر_گون.
تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۰۱/۱۹ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۳/۱۰/۰۲ .

[1] Paraproduct [2] Noncommutative [3] Paradifferential Operators [4] J.-M. Bony [5] Beyond Pseudodifferential Operators [6] R. R. Coifman [7] Y. Meyer [8] Beyond [9] Leibniz's rule

که در آن $\Pi_\circ$، ضرب fg را بازسازی[10] می‌کند، به علاوه $\Pi_\circ$ یک فرمول خطی‌سازی دقیق فراهم می‌کند، به این صورت که اگر $H \in C^\infty(\mathbb{R})$ آنگاه

$$H(f) = H(\circ) + \Pi_\circ(f, H'(f))$$

این ویژگی مشابه خاصیت

$$H(f) = H(\circ) + fH'(f) + error$$

برای ضرب معمولی است. همچنین $\Pi_\circ$ در قاعده‌ی لیب‌ـ‌نیتز گونه‌ی[11]

$$\Pi_\circ(f, g)' = f'g$$

صدق می‌کند، اما در یکی از خواص اصلی ضرب صدق نمی‌کند و این خاصیت همان نامساوی هولدر[12] است. پس پیرا حاصلضرب چیست؟، عملگر Π دوخطی و غیرجابجایی که در بازسازی ضرب، فرمول‌های خطی‌سازی (با خطای هموار)، یک نابرابری هولدرـ‌گونه[13] و یک قاعده‌ی لیب‌ـ‌نیتز گونه صدق می‌کند، قاعده‌ی لیب‌ـ‌نیتز گونه به صورت

$$\partial^\alpha \Pi(f, g) = \tilde{\Pi}(\partial^\alpha f, g)$$

است که در آن $\tilde{\Pi}$ در نامساوی هولدرـ‌گونه صدق می‌کند. برای $\Pi_\circ$ وقتی $\alpha = ۱$ باشد، $\tilde{\Pi}(f, g) = fg$ است. $\Pi_\circ$ به پیراحاصلضرب بودن نزدیک است اما برای فضاهای L^p مناسب نیست چون در نامساوی هولدر صدق نمی‌کند.

حال توجه خود را به سیر تکاملی شکل‌های مختلف پیراحاصلضرب‌ها معطوف می‌کنیم. هر یک از پیراحاصلضرب‌های Π_l در زیر در زمان مناسب به $\Pi_{l+۱}$ تبدیل شده است و انگیزه‌ی این کار نیاز آنالیزدانان به حل مسائل مشخصی بوده است.

با نگاهی به گذشته، نسخه‌ی اولیه‌ی پیراحاصلضرب به طور ضمنی در کار کالدِرون[14] در مورد جابه‌جاگرها بیان شده است [۲]. اگر $U = \{s + it : s \in \mathbb{R}, t > \circ\}$ و $۱ < p, q < \infty$، برای $F \in H^p(U)$ و $G \in H^q(U)$ (فضاهای هاردی)[15] کالدرون، عملگر دوخطی

$$\Pi_۱(F, G)(s) = -i \int_\circ^\infty F'(s + it)G(s + it)dt$$

را تعریف کرد. مجدداً با استفاده از قاعده‌ی لیب نیتز، $\Pi_۱$ ضرب FG (روی خط حقیقی) را بازسازی می‌کند. مشتق $\Pi_۱$ از قاعده‌ی لیب نیتز تبعیت می‌کند (همان طور که ضرب، نیز از آن تبعیت می‌کند)، $\Pi_۱$ در یک فرمول خطی‌سازی صدق می‌کند و نیز کالدرون نشان داد که $\Pi_۱$ در نامساوی هولدرـ‌گونه‌ی زیر صدق می‌کند:

اگر $۱/r = ۱/p + ۱/q$

$$\|\Pi_۱(F, G)\|_{L^r(\mathbb{R})} \lesssim \|F\|_{H^p(U)} \|G\|_{H^q(U)}.$$

حال می‌خواهیم $\Pi_۱$ را «تحلیل»[16] کنیم. $f_۱$ و $f_۲$ را به ترتیب مقادیر مرزی حقیقی و موهومی F تعریف می‌کنیم، یعنی

$$F(s + it) = (f_۱ * p_t)(s) + i(f_۲ * p_t)(s)$$

[10] Reconstructs [11] Leibniz-type rule [12] Hölder's inequality [13] Hölder-type inequality [14] A. P. Calderón [15] Hardy spaces
[16] Deconstruct

که در آن $p_t(\chi)=t^{-1}p(t^{-1}\chi)$ گشادگی[۱۷]،[۱۸] از هسته‌ی پوآسون [۱۹] $p(\chi)=\pi^{-1}(1+\chi^2)^{-1}$ است. $Q=p'$ قرار می‌دهیم و با مشتق‌گیری داریم

$$F'(s+it)=\frac{1}{t}(f_1*Q_t)(s)+i\frac{1}{t}(f_2*Q_t)(s).$$

به‌طور مشابه اگر G را برحسب مقادیر مرزی آن بنویسیم می‌بینیم که $\Pi_1(F,G)(s)$ را می‌توان به صورت مجموع چهار عملگر به شکل،

$$\Pi_2(f,g)(s)=\int_0^\infty (Q_t*f)(s)(p_t*g)(s)\frac{dt}{t}$$

بیان کرد. در nـ بعد و بر پایه‌ی یک رهیافت متغیرـحقیقی[۲۰]، بانی [۱] عملگرهای دوخطی به شکل

$$\Pi_3(f,g)=\int_0^\infty (\psi_t*f)(s)(\phi_t*g)(s)\frac{dt}{t},$$

را در نظر گرفت. مشابه Π_2، $\phi_t(\chi)=t^{-n}\phi(\chi\diagdown t)$ و $\psi_t(\chi)=t^{-n}\psi(\chi\diagdown t)$ و ϕ یک تابع شوارتز[۲۱] در $\mathbb{R}^n$ است به طوری که تبدیل[۲۲]،[۲۳] فوریه‌ی آن، $\hat{\phi}$، حقیقی، متقارن شعاعی و متکی[۲۴] در گوی $\mathbb{B}_1(0)$ است و در $\mathbb{B}_{\frac{1}{2}}(0)$، داریم $\hat{\phi}=1$. ψ نیز (در سمت فوریه) به صورت

$$\hat{\psi}(\xi)=\hat{\phi}(\frac{\xi}{2})-\hat{\phi}(\xi)$$

تعریف می‌شود. نسخه‌ی گسسته‌ی Π_3 $(t=2^{-j})$ به صورت

$$\Pi_4(f,g)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}(\psi_j*f)(\phi_j*g),$$

درمی‌آید که در آن $\psi_j(\chi)=2^{jn}\psi(2^j\chi)$ و $\phi_j(\chi)=2^{jn}\phi(2^j\chi)$. با استفاده از خواص ψ تساوی

$$\begin{aligned}fg&=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}(\psi_j*f)(\psi_k*g)\\&=\Pi_4(f,g)+\Pi_4(g,f)+\sum_{j\in\mathbb{Z}}(\psi_j*f)(\psi_j*g),\end{aligned}$$

را نتیجه می‌گیریم که این تساوی یک فرمول بازسازی ضرب به همراه یک جمله‌ی خطا است. یک تصحیح[۲۵] مناسب برای Π_4 به شکل

$$\Pi_5(f,g)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}(\psi_j*f)(\phi_{j-2}*g)$$

که در نتیجه

$$fg=\Pi_5(f,g)+\Pi_5(g,f)+R(f,g)$$

[۱۷] گونه‌ای انتقال است که اندازه‌ی تصویر را تغییر می‌دهد.

[۲۳] یعنی بخش‌های مشابهی دارند که از مرکز پراکنده شده‌اند.

[18] Dilation [19] Poisson kernel [20] Real-Variable Approach [21] Schwarz function [22] Radially Symmetric [24] Supported [25] Modification

در این عبارت $R(f,g)$ جمع سه قطری[۲۶] در $|j-k| \le ۱$ است. عملگر $\Pi_۵$ که آن را پیراحاصلضرب بانی[۲۷] می‌نامند، ویژگی‌های برجسته‌ای دارد. همان طور که اتحاد آخر نشان می‌دهد یک فرمول بازسازی برای ضرب به همراه یک جمله‌ی خطا وجود دارد. حال سؤال این است، با وجود اینکه این فرمول یک بازسازی دقیق نیست پس چرا این قدر مفید است؟

فرض کنیم $f \in C^\alpha$ و $g \in C^\beta$ (فضاهای هولدر) با $\circ < \alpha < \beta$ باشد. از آنجا که یک ضرب به همواری تقریبی‌ترین فاکتور خود است داریم، $fg \in C^\alpha$ اما بانی نشان داد که $\Pi_۵(f,g) \in C^\beta$ و $\Pi_۵(g,f) \in C^\alpha$ و $R(f,g) \in C^{\alpha+\beta}$ است. بنابراین با این کار قسمت‌های بد، خوب و بهترین قسمت fg را مشخص کرد. به علاوه، برای $H \in C^\infty(\mathbb{R})$ داریم $\Pi_۵$، H را در تابع f خطی می‌کند به طوری که

$$H(f) = H(\circ) + \Pi_۵(f, H'(f)) + e_H(f),$$

که در آن خطای $e_H(f)$ از f هموارتر است. مزیت دیگر آن است که، همان طور که محاسبات مستقیم روی قسمت فوریه‌ی $\Pi_۵$ نشان می‌دهد، $\Pi_۵$ را می‌توان به شکل

$$\Pi_۵(f,g) = \sum_{j \in Z} \Psi_j * ((\psi_j * f)(\phi_{j-۲} * g)),$$

نوشت که $\Pi_۵$در یک طوقه‌ی مناسب متکی شده است. خواننده‌ی تیزبین به این نکته توجه خواهد کرد که این خاصیت برای $\Pi_۴$ ممکن نیست و به همین دلیل $\Pi_۵$ معرفی شده است. فرض کنیم $\langle .,. \rangle$ نشان‌دهنده‌ی دوگان تابع_ گونه‌ی توزیع شوارتز[۲۸] معمولی باشد و h تابع شوارتز دیگری باشد آنگاه

$$\langle \Pi_۵(f,g), h \rangle = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \langle (\psi_j * f)(\phi_{j-۲} * g), \Psi_j * h \rangle,$$

و این رابطه امکان دسترسی فوری به قسمت‌های لیتِل وود_پالی[۲۹] h را فراهم می‌کند. خواص نگاشت برای $\Pi_۵$، از جمله خواص هولدر_ گونه‌ی $L^p \times L^q \to L^r$ توسط دوگانگی به دست می‌آید. برای آنکه در عمل خواص بیشتری از پیراحاصلضرب را ببینیم قاعده‌ی جزئی لیب نیتز کلاسیک را ثابت می‌کنیم. این قاعده بیان می‌دارد که

$$\|D^\alpha(fg)\|_{L^r} \lesssim \|D^\alpha f\|_{L^{p_۱}} \|g\|_{L^{q_۱}} + \|f\|_{L^{p_۲}} \|D^\alpha g\|_{L^{q_۲}},$$

که در آن برای $\alpha > \circ$ داریم $\hat{D^\alpha h}(\xi) = |\xi|^\alpha \hat{h}(\xi)$ و نیز برای $۱ < p_۱, p_۲, q_۱, q_۲ < \infty$ داریم $\frac{۱}{r} = \frac{۱}{p_۱} + \frac{۱}{q_۱} = \frac{۱}{p_۲} + \frac{۱}{q_۲}$. بحث کوتاهی که در ادامه می‌آید (به عنوان مثال موسکالا[۳۰]، پیفِر[۳۱]، تائو[۳۲]، و تایِل[۳۳]، ((۲۰۰۴) را ببینید) از بازسازی حاصلضرب و قاعده‌ی لیب نیتز برای پیراحاصلضرب‌ها استفاده می‌کند:

$$\begin{aligned}\|D^\alpha(fg)\|_{L^r} &= \|D^\alpha(\Pi(f,g) + D^\alpha(\Pi(g,f))\|_{L^r} \\ &= \|\tilde{\Pi}(D^\alpha f, g) + \tilde{\Pi}(D^\alpha g, f)\|_{L^r} \\ &\lesssim \|D^\alpha f\|_{L^{p_۱}} \|g\|_{L^{q_۱}} + \|f\|_{L^{p_۲}} \|D^\alpha g\|_{L^{q_۲}}\end{aligned}$$

وقتی رابطه‌ی زیر را در نظر بگیریم نسخه‌ی انعطاف‌پذیرتر $\Pi_۵$ برای توابع عمومی ϕ^m، $m = ۱, ۲, ۳$، حاصل خواهد شد

$$\Pi_۶(f,g) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \phi_j^۱ * ((\phi_j^۲ * f)(\phi_j^۳ * g)),$$

---

[26] Tridiagonal Sum [27] Bony's paraproduct [28] Schwarz function-tempered distribution dual pairing [29] Littlewood-Paley [30] Muscalu [31] Pipher [32] Tao [33] Thiele

به عنوان مثال برای توابع ϕ^m مناسب، $\Pi_6 = \tilde{\Pi}_5$ است. به نوبه‌ی خود Π_6 به صورت زیر تحول یافته[۳۴] است. اگر Qیک مکعب دوتایی[۳۵] باشد می‌نویسیم، $Q \in D$ یعنی

$$Q = \{\chi \in \mathbb{R}^n : k_i \leqslant 2^j \chi_j \leqslant k_i + 1; i = 1, ..., n\}, \quad k \in \mathbb{Z}^n, j \in \mathbb{Z}$$

در این مورد می‌نویسیم $Q = Q_{jk}$. همچنین $\chi_Q = 2^{-j}k$ نمایانگر گوشه‌ی سمت چپ پایین Q است. محاسبات ساده نشان می‌دهد که Π_6 را می‌توان به صورت

$$\Pi_6(f,g)(\chi) = \int\int K(\chi, y, z) f(y) g(z) dydz,$$

نوشت که $K(\chi, y, z)$ هسته‌ی دوخطی است و به صورت زیر داده می‌شود:

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}, k\in\mathbb{Z}^n} |Q_{jk}|^{-\frac{1}{2}} - \int_{Q_{jk}} \phi^1_{j,\chi}(w) \phi^2_{j,y}(w) \phi^3_{j,z}(w) dw,$$

که در آن

$$\phi^m_{j,\chi}(w) = 2^{\frac{jn}{2}} \phi^m(2^j(\chi - w)), m = 1, 2, 3$$

اگر میانگین فوق را با مقدار انتگرالده در χ_Q جایگزین کنیم، می‌توانیم هسته را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\sum_Q |Q|^{-\frac{1}{2}} \phi^1_Q(\chi) \phi^2_Q(y) \phi^3_Q(z) + E(\chi, y, z),$$

که در آن

$$\phi^m_Q(\chi) = \phi^m_{j,\chi}(\chi_Q), m = 1, 2, 3$$

و خطای $E(\chi, y, z)$ هسته‌ی دوخطی یک عملگر هموار کننده[۳۶] است. توابع ϕ^m_Q مثال‌های به اصطلاح «مولکول‌های متناظر» [۳۷] به یک مکعب Q است. برای خانواده‌ی کلی از مولکول‌های $\{\phi^m_Q\}_{Q\in D}, m = 1, 2, 3$ که لزوماً گشاده نیستند و یا انتقال یک برش عرضی[۳۸] ثابت نبوده است اما، خواص حذف[۳۹] مناسبی دارند پیراحاصلضرب مولکولی مربوطه‌ی Π_7 دارای هسته‌ی زیر است:

$$\sum_{Q\in D} |Q|^{-\frac{1}{2}} \phi^1_Q(\chi) \phi^2_Q(y) \phi^3_Q(z),$$

یعنی

$$\Pi_7(f,g)(\chi) = \sum_{Q\in D} |Q|^{-\frac{1}{2}} \langle \phi^2_Q, f\rangle \langle \phi^3_Q, g\rangle \phi^1_Q(\chi).$$

Π_7 نشان‌دهنده‌ی یکی از نمونه‌های مدرن پیراحاصلضرب‌ها است. مولکول‌هایی که براساس سیستم هار[۴۰] هستند، پیراحاصلضرب‌هایی را نتیجه می‌دهند که به آنها پیراحاصلضرب‌های دوتایی[۴۱] گویند. پیراحاصلضرب‌ها از زمان پیدایش خود در سال ۱۹۶۵ نقش محوری در آنالیز و معادلات دیفرانسیل جزئی بازی کرده اند این مفاهیم با نظریه‌ی دوخطی کالدرون_زیگموند[۴۲] ارتباط دارد و زیر بنای بسیاری از عملگرهای دوخطی دیگر را تشکیل می‌دهند. اگر بخواهیم برخی از کاربردهای آنها را نام ببریم می‌توان به قضیه‌های مشهور $T1$، Tb، کرانداری جابه‌جاگرهای کالدرون، تبدیل دوخطی هیلبرت، نظریه‌های ضرایب نقطه‌ای فضاهای تابعی و نظریه‌ی فشردگی تصحیح شده اشاره کرد.

---

[۳۴] مجموعه‌ی مکعب‌هایی در $\mathbb{R}^n$، که از اندازه‌ها و سایزهای مختلف‌اند و مجموعه‌ی مکعب‌های هر اندازه، $\mathbb{R}^n$ را تقسیم‌بندی می‌کند و هر مکعب در یک اندازه را می‌توان به صورت اجتماع مکعب‌های با اندازه‌های کوچکتر نوشت.

[35] Dyadic Cube [36] Smoothing Operator [37] Molecules associated [38] Profile [39] Cancellation [40] Haar [41] Dyadic Paraproducts [42] Calderón-Zygmund

مراجع

[1] J.-M. Bony, Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 14 (1981) 209-249.

[2] A. P. Calderón, Commutators of singular integral operators, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 53 (1965) 1092–1099.

[3] R. R. Coifman and Y. Meyer, Au délà des opérateurs pseudo-différentiels, *Société Mathématique de France*, 57 (1978).

مژده شیرانی راد
اصفهان، خیابان هزار جریب، دانشگاه اصفهان، گروه ریاضی
mozhdeh.shirani@gmail.com

مژده شیرانی راد متولد شهر اصفهان است. وی مقطع کارشناسی، رشته ریاضی محض را در دانشگاه کاشان و مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض، گرایش آنالیز تابعی را در دانشگاه اصفهان گذراند. پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد او در سال ۱۳۹۲ تحت نظر آقای دکتر مجید فخار و آقای دکتر مهدی چینایی انجام پذیرفت.