

مطالعه معادلات حاکم در انتشار گازهای تنفسی در مویرگ‌ها

عظیم امین عطائی

چکیده. ریاضیات زیستی شاخه‌ای مهم از ریاضیات کاربردی در ارتباط با بیولوژی موجودات زنده می‌باشد که با به کارگیری داده‌ها و تجزیه و تحلیل آنها آمار و اطلاعات تقریباً نزدیکی از نحوه‌ی عملکرد یک سیستم زنده را به ما می‌دهد و بدین وسیله می‌توانیم با به کار بردن این داده‌ها، فرآیندهای زیستی موجود در طبیعت را از لحاظ ریاضی بررسی و مدل‌بندی نماییم. در این مطالعه، به معرفی مفاهیم فیزیولوژی مربوط به شبیه‌سازی ریاضی فرآیند انتقال گازهای تنفسی در مویرگ‌های ریوی می‌پردازیم. معادله حاصل شامل عبارت انتشار می‌باشد و معادله انتشار نامیده می‌شود. به علاوه، هدف مطالعه اکسیژنه شدن خون در مویرگ‌های ریوی می‌باشد. همچنین، انتقال همزمان اکسیژن و دی‌اکسیدکربن را در گردش ریوی با در نظر گرفتن تأثیر همرفتی خون، بررسی می‌کنیم. این فرآیند، منجر به معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی سهموی شده است.

۱. مقدمه

درک فرآیندهای انتقال در دستگاه تنفسی موجودات زنده در فیزیولوژی و پزشکی از اهمیت فراوانی برخوردار است. توصیف ریاضی فرآیندهای گوناگون، مانند مکانیزم "واکنش - انتشار" که در دستگاه‌های بیولوژیکی رخ می‌دهد، منجر به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل غیر خطی می‌شود. اما مدل ریاضی تنها گام اول به سمت جواب مسئله می‌باشد. گام بعدی توسعه یک روش حل عددی قابل اعتماد، قوی و مستند برای اجرای مدل ریاضی تحت بررسی است که به اندازه گام اول دارای اهمیت می‌باشد. لذا کارائی و قابل اعتماد بودن روش حل عددی باید به دقت بررسی شود.

مطالعه انتقال گازهای تنفسی اکسیژن و دی‌اکسیدکربن که منجر به اکسیژنه شدن خون در مویرگ‌های ریوی می‌شود، از لحاظ فیزیولوژیکی و آسیب شناسی جالب توجه می‌باشد. همچنین در بهبود فرآیندهای تشخیصی و برای طراحی دقیق‌تر دستگاه‌های تنفس مصنوعی، مفید می‌باشد. هدف اصلی تبادل گازهای ریوی، فراهم کردن اکسیژن خون و دفع دی‌اکسیدکربنی است که از بافت می‌آورد. فرآیند اکسیژن دهی به خون در ریه‌ها، فرآیندی نسبتاً پیچیده است که شامل یک سری از مراحل متفاوت از هم می‌باشد. این فرآیند به شکل انتقال اکسیژن از ریه‌ها به پلاسمای خون، از پلاسما به سمت گلبول‌های قرمز (RBC's)، از میان غشاء گلبول قرمز و سرانجام در جریان انتشار به همراه واکنش شیمیائی در داخل گلبول قرمز، نمایان می‌شود. اما دی‌اکسیدکربن مسیر عکس را طی می‌کند.

در این مطالعه، به بررسی انتشار مولکولی و حرکت همرفت گازهای تنفسی می‌پردازیم. این نوع مطالعه در مسائل بیومهندسی، مانند انتشار مواد [۱]، جریان لایه‌ئی سیالات، جریان الکتریکی در کابل‌ها و مسائل انتقال جرم، با شرایط گفته شده در منابع [۲] - [۱۳] کاربرد فراوان دارد. مقایسه روشهای صریح و ضمنی در حل عددی معادله یک بعدی

عبارات و کلمات کلیدی. انتقال اکسیژن و دی‌اکسید کربن، معادله انتشار، معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی سهموی، مدل‌های ریاضی، تأثیر همرفتی خون.
تاریخ دریافت: ۱۳۹۲/۴/۲۶ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۳/۶/۱

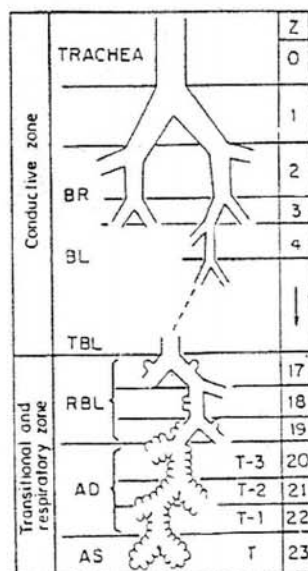
انتشار توسط [۱۴] بررسی شده است. همچنین یک مدل ریاضی (عددی) غیریکنواخت در روند انتقال جرم اکسیژن در یک مویرگ ریه [۱۵] مورد مطالعه قرار گرفته است. بعلاوه، اخیراً پخش محوری شبیه سازی عددی فرآیند انتقال جرم اکسیژن در بسترهای مویرگ انسان تحقیق شده و ملاحظه شده است که نفوذ مولکولی محوری در مقایسه با نفوذ مولکولی شعاعی تأثیر چندانی در انتقال جرم اکسیژن ندارد [۱۶]. در نتیجه، بخاطر هزینه بالای لوازم و طبیعت پیچیده پدیده‌های مختلف درگیر در توصیف تبادل گازهای ریوی، وضع تسهیلات تجربی مناسب برای تعیین تأثیر پارامترهای مختلف بر روند اکسیژنه شدن خون، دشوار است. در اینجا انتقال همزمان اکسیژن و دی‌اکسیدکربن را در گردش ریوی با در نظر گرفتن تأثیر همرفتی خون، بررسی می‌کنیم. در نتیجه، دانستن نحوه عملکرد دستگاه تنفسی برای درک فرآیند تبادل گازهای ریوی، مفید می‌باشد.

ادامه فرآیند تحقیق به صورت زیر است: در بخش دوم، فیزیولوژی تنفس مطالعه می‌شود. در بخش سوم، جریان خون، کاربردهای آن و مؤلفه‌هایش به همراه سلولهای خونی و نقش گلبولهای قرمز خون در انتقال گازها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در بخش چهارم، مکانیزم‌های انتقال مطالعه می‌شود. در بخش پنجم، قانون کلی انتقال به همراه انتقال اندازه حرکت، انتقال انرژی و انتقال جرم را مطالعه می‌نمائیم. در بخش ششم، مدل‌های ریاضی حاصل از این مطالعه را بررسی نموده و سرانجام در بخش هفتم، نتیجه‌گیری از این تحقیق را بیان می‌کنیم.

۲. فیزیولوژی تنفس

موجودات برای زنده ماندن نیازمند تنفس می‌باشند. هدف اصلی تنفس، انتقال گاز بین هوا و سلولهای بدن می‌باشد که شامل دو فرآیند است: تنفس خارجی که تبادل گازها بین کیسه‌های هوایی و مویرگ‌های ریوی را شامل می‌شود و تنفس داخلی که همان تبادل گازها بین خون مویرگی و سلولهای بافت اطرافش می‌باشد. در هر دو مورد بالا، انتشار و واکنش شیمیائی اکسیژن با هموگلوبین خون در درجه اول اهمیت قرار دارند.

دستگاه تنفسی از یک بخش مبادله کننده گازها و یک پمپ که ریه‌ها را تهویه می‌کند، تشکیل شده است. پس از اینکه هوای استنشاق شده از مسیر بینی و حلق عبور می‌کند، به سمت نای می‌رود و از میان برونشیت‌ها، برونشیت‌های تنفسی و مجراهای کیسه هوایی به سمت کیسه هوایی می‌رود (شکل ۱). بین نای و کیسه‌های هوایی، مسیرهای جریان هوا به ۲۳ قسمت تقسیم می‌شوند. ۱۶ مسیر اول تولید شده، ناحیه هدایت کننده مسیرهای جریان هوا را تشکیل می‌دهند که گازها را به داخل و خارج ریه‌ها منتقل می‌کنند. ۷ مسیر تولید شده باقیمانده، نواحی تنفسی و انتقالی را تشکیل می‌دهند که گازها را بین خون مویرگی و هوای استنشاق شده مبادله می‌کنند. این تقسیمات چندگانه، ناحیه سطح مقطعی کل مسیرهای جریان هوا را به طور وسیعی افزایش می‌دهند. عملکرد اصلی ریه‌ها تبادل اکسیژن و دی‌اکسیدکربن، بین هوا و خون می‌باشد. یک انسان نرمال در حال استراحت، ۱۲ الی ۱۵ بار در دقیقه نفس می‌کشد. ۵۰۰ میلی لیتر هوا در هر تنفس، وارد ریه شده و از آن خارج می‌شود. این هوا با گاز موجود در حبابچه مخلوط می‌شود و به سادگی منتشر می‌شود. اکسیژن وارد خون موجود در مویرگ‌های ریوی می‌شود، در حالیکه دی‌اکسیدکربن وارد حبابچه‌ها می‌شود. به این طریق، ۲۵۰ میلی لیتر اکسیژن در هر دقیقه وارد بدن می‌شود و ۲۰۰ میلی لیتر دی‌اکسیدکربن از بدن خارج می‌شود [۱۷]. غشاء "مویرگ-حبابچه" مقاومت محدودی در برابر انتقال گازهای تنفسی ایجاد می‌کند و وقتی ضخامت غشاء افزایش یابد، میزان مقاومت نیز افزایش می‌یابد و انتقال گازها از میان غشاء، به صورت معکوس تحت تأثیر قرار می‌گیرد [۱۸، ۶].



شکل ۱: نمایش مدل تقسیمات متوالی نای به شرح زیر: نایچه = BR، نایچه تقسیم شده = BL، پایانه نایچه تقسیم شده = TBL، نایچه تقسیم شده تنفسی = RBL، مجرای کیسه هوایی = AD، کیسه هوایی = AS

۳. جریان خون، کاربردهای آن و مؤلفه‌هایش

خون حالت معلق سلول‌ها می‌باشد که به سلول‌ها و پلاسما تجزیه می‌شود [۱۹]. سلول‌ها، همان گلبولهای قرمز خون (erithrocytes)، گلبولهای سفید خون (leukocytes) و پلاکت‌های خونی (thrombocytes) هستند. عملکردهای اصلی خون عبارتند از:

- (الف) فراهم کردن اکسیژن و فرآورده‌های غذایی برای سلولهای بافت‌های مختلف،
- (ب) دریافت دی اکسید کربن و اتلاف سوخت و ساز از سلولهای بافت‌ها،
- (پ) دفاع در برابر عفونت،
- (ت) تشکیل لخته شدن خون در حالتی که رگهای خونی پاره می‌شوند،
- (ث) کمک به حفظ تعادل دمائی بدن،
- و (ج) تنظیم تعادل پایه اسیدی مایعات بدن.

پلاسما مرکب از ۹۰٪ آب، ۷٪ پروتئین، ۱٪ مواد معدنی (غیر آلی) و ۱٪ مواد آلی می‌باشد [۱۹]. لزجت پلاسما با افزایش غلظت یا وزن ملکولی پروتئین‌ها افزایش می‌یابد. در این حالت وقتی پروتئین‌های با وزن ملکولی بالا حضور دارند، جریان غیرنیوتنی [۲۰] ایجاد می‌شود.

۱.۳. تأثیر پروتئین پلاسما بر انتشار اکسیژن. چون پلاسمای خون شامل پروتئین‌های گوناگونی به عنوان اجزاء اصلی‌اش می‌باشد، ممکن است که تغییر در غلظت این اجزاء بتواند بر قابلیت انتشار اکسیژن در میان پلاسمای خون تأثیر بگذارد. محققین زیادی، تأثیر سطوح مختلف پروتئین پلاسما را بر قابلیت انتشار اکسیژن بررسی کردند و نشان

دادند که با افزایش غلظت پروتئین در پلاسما، قابلیت انتشار اکسیژن کاهش می‌یابد [۲۱] - [۲۳]. البته استثناء نیز وجود دارد، به عنوان مثال یک پروتئین خاص پلاسما به نام ترانسفرین (transferrin) موجود است که دارای تأثیر عکس می‌باشد، یعنی با افزایش سطح این پروتئین، قابلیت انتشار اکسیژن افزایش می‌یابد [۲۴].

۲.۳. سلول های خون. عمدتاً منظور از سلول، گلبولهای قرمز خون می‌باشد. گلبولهای سفید، کمتر از $\frac{1}{8}$ از حجم خون را تشکیل می‌دهند و پلاکت‌های خونی نیز کمتر از $\frac{1}{8}$ از حجم خون را اشغال می‌کنند. عموماً حجم گلبولهای قرمز در حدود ۵۰٪ از حجم خون می‌باشد. نسبت حجم گلبولهای قرمز در خون به عنوان هماتوکریت (hematocrit) در نظر گرفته می‌شود [۱۹].

۳.۳. نقش گلبول‌های قرمز خون در انتقال گازها. نقش اصلی گلبولهای قرمز خون، انتقال اکسیژن از ریه به تمام سلولهای بدن و دریافت دی‌اکسیدکربن تولید شده از فرآیندهای سوخت و ساز است. در واقع حلالیت فیزیکی اکسیژن در پلاسما در مقایسه با حلالیتش در آب، بسیار کم است و اگر این ذرات قرمز به عنوان حامل اکسیژن وجود نداشتند، هیچ موجودی نمی‌توانست زنده بماند. ظرفیت انتقال اکسیژن خون، توسط گلبولهای قرمز خون، ۳۰ تا ۴۰ برابر افزایش می‌یابد، یعنی تقریباً ۲۰ میلی لیتر اکسیژن در ۱۰۰ میلی لیتر خون. هموگلوبین (Hb)، یک ماده رنگی موجود در گلبولهای قرمز خون است و توانایی انتقال اکسیژن و دی‌اکسیدکربن را دارد. مسئولیت ویژه آن ترکیب با اکسیژن است، گرچه در حالت عادی هموگلوبین با اکسیژن واکنش شیمیائی انجام نمی‌دهد در عوض ملکول اکسیژن به آن متصل می‌شود و اکسی هموگلوبین (HbO_2) را تشکیل می‌دهد. دی‌اکسیدکربن طی فرآیند سوخت و ساز، داخل سلولهای بافت تولید می‌شود. دی‌اکسیدکربن تولید شده، از بافت به درون خون انتشار می‌یابد. ترکیب دی‌اکسیدکربن با هموگلوبین، یک واکنش برگشت‌پذیر است که در گلبولهای قرمز خون رخ می‌دهد. دی‌اکسیدکربن حل نشده در خون، با آب واکنش ایجاد می‌کند تا اسید کربنیک را تشکیل دهد، اما این واکنش بسیار کند است. اسید کربنیک تشکیل شده در گلبولهای قرمز خون، به سرعت به یونهای بی کربنات و هیدروژن تجزیه می‌شود. این واکنش در گلبولهای قرمز خون آنقدر سریع انجام می‌شود که تقریباً به تعادل کامل می‌رسد. بنابراین گلبولهای قرمز خون، دی‌اکسیدکربن را به روشهای زیر منتقل می‌کنند:

(الف) به شکل حل نشده،

(ب) در ترکیب با هموگلوبین،

و (پ) به صورت یونهای بی کربنات.

۴. مکانیزم های انتقال [۲۵]

یکی از حیاتی ترین فرآیندها در بدن موجودات زنده، انتقال اکسیژن است که به دو شکل در خون انجام می‌گیرد:

(الف) از لحاظ فیزیکی در پلاسما حل نشده،

و (ب) در ترکیب با هموگلوبین.

از مقدار کل اکسیژن حمل شده توسط خون، مقدار کمی از آن، در حدود ۳/۰٪، در پلاسما حل نمی‌شود، در حالیکه بخش مهمی از آن ۲۰/۱٪، به صورت شیمیائی با هموگلوبین ترکیب می‌شود و اکسی هموگلوبین را تشکیل می‌دهد که انتقال اکسیژن را از ناحیه ای با غلظت بالاتر به ناحیه ای با غلظت پائین تر، تسهیل می‌کند. گامهای مختلفی در انتقال اکسیژن از هوا به سلولهای بدن وجود دارد. یک دوره کامل این فرآیند، شامل انتقال از طریق هوا، بوسیله

همرفت و انتشار است. انتشار در طول دیواره‌های "مویرگ-کیسه هوایی"، از میان پلازما و غشاء سلول قرمز، و از میان سلول قرمز درونی ترکیب شده با هموگلوبین، انتقال خون از بدن و سرانجام از دست دادن اکسیژن در بافت‌ها و انتشار آن پیرامون سلول‌ها [۲۶]. دی اکسید کربن نیز مسیر عکس را طی می‌کند. از این رو، فرآیند تبادل گاز در ناحیه کیسه هوایی و خون جاری در مویرگ‌های ریوی، اساساً به انتشار ملکولی، حرکت همرفت و انتشار تسهیل شده بستگی دارد. انتقال آزاد یا انتشار ملکولی، فرآیندی است که شامل حرکت ملکول‌ها از ناحیه‌ای با غلظت بالاتر به ناحیه‌ای با غلظت پایین‌تر می‌باشد و در حالت کلی بوسیله قانون معروف انتشار فیک (Fick) بیان می‌شود. انتقال جرم همرفتی، انتشاری است که در نتیجه عوامل خارجی، با حرکت سیال همراه شده است. انتشار تسهیل شده، فرآیندی است که در آن حامل (carrier)، به طور شیمیائی با ماده منتشر شونده متناظر می‌شود و بنابراین، حرکتش را از ناحیه‌ای با غلظت بالاتر به ناحیه‌ای با غلظت پایین‌تر، تسریع می‌کند [۲۷، ۱۹].

۵. قوانین کلی انتقال [۲۵]

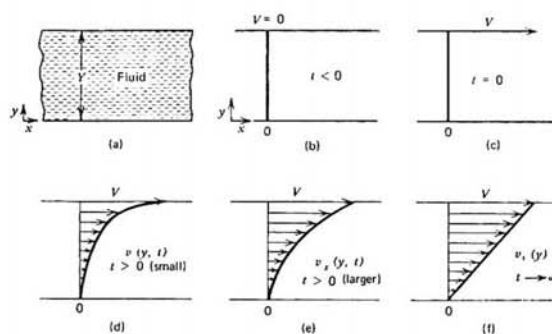
بدن انسان را می‌توان به عنوان یک دستگاه بیوشیمی ظریف در نظر گرفت که تمام فرآیندهای انتقال و برهم کنش‌ها در آن رخ می‌دهند. بنابراین برای آشنائی بیشتر با فرآیند انتقال، در اینجا قانون کلی حاکم بر انتقال ماهیت‌های فیزیکی که از جمله در مورد موضوع مورد بحث نیز کاربرد دارد را بیان می‌کنیم و مفهوم این عبارت را در سه زمینه مختلف - انتقال اندازه حرکت، انتقال انرژی و انتقال جرم - بررسی می‌کنیم. قانون کلی حاکم بر ماهیت‌های فیزیکی به صورت زیر می‌باشد: سرعت جریان (flux) یک ماهیت فیزیکی (اندازه حرکت، انرژی و یا جرم)، با گرادین پتانسیل (به ترتیب: میدان سرعت، دما و یا غلظت) به وجود آورنده حرکت، متناسب است که در آن سرعت جریان به صورت "نرخ زمانی جریان در هر واحد سطح" تعریف می‌شود و گرادین "نرخ افزایش در هر واحد طول" می‌باشد. به طور مختصر می‌توانیم بنویسیم:

$$(۱) \quad \text{flux} = -(\text{coefficient}) \times (\text{gradient}).$$

۱.۵. انتقال اندازه حرکت. اگر یک دسته از کارت‌های بازی را که همگی به طور مرتب قرار گرفته‌اند، در کف یکی از دست‌ها قرار داده و با دست دیگر به آرامی به آن فشار وارد کنیم به طوری که حرکت افقی رو به جلو داشته باشد، در می‌یابیم که طرفین دسته کارت‌ها، دو صفحه موازی تشکیل می‌دهند. از فیزیک مقدماتی می‌دانیم که بین صفحات کارت‌ها، اصطکاک وجود دارد. برای غلبه بر اصطکاک و به حرکت درآوردن کارت‌های بازی، نیروی ثابتی نیاز است که نیروی برشی (shear force) نامیده می‌شود و از تنش برشی (shear stress) طبق رابطه زیر بدست می‌آید:

$$(۲) \quad \text{shear stress} = \frac{\text{shear force}}{A},$$

A، ناحیه سطح کارت‌های بازی، یعنی سطحی که بر آن نیرو وارد می‌شود، می‌باشد. حال یک سیال را بین دو صفحه صاف افقی و موازی بزرگ به مساحت A و فاصله Y از یکدیگر در نظر می‌گیریم. صفحه پائینی، ثابت در نظر گرفته می‌شود در حالیکه در زمان $t = 0$ ، صفحه بالائی دارای حرکت افقی با سرعت ثابت V می‌باشد. شکل زیر دنباله‌ای از وقایع را نشان می‌دهد.



شکل ۲: دنباله‌ای از وقایع تنظیم حرکت صفحه بالائی دو صفحه موازی

قسمت (b) از شکل ۲، سیال را در حالت سکون، قبل از اینکه حرکتی رخ دهد، نشان می‌دهد. (c) دقیقاً آنرا در لحظه $t=0$ نشان می‌دهد که صفحه بالائی به حرکت درآمده، ولی سیال هنوز در حالت سکون است. (d) نشان می‌دهد که زمان کوتاهی بعد از حرکت، عمق کوچکی از سیال ایجاد شده است. (e) با گذشت زمان، حرکت با افزایش عمق سیال منتقل می‌شود و (f) در نهایت پس از گذشت زمان به اندازه کافی بزرگ، میدان سرعت بین دو صفحه خطی می‌شود. نیروی ثابت F که همان نیروی برشی است باید به نیروی اصطکاک بین لایه‌های سیال غلبه کند و حرکت صفحه بالائی را حفظ کند. روابط زیر بیانگر یک حقیقت تجربی هستند که اولین بار توسط نیوتن بدست آمده‌اند:

$$(۳) \quad \frac{F}{A} \propto \frac{V}{Y},$$

یا

$$(۴) \quad \frac{F}{A} = \mu \frac{V}{Y},$$

که μ ثابت تناسب است و لزجت سیال نامیده می‌شود. با در نظر گرفتن یک لایه بی‌نهایت نازک از سیال، معادله فوق به شکل دیفرانسیلی زیر تبدیل می‌شود:

$$(۵) \quad \tau = -\mu \frac{dV_x}{dy},$$

که به قانون لزجت نیوتن شهرت دارد. $\frac{dV_x}{dy}$ گرادیان سرعت یا نرخ برشی (shear rate) نامیده می‌شود. بدیهی است که در رابطه (۵) به جای $\frac{F}{A}$ ، τ_{yx} قرار گرفته است که نماد تنش برشی می‌باشد. اندیس yx ، نشان می‌دهد که نیروی برشی در جهت x ، بر یک سطح عمود بر محور y ، وارد می‌شود. τ_{yx} همچنین به مفهوم "سرعت جریان اندازه حرکت در جهت y " می‌باشد. چون اندازه حرکت به طور مستقیم با میدان سرعت متناسب است، لایه‌ای از سیال که دارای بزرگتری باشد، اندازه حرکت بزرگتری در جهت x دارد و این اندازه حرکت به لایه‌های دیگر سیال که v_x پائین‌تری دارند، منتقل می‌شود.

با توجه به شکل ۳، داریم:

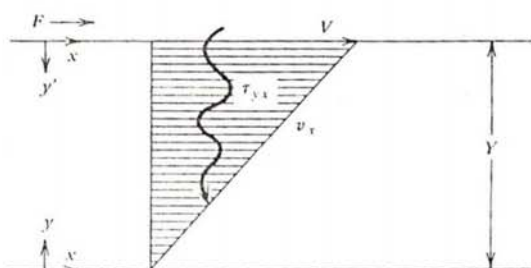
$$(۶) \quad \frac{V}{Y} = \frac{V_{x_1} - V_{x_0}}{y_1 - y_0} = \frac{\Delta V_x}{\Delta y}.$$

اگر Δy و ΔV_x به سمت صفر میل کنند، آنگاه $\frac{\Delta V_x}{\Delta y}$ به $\frac{dV_x}{dy}$ میل می‌کند. علامت منفی در معادله (۵)، به این دلیل است که اندازه حرکت به سمت پائین جریان دارد، یعنی τ_{yx} در جهت منفی است و چون $\frac{dV_x}{dy}$ با توجه به شکل ۲ دارای

مقداری مثبت است و لزجت هم یک اسکالر همیشه مثبت است، لذا برای برقراری تعادل در علامتها، باید یک علامت منفی داشته باشیم.

۲.۵. انتقال انرژی. فرض کنید یک قطعه سنگ صاف به ضخامت متناهی Y و مساحت سطح به اندازه کافی بزرگ A داریم. با توجه به شکل ۴، خواهیم داشت:

در قسمت (b) ابتدا قطعه سنگ، در دمای T_0 نگه داشته می‌شود. (c) در زمان $t = 0$ ، یک افزایش ناگهانی دما در سطح بالائی اتفاق می‌افتد به طوری که دما به T_1 می‌رسد. (d) زمان کوتاهی پس از آن، دما در مجاورت سطح بالائی شروع به افزایش می‌کند. (e) به خاطر جریان گرمائی ایجاد شده به وسیله تفاوت دما، دما به طور پیوسته افزایش



شکل ۳: گرادیان سرعت و تغییرات پی در پی اندازه حرکت

یافته و به سمت سطح پائینی گسترش می‌یابد و (f) در نهایت، نمودار خطی یکنواخت برای دما ایجاد می‌شود. برای اینکه دمای سطح بالائی به T_1 برسد و توزیع دمای خطی داشته باشیم، یک جریان گرمائی ثابت Q مورد نیاز است. در مقایسه با رابطه (۳)، روابط زیر برقرارند:

$$(۷) \quad \frac{Q}{A} \propto \frac{T_1 - T_0}{Y},$$

یا

$$(۸) \quad \frac{Q}{A} = k \frac{T_1 - T_0}{Y},$$

k ضریب هدایت گرمائی جسم می‌باشد. برای یک لایه بی نهایت نازک داریم:

$$(۹) \quad q_y = -k \frac{dT}{dY},$$

که قانون هدایت گرمائی فوریه نام دارد. در این معادله، q_y سرعت جریان گرما (تغییرات پیوسته گرما) در جهت y است و برابر با $\frac{Q}{A}$ می‌باشد، گرادیان دما می‌باشد که پتانسیل جریان گرمائی را در جهت y نتیجه می‌دهد. علامت منفی به این دلیل است که گرما در جهت دمای کمتر جریان می‌یابد.

در ابتدای بحث، ما یک ناحیه سطح به اندازه کافی بزرگ A را در نظر گرفتیم به طوری که گرادیان دما در جهت‌های x و z وجود ندارد. اما وقتی ابعاد فیزیکی طوری باشند که این فرض برقرار نباشد، باید جریان گرما را در جهت‌های

دیگر نیز بررسی کنیم. بنابراین داریم:

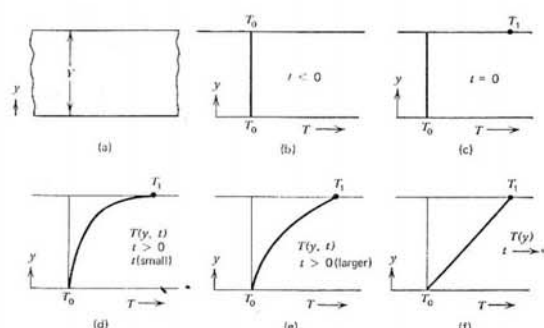
$$(10) \quad q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x},$$

و

$$(11) \quad q_z = -k \frac{\partial T}{\partial z}.$$

در حالیکه معادله (۹) به صورت زیر می باشد:

$$(12) \quad q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y}.$$



شکل ۴: دنباله ای از وقایع بالا بردن دمای یک سطح از یک قطعه سنگ

معادلات فوق می توانند به صورت برداری ترکیب شوند و یک معادله برداری واحد را تشکیل دهند. با ضرب کردن آنها در بردارهای واحد در سه جهت متناظر و سپس جمع کردن آنها داریم:

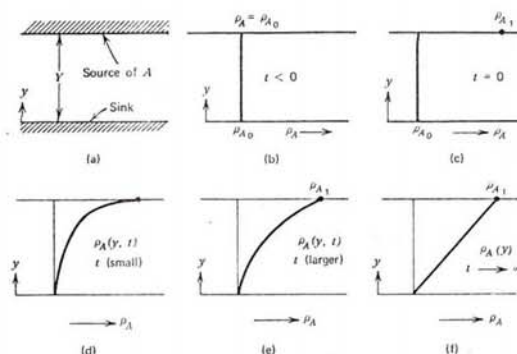
$$(13) \quad q = -k \nabla T,$$

در این معادله، q تغییرات پی در پی گرمای برداری و ∇T ، گرادیان دما می باشد.

۳.۵. انتقال جرم. حالت های مختلفی از انتقال جرم وجود دارد، اما حالتی که از لحاظ ریاضی قابل مقایسه با هدایت گرمائی و انتقال اندازه حرکت است، انتشار نام دارد. ساده ترین حالت انتشار که قابل مقایسه با انتقال اندازه حرکت و انرژی است، به عنوان انتشار معمولی شناخته می شود.

تئوری جنبش گازها بیان می کند که ملکولها به صورت زیگزاگ های خیلی نامنظم حرکت می کنند. اگر یک بطری عطر را در یک گوشه اتاق بشکنیم، عطرش در اتاق پخش می شود و ملکولهایش در هوای اتاق منتشر می شوند. در چنین حالتی، افرادی که در طول مسیر انتشار و به فواصل مختلف ایستاده اند، بوی عطر را با قوت های مختلف استشمام می کنند. به عبارت دیگر، فردی که نزدیکترین فاصله را به منبع عطر دارد، بیشترین بو را استشمام می کند و شخصی که در انتهای اتاق ایستاده، بوی عطر را که قوتش با گذشت زمان کاهش می یابد، استشمام می کند. این فرآیند به علت گرادیان غلظت عطر در طول مسیر و افزایش سطح غلظت با گذشت زمان، می باشد. مشابه شکل های ۲ و ۴، در واقع

می‌فهمیم که پدیده انتشار غلظت، مشابه هدایت گرمایی است و شکل ۴ می‌تواند برای نمایش دنباله‌ای از وقایع انتشار یک بعدی، تغییر یابد.



شکل ۵: دنباله‌ای از وقایع بالابردن غلظت در یک کرانه از یک وسیله انتشار

به طور ساده، با جایگزینی T با ρ_A ، که ρ_A نشان دهنده غلظت جرم نوع A است (شکل ۵)، و کنترل قانون حاکم بر گرادیان و سرعت جریان، به دست می‌آوریم:

$$(۱۴) \quad J_{Ay} = -\vartheta_{AB} \frac{d\rho_A}{dy},$$

J_{Ay} تغییرات پی در پی جرم A در جهت y ، و ϑ_{AB} ضریب انتشار دوگانه می‌باشد. معادله اخیر، قانون اول انتشار فیک نامیده می‌شود. اگر ρ_A در جهت‌های x و z نیز تغییر کند، قانون فیک می‌تواند در هر سه جهت بیان شود:

$$(۱۵) \quad J_{Ax} = -\vartheta_{AB} \frac{d\rho_A}{dx},$$

$$(۱۶) \quad J_{Ay} = -\vartheta_{AB} \frac{d\rho_A}{dy},$$

و

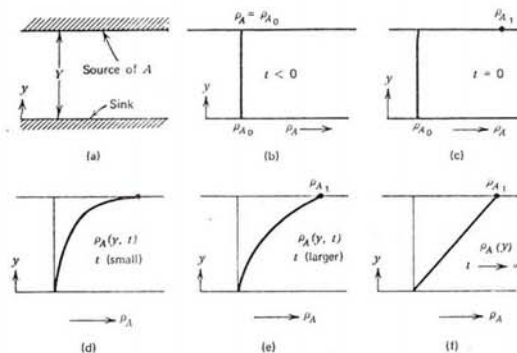
$$(۱۷) \quad J_{Az} = -\vartheta_{AB} \frac{d\rho_A}{dz}.$$

در واقع J_{Ax} ، J_{Ay} و J_{Az} سه مؤلفه بردار سرعت جریان جرم J_A هستند. با ترکیب معادلات فوق، فرم برداری قانون انتشار فیک به دست می‌آید، یعنی به دست می‌آوریم:

$$(۱۸) \quad J_A = -\vartheta_{AB} \nabla \rho_A,$$

که $\nabla \rho_A$ ، گرادیان غلظت جرم می‌باشد.

می‌فهمیم که پدیده انتشار غلظت، مشابه هدایت گرمایی است و شکل ۴ می‌تواند برای نمایش دنباله‌ای از وقایع انتشار یک بعدی، تغییر یابد.



شکل ۵: دنباله‌ای از وقایع بالابردن غلظت در یک کرانه از یک وسیله انتشار

به طور ساده، با جایگزینی T با ρ_A ، که ρ_A نشان دهنده غلظت جرم نوع A است (شکل ۵)، و کنترل قانون حاکم بر گرادیان و سرعت جریان، به دست می‌آوریم:

$$(۱۴) \quad J_{Ay} = -\vartheta_{AB} \frac{d\rho_A}{dy},$$

J_{Ay} تغییرات پی در پی جرم A در جهت y ، و ϑ_{AB} ضریب انتشار دوگانه می‌باشد. معادله اخیر، قانون اول انتشار فیک نامیده می‌شود. اگر ρ_A در جهت‌های x و z نیز تغییر کند، قانون فیک می‌تواند در هر سه جهت بیان شود:

$$(۱۵) \quad J_{Ax} = -\vartheta_{AB} \frac{d\rho_A}{dx},$$

$$(۱۶) \quad J_{Ay} = -\vartheta_{AB} \frac{d\rho_A}{dy},$$

و

$$(۱۷) \quad J_{Az} = -\vartheta_{AB} \frac{d\rho_A}{dz}.$$

در واقع J_{Ax} ، J_{Ay} و J_{Az} سه مؤلفه بردار سرعت جریان جرم J_A هستند. با ترکیب معادلات فوق، فرم برداری قانون انتشار فیک به دست می‌آید، یعنی به دست می‌آوریم:

$$(۱۸) \quad J_A = -\vartheta_{AB} \nabla \rho_A,$$

که $\nabla \rho_A$ ، گرادیان غلظت جرم می‌باشد.

۶. مدل‌های ریاضی

مدل‌های ریاضی برای توصیف پدیده‌های انتقال در بسترهای مویرگ به کار می‌روند و بر مبنای یک مجموعه از فرض‌های ایده‌آل لازم برای تبدیل ساختارهای پیچیده گردشی کوچک به یک سطح ساده‌تر می‌باشند. این فرضیات می‌توانند در چهار قسمت بررسی شوند:

- ساختار واحد مربوط به مؤلفه‌ها و مکانهای نسبی شان،
- مکانیزم انتقال در هر مؤلفه واحد،
- انتقال در میان مؤلفه‌های واحد،
- و ارتباط بین هر واحد و واحد‌های اطرافش.

در حالت کلی مدل‌های انتقال در بسترهای مویرگ در عمل پیچیده و دشوار هستند و این فرضیات برای به دست آوردن ساده‌ترین مدلی است که بتواند داده‌های تجربی را به مدل‌های تحت بررسی بسط دهند. یک جنبه مهم از توجیه چنین فرضیاتی تخمین ویژگی‌های فیزیکی است. از قبیل: ابعاد، سرعت جریان خون، فشار، ضرایب انتقالی و جنبشی و استفاده از این تخمین‌ها برای حذف عبارت‌هایی است که دارای تأثیر کمتری هستند.

۱.۶. اعضاء و واحد‌های چرخشی کوچک. مدل‌های ریاضی از بستر مویرگ معمولاً با محتوایی از رفتار یک یا تعداد کمی از مویرگ‌ها و بافت مربوطه ساخته شده‌اند. در ادامه، چنین مجموعه‌ای یک واحد چرخشی کوچک نامیده می‌شود.

بیشتر پیشآمدهای تجربی و فیزیولوژی در عمل به همه اعضاء (اندام‌ها) هدایت می‌شوند و بررسی تجزیه و تحلیل واحدهای چرخشی کوچک در اعضاء، مستلزم در نظر گرفتن تأثیرات کلی از رگ‌های سرخرگی و سیاهرگی است که به طور متوالی با مویرگ‌ها قرار گرفته‌اند.

در حالت پایدار به نظر می‌رسد تأثیرات از رگ‌های بزرگ قابل صرف‌نظر کردن باشد. اما در حالت‌های تغییرپذیر (ناپایدار)، تغییرات از توابع زمانی در طول گذر از رگ‌های بزرگ ممکن است خیلی قابل توجه باشد. مسئله می‌تواند به طور مجزا و از لحاظ تجربی با استفاده از شاخص‌های متعدد که یکی از آنها لوله‌های آوندی است بررسی شود [۲۸].

روند مستقیم از مسئله با استفاده از خلاصه تأثیرات رگ بزرگ به وسیله باخ و گرسکی [۲۹] به دست آمد. آنها یک عبارت کلی را بر اساس ریاضیات غیر پیچیده به دست آوردند ولی به دلیل فقدان اطلاعات فرض کردند که توزیع از زمان‌های متغیر روی رگ بزرگ می‌تواند به وسیله یک تابع برانگیزش تأخیری تقریب‌زده شود. البته تأثیر از این فرض مختصر روی نتایج آنها گزارش نشده است.

۲.۶. ساختار. عناصر از یک واحد چرخشی کوچک شامل یک تعداد رگ‌های کوچک و بافت خواهند بود که به بافت درون حفره ای یا سلول‌ها تقسیم می‌شوند. عناصر دیگری از قبیل کیسه‌های هوایی (شکل ۱) و مجرای چرک هم ممکن است مورد نیاز باشند.

شاخص‌های ساختاری باید شامل تعدادی از مویرگ‌ها، اندازه و شکل شان، موقعیت شان در ارتباط با همدیگر و جهت از جریان در هر یک باشد. بافت هم باید به صورت همگن یا ناهمگن تشریح شود.

مدل مویرگ منفرد استوانه‌ای که به وسیله کراگ [۳۱، ۳۰] پیشنهاد شد شامل یک لوله مویرگ گردشی است که یک فضای بافت آوندی بزرگ همگن و متقارن را فراهم می‌کند.

شکل‌های دیگری از استوانه مویرگ در تحلیل‌هایی از تولید اکسیژن بافت، انتقال گاز و گلوکز در بال حشره و آبشش ماهی [۳۲] و ساختارهای دیگری [۳۳]، چون مدل‌های دستگاه انتقال کلیوی [۳۴] و مدل‌هایی از تبادل گاز جنینی بررسی شده است [۳۵].

موقعیت منابع و چاهک‌های متابولیک غالباً یکنواخت فرض شده است اما در [۳۶] نشان داده شده است که مویرگ‌ها پیرامون فیبرهای ماهیچه با بیشترین فعالیت متابولیک متمرکز شده‌اند.

۳.۶. انتقال بدون مولفه‌ها. به دنبال فرمول بندی عباراتی برای انتقال بدون مولفه‌ها از واحدهای چرخشی کوچک خواهیم داشت [۳۷]:

سرعت انباشتگی مولکول‌ها از یک نوع خاص در یک مقدار بی نهایت کوچک بخشی از سیستم معادل است با شار ورودی شبکه بعلاوه سرعت تولید شبکه در هر مقدار واحد. یعنی:

$$(۱۹) \quad \frac{\partial c_i(p, t)}{\partial t} = -\nabla \cdot J_i(p, t) + R_i(p, t),$$

که $c_i(p, t)$ (معادل هر مقدار واحد) از نوع i (مانند اکسیژن یا دی‌اکسیدکربن) در موقعیت p و در زمان t می‌باشد. موقعیت را می‌توان در هر دستگاه مختصات مناسبی مانند مختصات متعامد x و y و z یا مختصات استوانه‌ای r و θ و z با یک مبدا مشخص در نظر گرفت.

کمیت $J_i(p, t)$ معادل با مجموع شار از نوع i و $R_i(p, t)$ هم معادل با سرعت شبکه از تولید نوع i در هر مقدار واحد می‌باشد.

بردار شار مجموع از دو بردار یکی همرفت و دیگری نفوذ می‌باشد و از قانون اول فیک به دست می‌آید. جایگزینی این‌ها در معادله (۱۹) تعادل جرم کلی را برای نوع i می‌دهد:

$$(۲۰) \quad \frac{\partial c_i(p, t)}{\partial t} = -\nabla \cdot [v(p, t)c_i(p, t) - D_i(p)\nabla c_i(p, t)] + R_i(p, t).$$

یک فرض اصلی به دنبال استفاده از قانون اول فیک، این است که تغییر مکان فقط به خاطر همرفت و نفوذ وجود دارد. این فرض در یک حجم بزرگی در صورتی که تعادل اسمزی (osmotic equilibrium) موجود باشد انجام شده است.

حال سازگاری معادله را با فضای مویرگ و فضای بافت در نظر می‌گیریم.

مویرگ. مدل‌بندی جریان خون در واحدهای خیلی کوچک یک موضوع پیچیده است که به حضور سلول‌های قرمز خونی، قطر بافت‌ها و هندسه پیچیده سیستم‌های آوندی منجر می‌شود. مکانیزم جریان خون در مویرگ توسط اسکالک [۳۸] و فونگ [۳۹، ۴۰] بررسی شده است. در انتقال خون به واحدهای کوچک، اگر دیواره سلول قرمز خونی در مقابل انواع مواد انتقال داده شده نفوذ ناپذیر باشد یا اگر سلول قرمز خونی با حجم کلی خون به طور آزادانه‌ای در مقابل انواع مواد قابل وصول باشد، آنگاه خون به عنوان یک سیال همگن با حجمی معادل با حجم پلاسما رفتار می‌کند. معادله (۲۰) به دنبال یک تعداد از فرضیات برای مویرگ در نظر گرفته شده است.

حتی با اینکه بعضی درجات از جریان ضربانی ممکن است در مویرگ حفظ شود، به خصوص در ریه [۴۱]، وابستگی زمانی از بردار سرعت، قابل صرف نظر کردن است ولی وابستگی مکانی از بردار سرعت، با فرض نفوذ از طریق دیواره مویرگ که دارای تأثیر کوچکی روی سرعت پلاسما است، مختصر شده است [۴۲].

به طور کلی فرض شده است که خون يك سیال همگن (دارای خواص فیزیکی مشابه از هر سو) باشد و بنابراین دارای نفوذپذیری مستقل از جهت باشد و مویرگ هم مستقیم، سخت و غیرمخروطی (غیرمورب) فرض می‌شود. بنابراین هندسه استوانه‌ای از مویرگ آنرا برای نمایش به عنوان تابعی با محور مکانی x ، شعاع r و زمان t مناسب می‌کند. پس با فرض تقارن زاویه‌ای داریم:

$$(21) \quad \frac{\partial c_i(x, r, t)}{\partial t} = -v(r) \frac{\partial c_i(x, r, t)}{\partial x} - D_i \nabla^2 c_i(x, r, t) + R_i(x, r, t),$$

که

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

شرط اولیه $c_i(x, r, 0)$ ممکن است به طور دلخواه مشخص شود یا با حل معادلات حالت پایدار به عنوان يك کل به دست آید. برای شرایط مرزی اعمال شده روی این معادله داریم:

(i) غلظت مشخص شده در آغاز مویرگ (مدخل) صفر یا متناهی می‌باشد و برای شار محوری $\frac{\partial c_i(x, r, t)}{\partial x}$ در $x = L$ از مجرای خروجی مویرگ، برابر مقدار ثابتی است.

(ii) $\frac{\partial c_i(x, 0, t)}{\partial r} = 0$ که تقارن را اطراف خط مرکزی مویرگ نشان می‌دهد.

(iii) يك شرط در دیواره مویرگ که بعد از مشتق‌گیری از معادلات بحث خواهد شد به عناصر دیگری از واحدهای کوچک مربوط می‌شود. برای اکسیژن که به آسانی با هموگلوبین در سلول‌های خون ترکیب می‌شود، غلظت در معادله (۲۱) مجموع غلظت پلاسما و غلظت سلول‌های قرمزخونی می‌باشد. پس جمله نفوذ دارای دو مؤلفه است یکی نفوذ در پلاسما و دیگری نفوذ اکسیژن است که منجر به نفوذ اکسیژن در سلول‌های قرمز خونی می‌شود.

بافت. معادلات (۱۹) و (۲۰) برای فضای برون آوندی یا درون سلولی به کار می‌روند. بیشتر محققین يك فضای بافت همگن را برای فضاهای بافت درون سلولی و برون سلولی به کار می‌برند و این انتخاب به فرضیاتی به صورت زیر مربوط می‌شود:

(i) نفوذپذیری بافت درون سلولی، اندازه‌های سلولی و خواص انتقالی مربوط به دیواره سلول.

(ii) هندسه عمده فضای بافت خیلی اوقات يك حلقه استوانه‌ای فرض می‌شود و در بیشتر موارد از جریان همرفت در بافت صرف نظر می‌شود. جریان همرفت در شبکه به صورت زیر شناخته شده است:

محققین زیادی معتقدند که این جریان، اختلاف بین شارهای درون سو و برون سوی بزرگی است [۴۳]، درحالی که گروهی دیگر از محققین از اینکه شار هر کجایی کوچک است طرفداری می‌کنند [۴۲].

وقتی آبرگ [۴۳]، بعضی نتایج از يك شار همرفتی بزرگ را روی نوعی از انتقال در دیواره مویرگ در نظر گرفت، نتایج به دست آمده از جریان همرفت از نوع انتقال در بافت با محققین حاضر مطابقت نداشت. معادله (۲۰) با حذف جمله همرفت به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(22) \quad \frac{\partial c_i(p, t)}{\partial t} = -\nabla \cdot [D_i(p) \nabla c_i(p, t)] + R_i(p, t).$$

به طور کلی بافت همگن (با خواص فیزیکی مشابه) در نظر گرفته شده و این منجر می‌شود که ضریب نفوذی D_i مستقل از جهت باشد. البته این فرض ممکن است همیشه صدق نکند.

واکنش‌های شیمیائی بیشتر اوقات به طور مساوی روی فضای بافت پخش می‌شوند ولی ممکن است واکنش فقط در موقعیت‌های متمایز اتفاق افتد که در این صورت قسمت داخلی بافت سلولی هم به طور نامساوی در فضا گسترش می‌یابد.

با استفاده از پارامترهای ثابت فضا و مختصات استوانه ای برای معادله (۲۲) داریم:

$$(23) \quad \frac{\partial c(x, r, t)}{\partial t} = D \nabla^2 c(x, r, t) + R(t).$$

در کل معادله نفوذ بر شارهای نفوذی موافق با سرعت‌های معلوم از عملکردهای متابولیکی و حتی بر خیلی از بافت‌های فعال اشاره می‌کند [۳۲].

۴.۶. انتقال در میان مولفه‌ها. معادلات دیفرانسیل بحث شده برای فضای برون آوندی و بافت می‌باشند و اگر بخواهیم فضای سلولی را در نظر بگیریم باید شرایط مرزی به آنها اضافه کنیم. یک شرط در ارتباط با غلظت خون و غلظت بافت مربوط به تأثیر دیواره مویرگ است. چون به طور یکنواخت فرض شده است که پوسته مویرگ دارای گنجایش مشخصی برای مولکول‌های قابل نفوذ باشد. این شرایط به طور جبری به صورت زیر مشخص شده‌اند:

$$(24) \quad c(x, a, t)|_b = \frac{c(x, a, t)}{\alpha}|_t,$$

و

$$(25) \quad D \frac{\partial c(x, a, t)}{\partial r}|_b = D \frac{\partial c(x, a, t)}{\partial r}|_t,$$

که اندیس‌های b و t به خون و بافت مربوط می‌شوند. معادله (۲۴) روی این فرض که خون در دیواره مویرگ در حال تعادل با بافت مجاور (با ضریب تفکیک α) باشد بنا نهاده شده است و معادله (۲۵) بیان می‌کند ماده‌ای که مویرگ را ترک می‌کند وارد بافت می‌شود.

این جفت از شرایط مربوط به حالتی می‌شوند که مویرگ هیچ مقاومتی در انتقال نداشته باشد. اگر فرض شود که دیواره مویرگ دارای مقاومت محدودی است، برای شار گذرنده از دیواره مویرگ خواهیم داشت [۶]:

$$(26) \quad -[D \frac{\partial c(x, a, t)}{\partial r}]_b = p(x)[c_b(x, a, t) - \frac{c_t(x, a, t)}{\alpha}] = -[D \frac{\partial c(x, a, t)}{\partial r}]_t.$$

اخیراً در فرمول‌بندی‌هایی که در تبدیل انتقال مویرگ به دست آمده است فرض شده که انتقال آسان و اشباع شدنی اتفاق بیفتد [۴۴، ۴۵].

در پایان این بخش، بطور خلاصه یادآور می‌شویم که مدل‌های ریاضی برای توصیف پدیده‌های انتقال در بسترهای مویرگ بررسی شده است. معادلات (۱۹) الی (۲۶) مؤید این مطلب است که بردار شار ورودی مجموعی از دو بردار، یکی همرفت و دیگری نفوذ می‌باشد که از قانون اول انتشار فیک پیروی می‌کند. این معادلات در دو دستگاه قائم دکارتی و قطبی استوانه‌ای بیان شده‌اند. جهت حل معادله، شرط اولیه دلخواه و شرایط مرزی (i) الی (iii) را می‌توان به کار برد. به علاوه توضیح داده شده است که اگر دیواره مویرگ دارای مقاومت محدودی باشد می‌توان از منبع [۶] استفاده نمود.

۷. نتیجه

شیبه سازی ریاضی مطرح شده فرآیند انتقال گازهای تنفسی در مویرگ‌های ریوی، منجر به معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی سهموی شده است. جهت توصیف این فرآیند دانستن نحوه عملکرد دستگاه تنفسی انسان برای درک بهتر آن، مفید می‌باشد. در نتیجه، به اجمال در سه بخش اول مقاله به آن پرداخته شده است. دیگر آنکه، از مکانیزم‌های انتقال، که شامل انتقال از طریق هوا می‌باشد، مهمترین آن توسط حرکت همرفت و انتشار مولکولی در بخش چهار

میباشد. قوانین کلی انتقال شامل انتقال اندازه حرکت، انتقال انرژی (هدایت گرمائی)، برای این گفته شده است که انتقال اندازه حرکت، مشابه حرکت همرفت و هدایت گرمائی مشابه انتقال جرم است. بدین سبب، این سه مکانیزم انتقال توضیح داده شده است. همانگونه که گفته شده است ساده‌ترین حالت انتشار (نفوذ) که قابل مقایسه با انتقال اندازه حرکت و انرژی است، به عنوان انتشار معمولی شناخته شده است. بنابراین، برای آشنائی بیشتر با این فرآیند انتقال، قوانین حاکم بر انتقال ماهیت های فیزیکی در سه زمینه مختلف، انتقال اندازه حرکت، انتقال انرژی و انتقال جرم که از جمله در مورد موضوع مورد بحث نیز کاربرد فراوان دارد را در بخش پنج مطالعه نمودیم. همچنین، مدل های ریاضی بررسی شده در بخش شش، اعضاء و واحدهای چرخشی کوچک، ساختار، انتقال بدون مؤلفه ها، به خاطر همرفت و نفوذ را در برگرفته و در آن سازگاری معادله با فضای مویرگ و فضای بافت منظور شده است. به علاوه انتقال میان مؤلفه ها با در نظر گرفتن دیواره مویرگ وقتی که دارای مقاومت محدودی است مورد مطالعه قرار گرفته است. بررسی های انجام شده مؤید این است که معادلات حاکم در انتشار گازهای تنفسی در مویرگ ها، همانند انتقال جرم یک ماهیت فیزیکی بوده و از قانون انتشار فیک تبعیت می کنند.

تشکر و قدردانی

نویسنده بر خود لازم می داند که از داوران محترم جهت ارزیابی ارزشمند و پیشنهادات سازنده در مورد بهتر شدن مقاله تشکر نماید. همچنین از دبیر تخصصی پروفیسور سعید اعظم و سر دبیر محترم پروفیسور علیرضا عبداللہی جهت مساعدت در بازبینی مقاله نهایت تشکر و امتنان را دارد.

مراجع

- [1] C. S. Desai and L. D. Johnson, Evaluation of some numerical schemes for consolidation, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **7**, 243-254 (1973).
- [2] A. Aminataei, M. Sharan and M. P. Singh, A numerical solution for the nonlinear convective-facilitated diffusion reaction problem for the process of blood oxygenation in the lungs, *J. Nat. Acad. Math.*, **3**, 182-197 (1985).
- [3] A. Aminataei, M. Sharan and M. P. Singh, A numerical model for the process of gas exchange in the pulmonary capillaries, *Indian J. Pure Appl. Math.*, **18**, 1040-1060 (1987).
- [4] M. Sharan, A. Aminataei and M. P. Singh, A numerical steady of non-steady transport of gases in the pulmonary capillaries, *J. Math. Biol.*, **25** (1987) 433-452.
- [5] M. Sharan, A. Aminataei and M. P. Singh, The process of gas exchange in the pulmonary circulation incorporating the contribution of axial diffusion, *Int. J. BioMedical Comput.*, **20** (1987) 191-209.
- [6] M. Sharan, M. P. Singh and A. Aminataei, A numerical model for the blood oxygenation in the pulmonary capillaries-effect of pulmonary membrane resistance, *BioSystems*, **20** (1987) 355.
- [7] A. Aminataei, M. Sharan and M. P. Singh, Two layer model for the process of blood oxygenation in the pulmonary capillaries-parabolic profiles in the core as well as in the plasma layer., *Appl. Math. Modelling*, **12** (1988) 601-609.
- [8] M. Sharan, M. P. Singh and A. Aminataei, A mathematical model for the computation of the oxygen dissociation curve in human blood, *BioSystems*, **22** (1989) 249-260.
- [9] M. P. Singh, M. Sharan and A. Aminataei, Development of mathematical formulae for oxygen and carbon dioxide dissociation curves in the blood, *IMA J. Maths. Appl. in Medicine and Biology*, **6** (1989) 25-46.
- [10] M. Sharan, M. P. Singh and A. Aminataei, A numerical model for studying the effect of plasma layer on the process of blood oxygenation in the pulmonary capillaries, *Transactions of the ASME J. Biomech Eng.*, **112** (1990) 457-463.

- [11] A. Aminataei, A numerical two layer model for blood oxygenation in lungs, *Amir-Kabir J. Sci. Tech.*, **12** no. 45 (2001) 63-85.
- [12] A. Aminataei, A mathematical model for oxygen dissociation curve in the blood, *Euro. J. Scien. Res.*, **6** no. 1 (2005) pp. 5.
- [13] A. Aminataei and S. Hassani, An efficient numerical method for the solution of initial and boundary values problems, *J. of Sci.*, Al-Zahra Univ., **22** no. 2 (2009) 13-30.
- [14] A. Aminataei, Comparison of explicit and implicit approaches to numerical solution of uni-dimensional equation of diffusion, *J. of Sci.*, Al-Zahra Univ., **15** no. 2 (2002) 1-20.
- [15] A. Aminataei, A numerical simulation of the unsteady convective-diffusion equation, *The J. of Damghan Univ. of Basic Scis.*, **1** no. 2 (2008) 73-87.
- [16] A. Aminataei, Numerical simulation of the process of oxygen mass transport in the human pulmonary capillaries incorporating the contribution of axial diffusion, *J. of Sci.*, Kharazmi Univ., **13** no. 3 (2013) 779-796.
- [17] W. F. Ganong, *Review of medical physiology*, 11th ed., New York. Mc Graw Hill, 2001 172-290.
- [18] A. C. Guyton, *Text-book of medical physiology*, W. B. Saunders Company, Philadelphia, 1981.
- [19] Y. C. Fung, *Biomechanics-Mechanical properties of living tissues*, Springer-Verlag., New York, 1981.
- [20] L. Dintenfass, Influence of plasma proteins on the in-vivo and in-vitro rheological properties of blood, 5 th Int'l Bio-rheology Congress Abstracts, Bio-rheology, **20** (1983) pp. 384.
- [21] W. J. Dorson, R. Yee, K. G. Larsen, R. G. Elgas and M. E. Voorlees, Oxygen diffusion in blood and plasma, *Proc. 24 th ACEMB*, **13** (1971) pp. 280.
- [22] R. M. Navari, J. L. Gainer and K. R. Hall, A predictive theory for diffusion in polymer and protein solutions, *AIChE J.*, **17** (1971) pp. 1028.
- [23] T. K. Goldstick, V. T. Ciuryla and L. Zuckerman, Diffusion of oxygen in plasma and blood, *Adv. In Expt'l Medi and Biol.*, **75** (1976) pp. 183.
- [24] J. L. Gainer and W. B. Stringfield, Effect of transferring on diffusion of oxygen in plasma, *J.*, **28** (1982) pp. 836.
- [25] M. M. Lih, *Transport Phenomena in Medicine and Biology*, John Wiley Sons, Inc., New York, 1975.
- [26] E. P. Hill, G. Power and L. D. Longo, *Kinetics of o2 and co2 exchange*, in: *Bioengineering aspects of the lung*, J. B. West, Marcel Dekker, Inc., New York, 1977 459-514.
- [27] A. Aminataei, Blood oxygenation in the pulmonary circulation: a review, *Euro. J. Scien. Res.*, **10** no. 2 (2005) 55-71.
- [28] F. P. Chinard, G. J. Vosburgh and T. Enns, *Am. J. Physiol.*, **183** (1955) 221-234.
- [29] C. A. Goresky and G. G. Bach, *Ann. NY Acad. Sci.*, **170** (1970) 18-45.
- [30] A. Krough, *J. Physiol. London*, **52** (1918-19) 391-408.
- [31] A. Krough, *J. Physiol. London*, **52** (1918-19) 409-415.
- [32] T. Weis-Fogh, *J. Exp. Biol.*, **41** (1964) 229-256.
- [33] K. Schmidt-Nielsen, *How Animals Work*, Cambridge Univ. Press., (1972) pp. 114.
- [34] R. R. Tarica, E. Koushanpour and W. F. Stevens, *Chem. Eng. Progr. Symp. Ser.*, **67** no. 114 (1971) 28-34.
- [35] W. Moll, In *Oxygen Transport in Blood and Tissue*, Ed. Lubbers et al., Stuttgart: G. Thieme, (1968) 70-79.
- [36] F. C. Romanul, *Nature*, **201** (1964) 307-308.
- [37] R. B. Bird, W. E. Stewart and E. N. Lightfoot, *Transport Phenomena*, New York: Wiley, 1960 pp. 780.
- [38] R. Skalak, In *Biomechanics: Its Foundations and Objectives*, Y. C. Fung and Eds, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1972.
- [39] Y. C. Fung and B. W. Zweifach, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **3** (1971) 189-210.
- [40] Y. C. Fung, *Microvasc. Res.*, **5** (1973) 34-48.
- [41] E. D. Crandall and R. W. Flumerfelt, Morphological aspects of the pulmonary circulation and of the airways, NATO Advisory Group for Aerospace Research and Development, *Conf. Proc.*, no. 65 (1970) 447-475.
- [42] M. Intaglietta and B. W. Zweifach, Microcirculatory Basis of Fluid Exchange, *Adv. Biol. Med. Phys.*, **15** (1974) 111-159.

- [43] B. Aberg, *Restricted convection diffusion across capillary walls*, Thesis. Uppsala Univ., Sweden, 1973.
- [44] D. D. Reneau, D. F. Bruley, H. I. Bicher and M. H. Knisely, Systems analysis of transport processes in human brain-Part I. Presented at First Pacific, *Chem. Eng. Congr.*, Kyoto, Japan, 1972.
- [45] K. Winkler, L. Bass, S. Keiding and N. Tygstrup, *Presented at the Alfred Benzon Symposium. VI*, Regulation of Hepatic Metabolism, Copenhagen, May 1973 20-24.

عظیم امین عطائی

تهران، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، دانشکده ریاضی، گروه ریاضی کاربردی
ataei@kntu.ac.ir

عظیم امین عطائی از سال ۱۳۶۸ تاکنون عضو هیات علمی دانشکده ریاضی، گروه ریاضی کاربردی دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی است. وی تا به حال مقالات علمی زیادی در مجلات علمی بین‌المللی و کنفرانسها ارائه نموده است. علایق پژوهشی وی، ریاضیات زیستی، محاسبات علمی، آنالیز عددی، حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و معادلات انتگرال در ریاضی کاربردی است.

