http://math-sci.iranjournals.ir

نشریه ریاضی و جامعه
شاپا (چاپی): ۶۴۹۳-۲۳۴۵، شاپا(الکترونیکی): ۶۵۰۷-۲۳۴۵
جلد ۱، شماره ۲ (۱۳۹۵)، صص. ۹-۱

http://www.ui.ac.ir

حلقه‌های توابع پیوسته در دهه‌ی پنجاه

ملوین هنریکس
مترجم: رستم محمدیان

چکیده. نوشته حاضر ترجمه مقاله زیر است:

Melvim Henriksen, Ring of Continuous Function in 1950s, Handbook of the History of General Topology, v.1, 243-253.

مقدمه

آن‌چه که در پی می‌آید خاطره‌ی نویسنده است از پیدایش و آغاز رویش حلقه‌های توابع پیوسته، با تاکید بر روی کارهایی که در دهه‌ی پنجاه در دانشگاه پوردو [1] انجام شده است. ادعا نمی‌کنیم این کار بی‌نقص و یا یک پژوهش تاریخی است. در واقع این نوشته برخی از کارهای انجام شده در آن زمان را مورد بحث قرار داده است و ارجاعات به کتاب‌ها و مقالات مروری آن دوره را دربر گرفته است. روی‌هم‌رفته نمادهایی که در ادامه مورد استفاده قرار گرفته‌اند، از کتاب بزرگِ لئونارد گیلمن [2] و می‌یرجریسون [3] [۱۷] برگرفته شده‌اند. به‌ویژه برای هر فضای توپولوژیکی X، نماد $C(X)$ حلقه‌یِ همه توابع پیوسته‌ی $f : X \to \mathbb{R}$ تحت عمل‌های نقطه‌به‌نقطه‌ی معمولی را نشان می‌دهد که در آن $\mathbb{R}$ میدان اعداد حقیقی با ترتیب معمولی و توپولوژی معمولی است و $C^*(X)$ زیر حلقه‌ی توابع پیوسته و کراندار آن است.

مقالات پیش‌گام

سرآغاز بحث به مقالات به‌طور مستقل نوشته شده توسط چک [4]، یعنی [۶] و استون [5]، یعنی [۳۱] برمی‌گردد که در سال ۱۹۳۷ پدیدار شدند. هر یک از آن‌ها از بخشی از رساله‌ی دکترای تیخانوف [6] که همان مرجع [۳۲] است الهام گرفته بودند (که تحت راهنمایی آلکساندروف [7] نوشته شده بود) آن‌جا که او نشان می‌دهد یک فضای توپولوژیکی، زیرفضای یک فضای (هاسدورف) [8] فشرده X است اگر و تنها اگر شرط زیر که با $(*)$ نشان داده می‌شود برقرار باشد.

$(*)$ هرگاه $K \subseteq X$ بسته باشد و $x \in X \setminus K$، آن‌گاه نگاشت پیوسته‌ی $X \to [\circ, \text{۱}]$ وجود داشته باشد که x را به $\circ$ و K را به ۱ بنگارد.

به این ترتیب، تیخانوف آن‌چه را که امروزه تعریف متعارف توپولوژی حاصل‌ضرب نامتناهی است ارائه کرد و آن‌چه را که ما امروز قضیه‌ی تیخانوف می‌نامیم برای حاصل‌ضرب دلخواهی از نسخه‌های $[\circ, \text{۱}]$ ثابت کرد. او فضای هاسدورف

تاریخ دریافت: ۱۳۹۲/۰۹/۲۳ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۳/۰۱/۲۳.

[1]Purdue [2]Leonard Gillman [3]Meyer Jerison [4]Čech [5]Stone [6]Tychonoff [7]Alexandroff [8]Hausdorff

صادق در خاصیت $(*)$ را کاملاً منظم (دائماً منظم) نامید. امروزه رسم توپولوژی‌دانان این است که فضاهای کاملاً منظم را لزوماً هاسدورف نمی‌گیرند، و یک فضای کاملاً منظم و هاسدورف را فضای تیخانوف می‌نامند. به‌علاوه حاصل‌ضرب دلخواهی از نسخه‌های $[0, 1]$ مکعب تیخانوف نامیده می‌شود. تیخانوف از اثبات یوریسون (**[۳۳]** را ببینید) الهام گرفته بود که بیان می‌کرد هر فضای متری تفکیک‌پذیر را می‌توان در مکعب هیلبرت [۹] یعنی $[0, 1]^{\aleph_0}$ نشاند. (من بارهاخواندن **[۳۲]** و **[۳۳]** را به دانشجویانم توصیه کردم، امّا هشدار می‌دهم که آن‌ها فقط شامل قضایای شناخته شده هستند. تقریباً تمام محتوای معدود مقالات دیگر، در هر کتاب درسی توپولوژی عمومی دوره‌ی تحصیلات تکمیلی یافت می‌شوند.)

چک در **[۶]** تعمیم قضیه تیخانوف را ثابت کرد (یعنی، هر حاصل‌ضرب دلخواه از فضاهای فشرده، فشرده است) و نماد βX را برای بستار نشاننده‌ی X در مکعب تیخانوف، یعنی $P(X)$ با اندازه مناسب معرفی کرد. به‌طور دقیق‌تر، برای هر تابع پیوسته $f : X \to [0, 1]$ قرار دهید $[0, 1]_f = [0, 1]$ و $P(X)$ را حاصل‌ضرب همه‌ی $[0, 1]_f$ با توپولوژی حاصل‌ضرب (تیخانوف) در نظر بگیرید و تعریف کنید $\{e(x)\}_f = f(x)$ برای هر $x \in X$، با این مفروضات، چک βX را بستار $e[X]$ در $P(X)$ تعریف کرد. در این صورت e یک نشاننده از X به‌روی یک زیرفضای چگال βX است و به زبان **[۱۷]**، $e(X)$ یک C^*- نشانده در βX است؛ یعنی این‌که، هر تابع پیوسته‌ی حقیقی‌ـ مقدار کراندار روی $e[X]$، دارای یک توسیع یکتا به βX است.

استون در مقاله تاریخی و حجیم **[۳۱]**، یک توپولوژی روی فضای $\mathcal{M}(X)$، یعنی ایدآل‌های ماکسیمال حلقه $C^*(X)$ از توابع پیوسته‌ی حقیقی‌ـ مقدار کراندار روی فضای توپولوژی X معرفی کرد. این توپولوژی ممکن است روی گردآیه‌های متفاوتی از ایدآل‌های حلقه‌ها به‌کار بسته شود و توپولوژی استون، توپولوژی جاکوبسن [۱۰]، توپولوژی زاریسکی [۱۱] و هال‌ـ کرنل [۱۲] توپولوژی نیز نامیده می‌شود. امروزه اصطلاح آخری رایج‌تر است. [۱۳] من با این اصطلاح برای بار اول در فصل سوم کتاب لین لومیس [۱۴]؛ یعنی مرجع **[۲۷]** که در سال **۱۹۵۳** منتشر شد مواجه شدم. کرنلِ [هسته] یک خانواده از ایدآل‌های ماکسیمال، اشتراک آن‌ها تعریف شده است، و هالِ [پوسته] یک ایدآل، مجموعه‌ی ایدآل‌های ماکسیمال شامل آن ایدآل تعریف شده است. در هال‌ـ کرنل توپولوژی یک خانواده از ایدآل‌های ماکسیمال بسته است، هرگاه با هالِ کرنلش یکی شود. اگر X یک فضای تیخانوف باشد، آنگاه زیرفضای ایدآل‌های ماکسیمال ثابت (یعنی، ایدآل‌های به فرم $\{f \in C^*(X) : f(x_\circ) = 0\}$ برای یک $x_\circ \in X$) و X همسان‌ریخت هستند، و این زیرفضا در فضای فشرده‌ی $\mathcal{M}(X)$، یک C^*- نشانده است و روشن می‌شود که با βX چک تحت نگاشتی که یک کپی از X را به‌طور نقطه‌وار پایا نگه می‌دارد همسان‌ریخت است. استون نشان داد که $C^*(X)$، فضای βX را مشخص می‌کند. بنابراین اگر X و Y فضاهای هاسدورف و فشرده باشند، آنگاه X و Y همسان‌ریخت هستند اگر و تنها اگر حلقه‌های $C(X)$ و $C(Y)$ یک‌ریخت باشند. این گزاره‌ی دو طرفه و تعمیم‌های آن، قلبِ تپیده مبحثِ حلقه‌های توابع پیوسته هستند.

مقاله‌ی چک تقریباً بی‌درنگ به‌طور گسترده‌ای مورد مطالعه قرار گرفت و نماد βXاش برای فشرده‌سازی جدید به کار رفت، اما به‌دلیل ناشناخته ماندن کارهای استون در **[۳۱]**، فشرده‌سازی چک نامیده شد. آنچه که در بالا توصیف شد یک جزء نسبتاً کوچکی از مقاله‌ی بزرگ استون است و زمان زیادی سپری شد تا توسط جامعه‌ی ریاضی جذب شود. این فشرده‌سازی، H- توسیع فشرده‌ی اکید نام داشت و تا ظهور قضیه‌های ۷۹–۷۸ در **[۳۱]** از آن اثر و نشانی نبود. امروزه بیشتر نویسندگان اروپایی، βX، را فشرده‌سازی چک‌ـ استون یا حتی فشرده‌سازیِ چکِ فضای X می‌نامند.

[۱۳] مترجم: در هندسه جبری و جبر جابه‌جایی، توپولوژی زاریسکی رایج‌تر است. اما این‌که منشأ پیدایش آن به کارهای استون یا زاریسکی برمی‌گردد، در هاله‌ای از ابهام است.

[9] Hilbert [10] Jacobson [11] Zariski [12] Hull-Kernel [14] Lynn Loomis

گام بلندِ رو به جلوی هویت [۱۵]

علاقه‌ی من به حلقه‌های توابع پیوسته آن‌هنگام شعله‌ور شد که در سال ۱۹۵۱ خواندن مقاله‌ی سال ۱۹۴۸ هویت، یعنی حلقه‌های توابع پیوسته حقیقی–مقدار (I) که همان مرجع [۲۱] است را آغاز کردم، درست زمانی که رساله‌ی دکترایم را می‌نوشتم (عمدتاً درباره‌ی حلقه‌ی توابع تام، ([۱۹] را ببینید)). مقاله‌ی بزرگ هویت بر مبنای کار استون و چک شکل گرفته بود و پایه‌گذار مطالعه‌ی روابط متقابل میان X و $C(X)$ شد. با اصطلاحات امروزی، فضای تیخانوف X، فشرده–حقیقی نامیده می‌شود اگر هیچ فضای تیخانوف اکیداً بزرگترِ Y موجود نباشد که X در آن چگال و هر $f \in C(X)$ دارای توسیعی به $C(Y)$ باشد. (هویت اصطلاح Q- فضا را به‌کار برد.) او در [۲۱] نشان داد که یک فضا فشرده–حقیقی است اگر و تنها اگر با یک زیر فضای بسته از حاصل‌ضرب نسخه‌هایی از خطِ حقیقی همسان‌ریخت باشد. بنا به قضیه‌ای از استون در [۳۱]، هر تابع $f \in C(X)$، یک توسیع پیوسته از βX به فشرده‌سازی تک‌نقطه ای $\mathbb{R}$ دارد. در [۲۱] مجموعه نقاطی که همه‌ی این توسیع‌ها در این نقاط، حقیقی–مقدار باشند با vX نشان داده شد و از آن به‌بعد فشرده–حقیقی‌سازی هویتِ X نام گرفت. (همان‌طور که از هویت آموختیم، اُپسیلون [۱۶] معرف بی‌کرانی است. من به اشتباه آن را نُو [۱۷] خواندم و در نهایت توانستم افراد اندکی را از تکرار این اشتباه برحذر بدارم. در صفحه ۱۱۶ از [۱۸] گیلمن و جریسون تلاش کردند تا خوانندگانشان را از تکرار این اشتباه برحذر بدارند، اما امروزه هم این اشتباه رخ می‌دهد.) هم‌چنین فضاهای فشرده–حقیقی و فشرده–حقیقی‌سازی‌ها به‌طور مستقل توسط ناچبین [۱۸] مورد شناسایی قرار گرفتند، کسی که کارهایش در این زمینه در کتاب‌های [۵] (بخش فصل) و [۳۵] (مقدمه و بخش ۱۳) به‌طور مفصل مورد بحث قرار گرفته است. کارهای ناچبین اساساً تاثیری روی کارِ انجام شده در مدرسه پوردو، که در ادامه بحث می‌شوند نداشت، چرا که ما از آن‌ها آگاه نبودیم. فضاهای شبه‌فشرده، یعنی فضاهایی چون X که برای آن‌ها داشته باشیم $vX = \beta X$، به طور طبیعی از [۲۱] برمی‌خیزند. سُوپ–نُرم توپولوژی، به آن‌چه که هویت m- توپولوژی (به احترام مور [۱۹]) نامید تعمیم داده شد، طبیعتِ میدان‌هایی که تصویرِ هم‌ریخت $C(X)$ هستند مورد بحث قرار گرفت و یک بستر برای بسیاری از پژوهش‌گران در این زمینه در ربع قرن بعد ایجاد شد.

این مقاله‌ی عالی با آشکار شدنِ چندین اشتباه اساسی در آن، که ریشه در حقیقت داشتند خدشه‌دار شد. این اشتباهات در بازبینی دیودونه [۲۰] که همان مرجع [۸] است از مقاله [۲۱] مطرح شده بودند. این امر برای سالیانی چند، باعث دل‌سردی هویت از ادامه‌ی کار در این زمینه شد. به این سبب بیش از سی سال طول کشید تا مقاله‌ی «حلقه‌های توابع پیوسته حقیقی–مقدار (II)» منتشر شد؛ [۳] را ببینید. تصحیح این اشتباهات و پی‌گیری ایده‌های هویت، محور این مبحث و الهام بخشِ کتاب گیلمن–جریسون شد.

ایام رویایی: فعالیت در پوردو

من پس از گذراندن یک سالِ کلاً بی‌ثمر در دانشگاه آلاباما [۲۱]، در نیمه‌ی دوم آگوستِ سال ۱۹۵۲ وارد دانشگاه پوردو شدم. سال پیش از آن، رساله‌ی دکترایم را درباره‌ی حلقه‌ی $\mathcal{E}$، یعنی حلقه‌ی توابع تام در دانشگاه ویسکانسین [۲۲] نوشته بودم. نتیجه‌ی اصلی من این بود که برای هر ایدآل ماکسیمال M از $\mathcal{E}$، میدان رده‌ی مانده‌های $\frac{\mathcal{E}}{M}$ با $\mathbb{C}$، یعنی میدان اعداد مختلط یک‌ریخت است، اگرچه برای بسیاری از ایدآل‌های ماکسیمال، به‌عنوان یک جبر روی $\mathbb{C}$ با بعدِ نامتناهی است. این رساله هم‌چنین شامل اندکی از مبحث حلقه‌های توابع پیوسته بر مبنای مقاله‌ی هویت بود که شاید بهترین قسمت در این مقاله، پی بردن به این نکته بود که نقاط $\beta\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$ در بستارِ (نسبت به $\beta\mathbb{R}$) هیچ زیرمجموعه‌ی بسته‌ی $\mathbb{R}$ با اندازه‌ی لبگ [۲۳] متناهی، قرار ندارند (منسوب به ابرلین [۲۴]). [$۱۷, ۴F$] را ببینید. این پیش– نشانه‌ای برای بررسی نقاط پرت

[15]Hewitt [16]Upsilon [17]Nu [18]Nachbin [19]Moore [20]Dieudonné [21]Alabama [22]Wisconsin [23]Lebesgue [24]Eberlein

بود؛ [۱۰]را ببینید. (استاد راهنمایم در دانشگاه ویسکانیس بروک [25] بود، اما کمک زیادی از ابرلین گرفتم.) آن زمان که در آلاباما بودم تلاشم در راستای تصحیح برخی اشتباهات [۲۱] بود؛ اگرچه به دلایل مختلف این تلاش به سرانجام نرسید. من هرگز درسی را در توپولوژی نگذراندم، امکانات کتابخانه محدود بود و آنجا در واقع تنها دو نفر از ما تعریف فضای توپولوژی را می‌دانست. آن اندک‌مقدار توپولوژی که من می‌دانستم از شانزده جلسه‌ی سخنرانی، به‌عنوان بخشی از یک درس شگفت‌انگیز در آنالیز تابعی که در سال‌های ۵۰-۱۳۴۹ توسط ابرلین ایراد شد فرا گرفته بودم. اولین تلاش جدیِ من در حلقه‌های توابع پیوسته، مقاله‌ی مشترک [۲۲] نوشته شده با ایزبل [26] بود، زمانی که در ژوئن سال ۱۹۵۲ در کنفرانسی در دانشگاه کانزاس [27] حضور یافتیم. ما نشان دادیم که اگر X نرمال و M یک ایدآل ماکسیمال $C(X)$ باشد، آنگاه $\frac{C(X)}{M}$ یک میدان حقیقی‌ـ بسته است. بعداً، ایزبل این نتیجه را با استدلالی آسان‌تر برای فضاهای تیخانوف دلخواه به‌دست آورد که در [۲۶] و بخش‌های ۳ و ۴ فصل ۱۳ از [۱۷] دیده می‌شود. این نتیجه در [۲۱]، همراه با یک اشتباه در اثباتش بیان شده بود که این اشتباه توسط دیودونه کشف و در [۸] به آن اشاره شده بود.

گیلمن نیز در سال ۱۹۵۲ وارد پوردو شد. او ده سال از من ارشدتر و چندسالی در یک آژانسِ نیروی دریایی ایالات متحده به‌عنوان ریاضیدان کارکرده بود و رساله‌ی دکترایش را درباره‌ی مباحثی در نظریه‌ی مجموعه‌ها در دانشگاه کلمبیا [28] نوشته بود. استاد راهنمایش لورچ [29] بود، امّا بیشترین کمک را از پروفسور تارسکی [30] از دانشگاه کالیفرنیا [31] در برکلی [32] گرفت. جریسون سال قبل از آن و پس از گذراندن دو سال در دانشگاه ایلینویز [33] برای دوره‌ی پسادکترا وارد پوردو شده بود. رساله دکترایش را در آنالیز تابعی، تحت راهنمایی سامنر مایرس [34] در دانشگاه میشیگان [35] نوشته بود.

من اتاقِ محل کارم را که به شکل یک مستطیل دراز بود با گیلمن، گوردن والکر [36] (او اخیراً رئیس هیئت مدیره AMS شده بود) و یک همکار بازنشسته قسمت کردم که به‌ندرت از آن به‌صورت تمام‌وقت استفاده می‌کرد. لئونارد و من مقالات را در دانشکده جبر با نشست‌های پی‌درپی طبقه‌بندی می‌کردیم و هرگاه به‌هم می‌رسیدیم بحث را در جبر مجرد و نظریه مجموعه‌ها آغاز می‌کردیم. این بحث‌ها ما را به نوشتن اولین مقاله‌ی مشترکمان [۱۴] رهنمون شد که در آن نشان دادیم برای فضای تیخانوف X، هر ایدآل اول $C(X)$ یک ایدآل ماکسیمال است اگر و تنها اگر هر G_δ در X باز باشد (یعنی X یک P- فضا باشد)، و این‌که در یک فضای مرتبِ خطی، پیرافشردگی و فشرده‌ـحقیقی معادل هستند، وقتی‌که کاردینال‌های اندازه‌پذیری در آن اطراف در کمین نباشند. سپس هر دو نفرمان با جریسون در [۱۶] همکاری کردیم که در آن یک قضیه از گلفاند [37] و کلموگروف [38] را مجدداً و در واقع بدون اطلاع از اصل و ریشه‌اش به‌دست آورده و نوشته بودیم. ما وقتی توانستیم اثباتِ نسبتاً متفاوتمان را چاپ کنیم که جریسون به کمک آن توانست نشان دهد ایدآل‌های بسته‌ی $C(X)$ در m- توپولوژی (معرفی شده توسط هویت در [۲۱]) اشتراک ایدآل‌های ماکسیمال هستند. همین‌طور گیلمن و من در [۱۵] همکاری داشتیم که در آن $C(X)$هایی را که ایدآل‌های متناهیاً تولیده شده‌اشان ایدآل اصلی باشند مورد مطالعه و بررسی قرار دادیم (با اصطلاحات امروزی حلقه‌های بزو). ما فضاهای تیخانوف با این ویژگی را F- فضاها نامیدیم و آن‌ها را به‌عنوان فضاهایی که متمم‌صفرمجموعه‌ها در آن‌ها C^*- نشانده هستند، مشخص کردیم (یعنی هر تابع پیوسته‌ی حقیقی‌ـمقدار کراندارِ تعریف شده روی یک متمم‌صفرمجموعه، دارای یک توسیع پیوسته‌ی حقیقی‌ـمقدار روی X باشد). ما از روش‌های پرورش‌یافته در این مقاله بهره بردیم و مثال‌هایی از حلقه‌های بزو که حلقه‌های هرمیت نباشند (یعنی این‌طور نباشد که هر ماتریس مربعی روی چنین حلقه‌ای را بتوان با ضرب یک ماتریس وارون‌پذیر از طرف چپ در آن به یک ماتریس مثلثی تبدیل کرد) و حلقه‌های هرمیتی که حلقه‌های مقسوم علیه‌ی ابتدایی نیستند (یعنی، این‌طور نباشد که هر ماتریس روی چنین حلقه‌ای را بتوان با ضرب ماتریس‌های وارون‌پذیر از طرف چپ و از طرف راست در آن به یک ماتریس قطری تبدیل کرد) ساختیم. بر مبنای آخرین اطلاعی که دارم این مثال‌ها تا امروز،

[25]Bruck [26]Isbell [27]Kansas [28]Columbia [29]Lorch [30]Tarski [31]California [32]Berkeley [33]Illinois [34]Sumner Myers [35]Michigan [36]Gordon Walker [37]Gelfand [38]Kolmogoroff

اساساً تنها مثال‌ها از این دست هستند. پل اردیش [۳۹]، گیلمن و من مقاله‌ی [۱۱] را در سال‌های ۵۴-۱۹۵۳ نوشتیم زمانی که اردیش، استادِ مهمان در دانشگاه نوتردام [۴۰] بود، درست قبل از پنج سال تبعیدش از ایالات متحده؛ بعد از این‌که این کشور را در آگوستِ سال ۱۹۵۴ به قصدِ حضور در کنگره‌ی بین‌المللی ریاضیدانان در آمستردام [۴۱] ترک کرد و مجوزِ ورودِ مجددش به ایالات متحده لغو شد. یک میدان کاملاً مرتب، که تصویرِ هم‌ریختِ یک $C(X)$ و به‌طور اکید شامل $\mathbb{R}$ باشد یک میدان ابر–حقیقی نامیده می‌شود. در [۱۱] نشان داده شده است که هر میدان ابر–حقیقی یک η_1- مجموعه است؛ یعنی این‌که اگر A و B زیرمجموعه‌های شمارایی از F باشند به‌طوری که هر عنصر A کمتر از هر عنصر B باشد، آن‌گاه یک عنصر در F وجود دارد که از هر عنصر A بیشتر و از هر عنصر B کمتر است. هم‌چنین نشان داده شد که با فرض برقراری فرضِ پیوستار (CH) هر دو چنین میدانی با کاردینال c یک‌ریخت هستند. (در سال ۱۹۸۵ توسط داو [۴۲] در [۹] نشان داده شده است که این نتیجه‌ی اخیر در مدل‌های نظریه مجموعه‌ای که در آن‌ها فرض پیوستار (CH) برقرار نباشد، درست نیست.) در [۳] یک بررسیِ تمام و کمال از میدان‌های ابر–حقیقی صورت گرفته است. ما بعدها دریافتیم که مدل‌های غیراستاندارد خط حقیقی را بررسی کرده بودیم.

اولین سمینار در حلقه‌های توابع پیوسته در پوردو، در بهار ۱۹۵۳ با پشتیبانی و تشویق‌های پروفسور شانکس [۴۳] برگزار شد. لطف و عنایت‌اش باعث شد تا دانش‌آموختگان نیز بتوانند در این سمینار شرکت کنند. بعدها، من با یکی از آن‌ها، یعنی الن کورل [۴۴] یک مقاله نوشتم؛ [۷] را ببینید. [۴۵]

در سال‌های ۵۵-۱۹۵۴، با کمک‌هزینه‌ی بنیاد علوم ملی، ما توانستیم یک سمینار بزرگ با کمک فوق‌العاده‌ی چهار دانش‌آموخته به نام‌های جوزف کیست [۴۶]، کارل کهلز [۴۷]، می‌نارد مانس فیلد [۴۸] و روبرت مک دوول [۴۹] برگزار کنیم. آهنگ آغاز سمینار آن‌گاه به صدا درآمد که گیلمن، جریسون، و من شروع به ارائه پیشینه‌ی مباحث کردیم. ما بی‌رحمانه امّا کاملاً دوستانه هم‌دیگر را سئوال‌پیچ کردیم. پیش از آغازِ سخن، این دانش‌آموختگان می‌دانستند که ما از آن‌ها چه انتظاری داریم؛ در واقع انتظار ما بحث درباره‌ی آن‌چه که واقعاً درک کرده بودند بود نه بحث درباره‌ی آن‌چه که فقط در متون مقالات روخوانی کرده بودند. واکنش آن‌ها عالی بود، بهتر از آن‌چه که هر یک از ما انتظار داشت و دیری نپایید که همه‌ی ما در این آوردگاهِ آموختن، شریک شده بودیم. هر کدام از آن‌ها رساله‌ی دکترایش را با کیفیت عالی نوشت، امّا تنها کهلز به‌طور محض رساله‌اش را در حلقه‌های توابع پیوسته نگاشت. رساله‌اش درباره‌ی ایدآل‌های اول در $C(X)$ بود که اساس بسیاری از مباحث فصل چهاردهم [۱۷] می‌باشد.

در تابستان سال ۱۹۵۵، گیلمن و من در یک سمینار شش هفته‌ای که در زمینه‌ی توپولوژی عمومی و توپولوژی نظریه–مجموعه‌ای در دانشگاه ویسکانسین به رهبری بینگ [۵۰] برگزار شد حضور یافتیم، که در آن برخی از پیشتازان در این زمینه‌ها را ملاقات کردیم. از آن‌جا که من هیچ‌گاه یک درس رسمی در توپولوژی نگذرانده‌ام، دل‌دادن به سخنرانی‌های سمینار، برای من ارزش ویژه‌ای داشت. در این کنفرانس، گیلمن این مسئله را مطرح کرد که چه تعداد P- نقطه در $\beta\omega \setminus \omega$ وجود دارد (که ω بیانگر فضای گسسته‌ی اردینال‌های متناهی است). والتر رودین [۵۱] به این پرسش در [۲۹] با نشان دادن این‌که اگر فرض پیوستار برقرار باشد، آن‌گاه $\beta\omega \setminus \omega$ یک مجموعه چگال از $P-$ نقطه‌ها دارد پاسخ داد. و در سال ۱۹۸۰، شلاه [۵۲] یک مدل از نظریه مجموعه‌ها به‌دست آورد به‌طوری که فرض پیوستار برقرار نبود و این فضا هیچ $P-$ نقطه‌ای را دربر نداشت؛ اثبات را در [۳۶] ببینید.

---

[۴۵] مترجم: ظاهراً این عادت هنریکسن به گذشته‌های دور برمی‌گردد، چرا که پس از حضور در سی و پنجمین کنفرانس ریاضی ایران در سال ۱۳۸۳ در اهواز، با یکی از دانشجویان کارشناسی ارشد پروفسور کرم‌زاده و با طرح مسئله‌ای از ایشان، مقاله‌ای در زمینه‌ی توپولوژی عمومی در ارتباط با فضاهای هم‌بند نوشته است.

[39] Paul Erdös [40] Notre Dam [41] Amsterdam [42] Dow [43] Shanks [44] Ellen Correl [46] Joseph Kist [47] Carl Kohls [48] Maynard Mansfield [49] Robert McDowell [50] Bing [51] Walter Rudin [52] Shelah

نگارش کتاب؛ پیوند اجزاء

هم‌چنان‌که در مقدمه‌ی [۱۷] نیز اشاره شده است، من پیشنهاد کردم که یادداشت‌های سمینار سال‌های ۱۹۵۴ــ ۵۵ به‌صورت یک کتاب درآید. من هرگز به‌طور شفاف نمی‌دانستم که باید چه چیزهایی را دربر بگیرد و در ذهنم یک گردآوری در حد یک رساله بود که سریع نگاشته شود. من سال‌های ۵۷-۱۹۵۶ را در یک دفترِ کار مشترک با ایزبل در مؤسسه مطالعات پیشرفته گذراندم؛ همان کسی که من با وی اولین مقاله‌ی مشترکم؛ یعنی [۲۲] را نوشته بودم. همکاری‌مان ادامه یافت تا این مسئله را نشان کردیم که چه‌هنگام فشرده‌سازی استون‌ـ‌چکِ یک حاصل‌ضرب با حاصل‌ضرب فشرده‌سازی‌های استون‌ـ‌چک آن‌ها یکی است. (در [۲۱] به‌طور نادرست بیان شده بود که این گزاره همواره برقرار است.) ما نتایج‌مان را در یک همایش در اواخر سال ۱۹۵۶ اعلان کردیم، تنها آموختیم که آن‌ها حالت‌های خاصی از آن‌چه که امروزه قضیه‌ی گلیکسبرگ [53] نامیده می‌شود بودند؛ یعنی این‌که برای فضاهای تیخانوف نامتناهی این گزاره برقرار است دقیقاً زمانی که حاصل‌ضرب، شبه‌فشرده باشد. نتایج ما به‌عنوان یک چکیده [۲۳] منتشر شد، در حالی که گلیکسبرگ مقاله‌ی بسیار بزرگ [۱۳] را می‌نوشت. در [۲۴] هدفمان بررسی این گزاره بود که فشرده‌سازی استون‌ـ‌چک یک فضای تیخانوف، چه‌هنگام موضعاً هم‌بند است. روشن شد که این حالت زمانی برقرار است که فضا موضعاً هم‌بند و شبه‌فشرده باشد. دیگر نتایج به خوبی حاصل شدند و خیلی از آن‌ها مستقلاً توسط باناچفسکی [54] در [۴] به‌دست آمدند. شاید اساسی‌ترین همکاری ما در مطالعه آن‌چه که امروز توابع کامل نامیده می‌شوند صورت گرفت؛ یعنی توابعی که بسته، پیوسته و تصویر معکوس نقاط تحت آن‌ها، فشرده باشند. تابع پوشا و پیوسته‌ی $f : X \to Y$ کامل است اگر و تنها اگر توسیع استون آن، یعنی $\beta f : \beta X \to \beta Y$، مجموعه‌ی $\beta X \setminus X$ را به‌روی $\beta Y \setminus Y$ بنگارد. به‌علاوه در این مقاله به بررسی خواص توپولوژیک $\mathcal{P}$ پرداختیم به‌گونه‌ای که اگر باقی‌مانده‌ی یک فشرده‌سازی تک‌نقطه‌ای X دارای خاصیت $\mathcal{P}$ باشد، آن‌گاه باقی‌مانده‌ی هر فشرده‌سازی، خاصیت $\mathcal{P}$ را داشته باشد و برعکس. از جمله‌ی این خواص، خاصیت لیندلف [55] و تمامیتِ چک است، امّا خاصیت نرمال بودن این‌چنین نیست؛ [۲۵] را ببینید.

ضمناً گیلمن و جریسون با جدیت روی پروژه کتاب کار می‌کردند. کتاب از نظر متن و مفاد، گسترش و از نظر کیفیت، بهبود می‌یافت. من کار روی آن را متوقف کردم و پس از آن به‌طور کلی، در حالی‌که از تصمیمم به‌عنوان یک همکار دیری نگذشته بود کناره‌گیری کردم. (کناره‌گیری از این پروژه یکی از احمقانه‌ترین تصمیماتی بود که من تا آن زمان گرفته بودم؛ در مقدمه‌ی [۱۷] با من سخاوتمندانه رفتار شده است). کار و هدفی که من نامش را کتاب نهادم ادامه یافت و من تا زمان برگشتنم از پرینستون [56] در سال ۱۹۵۷ از آن دور ماندم. پس از آن علاقه‌ی پژوهشی من به حلقه‌های مشبکه‌ای‌ـ‌مرتب سوق داده شد به‌طوری که توانستم برخی تکنیک‌های حلقه‌های توابع پیوسته را در حالت‌های ارشمیدسی به‌کار بگیرم. گیلمن در سال‌های ۶۰-۱۹۵۸ به مؤسسه مطالعات پیشرفته رفت و جریسون در سال‌های ۶۰-۱۹۵۸ آن‌جا بود. کتاب در سال ۱۹۶۰ چاپ شد و یک موفقیت بزرگ بود. این کتاب در دو دهه‌ی بعد در سمینارها و دوره‌های آموزشی در سرتاسر جهان مورد استفاده‌ی گسترده قرار گرفت. کتاب واقعاً خواندنی است و موضوعات زیادی به شکل مسائل چالش برانگیز در آن وجود دارد که می‌توانند توسط دانشجویان وظیفه‌شناس و علاقمند مورد بحث و بررسی قرار گرفته و حل شوند. من هرگز کتابی با این گستردگی ارجاعات ندیدم. تنها اشتباهی که در آن یافتم یک حذفِ غیرعمدی در چاپ بعدی کتاب بود. برای چندین نسلِ دانشجویان، مطالعه‌ی تمام این کتاب، نخستین گام برای رفتن به سوی نوشتن یک رساله در این راستا است.

از این‌که بازه‌ی زمانی این نوشته به دوره‌های بعد کشیده شود امتناع کردم، چراکه ادای دین شایسته به هر کسی که در این زمینه در دهه‌ی پنجاه همکاری کرده است فراتر از توان من است. همان‌طور که در [۱۷] ذکر شده است دیگر

[53] Glicksberg [54] Banachewski [55] Lindelof [56] Princeton

دانشجویان دانش‌آموخته‌ی پوردو که به تداوم کیفیت کتاب کمک کردندعبارتند از: بانی لوور [۵۷]، جانسون [۵۸]، ماک [۵۹] و وین برگ [۶۰] (هر کدام از آن‌ها به سوی نوشتن رساله‌ی دکترایشان گام برداشتند). برای نام و نشان دیگر استادان همکاری کننده که در این متن ذکر نشده‌اند به[۱۷] مراجعه کنید. به‌ویژه توجه شود که کار عمیق شیروتا [۶۱] روی فشرده حقیقی‌سازی وابسته به تتمیم‌های ساختارهای یکنواخت ([۳۰] را ببینید) الهام‌بخش فصل پانزده [۱۷] شد و قسمتی از فصل شانزده که درباره‌ی بُعد جبری است نتیجه‌ی کارِ کاتفت [۶۲] است؛ یادداشت‌های مربوط به فصل شانزده [۱۷] در بخشِ مراجع را ببینید.

در بهشتِ پوردو، برای مدت زمانی، شیوه‌ی اداره کردنِ یکی از رؤسای دانشکده علوم که قبلاً رئیس بخشِ ریاضی نیز بود، باعث بروز مشکلاتی شد و او اجازه نداد تا بخش ریاضی توان اداره کردن خود را داشته باشد. پس از دهه‌ی پنجاه، هم‌چنان‌که بازارِ کار رونق می‌گرفت، حوصله‌ی ریاضیدانانِ شایسته از رفتارهای بچگانه‌ای که با آن‌ها می‌شد به‌سر رفت و پوردو کم‌کم داشت موقعیتش را به‌عنوان یک مرکز فعالیت ریاضی از دست می‌داد. گیلمن به‌عنوان رئیس به دانشگاه روچستر [۶۳] رفت و من در سال ۱۹۶۰ به دانشگاه ایالتی وین [۶۴] در دیترویت [۶۵] رفتم (هرچند که در ۱۹۶۱ برای سال‌های اندکی برگشتم). هر سه‌ی ما به شدت درگیرِ کارهای اجرایی شدیم چرا که رشد و توسعه برنامه‌های دانشگاهی به واسطه‌ی خوشحالیِ ناشی از پرتاب ماهواره توسط روس‌ها، با افت و خیز روبه‌رو شده بود. روزگارانِ رویایی، برای حلقه‌های توابع پیوسته در پوردو به پایان رسیده بود.

ضمیمه

مرد فراموش شده‌ای که در گسترش حلقه‌های توابع پیوسته نقش داشت ناکانو [۶۶] بود. وی که با مقاله‌ی [۲۸] شروع کرد، سهم زیادی در این زمینه داشت که غالباً فقط به استون نسبت داده شد. کسانی از ما که در دهه‌ی پنجاه در پوردو حضور داشتند از کارش بی‌خبر بودند، هم‌چنان که بیشتر ریاضیدانان چنین بودند. محروم ماندن از سهمش در این عرصه، به خاطر قرار گرفتن در بخشی از ژاپن بود که درگیر جنگ جهانی دوم بود و هم‌چنین روی به‌کار بردن نمادهای خاص خودش پافشاری کرد و در ارائه‌ی گزارشِ شرحِ کارش به دیگران ناموفق بود.

بسیاری از ریاضیدانانی که حتی در دهه‌ی پنجاه در حلقه‌های توابع پیوسته سهم داشتند در بالا ذکر نشده‌اند. به‌خصوص اندرسون [۶۷] و بلی یر [۶۸] که مشخصه‌ی ذاتیِ جبریِ محض $C(X)$ را که تا آن زمان شناخته شده بود به‌دست آوردند؛ [۲] را ببینید. پس از نوشتن [۱۷] دو کتاب که رساله‌های توصیفی دکترا بودند و در دانشگاه کارنگی [۶۹] نوشته شده بودند پدیدار شدند. خواندن آن‌ها خواننده را با آثار چاپ شده در ارتباط با حلقه‌های توابع پیوسته تا سال ۱۹۴۷ آشنا می‌کند؛ [۳۴] و [۳۵] را ببینید. بیست‌وپنج سال پس از چاپ [۱۷]، آیول [۷۰] یک نشست ویژه در همایش سالانه‌ی AMS برپا کرد که نتایجش در [۱] چاپ شده است. در میان مقالات قابل توجه این مجله مقالاتی هستند که اطلاعات زیادی را درباره‌ی تاریخ حلقه‌های توابع پیوسته فراهم می‌آورند و در آن یک مقاله‌ی جالب از گیلمن با عنوان «حلقه‌های توابع پیوسته، حلقه هستند» وجود دارد که الهام‌بخش پژوهش بیشتر روی جنبه‌های جبری این مبحث شده است؛ [۱۲] را ببینید. بیشتر محققین از [۱۷] که سرشتی توپولوژیکی دارد الهام گرفتند.

در یک سخنرانی در کنفرانسی که در کوراکائو [۷۱] برگزار شد من تلاش کردم که یک بررسی مروری روی جنبه‌های جبری حلقه‌های توابع پیوسته تا اواسط دهه‌ی هشتاد داشته باشم؛ [۲۰] را ببینید.

امیدوارم که این سهمِ اندک، در تاریخ توپولوژی عمومی مفید واقع شود.

[57]Banilower [58]Johnson [59]Mack [60]Weinberg [61]Shirota [62]Katetov [63]Rochester [64]Wayne [65]Detroit [66]Nakano [67]Anderson [68]Blair [69]Carnegie-Mellon [70]Aull [71]Curacao

اضافه شده در ۲۳ فوریه ۱۹۹۶: من از هارت [72] سپاسگزارم برای این تذکرش که استون، آن‌چه را که ما امروزه هال_ کرنل توپولوژی می‌نامیم روی فضای ایدآل‌های اول یک حلقه بولی به‌کار برد، این توپولوژی را برای $C(X)$ در [۳۱] به‌کار نبست. به‌نظر می‌رسد که این کار بعدها برای اولین بار توسط گلفاند و کلموگروف در [۱۸] انجام شده است.

اضافه شده توسط مترجم: خاطرنشان شود که درباره‌ی سرگذشت حلقه‌های توابع پیوسته، مقاله‌ای مروری، آکنده از جنبه‌های تاریخی با عنوان «آشنایی با حلقه‌های توابع پیوسته» توسط برخی از اعضاء هیات علمی گروه ریاضی دانشگاه شهید چمران اهواز به رشته‌ی تحریر درآمده است که در مجله‌ی فرهنگ و اندیشه‌ی ریاضی، به شماره‌ی ۵۱ (زمستان ۹۱)، صص ۱۵ تا ۵۰ انتشار یافته است. این مقاله کاری است تحقیقی، جدی و ارزشمند، که پیش‌کسوتان و صاحب‌نظران این رشته در کشور نیز در نگارش آن سهمی به‌سزا داشته‌اند و خواندن آن به پژوهش‌گران و علاقمندان در این زمینه قویاً توصیه می‌شود. پروفسور کرم‌زاده علاوه بر همکاری و راهنمای‌های ارزنده در آن مقاله، سال‌ها پیش‌تر از آن نیز مقاله‌ای جالب و خواندنی در این راستا به رشته‌ی تحریر درآورده است که عنوان و نشانی آن در زیر پانویس شده است. [73]

مراجع

[1] C. Aull and (ed.), *Rings of Continuous Functions*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker, Inc., New York, 1985.

[2] F. Anderson and R. Blair, Characterizations of the algebra of all real-valued continuous functions on a completely regular space, *Illinois J. Math.*, **3** (1959) 121-133.

[3] M. Antonovskij, D. Chudovsky, G. Chudovsky and E. Hewitt, Rings of real-valued continuous functions II, *Math. Z.*, **176** (1981) 151-186.

[4] B. Banaschewski, Local connectedness of extension spaces, *Canad. J. Math.*, **8** (1956) 395-398.

[5] E. Beckenstein, L. Narici and C. Suffel, *Topological Algebras*, **24**, Mathematics Studies, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1977.

[6] E. Čech, On bicompact spaces, *Ann. of Math.*, **38** (1937) 823-844.

[7] E. Correl and M. Henriksen, On rings of continuous functions with values in a division ring, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **7** (1956) 194-198.

[8] J. Dieudonné, Review of Rings of real-valued continuous functions I, *Mathematical Reviews*, **10** (1949) 126-127.

[9] A. Dow, On ultrapowers of Boolean algebras, *Topology Proc.*, **9** (1984) 269-291.

[10] E. van Douwen, Remote points, *Dissertationes Math.*, **188** (1981) 1-45.

[11] P. Erdös, L. Gillman and M. Henriksen, An isomorphism theorem for real-closed fields, *Ann. of Math. (2)*, **61** (1955) 542–554.

[12] L. Gillman, *Rings of continuous functions are rings*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **95**, Dekker, New York, 1985.

[13] I. Glicksberg, Stone-Čech compactifications of products, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **90** (1959) 369-382.

[14] L. Gillman and M. Henriksen, Concerning rings of continuous functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **77** (1954) 340-362.

[15] ———, Rings of continuous functions in which every finitely generated ideal is principal, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **82** (1956) 366-391.

[72]Hart [73]O.A.S. Karamzadeh, On the Birth And Growth of $C(X)$, Proceeding of the 11th Algebra Seminar of Iranian Mathematical Socity, Isfahan University of Tecnology, Isfahan. October 27-29, 1999, pp. 158-170.

[16] L. Gillman, M. Henriksen and M. Jerison, On a theorem of Gelfand and Kolmogoroff concerning maximal ideals in rings of continuous functions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **5** (1954) 447-455.

[17] L. Gillman and M. Jerison, *Rings of continuous functions*, D. Van Nostrand Publ. Co., Inc., London-New York, 1960.

[18] I. Gelfand and A. Kolmogoroff, On rings of continuous functions of a topological space, *Doklady Akad. Nauk.*, **22** (1939) 11-15.

[19] M. Henriksen, On the ideal structure of the ring of entire functions, *Pacific. J. Math.*, **2** (1952) 179-184.

[20] ———, *Rings of continuous functions from an algebraic point of view*, Ordered Algebraic Structures, Math. Appl., **55**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1989.

[21] E. Hewitt, Rings of real-valued continuous functions I, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **64** (1948) 54-99.

[22] M. Henriksen and J. Isbell, On the continuity of the real roots of an algebraic equation, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **4** (1953) 431-434.

[23] ———, On the stone-Čech compactification of the product of two spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **63** (1957) 145-146.

[24] ———, Local connectedness in the stone-Čech compactification, *Illinois J. Math.*, **1** (1957) 574-582.

[25] ———, Some properties of compactifications, *Duke Math. J.*, **25** (1958) 83-105.

[26] J. Isbell, More on the continuity of the real roots of an algebraic equation, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **5** (1954) 439.

[27] L. Loomis, *An Introduction to Abstract Harmonic Analysis*, D. Van Nostrand Publ. Co., New York, 1953.

[28] H. Nakano, Über das System aller stetigen Funktionen auf einem topologischen Raum, *Proc. Imp. Acad, Tokyo*, **17** (1941) 308-310.

[29] W. Rudin, Homogeneity problems in theory of Cech compactifications, *Duke Math. J.*, **23** (1956) 409-419.

[30] T. Shirota, A class of topological spaces, *Osaka Math. J.*, **4** (1952) 23-40.

[31] M. H. Stone, Applications of the theory of Boolean rings to general topology, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **41** (1937) 375-481.

[32] A. Tychonoff, Über die topologische Erweiterung von Raümen, *Math. Ann.*, **102** (1930) 544-561.

[33] P. Urysohn, Zum metrisation Problem, *Math. Ann.*, **94** (1925) 309-315.

[34] R. Walker, *The Stone-Čech Compactification*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, **83**, Springer-Verlag, New York, 1974.

[35] M. Weir, Hewitt-Nachbin Spaces, *Mathematical Studies*, **17**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1975.

[36] E. Wimmers, The Shelah P-point independence theorem, *Israel J. Math.*, **43** (1982) 28-48.

رستم محمدیان

خوزستان، اهواز، بلوار گلستان، دانشگاه شهید چمران اهواز، گروه ریاضی

mohamadian-r@scu.ac.ir

رستم محمدیان متولد ۱۳۵۱ در خوزستان است. وی در سال ۱۳۶۹ وارد مقطع کارشناسی رشته ریاضی دانشگاه اصفهان و سال بعد از آن به دانشگاه شهید چمران اهواز رفت. در سال ۱۳۷۶ وارد مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی، گرایش جبر شد و تحت نظر دکتر منصور معتمدی از پایان‌نامه خود در زمینه نظریه حلقه‌ها دفاع کرد. وی در سال ۱۳۸۱ وارد مقطع دکتری رشته ریاضی گرایش توپولوژی شد و در سال ۱۳۸۵ از پایان‌نامه خود در زمینه حلقه‌های توابع پیوسته تحت نظر دکتر فریبرز آذرپناه دفاع کرد. او از ۱۳۸۵ تاکنون عضو هیات علمی گروه ریاضی دانشگاه شهید چمران اهواز است. علایق پژوهشی وی توپولوژی، حلقه توابع پیوسته، تاریخ ریاضی و آموزش ریاضی است.