ریاضی و جامعه
شاپا (چاپی): ۶۴۹۳-۲۳۴۵، شاپا(الکترونیکی): ۶۵۰۷-۲۳۴۵
جلد ۱، شماره ۱ (۱۳۹۵)، صص ۶۶ـ۵۹

http://math-sci.iranjournals.ir
http://www.ui.ac.ir

روش لاگرانژی تکمیل‌شده و کاربردهای آن در پردازش سیگنال

سمیه احمدی بنی

چکیده. در این مقاله روش لاگرانژی تکمیل‌شده را که الگوریتمی برای حل مسائل بهینه‌سازی مقید است، بررسی می‌کنیم و سپس، آن را با روش جریمه مقایسه می‌کنیم. ابتدا به بررسی این روش می‌پردازیم و سپس نرم‌افزارهایی را که از این روش استفاده می‌کنند را معرفی می‌نماییم. روش‌های نویززدایی تغییرات کلی و سنجش فشرده را به عنوان کاربردی از روش لاگرانژی تکمیل‌شده معرفی می‌نماییم که در پردازش سیگنال استفاده می‌شوند. هم‌چنین برخی کاربردهای روش سنجش فشرده در صنعت و فناوری را بیان می‌نماییم.

۱. مقدمه

در ریاضیات، علوم کامپیوتر و اقتصاد، بهینه‌سازی به انتخاب عناصر بهینه از یک مجموعه از عناصر قابل دستیابی می‌پردازد؛ به عبارت دیگر، به دنبال یافتن بهترین مقدار قابل دستیابی از یک تابع هدف تعریف شده بر یک دامنه معین از مقادیر است. الگوریتم‌های بسیاری برای این هدف وجود دارند. روش لاگرانژی تکمیل‌شده[1] یک کلاس خاص از الگوریتم‌ها برای حل مسائل بهینه‌سازی مقید است.

این روش شباهت‌هایی به روش جریمه[2] در جایگزینی مسئله بهینه‌سازی مقید با یک سری از مسائل نامقید دارند. تفاوت این روش با روش جریمه در این است که روش‌های لاگرانژی تکمیل‌شده یک عبارت بیش‌تر به هدف غیرمقید اضافه می‌کنند. این عبارت اضافی براساس ضرایب لاگرانژ طراحی شده است. برای تعریف این ضرایب، مسئله بهینه‌سازی مقید زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ & C_i(x) = 0 \quad \forall i \in I, \\ & x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{۱}$$

به طوری‌که $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ و $C_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ برای هر $i \in I$، توابعی مشتق‌پذیر پیوسته‌اند. f را تابع هدف و C_iها را قیود تساوی می‌نامیم.

تابع لاگرانژ برای مسئله‌ی (۱) را به صورت

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i \in I} \lambda_i C_i(x).$$

عبارات و کلمات کلیدی. برنامه‌ریزی مقید، روش جریمه، روش لاگرانژی تکمیل‌شده، سنجش فشرده، نویززدایی تغییرات کلی.
تاریخ دریافت: ۱۳۹۲/۰۷/۲۲ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۲/۰۸/۲۸ .

[1]Augmented Lagrangian method [2]penalty

تعریف می‌کنند. λ_i برای $i \in I$ را ضرایب لاگرانژ می‌نامند. جواب مسئله‌ی (۱) را می‌توان با مینیمم نمودن تابع لاگرانژ یافت. لازم به ذکر است که جواب مسئله باید در قید تساوی هم صدق کند. به این روش، روش ضرایب لاگرانژ می‌گوییم.

باید به این نکته توجه کرد که روش لاگرانژی تکمیل‌شده شبیه روش ضرایب لاگرانژ نیست. در واقع می‌توان مشاهده کرد که تابع هدف مسئله غیر مقید در روش لاگرانژی تکمیل‌شده، همان لاگرانژین مسئله مقید با یک عبارت جریمه بیش‌تر می‌باشد.

این روش در اصل به عنوان روش ضرایب[3] شناخته شده بود و در دهه‌ی ۱۹۷۰ تا ۱۹۸۰ به عنوان جایگزین مناسبی برای روش‌های جریمه مورد مطالعه قرار گرفت. این روش برای اولین بار توسط مگنوس هستینز[4] در سال ۱۹۶۹[۴] و توسط پاول[5] در سال ۱۹۶۹[۶] مورد بحث قرار گرفت. این روش توسط راکفلر[6] در رابطه با دوگانگی فنچل[7] مورد مطالعه قرار گرفت. هم‌چنین این روش توسط دیمیتری برسکاس[8] در کتاب وی در سال ۱۹۸۲[۱] مورد بررسی قرار گرفت.

از دهه‌ی ۱۹۷۰ روش‌های برنامه‌ریزی درجه دوم دنباله‌ای[9] (SQP) و نقطه درونی[10] (IPM) بیش‌تر مورد توجه قرار گرفتند. روش لاگرانژی تکمیل‌شده بار دیگر توسط سیستم‌های بهینه‌سازی LANCELOT و AMPL مطرح شد. این روش هنوز هم برای بعضی مسائل مفید است.

در حدود سال ۲۰۰۷ روش‌های لاگرانژی تکمیل‌شده در زمینه‌هایی مانند نویززدایی تغییرات کلی[11] و سنجش فشرده[12] مورد استفاده قرار گرفت.

این مقاله به پنج بخش تقسیم شده است. در بخش بعد به معرفی روش جریمه می‌پردازیم و روش لاگرانژی تکمیل‌شده را در بخش سوم معرفی می‌نماییم و آن را با روش جریمه مقایسه می‌کنیم و نرم‌افزارهایی را که از این روش استفاده کرده‌اند، معرفی می‌نماییم. در بخش‌های ۴ و ۵ دو کاربرد روش لاگرانژی تکمیل‌شده را معرفی می‌کنیم.

در این مقاله روش‌ها را برای آشنایی به صورت خلاصه معرفی می‌کنیم و وارد جزئیات اثبات نمی‌شویم و سعی می‌نماییم که بیش‌تر به بیان کاربردها بپردازیم.

۲. روش جریمه

مسئله‌ی (۱) می‌تواند با استفاده از یک سری مسائل بهینه‌سازی نامقید حل شود. روش جایگزینی مسئله مقید با یک سری مسائل نامقید همراه با یک جمله جریمه را روش جریمه می‌نامیم. روش جریمه در هر مرحله مسئله زیر را حل می‌کند:

$$\begin{array}{ll} \min & \Phi_k(x) = f(x) + \mu_k \sum_{i\in I} C_i(x)^۲ \\ \texttt{s.t.} & x \in \mathbb{R}^n. \end{array}$$

سپس در مرحله بعد مسئله را با استفاده از یک مقدار بزرگ‌تر μ_k، که به آن پارامتر جریمه می‌گوییم، و جواب مرحله فعلی به عنوان حدس اولیه، دوباره حل می‌کند. تابع $\Phi_k(x)$ شامل یک جمله‌ی جریمه ($\mu_k \sum_{i\in I} C_i(x)^۲$) است. زمانی که قیدی از قیود مسئله نقض شود این جریمه باعث افزایش $\Phi_k(x)$ می‌شود.

---
[3] method of multipliers [4] Magnus Hestenes [5] Powell [6] R. Rockafellar [7] Fenchel duality [8] Dimitri Bertsekas [9] sequential quadratic programming [10] interior point [11] total-variation denoising [12] compressed sensing

مثال ۱.۲. *مسئله مقید زیر را در نظر بگیرید:*

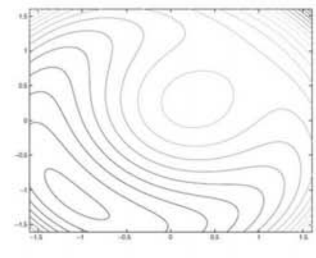
$$\begin{aligned} \min \quad & x_۱ + x_۲ \\ & x_۱^۲ + x_۲^۲ - ۲ = ۰, \\ & x_۱, x_۲ \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

جواب این مسئله $x^* = (-۱,-۱)^t$ می‌باشد. تابع جریمه این مسئله به صورت زیر می‌باشد:

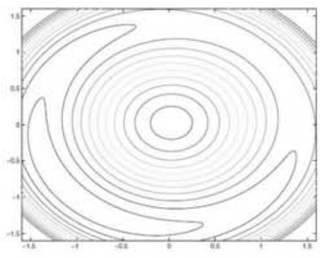
$$\Phi(x) = x_۱ + x_۲ + \mu(x_۱^۲ + x_۲^۲ - ۲)^۲$$

اگر $\mu = ۱/۲$ آنگاه مجموعه ترازهای $\Phi(x)$ در شکل (۱) نشان داده شده است. با توجه به شکل، مینیمم $\Phi(x)$ نزدیک نقطه‌ی $(-۱/۱,-۱/۱)^t$ می‌باشد.

اگر $\mu = ۵$ آنگاه مجموعه ترازهای $\Phi(x)$ در شکل (۲) نشان داده شده است. مینیمم $\Phi(x)$ در این شکل نسبت به حالت قبل خیلی نزدیک به $(-۱,-۱)$ است. پس انتخاب مناسب پارامتر جریمه بسیار مهم است.



شکل ۱: مجموعه ترازهای $\Phi(x)$ با $\mu = ۱/۲$



شکل ۲: مجموعه ترازهای $\Phi(x)$ با $\mu = ۵$

این روش دارای مشکلاتی می‌باشد. یکی از مشکلات روش جریمه انتخاب مناسب پارامتر جریمه می‌باشد. معمولا یک کران بالا برای μ وجود دارد که به ازای آن تابع $\Phi_k(x)$ مینیمم ندارد ولی این کران را نمی‌توان بدست آورد. انتخاب خیلی بزرگ μ می‌تواند باعث تولید نقطه‌ی ناموجهی برای مسئله یا باعث غیرکراندار شدن $\Phi_k(x)$ می‌شود. از طرف دیگر انتخاب خیلی کوچک μ باعث کاهش اثر جمله جریمه و کندی همگرایی روش به جواب مسئله‌ی (۱) می‌شود.

۳. روش لاگرانژی تکمیل‌شده

این روش یک جمله بیش‌تر از روش جریمه دارد که از ضرایب لاگرانژ استفاده می‌کند. روش لاگرانژی تکمیل‌شده از تابع هدف نامقید زیر استفاده می‌نماید:

$$\begin{array}{ll} \min & \Phi_k(x) = f(x) + \frac{\mu_k}{۲}\sum_{i\in I} C_i(x)^{۲} - \sum_{i\in I}\lambda_i C_i(x) \\ \texttt{s.t.} & \qquad x \in X. \end{array}$$

در این روش علاوه بر به‌روزرسانی μ_k در هر مرحله، متغیر λ نیز با رابطه زیر تغییر می‌کند:

$$\lambda_i - \mu_k C_i(x_k) \to \lambda_i$$

به‌طوریکه x_k جواب مسئله‌ی نامقید در مرحله‌ی kام می‌باشد یعنی $x_k = \texttt{argmin}\ \Phi_k(x)$. متغیر λ تخمینی از ضریب لاگرانژ است که دقت و صحت این تخمین در هر مرحله بهبود می‌یابد.

حال الگوریتم این روش را بیان می‌کنیم.

الگوریتم ۱.۳. *الگوریتم روش لاگرانژی تکمیل‌شده*

گام ۰. نقطه‌ی شروع $x_۰^s$، $\lambda^۰$، تولرانس $\tau_۰ > ۰$ و $\mu_۰ > ۰$ را انتخاب نمایید و قرار دهید $k = ۰$.

گام ۱. مینیمم تقریبی x_k تابع $\Phi_k(x;\mu_k)$ را با شروع از نقطه‌ی x_k^s بیابید و اگر $\|\nabla_x \Phi_k(x_k;\mu_k)\| \leq \tau_k$ آنگاه توقف کنید. x_k جواب تقریبی است. در غیر این‌صورت به گام ۲ بروید.

گام ۲. ضرایب لاگرانژ را به صورت زیر به روز نمایید.

$$\lambda^{k+۱} = \lambda^k - \mu_k C_i(x_k)$$

پارامتر جریمه $\mu_{k+۱} \geq \mu_k$ و تولرانس $\tau_{k+۱}$ را انتخاب کنید و قرار دهید $x_{k+۱}^s = x_k$ و $k = k+۱$ و به گام ۱ بروید.

مزیت عمده این روش این است که برخلاف روش جریمه برای حل مسئله مقید اصلی لازم نیست که متغیر μ خیلی بزرگ انتخاب شود؛ در واقع این به دلیل حضور عبارت مربوط به ضریب لاگرانژ است. همچنین هزینه محاسباتی اضافی روش لاگرانژی تکمیل‌شده نسبت به روش جریمه کمتر است.

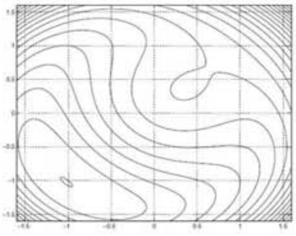
مثال ۲.۳. *مسئله مقید زیر را در نظر بگیرید:*

$$\begin{array}{ll} \min & x_۱ + x_۲ \\ & x_۱^۲ + x_۲^۲ - ۲ = ۰, \\ & x_۱, x_۲ \in \mathbb{R}. \end{array}$$

جواب این مسئله $x^* = (-۱,-۱)^t$ و ضریب لاگرانژ $\lambda^* = -۱/۲$ است. تابع لاگرانژی تکمیل‌شده به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Phi(x) = x_۱ + x_۲ - \lambda(x_۱^۲ + x_۲^۲ - ۲) + \frac{\mu}{۲}(x_۱^۲ + x_۲^۲ - ۲)^۲$$

فرض کنید $\mu = ۱$. تخمین ضریب لاگرانژ مربوط به این مرحله $\lambda = -۰/۴$ است. مجموعه ترازهای تابع $\Phi(x)$ در شکل (۳) نشان داده شده است. مینیمم تابع $\Phi(x)$ با توجه به شکل برابر با $(-۱/۰۲, -۱/۰۲)$ است و نسبت به روش جریمه در مثال ۱,۲ به x^* نزدیک‌تر می‌باشد.



شکل ۳: مجموعه ترازهای $\Phi(x)$ با $\mu = ۱$ و $\lambda = -۰/۴$

این روش می‌تواند برای قیود نامساوی هم تعمیم یابد. برای توضیحات بیش‌تر در مورد این روش به مرجع [۵] مراجعه نمایید.

۱.۳. نرم‌افزار. بسته‌های نرم‌افزاری LANCELOT و PENNON ، نرم‌افزارهای معروفی هستند که از روش لاگرانژی تکمیل‌شده استفاده می‌نمایند. نرم‌افزار MINOS هم برای حل برخی مسائل از این روش استفاده می‌کند.

۴. نویززدایی تغییرات کلی

در پردازش سیگنال، نویززدایی تغییرات کلی که به آن تنظیم تغییرات کلی[13] هم گفته می‌شود، یک فرآیند است که اغلب در پردازش تصویر دیجیتال برای حذف نویز استفاده می‌شود. سیگنال‌ها با جزئیات بیش از حد و احتمالا جعلی تغییرات کلی زیادی دارند. روش نویززدایی تغییرات کلی که هدف آن کاهش تغییرات کلی سیگنال‌هاست به‌طوریکه نزدیک به سیگنال اصلی باشند، جزئیات ناخواسته را حذف می‌کند و حافظ جزئیات مهم مانند زاویه‌ها می‌باشد. این مفهوم توسط رودین[14] و همکارانش در سال ۱۹۹۲ مطرح شد.

این تکنیک حذف نویز دارای مزایایی نسبت به تکنیک‌های ساده‌ای مثل هموارکردن خطی[15] یا فیلتر نمودن متوسط[16] است که نویز را کاهش می‌دهند اما زاویه‌ها را یک درجه کمتر یا بیشتر هموار می‌کنند. اما تکنیک نویززدایی تغییرات کلی به طور قابل ملاحظه‌ای در حفظ گوشه‌ها به‌طور هم‌زمان با هموار نمودن نویز موثر است حتی نسبت تبدیل سیگنال به نویز را هم کم می‌کند.

شکل ۴ مثالی از برنامه کاربردی رودین و همکارانش می‌باشد. تصویر سمت چپ تصویر اصلی و تصویر وسط تصویر همراه با نویز و اختلال یافته می‌باشد. تصویر سمت راست توسط برنامه کاربردی رودین اصلاح شده است.

شکل ۴: مثالی از برنامه کاربردی رودین و همکارانش

[13]total variation regularization [14]Rudin [15]linear smoothing [16]median filtering

۱.۴. تفسیر ریاضی سیگنال‌های دیجیتال $\text{۱}D$. برای سیگنال دیجیتال y می‌توانیم به عنوان مثال تغییرات کل را به صورت زیر تعریف نماییم:

$$V(y) = \sum_n |y_{n+1} - y_n|.$$

برای یک سیگنال ورودی x_n داده شده، هدف نویززدایی تغییرات کلی پیدا کردن یک تقریب به نام y_n است که دارای تغییرات کلی کوچک‌تر از x_n اما نزدیک به x_n باشد. یک معیار سنجش نزدیکی، مجموع مربعات خطاهاست:

$$E(x, y) = \frac{1}{2} \sum_n (x_n - y_n)^2.$$

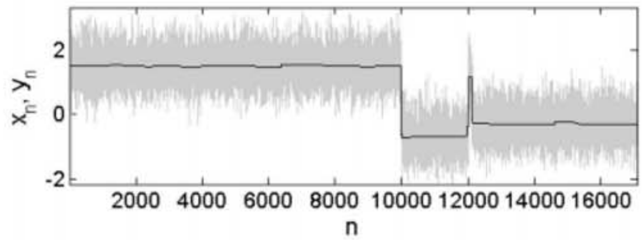
بنابراین مسئله نویززدایی تغییرات کلی مقدار تابعک زیر را روی سیگنال y_n مینیمم می‌کند:

$$E(x, y) + \lambda V(y). \tag{۲}$$

با مشتق گرفتن از این تابعک نسبت به y_n می‌توانیم معادله‌ی اویلر–لاگرانژ مربوط به آن را بدست آوریم که با سیگنال اصلی x_n به عنوان شرط اولیه، تقریب y_n بدست می‌آید.

از طرف دیگر، از آن‌جایی‌که تابعک (۲) تابعکی محدب است، روش بهینه‌سازی محدب می‌تواند برای مینیمم نمودن آن و پیدا کردن جواب y_n استفاده شود.

شکل (۵) کاربردی از نویززدایی تغییرات کلی ۱D است. قسمت خاکستری سیگنال اصلی و قسمت سیاه سیگنال حاصل از حذف نویزها می‌باشد.



شکل ۵: کاربرد نویززدایی تغییرات کلی ۱D

۲.۴. ویژگی‌های تنظیم. پارامتر تنظیم λ نقش مهمی در روند نویززدایی دارد. وقتی که $\lambda = 0$، رفع نویزی وجود ندارد و نتیجه همانند سیگنال ورودی است. چون $\lambda \to \infty$ بنابراین، تغییرات کلی نقش فزاینده‌ای دارد به این صورت که نتیجه را به داشتن تغییرات کلی کوچک‌تر و با هزینه‌ای کمتر از سیگنال ورودی (اختلال یافته) وادار می‌سازد. در نتیجه انتخاب پارامتر تنظیم برای دستیابی به تنها مقدار مناسب از حذف نویز، بسیار مهم است.

۳.۴. سیگنال‌های دیجیتال $\text{۲}D$. حال سیگنال‌های $\text{۲}D$ی y، مانند تصاویر، را در نظر می‌گیریم. نرم تغییرات کلی ارائه شده توسط مرجع [۷] به صورت زیر است:

$$V(y) = \sum_{i,j} \sqrt{|y_{i+1,j} - y_{i,j}|^2 + |y_{i,j+1} - y_{i,j}|^2}$$

و همگن و غیرمشتق‌پذیر است. یک تغییر که گاهی اوقات استفاده می‌شود نسخه ناهمگن است که برای مینیمم‌سازی آسان‌تر می‌باشد:

$$V_{an-iso}(y) = \sum_{i,j} |y_{i+1,j} - y_{i,j}| + |y_{i,j+1} - y_{i,j}|.$$

مسئله‌ی تغییرات کلی استاندارد هنوز هم به فرم

$$E(x, y) + \lambda V(y)$$

می‌باشد که در آن E نرم اقلیدسی 2D است. برخلاف صورت 1D، حل این مسئله غیربدیهی است. الگوریتمی که این مسئله را حل می‌کند معروف به الگوریتم Chambolle است. با توجه به تحقیقات گسترده‌ای که درباره سنجش فشرده در اواسط دهه‌ی ۲۰۰۰ انجام شد، الگوریتم‌های زیادی مانند روش تقسیم برگمن[17] انواع این مسائل را حل می‌کنند.

۵. سنجش فشرده

سنجش فشرده[18] یک روش پردازش سیگنال برای بدست آوردن و بازسازی یک سیگنال کارآمد، توسط پیداکردن راه‌حل برای دستگاه‌های خطی فرومعین است.

یک دستگاه فرومعین از معادلات خطی به این صورت است که تعداد مجهولات آن از تعداد معادلات بیش‌تر است و به‌طور کلی تعداد نامحدودی جواب دارد. به منظور انتخاب یک جواب برای چنین دستگاه‌هایی باید یا محدودیت‌های اضافی اعمال کنیم و یا مانند یک صافی یکی از جواب‌ها را انتخاب کنیم. سنجش فشرده قیدی را به این دستگاه‌ها اضافه می‌نماید که جواب‌هایی را که تعداد عناصر غیر صفر آن‌ها کمتر است، انتخاب کند.

۱.۵. کاربردها. رشته سنجش فشرده به موضوعات دیگری در پردازش سیگنال و ریاضیات محاسباتی مرتبط است. تکنیک‌های تصویر برداری میل ترکیبی زیادی با سنجش فشرده در زمینه‌های دیافراگم رمزی[19] و عکاسی محاسباتی دارند.

۱.۱.۵. عکاسی. سنجش فشرده در یک سنسور دوربین تلفن همراه استفاده می‌شود. همچنین این روش در دوربین‌های تک پیکسلی دانشگاه رایس[20] استفاده شده است. آزمایشگاه‌های بل تکنیکی در یک دوربین تک پیکسلی فاقد لنز به‌کار گرفته است به این صورت که عکس‌هایی با استفاده از عکس‌های فوری مکرر از دیافراگم‌های به طور تصادفی انتخاب شده از یک شبکه می‌گیرد. در حالی که لنز مربوط به زوم حذف شده است، کیفیت تصویر با تعدادی از عکس‌های فوری بهبود می‌یابد. همچنین این کار به اطلاعات تصویربرداری چندانی نیاز ندارد.

۲.۱.۵. دوربین‌های مادون قرمز موج کوتاه. شرکت فن‌آوری InView دوربین‌های تجاری دارای مادون قرمز موج کوتاه مبتنی بر سنجش فشرده را توسعه داده است. این دوربین‌ها حساس به نور با طول موج ۰٫۹ میکرومتر تا ۱٫۷ میکرومتر هستند که طول موج‌های نامرئی برای چشم انسان می‌باشند.

۳.۱.۵. تحقیقات روی سیستم‌های نوری. شرکت InView ایستگاه‌های سنجش متراکم نوری را توسعه داده است که به محققان سیستم‌های نوری اجازه‌ی توسعه و تست مدولاسیون و الگوریتم‌های بازسازی جدید را می‌دهد.

[17]split-Bregman [18]compressed sensing [19]Coded aperture [20]Rice University

۴.۱.۵. تشخیص چهره. سنجش فشرده در حال استفاده در نرم‌افزارهای تشخیص چهره می‌باشد.

۵.۱.۵. MRI. سنجش فشرده برای کوتاه کردن جلسات اسکن MRI بر روی سخت‌افزارهای معمولی استفاده شده است.

مراجع

[1] D. P. Bertsekas, *Constrained optimization and Lagrange multiplier methods*, Athena Scientific, 1996.

[2] A. Chambolle, An algorithm for total variation minimization and applications, *J. Math. Imaging Vision*, 20 (2004) 89–97.

[3] J. Eckstein and D. P. Bertsekas, On the Douglas-Rachford splitting method and the proximal point algorithm for maximal monotone operators, *Math. Programming*, 55 (1992) 293–318.

[4] M. R. Hestenes, Multiplier and gradient methods, *J. Optimization Theory Appl.*, 4 (1969) 303–320.

[5] J. Nocedal and S. J. Wright, *Numerical Optimization*, (2nd ed.), Berlin, New York, 2006.

[6] M. J .D. Powell, A method for nonlinear constraints in minimization problems, in Optimization ed. by R. Fletcher, Academic Press, New York, (1969) 283–298.

[7] L. I. Rudin, S. Osher and E. Fatemi, Nonlinear total variation based noise removal algorithms, *Physica D*, 60 (1992) 259–268.

سمیه احمدی بنی
اصفهان، خیابان هزار جریب، دانشگاه اصفهان، گروه ریاضی
s۶۸.ahmady@gmail.com

سمیه احمدی بنی متولد اردیبهشت ماه ۱۳۶۸ در شهر اصفهان است. وی در سال ۱۳۸۶ وارد مقطع کارشناسی ریاضی کاربردی دانشگاه اصفهان شد و در سال ۱۳۹۰ با سهمیه استعداد درخشان وارد مقطع کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی، گرایش تحقیق در عملیات شد. وی در تاریخ ۱۳۹۲/۶/۱۶ تحت نظر خانم دکتر نوشین موحدیان عطار از پایان‌نامه‌ی خود دفاع کرد. علایق پژوهشی وی در زمینه روش‌های بهینه‌سازی می‌باشد.