

روشی برای محاسبه دترمینان ماتریس سه قطری

منا شه سواری

چکیده. در این نوشته ابتدا روشی بازگشتی و سپس دو الگوریتم را برای پیدا کردن دترمینان حالت خاصی از ماتریس سه قطری $n \times n$ توضیح داده‌ایم به گونه‌ای که توسط آنها بتوان بدون محاسبه دترمینان به شیوه معمول آن را به دست آورد و در مواردی، محاسبات دترمینان بسی ساده‌تر صورت گیرد. در روش اول به کمک دترمینان ماتریس‌های سه قطری از اندازه کوچکتر، از نوع همان ماتریس به صورتی بازگشتی محاسبه دترمینان انجام می‌شود. در الگوریتم اول به کمک خود ماتریس و با قرار دادن یک سری بلوک‌های 2×2 در طی مراحل و با شیوه‌ای که در طول مقاله توضیح داده شده است روی قطر اصلی ماتریس، دترمینان را به دست می‌آوریم و در الگوریتم دوم به کمک دو جدول که عناصر واقع در خانه‌های هر کدام از جدول ها با الگوریتم خاصی به دست می‌آیند دترمینان ماتریس را به محاسبه می‌کنیم.

۱. مقدمه

به هر ماتریس مربعی A روی میدان k اسکالری به نام دترمینان A نسبت داده می‌شود. این اسکالر معمولاً با $\det(A)$ یا $|A|$ نمایش داده می‌شود. تابع دترمینان اولین بار در بررسی دستگاه‌های معادلات کشف شد و در بررسی و به دست آوردن خواص یک عملگر خطی، ابزار لازمی است. تعریف دترمینان را می‌توان در حالتی که درایه‌های ماتریس در یک حلقه جابجایی‌اند به کار برد [۱]. اما در تعریف دترمینان به کمک جایگشت‌ها دترمینان ماتریس مربعی $A = (a_{ij})_{n \times n}$ مجموعه زیر است که روی تمام جایگشت‌های $\sigma = j_1 j_2 \dots j_n$ در S_n جمع‌بندی می‌شود [۲].

$$|A| = \sum_{\sigma} (sgn \sigma) a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$$

یعنی

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} (sgn \sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

با توجه به این قضیه که، دترمینان ماتریس $A = (a_{ij})$ مساوی مجموع حاصلضرب‌های حاصل از ضرب عناصر هر سطر (ستون) در هم‌عامل‌های (دترمینان ماتریس حاصل از حذف سطر و ستون مربوط آن عنصر) آنهاست، می‌توان نوشت

$$|A| = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in} = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}$$

و

$$|A| = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \dots + a_{nj} A_{nj} = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij}$$

عبارات و کلمات کلیدی. دترمینان، ماتریس سه قطری، بلوک 2×2 .
تاریخ دریافت: ۱۳۹۲/۰۵/۲۹ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۲/۰۸/۲۱.

ماتریس سه قطری $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ به فرم زیر است:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & b_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & c_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

که برای $a_{ij} = 0$ ، $|i - j| \geq 2$ است [۸، ۶، ۳]. علاقه به ماتریس‌های سه قطری در رشته‌های مختلف در حال افزایش است مخصوصاً در بخش‌های کاربردی مانند آنالیز عددی، چند جمله‌ای‌های متعامد، مهندسی، آنالیز سیستم‌های مخبراتی، شناسایی سیستم، پردازش سیگنال، توابع خاص، معادلات دیفرانسیل جزئی و طبیعتاً جبر خطی [۸، ۶، ۵، ۳]. در خیلی از این بخش‌ها معکوس ماتریس لازم است و فرمول‌ها و الگوریتم‌هایی برای پیدا کردن معکوس ماتریس سه قطری به دست آمده است [۸، ۶، ۵، ۳]. همچنین برای درمیان ماتریس بلوک سه قطری نیز بررسی‌هایی صورت گرفته [۴] و برای محاسبه درمیان ماتریس سه قطری با $O(n)$ الگوریتمی ارائه شده است [۷]. ما در این مقاله قصد داریم الگوریتم‌ها و روش‌هایی را برای به دست آوردن درمیان حالت خاصی از ماتریس‌های سه قطری ارائه دهیم. در این نوشته از ماتریس‌های سه قطری استفاده کرده‌ایم که درایه‌های هر قطر آن به طور جداگانه برابرند مانند ماتریس 3×3 زیر:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & a & b \\ 0 & c & a \end{pmatrix}$$

در ادامه منظور از ماتریس سه قطری، این گونه ماتریس‌ها است.

۲. متن اصلی

فرض کنیم A ماتریس $n \times n$ سه قطری باشد، به طوری که قطر اصلی آن، درایه‌هایش a و قطر بالای قطر اصلی، درایه‌هایش b و قطر پایین قطر اصلی، درایه‌هایش c باشد یعنی:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \dots & \dots & 0 \\ c & a & b & \dots & \dots & 0 \\ 0 & c & a & b & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & c & a & b \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c & a \end{pmatrix}$$

چنین ماتریسی را با $A(a, b, c)_n$ نمایش می‌دهیم. با روشی که در زیر توضیح داده خواهد شد، ثابت خواهیم کرد:

$$\text{قضیه ۱.۲} \quad \det A(a, b, c)_n = a \times \det A(a, b, c)_{n-1} - bc \times \det A(a, b, c)_{n-2}$$

اثبات: برای حالت $n = 0$ یعنی ماتریس صفر، دترمینان را برابر ۱ در نظر می‌گیریم و وقتی که $n = 1$ دترمینان برابر a است، حال برای سایر حالت‌ها با توجه به این قضیه که دترمینان ماتریس برابر است با مجموع حاصلضرب‌های حاصل از ضرب درایه‌های هر سطر (ستون) در هم‌عامل‌های آنها به دست می‌آوریم:

$$\det A(a, b, c)_0 = 1$$

$$\det A(a, b, c)_1 = a$$

$$\begin{aligned} \det A(a, b, c)_n &= a \times \begin{pmatrix} a & b & 0 & \dots & \dots & 0 \\ c & a & b & \dots & \dots & 0 \\ 0 & c & a & b & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & c & a & b \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c & a \end{pmatrix}_{(n-1) \times (n-1)} - b \times \begin{pmatrix} c & b & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a & b & \dots & \dots & 0 \\ 0 & c & a & b & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & c & a & b \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c & a \end{pmatrix}_{(n-1) \times (n-1)} \\ &= a \times \det A(a, b, c)_{n-1} - (bc) \times \begin{pmatrix} a & b & 0 & \dots & \dots & 0 \\ c & a & b & \dots & \dots & 0 \\ 0 & c & a & b & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & c & a & b \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c & a \end{pmatrix}_{(n-2) \times (n-2)} \\ &= a \times \det A(a, b, c)_{(n-1)} - (bc) \times \det A(a, b, c)_{(n-2)}. \end{aligned}$$

حال با در نظر گرفتن قضیه فوق ثابت خواهیم کرد:

$$\text{قضیه ۲.۲.} \quad \det A(a, b, c)_n = \frac{1}{\sqrt{a^2 - 4bc}} \left(\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4bc}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{a - \sqrt{a^2 - 4bc}}{2} \right)^{n+1} \right)$$

اثبات. برای حالت $bc = 0$ و $bc = \frac{a^2}{4}$ (با ساده کردن مخرج کسر قضیه ۲.۲ با صورت آن و حل رابطه بازگشتی قضیه ۱.۲ برقرار است) برای سایر حالت‌ها با توجه به قضیه ۱.۲ داریم، $\det A(a, b, c)_n = a \times \det A(a, b, c)_{n-1} - bc \times \det A(a, b, c)_{n-2}$ قرار می‌دهیم، $U_1 = a$ ، $U_0 = 1$ با شرایط اولیه ۱ حل می‌کنیم:

$$U_{n+2} = aU_{n+1} - bcU_n$$

می‌توانیم این معادله را به صورت دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر بنویسیم:

$$U_{n+2} = aU_{n+1} - bcV_{n+1}$$

$$V_{n+2} = U_{n+1}$$

دستگاه فوق را به فرم ماتریسی $X_{n+2} = AX_{n+1}$ نمایش می‌دهیم که

$$X_n = \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a & -bc \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

مقادیر ویژه‌ی ماتریس A از حل معادله‌ی $\lambda^2 - a\lambda + bc = 0$ به دست می‌آید یعنی:

$$\lambda_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4bc}}{2}, \lambda_2 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4bc}}{2}$$

ماتریس A قطری‌پذیر است و بردارهای ویژه‌اش به فرم زیر است:

$$\begin{pmatrix} -bc \\ -\lambda_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -bc \\ -\lambda_1 \end{pmatrix}$$

ماتریس $P = \begin{pmatrix} -bc & -bc \\ -\lambda_2 & -\lambda_1 \end{pmatrix}$ معکوس پذیر است به طوری که $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ و واضح است که

$$P^{-1} = \frac{1}{bc(\lambda_1 - \lambda_2)} \times \begin{pmatrix} -\lambda_1 & bc \\ \lambda_2 & -bc \end{pmatrix}$$

حال می‌توانیم بنویسیم

$$A^n = P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$= \frac{1}{bc(\lambda_1 - \lambda_2)} \times \begin{pmatrix} -bc & -bc \\ -\lambda_2 & -\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda_1 & bc \\ \lambda_2 & -bc \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{bc(\lambda_1 - \lambda_2)} \times \begin{pmatrix} bc(\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}) & bc^2(\lambda_2^n - \lambda_1^n) \\ \lambda_1\lambda_2(\lambda_1^n - \lambda_2^n) & bc\lambda_1\lambda_2(\lambda_2^{n-1} - \lambda_1^{n-1}) \end{pmatrix}$$

از آنجایی که $U_1 = a$ ، $U_0 = 1$ می‌توانیم ثابت کنیم که

$$\begin{pmatrix} U_{n+1} \\ V_{n+1} \end{pmatrix} = A^n X_1 = A^n \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{bc(\lambda_1 - \lambda_2)} \times \begin{pmatrix} abc(\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}) + bc^2(\lambda_2^n - \lambda_1^n) \\ a\lambda_1\lambda_2(\lambda_1^n - \lambda_2^n) + bc\lambda_1\lambda_2(\lambda_2^{n-1} - \lambda_1^{n-1}) \end{pmatrix}$$

بنابراین خواهیم دید که

$$\det A(a, b, c)_n = U_n$$

$$= \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)} (a(\lambda_1^n - \lambda_2^n) - bc(\lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1}))$$

با توجه به این که $a = \lambda_1 + \lambda_2$ و $bc = \lambda_1\lambda_2$

$$= \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)} ((\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1^n - \lambda_2^n) - \lambda_1\lambda_2(\lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1}))$$

$$= \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)} (\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2 - 4bc}} \left(\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4bc}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{a - \sqrt{a^2 - 4bc}}{2} \right)^{n+1} \right).$$

قضیه زیر نیز از طریق الگوریتم ۴,۲، به دست می‌آید که اثبات آن را بعد از توضیح الگوریتم‌ها آورده‌ایم.

$$\text{قضیه ۳.۲. } \det A(a, b, c)_n = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-i}{i} a^{n-2i} (-bc)^i.$$

۱.۲. الگوریتم‌ها. در اینجا ابتدا ثابت می‌کنیم با الگوریتم ۴,۲ می‌توان دترمینان ماتریس سه قطری را به دست آورد.

الگوریتم ۴.۲. محاسبه دترمینان ماتریس سه قطری.

مرحله ۱: بلوک‌های ۲ در ۲ مانند شکل ۱ بر روی قطر اصلی ماتریس ایجاد می‌کنیم.

$$\begin{array}{ccccccc} a & b & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ c & a & b & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & c & a & b & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & c & a \end{array}$$

شکل ۱: ایجاد بلوک‌ها

مرحله ۲: • بلوک از آنها را انتخاب می‌کنیم یعنی $\binom{n}{0}$ آن را در حاصلضرب درایه‌های قطر فرعی بلوک‌های انتخاب شده، که در حالت • بلوک برابر ۱ است و در حاصلضرب درایه‌هایی از قطر اصلی که در بلوک‌های انتخاب شده نیستند، که در حالت • درایه برابر ۱ است، ضرب می‌کنیم.

⋮

مرحله i: ۲ - i بلوک از آنها به شرطی که اشتراک نداشته باشند انتخاب می‌کنیم $\binom{n-(i-2)}{i-2}$ در حاصلضرب درایه‌های قطر فرعی بلوک‌های انتخاب شده و در حاصلضرب درایه‌هایی از قطر اصلی ماتریس اصلی که در بلوک‌های انتخاب شده نیستند، ضرب می‌کنیم.

⋮

مرحله ۲ + $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$: بلوک از این بلوک‌ها انتخاب می‌کنیم $\binom{n-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ در حاصلضرب درایه‌های قطر فرعی بلوک‌های انتخاب شده و در حاصلضرب درایه‌هایی از قطر اصلی ماتریس اصلی که در بلوک‌های انتخاب شده نیستند، که در حالت • درایه برابر ۱ است، ضرب می‌کنیم.

مرحله ۳ + $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$: مرحله ۲ + منفی مرحله ۳ + مرحله ۴ + ... + $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ = دترمینان ماتریس سه قطری $n \times n$.

به عبارتی ساده‌تر، در هر مرحله تعداد حالت انتخاب بلوک‌ها را در $(-bc)$ به توان تعداد بلوک‌های انتخاب شده و در a به توان (n) منهای دو برابر تعداد بلوک‌های انتخاب شده، ضرب می‌کنیم و در آخر آنها را با هم جمع می‌کنیم.

اثبات الگوریتم ۴,۲. برای حالت $n = 0, n = 1, n = 2$ الگوریتم درست است.

حال به کمک استقرا، حالت کلی را ثابت می‌کنیم. فرض کنیم الگوریتم برای حالت $n = k - 1, n = k - 2$ درست باشد، برای حالت $n = k$ ثابت می‌کنیم که درست است. ماتریس k در k زیر را در نظر می‌گیریم.

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2 - 4bc}} \left(\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4bc}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{a - \sqrt{a^2 - 4bc}}{2} \right)^{n+1} \right).$$

قضیه زیر نیز از طریق الگوریتم ۴,۲، به دست می‌آید که اثبات آن را بعد از توضیح الگوریتم‌ها آورده‌ایم.

$$\text{قضیه ۳.۲. } \det A(a, b, c)_n = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-i}{i} a^{n-2i} (-bc)^i.$$

۱.۲. الگوریتم‌ها. در اینجا ابتدا ثابت می‌کنیم با الگوریتم ۴,۲ می‌توان دترمینان ماتریس سه قطری را به دست آورد.

الگوریتم ۴.۲. محاسبه دترمینان ماتریس سه قطری.

مرحله ۱: بلوک‌های ۲ در ۲ مانند شکل ۱ بر روی قطر اصلی ماتریس ایجاد می‌کنیم.

$$\begin{array}{ccccccc} a & b & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ c & a & b & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & c & a & b & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & c & a \end{array}$$

شکل ۱: ایجاد بلوک‌ها

مرحله ۲: • بلوک از آنها را انتخاب می‌کنیم یعنی $\binom{n}{0}$ آن را در حاصلضرب درایه‌های قطر فرعی بلوک‌های انتخاب شده، که در حالت • بلوک برابر ۱ است و در حاصلضرب درایه‌هایی از قطر اصلی که در بلوک‌های انتخاب شده نیستند، که در حالت • درایه برابر ۱ است، ضرب می‌کنیم.

⋮

مرحله i: ۲ - i بلوک از آنها به شرطی که اشتراک نداشته باشند انتخاب می‌کنیم $\binom{n-(i-2)}{i-2}$ در حاصلضرب درایه‌های قطر فرعی بلوک‌های انتخاب شده و در حاصلضرب درایه‌هایی از قطر اصلی ماتریس اصلی که در بلوک‌های انتخاب شده نیستند، ضرب می‌کنیم.

⋮

مرحله ۲ + $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$: بلوک از این بلوک‌ها انتخاب می‌کنیم $\binom{n-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ در حاصلضرب درایه‌های قطر فرعی بلوک‌های انتخاب شده و در حاصلضرب درایه‌هایی از قطر اصلی ماتریس اصلی که در بلوک‌های انتخاب شده نیستند، که در حالت • درایه برابر ۱ است، ضرب می‌کنیم.

مرحله ۳ + $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$: مرحله ۲ + منفی مرحله ۳ + مرحله ۴ + ... + $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ = دترمینان ماتریس سه قطری $n \times n$.

به عبارتی ساده‌تر، در هر مرحله تعداد حالت انتخاب بلوک‌ها را در $(-bc)$ به توان تعداد بلوک‌های انتخاب شده و در a به توان (n) منهای دو برابر تعداد بلوک‌های انتخاب شده، ضرب می‌کنیم و در آخر آنها را با هم جمع می‌کنیم.

اثبات الگوریتم ۴,۲. برای حالت $n = 0, n = 1, n = 2$ الگوریتم درست است.

حال به کمک استقرا، حالت کلی را ثابت می‌کنیم. فرض کنیم الگوریتم برای حالت $n = k - 1, n = k - 2$ درست باشد، برای حالت $n = k$ ثابت می‌کنیم که درست است. ماتریس k در k زیر را در نظر می‌گیریم.

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \dots & \dots & 0 \\ c & a & b & \dots & \dots & 0 \\ 0 & c & a & b & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & c & a & b \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c & a \end{pmatrix}_{k \times k}$$

می‌توان گفت که در $A(a, b, c)_k$ بلوک اول به $A(a, b, c)_{k-2}$ اضافه شده است یعنی:

$$\begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{cc|ccc} a & b & 0 & . & . & 0 \\ c & a & b & 0 & . & 0 \end{array}} \\ \downarrow \end{array}$$

شکل ۲: $A(a, b, c)_{k-2}$

برای بلوک اول ۲ حالت پیش می‌آید یا انتخاب می‌شود یا نمی‌شود و در حالت اول اگر بلوک اول انتخاب نشود داریم:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc|ccc} a & b & 0 & . & . & 0 \\ c & a & b & 0 & . & 0 \end{array} \\ \downarrow \end{array}$$

شکل ۳: $A(a, b, c)_{k-1}$

یعنی a ضرب در تعداد حالت هایی که می‌توان ۰ تا $\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor$ بلوک را طبق شرایط الگوریتم انتخاب کرد که طبق الگوریتم و فرض استقرا مساوی $a \times \det A(a, b, c)_{k-1}$ است. حال اگر بلوک انتخاب شود خواهیم داشت:

$$\begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{cc|ccc} a & b & 0 & . & . & 0 \\ c & a & b & 0 & . & 0 \end{array}} \\ \downarrow \end{array}$$

شکل ۴: $A(a, b, c)_{k-2}$

• تا $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ برابر دترمینان است یعنی:

$$\det A(a, b, c)_n = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-i}{i} a^{n-2i} (-bc)^i.$$

نتیجه ۱: اگر u و v ریشه های ساده یک چند جمله درجه ۲ باشد آنگاه:

$$\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-i}{i} (u+v)^{n-2i} (-uv)^i = \frac{1}{u-v} (u^{n+1} - v^{n+1}).$$

اثبات. با قرار دادن $u = \frac{a+\sqrt{a^2-4bc}}{2}$ و $v = \frac{a-\sqrt{a^2-4bc}}{2}$ که ریشه های چند جمله ای درجه دو $\lambda^2 - a\lambda + bc = 0$ می باشد و برابری قضیه ۲,۲ و قضیه ۳,۲ به دست می آید.

نتیجه ۲:

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \binom{n-i}{k} (-1)^i = 1, & \text{if } 0 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor \\ \sum_{i=0}^{n-k} \binom{k}{i} \binom{n-i}{k} (-1)^i = 1, & \text{if } (n - \lfloor n/2 \rfloor) \leq k \leq n \end{cases}$$

اثبات. قرار می دهیم $\lambda_1 = \frac{a+\sqrt{a^2-4bc}}{2}$ ، $\lambda_2 = \frac{a-\sqrt{a^2-4bc}}{2}$ با بسط دادن فرمول قضیه ۳,۲ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-i}{i} (\lambda_1 + \lambda_2)^{n-2i} (-\lambda_1 \lambda_2)^i = \\ & \binom{n}{0} \binom{n}{0} \lambda_1^n + \binom{n}{1} \lambda_1^{n-1} \lambda_2^1 + \binom{n}{2} \lambda_1^{n-2} \lambda_2^2 + \dots + \binom{n}{n} \lambda_2^n \\ & + \binom{n-1}{1} \binom{n-2}{0} \lambda_1^{n-1} \lambda_2^1 - \binom{n-2}{1} \lambda_1^{n-2} \lambda_2^2 - \dots - \binom{n-2}{n-2} \lambda_1^1 \lambda_2^{n-1} \\ & + \binom{n-2}{2} \binom{n-4}{0} \lambda_1^{n-2} \lambda_2^2 + \binom{n-4}{1} \lambda_1^{n-3} \lambda_2^3 + \dots + \binom{n-4}{n-4} \lambda_1^2 \lambda_2^{n-2} \\ & \vdots \\ & + \begin{cases} (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-\lfloor n/2 \rfloor}{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-2\lfloor n/2 \rfloor}{0} \lambda_1^{n-\lfloor n/2 \rfloor} \lambda_2^{\lfloor n/2 \rfloor} + \binom{n-2\lfloor n/2 \rfloor}{n-2\lfloor n/2 \rfloor} \lambda_1^{\lfloor n/2 \rfloor} \lambda_2^{n-\lfloor n/2 \rfloor}, & \text{if } n = 2m+1, m \in \mathbb{N} \\ (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-\lfloor n/2 \rfloor}{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-2\lfloor n/2 \rfloor}{\lfloor n/2 \rfloor} \lambda_1^{n-\lfloor n/2 \rfloor} \lambda_2^{\lfloor n/2 \rfloor}, & \text{if } n = 2m, m \in \mathbb{N} \end{cases} \\ & \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left(\sum_{i=0}^k \binom{n-i}{i} \binom{n-2i}{k-i} (-1)^i \right) \lambda_1^{n-k} \lambda_2^k = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left(\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \binom{n-i}{k} (-1)^i \right) \lambda_1^{n-k} \lambda_2^k, \\ & \sum_{k=n-\lfloor n/2 \rfloor}^n \left(\sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-i}{i} \binom{n-2i}{k-i} (-1)^i \right) \lambda_1^{n-k} \lambda_2^k = \sum_{k=n-\lfloor n/2 \rfloor}^n \left(\sum_{i=0}^{n-k} \binom{k}{i} \binom{n-i}{k} (-1)^i \right) \lambda_1^{n-k} \lambda_2^k, \end{aligned}$$

حال با توجه به قضیه ۲,۲ ضرب $\lambda_1^{n-k} \lambda_2^k$ به ازای هر k برابر ۱ است یعنی:

$$\frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)} (\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}) = \sum_{k=0}^n \lambda_1^{n-k} \lambda_2^k$$

بنابراین داریم:

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \binom{n-i}{k} (-1)^i = 1, & \text{if } 0 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor \\ \sum_{i=0}^{n-k} \binom{k}{i} \binom{n-i}{k} (-1)^i = 1, & \text{if } (n - \lfloor n/2 \rfloor) \leq k \leq n \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}$$

مثال ۶.۲. وقتی $n = 2$

مرحله ۱: مانند شکل ۵ روی قطر اصلی ماتریس بلوک‌های 2×2 را قرار می‌دهیم.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix}$$

شکل ۵: ایجاد بلوک‌ها

مرحله ۲: انتخاب ۰ بلوک از ۱ بلوک روی قطر اصلی، حاصلضرب درایه‌های قطر فرعی بلوک انتخاب شده (این حالت انتخاب ۰ بلوک را بلوک تهی می‌نامیم و حاصلضرب درایه‌های قطر فرعی بلوک، ۱ فرض می‌شود) ضرب در درایه‌های قطر اصلی ماتریس اصلی که در بلوک‌ها قرار نمی‌گیرند = حاصلضرب قطراصلی $\leftarrow 1 \times a^2$.

مرحله ۳: انتخاب ۱ بلوک از ۱ بلوک روی قطر اصلی، حاصلضرب درایه‌های قطر فرعی بلوک انتخاب شده ضرب در درایه‌های قطر اصلی ماتریس اصلی $\leftarrow 1 \times bc$.

مرحله آخر: (مرحله ۱) + (منفی مرحله ۲) $\leftarrow a^2 - bc$.

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & a & b \\ 0 & c & a \end{pmatrix}$$

وقتی $n = 3$:

مرحله ۱: مانند شکل ۶ روی قطر اصلی ماتریس بلوک‌های 2×2 را قرار می‌دهیم.

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & a & b \\ 0 & c & a \end{bmatrix}$$

شکل ۶: ایجاد بلوک‌ها

مرحله ۲: انتخاب ۰ بلوک از ۲ بلوک روی قطر اصلی، حاصلضرب درایه‌های قطر فرعی بلوک انتخاب شده ضرب در درایه‌های قطر اصلی ماتریس اصلی = حاصلضرب قطراصلی $\leftarrow 1 \times a^3$.

مرحله ۳: انتخاب ۱ بلوک از ۲ بلوک روی قطر اصلی (شکل ۷)، حاصلضرب درایه‌های قطر فرعی بلوک انتخاب شده در درایه‌های قطر اصلی ماتریس اصلی $\leftarrow a \times 2bc$.

$$\begin{array}{ccc} a & b & 0 \\ c & a & b \\ 0 & c & a \end{array} \quad 9 \quad \begin{array}{ccc} a & b & 0 \\ c & a & b \\ 0 & c & a \end{array}$$

شکل ۷: انتخاب بلوک

مرحله آخر: (مرحله ۱) + (منفی مرحله ۲) $\leftarrow a^2 - 2abc$.

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & a & b & 0 \\ 0 & c & a & b \\ 0 & 0 & c & a \end{pmatrix} \quad \text{وقتی } n = 4$$

مرحله ۱: مانند شکل ۸ روی قطر اصلی ماتریس بلوک‌های 2×2 را قرار می‌دهیم.

$$\begin{array}{cccc} a & b & 0 & 0 \\ c & a & b & 0 \\ 0 & c & a & b \\ 0 & 0 & c & a \end{array}$$

شکل ۸: ایجاد بلوک‌ها

مرحله ۲: انتخاب ۰ بلوک از ۳ بلوک روی قطر اصلی، حاصلضرب درایه‌های قطر فرعی بلوک انتخاب شده ضرب در درایه‌های قطر اصلی ماتریس اصلی = حاصلضرب قطر اصلی $\leftarrow 1 \times a^4$.

مرحله ۳: انتخاب ۱ بلوک از ۳ بلوک روی قطر اصلی، حاصلضرب درایه‌های قطر فرعی بلوک انتخاب شده ضرب در درایه‌های قطر اصلی ماتریس اصلی $\leftarrow bc \times 3a^2$.

مرحله ۴: انتخاب ۲ بلوک از ۳ بلوک روی قطر اصلی به طوری که بلوک‌ها اشتراک نداشته باشند، (شکل ۹)، حاصلضرب درایه‌های قطر فرعی دو بلوک انتخاب شده ضرب در درایه‌های قطر اصلی ماتریس اصلی $\leftarrow 1 \times (bc)^2$.

$$\begin{array}{cccc} a & b & 0 & 0 \\ c & a & b & 0 \\ 0 & c & a & b \\ 0 & 0 & c & a \end{array}$$

شکل ۹: انتخاب بلوک

مرحله آخر: (مرحله ۱) + (منفی مرحله ۲) + (مرحله ۳) $\leftarrow a^4 - 3a^2bc + (bc)^2$.

۳. جدول‌ها

جدول ۱: ضرایب جملات

1	0	0	0	0	0	0	0	
1	0	0	0	0	0	0	0	
1	1	0	0	0	0	0	0	
1	2	0	0	0	0	0	0	
1	3	1	0	0	0	0	0	...
1	4	3	0	0	0	0	0	
1	5	6	1	0	0	0	0	
1	6	10	4	0	0	0	0	
1	7	15	10	1	0	0	0	
1	8	21	20	5	0	0	0	
⋮								

جدول ۲: جملات

$a^0 \times (-bc)^0$	0	0	0	0	0	0	
$a^1 \times (-bc)^0$	0	0	0	0	0	0	
$a^2 \times (-bc)^0$	$a^0 \times (-bc)^1$	0	0	0	0	0	
$a^3 \times (-bc)^0$	$a^1 \times (-bc)^1$	0	0	0	0	0	
$a^4 \times (-bc)^0$	$a^2 \times (-bc)^1$	$a^0 \times (-bc)^2$	0	0	0	0	...
$a^5 \times (-bc)^0$	$a^3 \times (-bc)^1$	$a^1 \times (-bc)^2$	0	0	0	0	
$a^6 \times (-bc)^0$	$a^4 \times (-bc)^1$	$a^2 \times (-bc)^2$	$a^0 \times (-bc)^3$	0	0	0	
$a^7 \times (-bc)^0$	$a^5 \times (-bc)^1$	$a^3 \times (-bc)^2$	$a^1 \times (-bc)^3$	0	0	0	
$a^8 \times (-bc)^0$	$a^6 \times (-bc)^1$	$a^4 \times (-bc)^2$	$a^2 \times (-bc)^3$	$a^0 \times (-bc)^4$	0	0	
$a^9 \times (-bc)^0$	$a^7 \times (-bc)^1$	$a^5 \times (-bc)^2$	$a^3 \times (-bc)^3$	$a^1 \times (-bc)^4$	0	0	
⋮							

۴. تشکر و قدردانی

بر خود لازم می‌دانم از جناب آقای دکتر محمدرضا درفشه به خاطر نظرات و پیشنهادات مفیدشان در طی تهیه و آماده سازی این نوشته سپاسگزاری نمایم.

مراجع

- [1] K. Hoffman and R. Kunze, *Linear Algebra*, Prentice-Hall Mathematics Series Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1961.
- [2] S. Roman, *Advanced linear algebra*, **135**, Springer, New York, 2008.
- [3] M. E. A. El-Mikkawy and A. Karawia, Inversion of general tridiagonal matrices, *Appl. Math. Lett.*, **19** (2006) 712–720.
- [4] L. G. Molinari, Determinants of block tridiagonal matrices, *Linear Algebra Appl.*, **429** (2008) 2221–2226.

- [5] R. K. Mallik, The inverse of a tri-diagonal matrix, *Linear Algebra Appl.*, **325** 2001 109–139.
- [6] M. E. A. El-Mikkawy, On the inverse of a general tridiagonal matrix, *Appl. Math. Comput.*, **150** no. 3 (2004) 669–679.
- [7] M. E. A. El-Mikkawy, A fast algorithm for evaluating nth order tridiagonal determinants, *J. Comput. Appl. Math.*, **166** (2004) 581–584.
- [8] E. Kılıç, Explicit formula for the inverse of a tridiagonal matrix by backward continued fractions, *Appl. Math. Comput.*, **197** (2008) 345–357.

مناشه سواری

تهران، خیابان انقلاب، دانشگاه تهران، گروه مهندسی علوم پایه

mona.shahsavari@ut.ac.ir

مناشه سواری متولد دی ماه ۱۳۷۰ در شهر سمنان است. وی در سال ۱۳۸۹ وارد مقطع کارشناسی رشته علوم مهندسی گرایش ریاضی مهندسی-بهینه سازی دانشگاه تهران شد. علایق پژوهشی وی در زمینه جبر خطی، ترکیبیات و نظریه اعداد است.

