ریاضی و جامعه
شاپا (چاپی): ۶۴۹۳-۲۳۴۵، شاپا(الکترونیکی): ۶۵۰۷-۲۳۴۵
جلد۱، شماره ۱ (۱۳۹۵)، صص. ۴۶-۳۷
http://math-sci.iranjournals.ir
http://www.ui.ac.ir

مروری بر مسائل بهینه‌سازی متغیر صحیح

رسول حسینی ملک‌آبادی

چکیده. برنامه‌ریزی متغیرهای صحیح نوع خاصی از مسائل بهینه‌سازی است که در آن یک یا چند متغیر تصمیم‌گیری باید عدد صحیح باشند. در بسیاری از مسائل واقعی مقادیر اعشاری قابل قبول نیستند. در این تحقیق به معرفی انواع مسائل متغیر صحیح پرداخته و به توضیح مختصری از کاربردها و روش‌های موجود برای حل هر کدام می‌پردازیم.

۱. مقدمه

بسیاری از پدیده های عالم واقعی در صورت مدل‌سازی با مقادیر عدد صحیح بیان می‌شوند. تعداد سدهای ساخته شده روی رودخانه، تعداد نیروی انسانی نمی‌توانند با اعداد اعشاری بیان شوند. هر گاه تمامی متغیرهای موجود در مدل متغیر صحیح باشند به آن برنامه‌ریزی متغیر صحیح محض گفته می‌شود و چنانچه بعضی از متغیرها عدد صحیح و برخی غیر عدد صحیح باشند به آن مدل برنامه‌ریزی متغیر صحیح آمیخته گفته می‌شود.

یك زمینه کاربرد دیگر برنامه‌ریزی متغیر صحیح که حتی اهمیت بیشتری دارد، پرداختن به تصمیم‌هایی از نوع "بله یا نه" است. به عنوان نمونه آیا منطقه x مکان مناسبی برای ایجاد یك مرکز فروش یا خدمات پس از فروش است یا خیر؟ هر تصمیمی که فقط دو انتخاب در پیش داشته باشد را می‌توان بر حسب متغیرهایی بیان کرد که فقط دو مقدار، یعنی صفر و یك را انتخاب می‌کنند؛ به طوری که اگر تصمیم j نه باشد، $x_j = ۰$ و اگر تصمیم بله باشد، $x_j = ۱$. به چنین متغیرهایی، متغیرهای صفر و یك یا متغیرهای دوتایی گویند. در نتیجه به مسایل برنامه‌ریزی متغیر صحیح که فقط شامل چنین متغیرهایی باشند، مسایل برنامه‌ریزی متغیر صحیح صفر و یک(دوتایی) گفته می‌شود.

۲. برنامه‌ریزی خطی متغیر صحیح محض (ILP)[1]

یک مسئله برنامه‌ریزی خطی متغیر صحیح محض، یک برنامه‌ریزی خطی است که به آن شرط عدد صحیح بودن برای تمام متغیرها اضافه شده است. ازمهمترین کاربردهای آن می‌توان به مسائل هزینه ثابت و مسائل تخصیص نیروی انسانی

عبارات و کلمات کلیدی. متغیر گسسته و پیوسته، مسائل متغیر صحیح آمیخته، روش شاخه و کران ، مدل‌سازی صحیح .
تاریخ دریافت: ۱۳۹۲/۰۶/۰۲ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۲/۰۷/۲۰ .

[1] Integer Linear Programming

اشاره کرد. فرم کلی مسائل برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح محض به صورت زیر می‌باشد:

$$(Max) or (Min) \quad Z = c^t x,$$
$$s.t. \quad Ax \leq b$$
$$x \geq ۰, integer$$

در این مدل b بردار منابع ، c بردار هزینه و A ماتریس ضرائب می‌باشند. چندین روش مختلف برای حل این گونه از مسائل وجود دارد که دراینجا مختصری به توضیح روش شاخه و کران می‌پردازیم.

۳. روش شاخه و کران

ایده‌ی اصلی در این روش تقسیم منطقه‌ی موجه مسئله‌ی اصلی به چندین زیرمنطقه موجه و بررسی امکان وجود جوابهای صحیح در این مناطق می‌باشد. الگوریتم این روش به صورت زیر بیان می‌شود :

گام ۱. مسئله خطی اصلی را بدون در نظر گرفتن شرط عدد صحیح بودن متغیرها حل کنید ($P_۰$) اگر همه متغیرها مقدار صحیح گرفتند توقف کنید در غیر اینصورت به گام ۲ بروید.

گام ۲. اگر تابع هدف از نوع Max بود قرار دهید $Z_L = -\infty$ ، در غیر این صورت قرار دهید $Z_L = +\infty$.

گام ۳. شاخه بندی (انشعاب):

یکی از متغیرهای تصمیم که عدد صحیح نیست ($x_j = x_j^*$) را انتخاب کنید و دو مسئله فرعی $P_۱$ و $P_۲$ راصورت زیر ایجاد کنید:

۱. مسئله‌ی $P_۱$: همان مسئله‌ی $P_۰$ می‌باشد، با این تفاوت که قید ($x_j \leq [x_j^*]$) به آن اضافه شده است.

۲. مسئله‌ی $P_۲$: همان مسئله‌ی $P_۰$ می‌باشد، با این تفاوت که قید ($x_j \geq [x_j^*] + ۱$) به آن اضافه شده است.

گام ۴. کران(تحدید):

مسائل به دست آمده $P_۱$ و $P_۲$ را حل کرده و بهترین مقداری که برای تابع هدف به ازای یک جواب موجه عدد صحیح برای ۲ مسئله مذکور بدست آمده را جایگزین Z_L کنید.

گام ۵. ضوابط به انتها رسیدن:

شاخه های فرعی در یکی از ۳ وضعیت زیر متوقف می‌شوند (به انتها می‌رسند):

الف. تمام متغیر های تصمیم مقداری صحیح بگیرند.

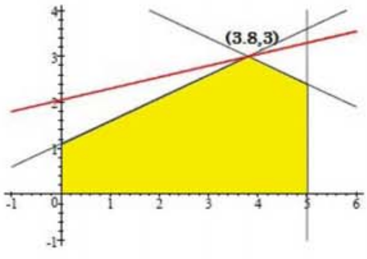
ب. مسئله فرعی ناشی از انشعاب فاقد منطقه‌ی موجه باشد.

ج. مقدار تابع هدف از مقدار Z_L بدتر باشد.

گام ۶. اگر تمام انشعاب‌ها (شاخه‌ها) به انتها رسیدند توقف کنید و مسئله‌ای که تابع هدف آن مساوی Z_L است انتخاب کنید، جواب این مسئله جواب بهینه است. در غیر این صورت به گام ۳ بروید.

مثال : در این قسمت روند الگوریتم فوق را به اختصار روی مثال زیر توضیح می‌دهیم :

$$Max \quad Z = -x_۱ + ۴x_۲,$$
$$s.t. \quad -۱۰x_۱ + ۲۰x_۲ \leq ۲۲$$
$$۵x_۱ + ۱۰x_۲ \leq ۴۹$$
$$x_۱ \leq ۵, x_i \geq ۰, integer's, i = ۱, ۲$$

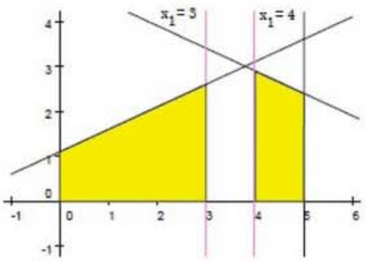


شکل ۱: منطقه‌ی موجه مثال ۲,۱,۲

فرم کاهش یافته‌ی مسئله فوق: (مسئله بدون در نظر گرفتن قید عدد صحیح بودن)
جواب بهینه برابر (۳٫۸, ۳) با $Z = ۸٫۲$

$$\begin{aligned} P_\circ : Max \quad & Z = -x_۱ + ۴x_۲, \\ s.t. \quad & -۱۰x_۱ + ۲۰x_۲ \leq ۲۲ \\ & ۵x_۱ + ۱۰x_۲ \leq ۴۹ \\ & x_۱ \leq ۵, x_i \geq \circ, i = ۱, ۲ \end{aligned}$$

با شاخه بندی روی متغیر ناصحیح $x_۱$ و ساخت دو مسئله $(P_۱ : x_۱ \leq ۳)$ و $(P_۲ : x_۱ \geq ۴)$داریم:

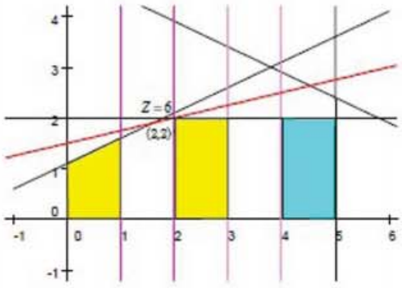


شکل ۲: شاخه‌بندی روی متغیر ناصحیح $x_۱$

جواب بهینه $P_۱$:(۴, ۲٫۹)با $Z = ۷٫۶$

$$\begin{aligned} P_۱ : Max \quad & Z = -x_۱ + ۴x_۲, \\ s.t. \quad & -۱۰x_۱ + ۲۰x_۲ \leq ۲۲ \\ & ۵x_۱ + ۱۰x_۲ \leq ۴۹ \\ & x_۱ \leq ۵, \quad x_۱ \geq ۴, \quad x_۲ \geq \circ \end{aligned}$$

و به همین ترتیب با ادامه فرایند و ساختن زیرمسائل و حل آنها، جواب بهینه به صورت (۲, ۲) با $Z = ۶$ حاصل خواهد شد.



شکل ۳: جواب بهینه‌ی مثال ۲,۱,۲

۴. برنامه ریزی متغیر صحیح آمیخته خطی(MILP)

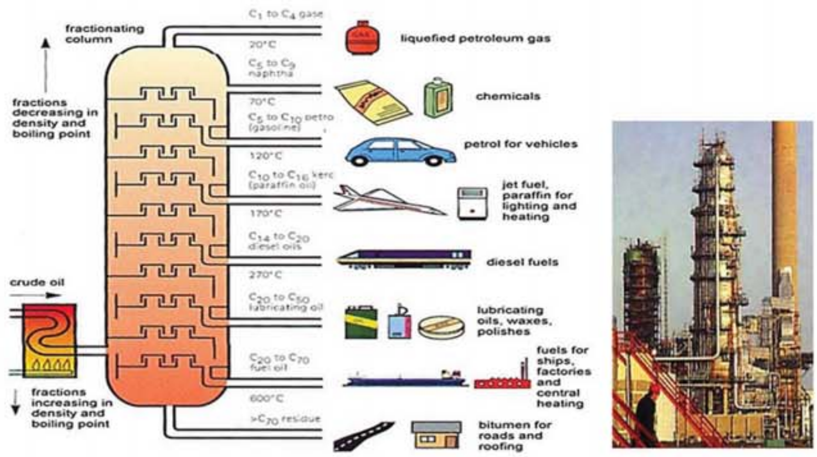
برنامه ریزی عدد صحیح آمیخته (MIP)[۲] به مدل‌هایی گفته می‌شوند که در آنها متغیرهای پیوسته و گسسته (عدد صحیح و دوتایی) به صورت همزمان در مسئله پدیدار می‌شوند. بسیاری از مدل‌های بهینه سازی دارای متغیرهای پیوسته و عدد صحیح بوده که به صورت خطی و تفکیک پذیر در قیود و تابع هدف ظاهر می‌شوند. این گونه از مسائل در مدل‌های ریاضی به صورت مدل‌های عدد صحیح آمیخته خطی(MILP)[۳] بیان می‌شوند. در بسیاری از کاربردهای MILP متغیرهای عدد صحیح از نوع متغیرهای صفر و یک (دوتایی) هستند که در اینجا ما بر روی این کلاس از مسائل تمرکز می‌کنیم.
بیشترین کاربرد این نوع مدل‌سازی با توجه به مرجع [۳] در زمینه‌ی تحقیق در عملیات در مسائل تخصیص، زمان‌بندی [۴] و هزینه ثابت شبکه‌ای مطرح می‌شود. همچنین در زمینه مهندسی شیمی[۵] (فرایندهای اختلاط، طراحی[۶] شبکه‌های انتقال و کنترل[۷]) کاربرد این مدل‌سازی بیشتر است. این کاربردها شامل کمترین تعداد جفت در ترکیبات انتقال گرما، بهینه‌سازی مصرف انرژی در برج‌های تقطیر، ترکیبات محصولات ستون تقطیر[۸] چند منظوره‌ی چند مولفه‌ای ، آنالیز انعطاف‌پذیری فرایندهای شیمی، زمان‌بندی دسته‌های ترکیبی و بسیاری دیگر از زمینه‌ها می‌باشد.
برای توضیح چگونگی پدیدار شدن متغیرهای گسسته و پیوسته در مدل‌سازی مسائل واقعی، ساختار یک ستون تقطیر را در شکل ۴ در نظر بگیرید. در این ستون تقطیر، نفت خام به عنوان ورودی، فراورده‌های مورد استفاده در مصارف خانگی و صنعت به عنوان خروجی و سینی‌های تقطیر وجود دارند. وجود یا عدم وجود هر کدام از این سینی‌ها و همینطور تعداد آن‌ها مواردی هستند که بوسیله‌ی متغیرهای دوتائی یا گسسته معرفی می‌شوند. مقدار نفت خام ورودی، دمای لازم برای تبخیر آن و مقدار خروجی هر کدام از فراورده‌ها نیز توسط متغیرهای پیوسته مدل‌سازی می‌شوند. بدین ترتیب در بهینه‌سازی مصرف انرژی در این ستون تقطیر می‌توان به یک مدل MILP رسید.

فرمول بندی:

فرمول‌بندی مسائل MILP معمولا به صورت زیر انجام می‌شود:

$$\begin{aligned} Min \quad & Z = c^t x + d^t y, \\ s.t \quad & Ax + By \leq b \\ & x \geq 0, \quad x \in X \subseteq \mathbb{R}^n, \quad y \in \{0, 1\}^q \end{aligned}$$

[2] Mixed Integer Programming [3] Mixed Integer Linear Programming [4]Scheduling [5] Chemical Engineering [6]Design [7]Control
[8] distillation Column



شکل ۴: ساختار یک برج تقطیر

در اینجا x یک بردار n ــ تایی از متغیرهای پیوسته ، y یک بردار q ــ تایی از متغیرهای صفر و یک، c و d بردارهای پارامتر، A و B ماتریس‌های ضرایب با ابعاد متناسب و b بردار منابع می‌باشند.

اصلی‌ترین دشواری که در حل مسائل MILP با آن مواجه هستیم و خود ناشی از ماهیت ترکیبی نواحی متغیر های y می‌باشد، این است که هر انتخابی از صفر و یک برای مولفه‌های بردار y یک مسئله برنامه‌ریزی خطی نسبت به متغیر x پدید می‌آورد که باید برای کسب بهترین جواب آن حل شود. به طور مثال اگر ۱۰۰ متغیر صفر و یک در یک مسئله MILP در نظر گرفته شود، $۲^{۱۰۰}$ ترکیب ممکن وجود خواهد داشت که باید حل شوند واین هزینه محاسباتی بسیار گزافی در بر خواهد داشت.

نمایه ای از الگوریتم های MILP

الگوریتم های مطرح شده برای حل مسائل MILP را می توان به صورت زیر کلاس بندی کرد :

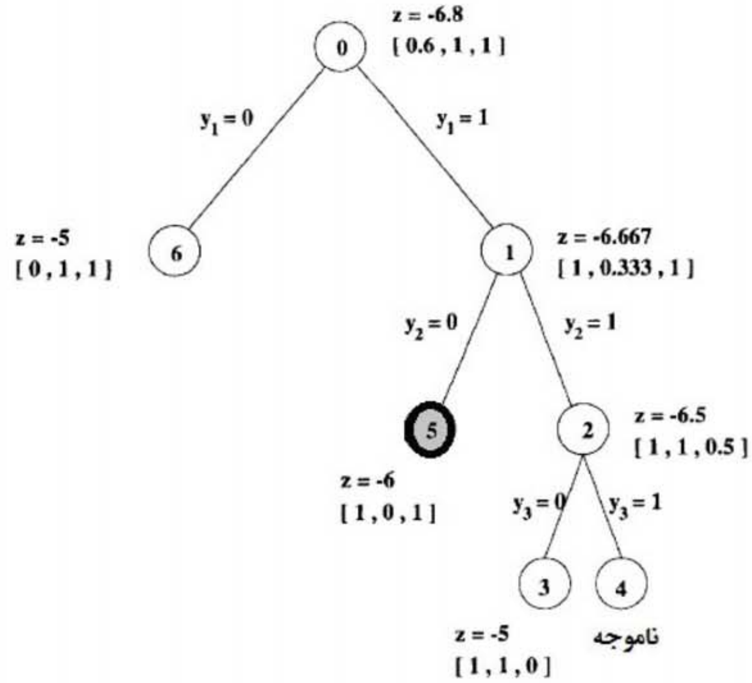
۱. روش های شاخه و کران [9]
۲. روشهای صفحات برشی [10]
۳. روش های تجزیه [11]
۴. روش های منطق پایه [12]

یک مثال عددی :

$$\begin{aligned} Min \quad & Z = ۲x_۱ - ۳y_۱ - ۲y_۲ - ۳y_۳, \\ s.t \quad & x_۱ + y_۱ + y_۲ + y_۳ \geq ۲ \\ & ۱۰x_۱ + ۵y_۱ + ۳y_۲ + ۴y_۳ \leq ۱۰ \\ & x_۱ \geq ۰ \quad y_۱, y_۲, y_۳ \in \{۰, ۱\} \end{aligned}$$

و جواب بدست آمده توسط روش شاخه و کران و بر اساس تخفیف برنامه‌ریزی خطی برابر $Z^* = -۶$ ، $x_۱ = ۰$ و $(y_۱, y_۲, y_۳) = (۱, ۰, ۱)$ می‌باشد که روند محاسبه جواب را می‌توان در شبکه زیر مشاهده کرد:

[9]Branch and bound [10]Cutting plane [11]Decomposition [12]Logic-based



۵. برنامه‌ریزی متغیر صحیح آمیخته غیرخطی(MINLP)

محدوده‌ی وسیعی از مسائل بهینه‌سازی غیر خطی شامل متغیرهای عدد صحیح یا گسسته همراه با متغیرهای پیوسته می‌باشند. این کلاس از مسائل بهینه‌سازی در بسیاری از کاربردهای واقعی ظاهر می‌شوند و به صورت مسائل عدد صحیح آمیخته غیر خطی (MINLP) نمایش داده می‌شوند. متغیرهای گسسته می‌توانند به طور مثال برای مدل بندی دنباله‌ای از رخدادها، انتخاب های جایگزین و وجود یا عدم وجود واحدها (در نمایش صفر و یک انها) استفاده شوند. متغیرهای پیوسته نیز برای مدل‌بندی ورودی- خروجی و ارتباطات انفعالی میان واحدهای خاص ، عملیات و سیستم‌های مرتبط مختلف مورد استفاده هستند.

ماهیت غیرخطی این مسائل ممکن است به خاطر ارتباطات غیرخطی در محدوده‌های انحصاری عدد صحیح (مثلا مدل‌های تخصیص درجه دوم)، ارتباطات غیرخطی انحصاری در نواحی پیوسته (مثلا مدل‌های پیچیده غیر خطی ورودی- خروجی در یک ستون تقطیر[۱۳] یا یک واحد رآکتور[۱۴]) و ارتباطات غیرخطی در نواحی پیوسته- گسسته توامان (مثلا در مسائل زمان‌بندی یا برنامه‌ریزی سیستم‌های بازیابی گرما) حاصل شود.

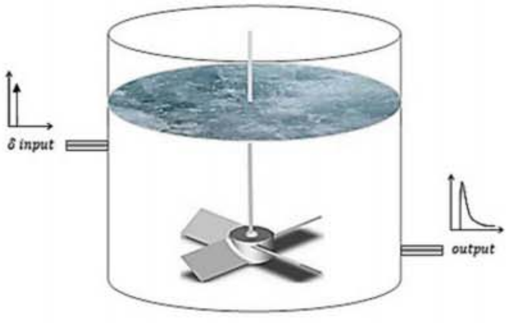
از کاربردهای MINLP می توان به فرایندهای ترکیبی در مهندسی شیمی از جمله ترکیب سیستم‌های تفکیک‌پذیر تقطیر، ترکیب شبکه‌های پیچیده‌ی رآکتور و ترکیب فرایندهای سیستمی کلی اشاره کرد. کاربرد کلیدی این مسائل در مسائل طراحی، زمان‌بندی و برنامه‌ریزی فرایندهای دسته‌ای[۱۵] در مهندسی شیمی ، از جمله در طراحی واحدهای چند منظوره [۵] نمایان می‌شود. کاربردهای مهم دیگری از این مسائل که اخیرا مطرح شده است در طراحی مولکولی [۱۶]انتخاب بهترین حل‌کننده‌ها[۱۷]، به کمک کامپیوتر می‌باشد که در [۴] توضیح داده شده است.

---

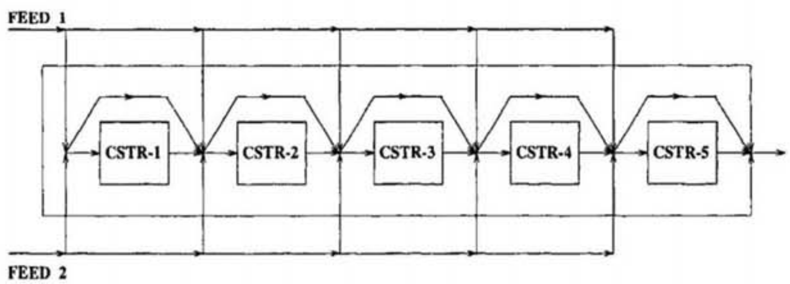
[13] distillation Column [14]Reactor [15]Batch Process [16] Molecular Desig [17]Solvers

برای مثال شکل ۶ راکه ساختاری کوچک از راکتورهای مخزنی همزن پیوسته(CSTR)[۱۸] را نشان می‌دهد، درنظر بگیرید. راکتورهای پیوسته [۱۹] گونه‌ای متداول از راکتورها هستند که در آن‌ها یک یا چند جریان ورودی به سیستم، مواد واکنش‌دهنده را به داخل راکتور می‌آورد و پس از واکنش، از خروجی یا خروجی‌های راکتور محصولات خارج می‌شوند. ین نوع راکتورها عمدتاً برای تولید محصولات با حجم بالا و محصولاتی که میزان تقاضای آن‌ها به صورت ثابت در بازار وجود دارد استفاده می‌شود. مواد سوختی، محصولات پتروشیمی و مواد شوینده و بهداشتی از جمله این مواد هستند. یکی از انواع راکتورهای پیوسته، راکتورهای مخزنی همزن می‌باشد که در شکل ۵ نشان داده شده است.

انتخاب هر کدام از جریان‌های ورودی [۲۰] ، استفاده یا عدم استفاده از هر راکتور و ارتباط بین آن‌ها مواردی هستند که بوسیله‌ی متغیرهای گسسته(دوتائی) معرفی می‌شوند. میزان جریان ورودی و خروجی برای هر راکتور نیز توسط متغیرهای پیوسته مدل‌سازی می‌شوند و بدین ترتیب یک مدل MINLP پدیدار خواهد شد.



شکل ۵: ساختار یک راکتور مخزنی همزن(CSTR)



شکل ۶: ساختار یک شبکه‌ی کوچک از راکتورهای CSTR

[18] Continuous Stirred-Tank Reactor [19] Continuous Reactor [20] Feed

فرمول بندی:

فرمول‌بندی مسائل MINLP معمولا به صورت زیر انجام می‌شود:

$$\begin{aligned} \min_{x,y} \quad & Z = f(x,y), \\ s.t. \quad & g_j(x,y) \leq \circ, \quad j \in J \\ & x \in X \subseteq \mathbb{R}^n \\ & y \in Y \subseteq \mathbb{Z}^m \end{aligned}$$

که در اینجا x یک بردار n ـ تایی از متغیرهای پیوسته ، y بردار متغیرهای عدد صحیح ، $g_j(x,y) \leq \circ, \ j \in J$ قیود نامساوی غیرخطی و $f(x,y)$ تابع هدف غیر خطی منظور می‌باشند.

فرم صفر و یک این مسائل هم به صورت زیر مطرح می‌شود :

$$\begin{aligned} \min_{x,y} \quad & Z = f(x,y), \\ s.t. \quad & g_j(x,y) \leq \circ, \quad j \in J \\ & x \in X \subseteq \mathbb{R}^n \\ & y \in Y = \{\circ, 1\}^m \end{aligned}$$

که دراینجا y برداری از متغیرهای دوتایی می‌باشد. البته در این دو مدل قیود تساوی نیز می‌توانند حضور داشته باشند . این نحوه مدل‌بندی دو مشکل اصلی را در پی خواهد داشت که این مشکلات ناشی از ماهیت مسئله می‌باشند. یکی به خاطر نواحی ترکیبی(محدوده y) و دیگری به خاطر نواحی پیوسته (محدوده x) ! زمانی که تعداد متغیرهای دوتایی افزایش یابد، در درجه اول یک مسئله ترکیبی با پیچیدگی وسیعی حاصل می‌شود . از طرف دیگر به خاطر ماهیت غیرخطی مسئله اغلب با مدل‌های نامحدب مواجه هستیم که این خود بر پیچیدگی مسئله افزوده و وجود جوابهای موضعی چندگانه را به صورت بالقوه در بر خواهد داشت .

نمایی از الگوریتم های MINLP

الگوریتم‌های مطرح شده برای حل مسائل MINLP را می‌توان به صورت زیر کلاس بندی کرد:

۱. تجزیه تعمیم‌یافته‌ی بِنْدِر [۲۱]
۲. شاخه و کران
۳. تقریب خارجی [۲۲]
۴. بررسی جواب با مطالعه‌ی موجه بودن
۵. تقریب خارجی با کاهش [۲۳] قیود تساوی
۶. تقریب خارجی با کاهش قیود تساوی همراه با تابع پنالتی افزوده [۲۴]
۷. تقریب خارجی تعمیم‌یافته [۲۵]
۸. تجزیه‌ی متقاطع تعمیم‌یافته [۲۶]

[21]Generalized Benders Decomposition [22]Outer Approximation [23]Relaxation [24]Augmented Penalty [25]Generalized Outer Approximation [26]Generalized Cross Decomposition

۶. مثال

این مثال برگرفته از[۲] درواقع از مدل‌سازی یک زنجیره‌ی فروشگاهی و تعداد مشخصی از متقاضیان که به یک مسئله‌ی MINLP منجر شده، بدست آمده است. اطلاعات مربوط به این مثال در جدول ۱ و نتیجه‌ی پیاده‌سازی سه روش تقسیمات تعمیم‌یافته‌ی بِنْدِر، شاخه وکران و تقریب خارجی (OA) که از روش‌های کلاسیک برای حل مسائل MINLP هستند، در جدول ۲ ارائه شده‌اند.

جدول ۱: *اطلاعات مثال توضیحی*

تعداد کل متغیرها	تعداد متغیرهای دوتائی	تعداد کل قیود	تعداد قیود غیرخطی
۶	۳	۶	۲

$$
\begin{aligned}
\min \quad & z = ۵y_۱ + ۶y_۲ + ۸y_۳ + ۱۰x_۱ - ۷x_۶ - ۱۸\ln(x_۲+۱) - ۱۹/۲\ln(x_۱ - x_۲ + ۱) + ۱۰,\\
s.t. \quad & ۰/۸\ln(x_۲+۱) + ۰/۹۶\ln(x_۱ - x_۲ + ۱) - ۰/۸x_۶ \geq ۰\\
& x_۲ - x_۱ \leq ۰\\
& x_۲ - Uy_۱ \leq ۰\\
& x_۱ - x_۲ - Uy_۲ \leq ۰\\
& \ln(x_۲+۱) + ۱/۲\ln(x_۱ - x_۲ + l) - x_۶, -Uy_۳ \geq -۲\\
& y_۱ + y_۲ \leq ۱\\
& y \in \{۰,۱\}^۳, \quad a \leq x \leq b, \quad x = (x_j : j = ۱,۲,۶) \in \mathbf{R}^۳\\
& a^T = (۰,۰,۰), \quad b^T = (۲,۲,۱), \quad U = ۲\\
& \textbf{solution:} y^* = (۰,۱,۰), \quad x^* = (x_۱, x_۲, x_۶) = (۱/۳۰۰۹۷, ۰, ۱), \quad z^* = ۶/۰۰۹۷۲
\end{aligned}
$$

لازم به ذکر است که در تمامی مراحل پیاده‌سازی الگوریتم‌های فوق بر روی این مثال، از روش‌های استاندارد موجود برای حل مسائل خطی و غیرخطی استفاده شده است. مجموعه‌ای جامع از این روش‌ها در قالب برنامه‌ی GAMS گنجانده شده است [۱].

جدول ۲: *جدول مقایسه‌ای مثال توضیحی*

	روش شاخه و کران	روش تقسیمات تعمیم‌یافته‌ی بِنْدِر	روش OA
تعداد تکرار	۸	۴	۲
زمان cpu برای مسائل ابتدائی	۲۱/۲	۷/۷	۳/۹
زمان cpu برای مسائل جامع		۴/۹	۴/۳
زمان cpu کل	۲۱/۲	۱۲/۶	۸/۲
تعداد جواب در طی تکرارها	۷	۳	۱

مراجع

[1] A. Brooke, D. Meeraus, A. Meeraus and R. Raman, GAMS Language Guide, GAMS Development Corporation, Release 2.25 Version 92, (1997).

[2] M. A. Duran and I. E. Grossmann, An Outer approximation algorithm for a class of mixed integer nonlinear programs, *Math. Programming*, **36** (1986) 307–339.

[3] C. A. Floudas, *Nonlinear and Mixed Integer Optimization*, Department of Chemical Engineering, Princeton University, Princeton New Jersey, 1995.

[4] O. Odele and S. Macchietto, Computer aided molecular design: A novel method for optimal solvent selection, *Fluid Phase Equilibria.* , **82** (1993) 47–62.

[5] N. V. Sahinidis and I. E. Grossmann, Reformulation of multiperiod MILP models for planning and scheduling of chemical processes, *Computers and Chemical Engineering*, **15** (1991) 255–272.

رسول حسینی ملک‌آبادی
اصفهان، خیابان هزار جریب، دانشگاه اصفهان، گروه ریاضی
R.hosseini۶۷ @gmail.com

رسول حسینی ملک‌آبادی متولد اردیبهشت ماه ۱۳۶۷ در شهر نجف‌آباد است. وی در سال ۱۳۸۶ وارد مقطع کارشناسی رشته ریاضی کاربردی دانشگاه اصفهان شد و در سال ۱۳۹۰ با سهمیه استعداد درخشان وارد مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی گرایش تحقیق در عملیات شد و در تاریخ ۱۳۹۲/۶/۱۷ تحت نظر دکتر صغری نوبختیان از پایان‌نامه خود که در زمینه مسائل جداسازنده‌ی تعمیم‌یافته بود، با درجه‌ی عالی دفاع کرد. علایق پژوهشی وی، بهینه‌سازی متغیر صحیح و جداسازنده‌ها می‌باشد.