ریاضی و جامعه
شاپا (چاپی): ۲۳۴۵-۶۴۹۳ ، شاپا(الکترونیکی): ۲۳۴۵-۶۵۰۷
جلد ۱ ، شماره ۱ (۱۳۹۵)، صص. ۳۶-۲۷

http://math-sci.iranjournals.ir
http://www.ui.ac.ir

راج کندرا بوس و طرح‌های بلوکی

الهام اذان گویان فرد

چکیده. در این مقاله ابتدا نگاهی به زندگینامه علمی راج کَندِرا بُوس می‌اندازیم و سپس نمونه‌هایی از کارهای علمی او را بررسی می‌کنیم.

۱. مقدمه

دراین مقاله قصد داریم به معرفی یک ریاضیدان بزرگ هندی به نام راج کندرا بوس بپردازیم، ریاضیدانی که در زمینه‌های مختلف ریاضیات، آثار متعددی به نام خود به جای گذاشته است. به دلیل این تعدد آثار، نام وی در تعاریف و قضایای زیادی در زمینه‌های مختلف مانند آمار، ترکیبیات و کدگذاری به چشم می‌خورد. چون بررسی و معرفی کارهای این ریاضیدان قطعاً در این مقاله محدود نمی‌گنجد، لذا در این مقاله، ابتدا نگاهی گذرا به زندگینامه وی داریم و سپس به معرفی نمونه‌هایی از کارهای علمی ایشان در زمینه‌های اسکیم‌های شرکت‌پذیر و طرح‌های بلوکی می‌پردازیم. مطالب مربوط به زندگینامه راج کندرا بوس در زیر برگرفته از [۱۱] می‌باشد.

راج کندرا بوس

۲. مروری بر زندگی علمی راج کندرا بوس

راج کندرا بوس در ۱۹ ژوئن سال ۱۹۰۱، در هوشَنگ آباد، [1] شهری در مرکز هند به دنیا آمد. پدر راج، پروتِپ کَندرا بوس [2] دکتر ارتش بریتانیا [3] بود. اولین همسر پدر او بدون این که فرزندی به دنیا بیاورد فوت کرد. موقعی که پدرش به دیدن خواهر خود به هوشنگ آباد رفته بود با مادر بوس، یوشاینی مِیترا [4] آشنا شد و با وی ازدواج کرد. راج فرزند ارشد

عبارات و کلمات کلیدی. اسکیم‌های شرکت‌پذیر، طرح بلوکی غیرکامل متعادل به طور جزئی.
تاریخ دریافت: ۱۳۹۲/۰۵/۱۵ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۲/۰۷/۱۵ .

[1]Hoshangabad [2]Protap Chandra Bose [3]British [4]Ushangini Mitra

بود و سه خواهر و یک برادر داشت. برادرش در سال ۱۹۰۵ و سه خواهر او به ترتیب در سال‌های ۱۹۰۷، ۱۹۱۰ و ۱۹۱۴ به دنیا آمدند. او دوران بچگی شادی داشت اما برای درس خواندن با مشکلات زیادی مواجه بود. پدرش برای او آرزوهای زیادی داشت و علاقه‌مند بود که او خوب درس بخواند، اما هرچه راج به کلاس‌های بالاتر می‌رفت تمام توجهات پدرش با شکست منجر می‌شد. به طور نمونه، هنگامی که او در سال دوم بود در امتحان جغرافیا نمره هشت گرفت. پدرش از او خواست که با علاقه بیشتری جغرافیا بخواند و مطالبی را که متوجه نمی‌شود به وسیله‌ی تصویر به ذهنش بسپارد. بعد از اتمام دوره دبیرستان، راج در آوریل ۱۹۱۷ به کالج هندو [5] در دهلی [6] رفت. او به دلیل بیماری آنفلوانزا نتوانست رتبه مورد نظر در امتحانات بورس تحصیلی دانشگاه پنجاب[7] را بدست آورد. دوران شاد تحصیلاتش در دانشگاه هندو با یک تراژدی به پایان رسید و او مادرش را در اُکتبر ۱۹۱۸ در اثر یک آنفلوانزا مسری از دست داد. این بیماری مسری در جهان، میلیون‌ها نفر را کشت، که فقط ۱۲ میلیون نفر آن‌ها در کشور هند بودند. او با این که مادرش را از دست داده بود، در سال ۱۹۱۹ در اولین امتحان بین المللی دانشگاه پنجاب شرکت کرد و توانست در این امتحان رتبه خوبی را بدست‌آورد. در ژوئن ۱۹۲۰، راج پدرش را در اثر بیماری مغزی از دست داد. از آن پس او به عنوان فرزند ارشد خانواده باید همه‌ی مسئولیت‌ها را بر عهده می‌گرفت، اما پول کمی برای هزینه‌ی تحصیلاتش و تأمین خانواده‌اش داشت. در سال ۱۹۲۱ درس برادرش به اتمام رسید، راج، او و سه خواهرش را به دهلی آورد و همگی در یک اتاق زندگی می‌کردند. او با پولی که از تدریس خصوصی بدست می‌آورد، می‌توانست مشکلات را برطرف کند، به خصوص در آن موقع امتحانات نهایی دوره کارشناسی را می‌گذراند و توانست همه را با موفقیت به پایان برساند. مطلب زیر از [۱۱] درباره وضعیت راج در آن زمان آورده شده است:

> فقط چند روز تا امتحانات نهایی کارشناسی زمان داشت و راج در کتاب‌هایش غرق بود. اما مشکلات خواهرانش، تأمین غذا و مایحتاج خانواده، اثرات جنگ جهانی اول و کمبود مواد غذایی و دارو، همه و همه مسائلی بودند که مانع آماده شدن وی برای امتحانات بودند. ولی او با وجود تمام مشکلات، امتحانات نهایی کارشناسی را با موفقیت به پایان رساند.

راج تصمیم داشت تحصیلاتش را ادامه دهد، اما خانواده‌اش هیچ درآمدی نداشتند. بنابراین مدتی نمی‌توانست تحصیلاتش را ادامه دهد، اما او خوش شانس بود و یک سال تدریس در دبیرستان استیفنس [8] و هم چنین بورس تحصیلی در مقطع کارشناسی ارشد ریاضیات کاربردی در دانشگاه هندو را بدست آورد. کار تدریس راج، مانع شرکت او در بسیاری از سخنرانی‌ها در دوره کارشناسی ارشد در سال ۱۹۲۳ نبود و او در بسیاری از این سخنرانی‌ها شرکت می‌کرد. بلاخره در سال ۱۹۲۴ دوره کارشناسی ارشد را به پایان رساند. او با وجود تلاش‌های که انجام می‌داد موفق به تدریس در دانشگاه هندو نشد. او به همراه برادرش، هزینه‌های خانواده خود را از راه تدریس خصوصی تأمین می‌کردند. راج بسیاری از موفقیت‌های خود را از طریق تدریس خصوصی، ایجاد کرده بود ولی خوش شانس نیز بود [۱۱] :

> برادر کوچک من، سِت جونِکا [9] تدریس خصوصی انجام می‌داد. من برای ادامه مطالعات در ریاضیات باید به کلکَته [10] می‌رفتم. برادرم موافقت کرد من را در طول این مدت از نظر مالی حمایت کند. در سال ۱۹۲۵ به کلکته آمدم، اما موقعیت من به طور دیگری تغییر کرد و در آن جا مورد توجه‌ی پروفسور شایمِدس موخرِج [11] قرار گرفتم. او یک هندسه دان بود. علاقه اصلی او در زمینه‌های، هندسه غیر اقلیدسی، هندسه $n-$بعدی و خواص جهانی منحنی‌های محدب بود. او اتاقی در خانه خودش به من داد و کتاب‌هایش را نیز به طور رایگان در اختیارم قرار می‌داد و هم‌چنین یک تدریس خصوصی برایم فراهم کرد و من دیگر برای تأمین نیازهایم، به کمک برادرم احتیاج نداشتم.

راج به عنوان یک پژوهشگر، از ژانویه ۱۹۲۸ تا دسامبر ۱۹۲۹، نزد پروفسور موخرج در کلکته ماند و به کمک او به مطالعه روی هندسه پرداخت. بعد از انجام پژوهش‌هایی توانست به عنوان مدرس دانشگاه در رشته ریاضیات، در دانشگاه اِستوش [12]

[5]Hindu [6]Delhi [7]Punjab [8]Stephens [9]Seth Goenka [10]Calcutta [11]Shyamadas Mukherjee [12]Asutosh

در کلکته مشغول به کار شود. او سخت کار می‌کرد ولی حقوقش کم بود، لذا به عنوان مکمل درآمدش، به تدریس خصوصی می‌پرداخت. او پژوهش‌هایش را روی هندسه ادامه داد و مقاله‌ای را در سال ۱۹۳۲ در مورد تعداد دایره‌ها با انحنای کاملاً محصور یا کاملاً باز، به وسیله یک بیضی شکل بسته، [13] منتشر کرد. راج در ستامبر ۱۹۳۲ با دختر قاضی منطقه، سانیا لِتا

Indian statistical Institute, Kolkata

انجمن آمار هند

دِتا [14] ازدواج کرد. وی در دسامبر ۱۹۳۲ به وسیله یکی از دوستانش مِلانوبیس ،[15] به صورت پاره وقت در انجمن آمار هند مشغول شد و نیز به طور پاره وقت روزه‌های شنبه در طول سال و به طور تمام وقت در طول تابستان مشغول به کار بود. نمونه‌های از مقالاتی که از او در انجمن آمار هند منتشر شدند، در مراجع [۱]، [۲]، [۳]، [۴] و [۵] آمده است.
او در ژانویه ۱۹۴۰، انجمن آمار هند را ترک کرد و به عنوان استاد دانشکده ریاضیات کلکته مشغول شد. ولی دوباره در

ملانوبیس

سال ۱۹۴۱ به طور پاره وقت به انجمن آمار هند برگشت و در آن زمان ملانوبیس سرپرست انجمن بود، ولی در سال ۱۹۴۵ راج به عنوان سرپرست جدید انتخاب شد. در آن زمان او مقالاتش را به صورت بین‌المللی منتشر می‌کرد و همین باعث دریافت دعوت نامه‌هایی از چندین دانشگاه از جمله دانشگاه کالیفرنیا، [16] دانشگاه شمال کارولینا [17] شد. تابستان ۱۹۴۸ را به تدریس در دانشگاه کالیفرنیا سپری کرد و دوباره در آگوست ۱۹۴۸ به کلکته برگشت. با وجود پیشنهادهای از طرف دانشگاه کالیفرنیا و دانشگاه اِیلینُوی [18] در اُربانا، [19] او دانشگاه شمال کارولینا را انتخاب کرد و یکسال بعد توسط همکار سابقش سامرِندرا ناس رُی ،[20] به دانشگاه شمال کارولینا پیوست. راج در آن زمان علاوه بر تدریس، کارهای پژوهشی خود را به طور گسترده‌تری ادامه داد و موفق به انتشار مقالات زیادی در زمینه‌های مختلف ریاضیات و آمار شد. از جمله [۹]:

[13]On the number of circles of curvature perfectly enclosing or perfectly enclosed by a closed covex oval [14]Sandhya Lata Datta [15]P C Mahalanobis [16]California [17]Carolina [18]Illinois [19]Urbana [20]Samarendra Nath Roy

راج با دادن مقالاتی در زمینه‌های، فضاهای اقلیدسی، آمار تحلیلی، آمار چند متغیره، هندسه متناهی، مربع‌های لاتین متعامد، طرح‌های آزمایشی، بلوک‌ها، طرح‌های بلوکی نسبی، اسکیم‌های شرکت‌پذیر، آرایه‌های متعامد، طرح‌های فاکتوریل، طرح‌های چرخشی، نظریه‌ی کدینگ، نظریه‌ی گراف، هندسه جزئی، کارکترها و مسائلی که در طرح‌ها و هندسه بیان شده، آثار متعددی را از خود بر جای گذاشته است.

سامرندرا ناس ری

بیشتر مقالات راج تا قبل از سال ۱۹۶۴ در زمینه‌ی آمار و کاربردهای آن بوده است. اما بعد از سال ۱۹۶۴ علاقه راج به یکباره از آمار به ترکیبیات برگشت. از آن زمان به بعد، نام راج در بیشتر مقالات ترکیبیاتی به چشم می‌خورد. شاید نام وی در کدهای BCH، $(Bose-Chaudhuri-Hocquenghem)$ و جبرهای بوس ـ مسنر، [۲۱] گواه این واقعیت باشد. راج در دانشگاه شمال کارولینا ماند، تا این که در آگوست ۱۹۷۱ باز نشسته شد. وی برای بار دوم نیز در سال ۱۹۸۰ از دانشگاه اِمرتوس [۲۲] در ایالت کولورادو [۲۳] بازنشسته شد. راج در سال ۱۹۷۴ از انجمن آمار هند، رتبه افتخاری گرفت و هم‌چنین از دانشگاه ویسا ـ بهاراتی [۲۴] در وِست بِنگال [۲۵] هند، در سال ۱۹۷۹ نیز درجه افتخار دریافت کرد. او برگزیده‌ای آکادمی علوم آمریکا در سال ۱۹۷۶ نیز گردید.

راج در سال ۱۹۸۷ در سن ۸۷ سالگی فوت کرد. بعد از مرگ راج، انجمن آمار هند در سال ۱۹۸۸، به یاد او کنفرانسی را در زمینه‌ی ترکیبیات و کاربردهای آن برگزار کرد. در سال ۱۹۹۵، کنفرانسی به نام راج، در فورت کالینز، [۲۶] برگزار شد [۷]. هم‌چنین در دسامبر ۲۰۰۲، انجمن آمار هند، کنفرانسی به نام صد سالگی راج، در زمینه‌ی ریاضیات گسسته و کاربردهای آن در کلکته برگزار کرد.

در ادامه قصد داریم به نمونه‌ای از کارهای راج که در زمینه‌ی ترکیبیات انجام داده است، بپردازیم. اسکیم‌های شرکت‌پذیر و طرح‌های بلوکی غیر کامل متعادل جزئی و ارتباط آن‌ها از جمله کارهای ماندگار راج در ترکیبیات جبری به شمار می‌رود، که در زیر به معرفی آن‌ها می‌پردازیم.

۳. اسکیم‌های شرکت‌پذیر

۱.۳. تاریخچه اسکیم‌های شرکت‌پذیر. نام اسکیم‌های شرکت‌پذیر را اولین بار راج و شیماموتو در سال ۱۹۵۲ معرفی کرده‌اند، هرچند پیش از این توسط راج و نیر در سال ۱۹۳۹، بدون نام اسکیم‌های شرکت‌پذیر معرفی شده بوده‌اند [۶]. با انتشار مقاله‌ای به نام جبرهای بوس ـ مسنر [۸] از راج و مسنر در سال ۱۹۵۹، این موضوع در زمینه‌ی ترکیبیات جبری اهمیت پیدا کرد. از آن پس مقالاتی در این زمینه منتشر گردید، از آن جمله می‌توان به مقالاتی از دلسارت [۲۷] در سال ۱۹۷۳ اشاره

[21]Bose-Mesner Algebra [22]Emeritus [23]Colorado [24]Visa-Bharati [25]West Bengal [26]Fort Collins [27]Delsart

راج کندرا بوس

کرد، که در آن به ارتباط بین اسکیم‌های شرکت‌پذیر و نظریه‌ی کدگذاری پرداخته است [۱۰]. هم‌چنین مطالعات هیگمن، [۲۸] به عنوان پیکربندی منسجم و گراف‌های منظم فاصله [۲۹] توسط ویسفیلر، [۳۰] باعث رونق اسکیم‌های شرکت‌پذیر شدند.

۲.۳. معرفی اسکیم. فرض کنید V یک مجموعه‌ی متناهی و $\mathcal{R} = \{R_0, R_1, \dots, R_m\}$ یک مجموعه از روابط دوتایی روی V باشد. زوج $\mathcal{C} = (V, \mathcal{R})$، یک اسکیم روی مجموعه V نامیده می‌شود، هرگاه شرایط زیر برقرار باشند:

۱) $\mathcal{R}$، یک افراز برای مجموعه‌ی V^2 باشد.
۲) $\Delta(V) = \{(v,v) | v \in V\}$، اجتماعی از اعضای $\mathcal{R}$ باشد.
۳) $R_i^t = \{(v,u) | (u,v) \in R_i\} \in \mathcal{R}$، به ازای هر $1 \leq i \leq n$.
۴) به ازای هر $R_i, R_j, R_k \in \mathcal{R}$ و $(u,w) \in R_k$ عدد

$$C_{R_i,R_j}^{R_k} = |\{v \in V \mid (u,v) \in R_i,\ (v,w) \in R_j\}|,$$

به انتخاب $(u,w) \in R_k$ وابسته نباشد.
به عدد $C_{R_i,R_j}^{R_k}$ ثابت‌های ساختاری اسکیم $\mathcal{C}$ گفته می‌شود. در حالتی که $\mathcal{R} = \{R_0, R_1, \dots R_m\}$ باشد، به $\mathcal{C}$، اسکیمی با m کلاس شرکت‌پذیر گفته می‌شود و اسکیم $\mathcal{C}$ را جابه‌جایی گویند، هرگاه $C_{R_i,R_j}^{R_k} = C_{R_j,R_i}^{R_k}$، به ازای هر $R_i, R_j, R_k \in \mathcal{R}$. اگر به ازای هر رابطه‌ی $R \in \mathcal{R}$ داشته باشیم $R^t = R$، آنگاه اسکیم را متقارن گویند. در حالتی که $\Delta(V) \in \mathcal{R}$، اسکیم $\mathcal{C}$ را همگن یا شرکت‌پذیر گویند.

مثال ۱.۳. *فرض کنید* $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ *و* $\mathcal{R} = \{R_0, R_1, R_2, R_3\}$ *به طوری‌که:*

---
[28] Higman [29] distance regular graphs [30] Weisfeller

$$
\begin{aligned}
R_۰ =&\{(v_i, v_i)\ : v_i \in V\},\\
R_۱ =&\{(v_۱, v_۲), (v_۲, v_۱), (v_۳, v_۵), (v_۵, v_۳), (v_۴, v_۶), (v_۶, v_۴)\},\\
R_۲ =&\{(v_۱, v_۳), (v_۱, v_۴), (v_۲, v_۵), (v_۲, v_۶), (v_۳, v_۱), (v_۳, v_۴),\\
&(v_۴, v_۱), (v_۴, v_۳), (v_۵, v_۲), (v_۵, v_۶), (v_۶, v_۲), (v_۶, v_۵)\},\\
R_۳ =&\{(v_۱, v_۵), (v_۱, v_۶), (v_۲, v_۳), (v_۲, v_۴), (v_۳, v_۲), (v_۳, v_۶)\\
&(v_۴, v_۲), (v_۴, v_۵), (v_۵, v_۱), (v_۵, v_۴), (v_۶, v_۱), (v_۶, v_۳)\}.
\end{aligned}
$$

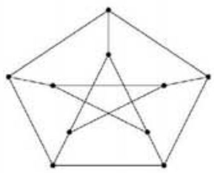
در این‌صورت دیده می‌شود که زوج $(V, \{R_i\}_{i=۰}^{۳})$، یک اسکیم شرکت‌پذیر متقارن و جابه‌جایی است.

تعریف ۲.۳. *گراف n رأسی $\Gamma = (\Omega, R)$ را یک گراف قویاً منظم با مجموعه رئوس $\Omega = \{۱, ۲, \ldots, n\}$ و مجموعه یال‌های R گویند، هرگاه درجه هر رأس آن برابر k و هر دو رأس مجاور داری λ همسایگی مشترک باشند و هر دو رأس غیرمجاور دارای μ همسایگی مشترک باشند. ثابت می‌شود که ماتریس مجاورت گراف Γ، $A(\Gamma)$، در رابطه زیر صدق می‌کند.*

$$
\begin{aligned}
&A^۲ = kI + \lambda A + \mu(J - I - A),\\
&AJ = JA = kJ,\\
&A^۲ + A(\mu - \lambda) - I(k - \mu) = \mu J.
\end{aligned}
$$

معمولاً گراف قویاً منظم Γ را با پارامترهای (n, k, μ, λ) نمایش می‌دهند.

مثال ۳.۳. *در شکل زیر گراف قویاً منظمی با پارامترهای $(۱۰, ۳, ۱, ۰)$ نشان داده شده است. به این گراف، گراف پترسن*



گراف پترسن

[31] *گفته می‌شود.*

مثال ۴.۳. *فرض کنید Γ یک گراف قویاً منظم با پارامترهای (n, k, μ, λ) با ماتریس مجاورت $A = A(\Gamma)$ و مجموعه رئوس $V = \{v_۱, v_۲, \ldots v_n\}$ باشد. رابطه‌های دوتایی زیر را روی V به صورت زیر تعریف می‌کنیم:*

$$
\begin{aligned}
R_۰ &= \{(v_i, v_i) | ۱ \leq i \leq n\},\\
R_۱ &= \{(v_i, v_j) | A(\Gamma)_{v_i, v_j} = ۱,\ v_i \neq v_j\},\\
R_۲ &= \{(v_i, v_j) | A(\Gamma)_{v_i, v_j} = ۰\}.
\end{aligned}
$$

در این‌صورت دیده می‌شود که $\mathcal{C} = (V, \mathcal{R})$، که در آن $\mathcal{R} = \{R_۰, R_۱, R_۲\}$، یک اسکیم شرکت‌پذیر با دو کلاس می‌باشد.

[31] Petersen

۳.۳. جبرهای بوس ـ مسنر. فرض کنید $\mathcal{C} = (V, \mathcal{R})$، یک اسکیم شرکت‌پذیر باشد به طوری‌که $\mathcal{R} = \{R_۰, R_۱, R_۲, \dots, R_d\}$. به ازای هر $۰ \leq i \leq d$، ماتریس‌های A_i را که با عناصر V اندیس‌گذاری شده‌اند، به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(A_i)_{uv} = \begin{cases} ۱ & (u,v) \in R_i \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

در این‌صورت می‌توان ثابت کرد که A_iها در شرایط زیر صدق می‌کنند:

(۱) $A_۰ = I$ که I ماتریس همانی از مرتبه $|V|$ می‌باشد،
(۲) $\sum_{i=۰}^{d} A_i = J$ که J ماتریسی مربعی با درایه‌های همه جا ۱ و از مرتبه $|V|$ می‌باشد،
(۳) به ازای هر i، ترانهاده ماتریس A_i یکی از ماتریس‌های A_j است،
(۴) $A_iA_j = \sum_{k=۰}^{d} C_{ij}^{k} A_k$، که در آن C_{ij}^{k}، ثابت ساختاری اسکیم $\mathcal{C}$ است.

به جبر مختلط تولید شده توسط ماتریس‌های A_i که $۰ \leq i \leq d$، جبر بوس ـ مسنر متناظر با اسکیم $\mathcal{C}$ گفته می‌شود.

۴. معرفی طرح بلوکی

۱.۴. بوس و طرح‌های بلوکی متعادل. در ترکیبیات، یک طرح بلوکی، یک مجموعه به همراه یک خانواده از زیرمجموعه‌های آن می‌باشد، به طوری‌که در یک سری از روابط مشخص صدق می‌کنند. عمده کاربرد طرح‌های بلوکی متعادل در آمار می‌باشد. تعمیمی از طرح‌های بلوکی متعادل توسط بوس و نیر در سال ۱۹۳۹ به نام طرح‌های بلوکی غیرکامل متعادل به طور جزئی، با استفاده از اسکیم‌های شرکت‌پذیر با ۲ کلاس ارائه شدند [۵]. بوس به همراه کلات‌ورتی [32] در سال ۱۹۵۴، این طرح‌ها را با استفاده از اسکیم‌های با m کلاس شرکت‌پذیر تعریف کردند، که به تعریف بوس و کلات‌ورتی معروف می‌باشد. طرح‌های بلوکی غیرکامل متعادل [33] را تعریف و سپس طرح‌های بلوکی غیرکامل متعادل به طور جزئی [34] را معرفی می‌کنیم.

۲.۴. طرح بلوکی غیرکامل متعادل. مجموعه‌ی $V = \{۱, ۲, \dots, v\}$ را در نظر می‌گیریم. یک ۲–طرح یا طرح بلوکی غیرکامل متعادل (یا به اختصار $BIBD$)، عبارت است از یک زوج (V, β)، که در آن β خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های V مانند $\beta = \{B_۰, B_۱, \dots, B_b\}$، به‌نام بلوک‌ها، می‌باشد، به طوری‌که:

(۱) هر عضوی از V در یک بلوک، فقط یک مرتبه ظاهر می‌شود،
(۲) تعداد عناصر هر بلوک مساوی k می‌باشد،
(۳) هر زوج از اعضای V به تعداد λ بار در هر بلوک ظاهر می‌شوند،
(۴) پارامترهای $v = |V|$، k و λ در شرط زیر صدق می‌کنند،

$$۰ < \lambda, k \leq v - ۱.$$

یک طرح $BIBD$ را معمولاً یک (v, b, r, k, λ)–طرح می‌گویند، که در آن v تعداد عناصر، $b = |\beta|$ تعداد بلوک‌ها و r تعداد ظاهر شدن هر عضو در بلوک‌ها می‌باشد. بین این ۵ پارامتر در یک طرح بلوکی غیرکامل متعادل، ۲ شرط زیر برقرار می‌باشند:

$$r(k - ۱) = \lambda(v - ۱),$$
$$bk = vr.$$

[32] Clatwerty [33] balanced incomplete block designs [34] partially balanced incomplete block designs

بنابراین با توجه به دو شرط بالا معمولاً یک طرح بلوکی غیرکامل متعادل را یک (v, k, λ)–طرح نیز می‌گوییم. بنابر قضیه‌ی معروف فیشر، در یک طرح بلوکی همیشه $b \geq v$ می‌باشد. هرگاه در یک طرح بلوکی غیرکامل متعادل $b = v$ و $k = r$ باشد، طرح را متقارن گویند.

مثال ۱.۴. *فرض کنید $V = \{۱, ۲, ۳, \dots, ۹\}$. قرار دهید:*

$$\beta = \{\{۱,۲,۳\}, \{۴,۵,۶\}, \{۷,۸,۹\}, \{۱,۴,۷\}, \{۲,۵,۸\}, \{۳,۶,۹\},$$
$$\{۱,۵,۹\}, \{۲,۶,۷\}, \{۳,۴,۸\}, \{۱,۶,۸\}, \{۲,۴,۹\}, \{۳,۵,۷\}\}.$$

به آسانی ثابت می‌شود که (V, β) یک $(۹, ۱۲, ۴, ۳, ۱)$–طرح می‌باشد.

مثال ۲.۴. *فرض کنید $V = \{۱, ۲, ۳, \dots, ۱۱\}$ و تعریف کنید:*

$$\beta = \{\{۱,۳,۴,۵,۹\}, \{۲,۴,۵,۶,۱۰\}, \{۳,۵,۶,۷,۱۱\},$$
$$\{۴,۶,۷,۸,۱\}, \{۵,۷,۸,۹,۲\}, \{۶,۸,۹,۱۰,۳\}, \{۷,۹,۱۰,۱۱,۴\},$$
$$\{۸,۱۰,۱۱,۱,۵\}, \{۹,۱۱,۱,۲,۶\}, \{۱۰,۱,۲,۳,۷\}, \{.۱۱,۲,۳,۴,۸\}\}$$

به آسانی ثابت می‌شود که (V, β) یک $(۱۱, ۵, ۲)$–طرح متقارن می‌باشد.

۳.۴. طرح بلوکی غیرکامل متعادل به طور جزئی. فرض کنید $\mathcal{C} = (V, \mathcal{R})$ یک اسکیم شرکت‌پذیر متقارن و جابه‌جایی باشد به طوری‌که $\mathcal{R} = \{R_۰, R_۱, \dots, R_m\}$. یک طرح بلوکی غیرکامل متعادل به طور جزئی (یا به اختصار $PBIBD(m)$) با m کلاس شرکت‌پذیر، شامل مجموعه‌ی $V = \{۱, ۲, \dots, v\}$ و خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های مرتب V مانند $\beta = \{B_۰, B_۱, \dots, B_b\}$، به‌نام بلوک‌ها، می‌باشد به طوری‌که:

(۱) هر عضوی از V در یک بلوک، فقط یک مرتبه ظاهر می‌شود،
(۲) تعداد عناصر هر بلوک مساوی k می‌باشد،
(۳) هر عضوی از V در rتا بلوک ظاهر می‌شود،
(۴) هر زوج از اعضای V مانند $(x, y) \in R_i$ دقیقاً به λ_iتا بلوک تعلق داشته باشد.

طرح‌های $PBIBD$ را یک $(k; \lambda_۱, \lambda_۲, \dots, \lambda_m; v)$–طرح می‌گویند.
روابط زیر برای پارامترهای یک طرح بلوکی غیرکامل متعادل به طور جزئی همواره برقرار می‌باشد:

$$vr = bk,$$
$$\sum_{i=۱}^{m} n_i = v - ۱,$$
$$\sum_{i=۱}^{m} n_i \lambda_i = r(k - ۱),$$
$$\sum_{u=۰}^{m} C_{R_j R_u}^{R_h} = n_j,$$
$$n_i C_{R_j R_h}^{R_i} = n_j C_{R_i R_h}^{R_j}.$$

که در آن $n_i = C_{R_i, R_i^t}^{\Delta(V)}$.
ثابت می‌شود که $PBIBD(۱)$ و $PBIBD(۲)$، در حالتی که $\lambda_۱ = \lambda_۲$، یک $BIBD$ هستند.

مثال ۳.۴. فرض کنید $\mathcal{C} = (V, \{R_i\}_{i=۰}^{۳})$، اسکیم شرکت‌پذیر با سه کلاس زیر روی مجموعه‌ی $V = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$ باشد.

$$\begin{aligned} R_۰ &= \{(i, i) \ : i \in V\},\\ R_۱ &= \{(۱,۲), (۱,۳), (۲,۱), (۲,۳), (۳,۱), (۳,۲), (۴,۵), (۴,۶), (۵,۴), (۵,۶), (۶,۴), (۶,۵)\},\\ R_۲ &= \{(۱,۴), (۲,۵), (۳,۶), (۴,۱), (۵,۲), (۶,۳)\},\\ R_۳ &= \{(۱,۵), (۱,۶), (۲,۴), (۲,۶), (۳,۴)(۳,۵)(۴,۲), (۴,۳), (۵,۱), (۵,۳), (۶,۱), (۶,۲)\}. \end{aligned}$$

قرار دهید:

$$\begin{aligned} \beta = \{&(۱۲۴), (۱۳۴), (۱۲۵),\\ &(۱۳۶), (۲۳۵), (۲۳۶),\\ &(۴۵۶), (۴۵۶)\}. \end{aligned}$$

در این‌صورت دیده می‌شود که مجموعه‌ی V به همراه مجموعه بلوک‌های β، یک طرح بلوکی با ۳ کلاس روی اسکیم‌های شرکت‌پذیر $\mathcal{C}$ می‌باشد. به‌علاوه پارامترهای این طرح بلوکی برابراست با:

$$v = ۶,\ b = ۸,\ k = ۳,\ r = ۴,\ \lambda_۱ = \lambda_۲ = ۲, \text{ و } \lambda_۳ = ۱.$$

مراجع

[1] R. C. Bose, On the exact distribution and moment-coefficients of the D2-statistics, (1936).

[2] R. C. Bose, P. C. Mahalanobis and S. N. Roy, Normalization of variates and the use of rectangular coordinates in the theory of sampling distributions, (1936).

[3] R. C. Bose and S. N Roy, Distribution of the studentized D2-statistic, (1938).

[4] R. C. Bose, On the construction of balanced incomplete block designs, *Ann. Eugenics*, **9** (1939) 353–399.

[5] R. C. Bose and K. R. Nair, Partially balanced incomplete block designs, (1939).

[6] R. C. Bose and K. R. Nair, Partially balanced incomplete block designs, **4** (1939) 337–372.

[7] R. C. Bose and S. Shrikhande, Memorial Conference, Fort Collins, Colorado: my reminiscences of Professor R. C. Bose and disproof of Euler's conjecture, R. C. Bose Memorial Conference, Fort Collins, CO, 1995, *J. Statist. Plann. Inference*, **73** no. 1-2 (1998) 273-276.

[8] R. C. Bose and D. M. Mesner, On linear associative algebras corresponding to association schemes of partially balanced designs, *Ann. Math. Statist.*, **30** (1959) 21–38.

[9] D. K. R. Chaudhuri, A. R. Rao and B. Roy, Foreword, R. C. Bose Centennial Symposium on Discrete Mathematics and Applications, Kolkata, December 2002, *Discrete Math.*, **306** no. 14 (1998).

[10] P. Delsarte, An Algebraic Approach to the Association Schemes of Coding Theory, *Philips Res. Rep. Suppl.*, no. 10 (1973).

[11] J. Gani and (ed), *The Making of Statisticians*, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.

الهام اذان گویان فرد
اصفهان، خیابان هزار جریب، دانشگاه اصفهان، گروه ریاضی
tavakoli_elena@yahoo.com

الهام اذان گویان فرد متولد اردیبهشت ماه ۱۳۶۴ در شهر اصفهان است. وی در سال ۱۳۸۳ وارد مقطع کارشناسی ریاضی کاربردی دانشگاه پیام نور اصفهان شد و در سال ۱۳۸۹ وارد مقطع کارشناسی ارشد ریاضی محض، گرایش جبر دانشگاه اصفهان شد. وی در تاریخ ۱۳۹۲/۲/۲۴ تحت نظر آقای دکتر جواد باقریان از پایان نامه خود دفاع کرد.