

QUANTUM LOGIC

ALIREZA MOAZZEN 

ABSTRACT. This article employs a descriptive-analytical method with an algebraic and axiomatic approach to address quantum logic. Through several thought experiments, it is demonstrated that the distributive law for propositions does not hold in quantum mechanics. Therefore, the logic governing this domain of science is not classical logic. In fact, the algebra corresponding to the logic of quantum propositions is an orthomodular lattice, which is why the distributive law is not necessarily valid for such propositions. In quantum logic, various definitions are offered for the implication operator. Since none of these operators satisfy the deduction theorem, a suitable implication operator with this property must be defined. This objective is achieved by defining a unified quantum logic. By constructing a Lindenbaum-Tarski algebra for this unified quantum logic, it can be shown that it is indeed a quantum logic. Dishkant presented an embedding of quantum logic into the Br-modal logic system. This provides an appropriate semantics for quantum logic. A suitable model for this logic is the closed subspaces of a Hilbert space.

1. Introduction

Quantum mechanics describes the behavior of matter and energy at atomic and subatomic scales, where classical intuition fails. Early physics, following Newton, treated light as particles, but later discoveries revealed wave-like behavior. By the early 20th century, experiments such as the photoelectric effect suggested that light sometimes behaves like particles. Similarly, electrons, initially assumed to behave strictly

Keywords: Quantum logic, modal logic, Hilbert space.

Article Type: Promotional Paper.

Communicated by Rasoul Roknizadeh.

Received: 02-12-2024, Accepted: 30-09-2025, Published Online: 02-11-2025.

Cite this article: A. Moazzen, Quantum logic, *Mathematics and Society*, **11** no. 2 (2026) 81–96. <https://dx.doi.org/10.22108/msci.2025.129248.1712>.

as particles, were found to exhibit wave-like properties. This duality produced growing conceptual ambiguities that were resolved between 1926–1927 through the foundational work of Schrödinger, Heisenberg, and Born.

The first formalism of quantum mechanics, matrix mechanics, was introduced by Werner Heisenberg in a seminal paper. In this framework, physical quantities such as momentum and kinetic energy are represented by infinite matrices, whose eigenvalues correspond to possible measurable values. The non-commutativity of matrix multiplication implies that some observables cannot be simultaneously measured with arbitrary precision—this underlies Heisenberg’s uncertainty principle. Born and Jordan formulated an explicit version of the uncertainty relation: if P and Q are matrices representing position and momentum, then:

$$PQ - QP = \frac{h}{\pi i}.$$

In 1926, Erwin Schrödinger published his partial differential equation—the Schrödinger equation—which became the most famous equation in physics. Schrödinger proved that its solutions in L^2 space correspond to experimentally observed electron energy levels in hydrogen. The stationary-state wavefunction is written $\psi(x, y, z)$, and in non-stationary cases includes time t . Schrödinger himself did not initially provide a physical interpretation of ψ , but Max Born proposed the probabilistic interpretation: $|\psi|^2 dxdydz$ gives the probability of locating a particle in the infinitesimal volume element $dxdydz$. This probabilistic interpretation is now standard.

1.1. Research Background in Quantum Logic. The reconsideration of deductive logic to align with quantum theory began in the early 20th century. Birkhoff and von Neumann first described quantum logic using non-classical lattices. Later, researchers like Dalla Chiara and Giuntini analyzed semantic and epistemological aspects, showing that quantum logic carries implications beyond pure mathematics [4]. Cohen attempted to model quantum propositions using Hilbert space subspaces [3], while Rédei analyzed the philosophical gap between classical and quantum logic [11]. In Persian scholarship, Ebadi critically examined Putnam’s interpretation of quantum logic and highlighted distinctions between logical systems [5].

1.2. Critique of Classical Logic and Need for Quantum Logic. Classical logic has been the standard analytical framework for scientific theories, relying on principles like the law of excluded middle and causality. However, quantum phenomena such as superposition and entanglement reveal the inadequacy of these principles at the microscopic level. Logical analysis shows that the lattice structure of propositions about quantum systems is not Boolean but orthomodular and non-distributive. This necessitates a new logic compatible with quantum features. Persisting with classical logic leads to distorted or incomplete interpretations of quantum phenomena [11]. Hence, quantum logic emerges as an essential framework.

1.3. Axioms of Quantum Mechanics. A key difference between classical and quantum mechanics is that in the classical view, a quantity A of a system S has a definite value independent of measurement, and measuring does not affect the state. In quantum mechanics, measurements yield different possible values with probabilities depending on the system's state, and the act of measurement generally alters the system. The formal axioms are:

- (1) **State representation:** There is a one-to-one correspondence between physical states of S and rays (one-dimensional subspaces) of a Hilbert space H .
- (2) **Observables:** Physical quantities correspond to Hermitian operators on H .
- (3) **Measurement outcomes:** Possible measurement results are eigenvalues of the corresponding Hermitian operator. Degenerate cases occur when an eigenspace has dimension greater than one.
- (4) **Probabilities:** If the system is in normalized state x and we measure observable A with eigenvector y_n for eigenvalue a_n , the probability of obtaining a_n is:

$$p(a_n) = |\langle y_n, x \rangle|^2.$$

- (5) **State collapse:** Upon measurement yielding a , the state collapses to the normalized projection onto the eigenspace corresponding to a . The combination of two systems is represented by the tensor product of their Hilbert spaces [6].

1.4. Wave–Particle Duality and the Double-Slit Experiment. To understand electron behavior, it is instructive to compare particles (bullets) and waves (water).

Bullets: Imagine firing bullets at a barrier with two narrow slits. The bullets pass through individual slits and strike a detection wall. The probability of hitting a point x is additive:

$$p_{12}(x) = p_1(x) + p_2(x).$$

Water Waves: Repeating the experiment with water waves creates interference. The intensity from two slits is:

$$I_{12} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \theta,$$

where θ is the phase difference. Here, $I_{12} \neq I_1 + I_2$, demonstrating constructive and destructive interference.

Electrons: Using electrons instead of bullets or water produces an interference pattern similar to waves, even when electrons are sent one at a time. Initially, one might assert proposition E : “Each electron passes through either slit (1) or slit (2).” If E were true, we would expect:

$$p_{12}(x) = p_1(x) + p_2(x),$$

but experiments show $p_{12} \neq p_1 + p_2$. Thus, E fails: electrons do not behave as classical particles choosing a definite slit. When a strong light source is added to observe the slits, scattered photons reveal which slit the electron uses, and the interference pattern disappears. Measurement collapses the wavefunction,

making E effectively true under observation but invalid when unobserved. This demonstrates the central role of measurement in quantum theory and highlights non-classical logical structures.

1.5. Philosophical and Logical Implications. This behavior suggests that quantum propositions cannot always be treated as having definite truth values independent of observation. The measurement context determines outcomes, undermining the classical law of excluded middle. The orthomodular lattice structure of quantum propositions matches experimental results, while classical Boolean logic fails. Quantum logic does not replace classical logic universally but extends it to account for phenomena like superposition and entanglement. Scholars like Birkhoff, von Neumann, Cohen, and Rédei argue that this shift has epistemological consequences beyond physics, affecting how knowledge and reasoning are conceptualized [1, 3, 11, 5].

2. Main Results

This section summarizes the main results about quantum logic (QL) presented in the original text. Quantum logic formalizes propositions about quantum systems, departing from classical Boolean logic. Propositions p_j are defined inductively: any propositional variable is a formula, negation $\sim A$ and conjunction $A \wedge B$ of formulas are formulas, and disjunction is defined via De Morgan as $A \vee B = \sim(\sim A \wedge \sim B)$. Multiple implication operators have been proposed to capture the non-classical inference structure of quantum systems—such as $\rightarrow_1$ (Sasaki, Mittelstedt) and $\rightarrow_2$ (Dishkant)—but none satisfies the classical Deduction Theorem.

$$\begin{aligned}
 A \rightarrow_0 B &\doteq \sim A \vee B \\
 A \rightarrow_1 B &\doteq \sim A \vee (A \wedge B) && (Sasaki, Mittelstedt) \\
 A \rightarrow_2 B &\doteq B \vee (\sim A \wedge \sim B) && (Dishkant) \\
 A \rightarrow_3 B &\doteq (A \wedge B) \vee (\sim A \wedge B) \vee (\sim A \wedge \sim B) \\
 A \rightarrow_4 B &\doteq (A \wedge B) \vee (\sim A \vee B) \vee ((\sim A \vee B) \wedge B) \\
 A \rightarrow_5 B &\doteq (\sim A \wedge \sim B) \vee (\sim A \wedge B) \vee ((\sim A \wedge B) \wedge A)
 \end{aligned}$$

Pavicic [9] showed that none of these has priority over another, leading to the Unified Quantum Logic (UQL), which preserves desirable properties like orthomodularity and transitivity ([10]).

The axiomatization of QL uses postulates such as $A \leftrightarrow A$, double negation $A \leftrightarrow \sim\sim A$, and $(A \wedge B) \rightarrow A$. Inference rules include transitivity (R_1), contraposition (R_2), and conjunction introduction (R_3). Dropping

rule R_4 yields the minimal quantum logic MQL .

$$\begin{aligned} R_1 : & \quad A \rightarrow B \& B \rightarrow C \Rightarrow A \rightarrow C \\ R_2 : & \quad A \rightarrow B \Rightarrow \sim B \rightarrow \sim A \\ R_3 : & \quad A \rightarrow B \& A \rightarrow C \Rightarrow A \rightarrow (B \wedge C) \\ R_4 : & \quad A \rightarrow B \& (\sim A \wedge B) \rightarrow (C \wedge \sim C) \Rightarrow B \rightarrow A \end{aligned}$$

Adding orthomodularity,

$$OML : A \wedge (\sim A \vee (A \wedge B)) \rightarrow B,$$

makes MQL equivalent to full QL . Classical logic CL is recovered from MQL by imposing distributivity:

$$D : (A \wedge (B \vee C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C)).$$

Quantum logic is algebraically represented by orthomodular lattices: complemented lattices $(L, \vee, \wedge, ', 0, 1)$ where for each $a \in L$ there exists a' such that $a \vee a' = 1$ and $a \wedge a' = 0$. An ortholattice satisfying $a \leq c \Rightarrow a \vee (a' \wedge c) = c$ is orthomodular ([1]). This lattice-theoretic approach captures the partial ordering and compatibility structure of quantum propositions.

Dishkant embedded quantum logic into modal logic Br^- , providing a semantic interpretation via necessity L and possibility M , linked by $Lp = \sim M \sim p$ ([8]). The modal systems T , S_4 , and S_5 are progressively stronger: T includes necessity $Lp \supset p$; adding $Lp \supset LLp$ gives S_4 , and adding $Mp \supset LMp$ gives S_5 . Brauer's system Br arises by adding $p \supset LMp$ to T , while Br^+ strengthens T with an additional inference rule. These embeddings show quantum logics can be studied within well-developed modal frameworks, connecting operator-algebraic semantics to modal reasoning.

Von Neumann and Birkhoff connected QL to Hilbert space theory: propositions correspond to closed subspaces (or projection operators) of a Hilbert space H ([2]). For propositions p, q with subspaces M_p, M_q , conjunction corresponds to intersection $M_{p \wedge q} = M_p \cap M_q$, disjunction corresponds to the closed linear span $M_{p \vee q} = M_p \oplus M_q$, and negation corresponds to orthogonal complement $M_{\sim p} = M_p^\perp$. Logical implication $p \rightarrow q$ is identified with subspace inclusion $M_p \subseteq M_q$. This captures non-classical behavior: a vector x can belong to $M_{p \vee q}$ without lying in M_p or M_q individually, reflecting that disjunction in QL may be true even if neither disjunct is individually true.

The compatibility of propositions is formalized: p and q are compatible if there exist mutually orthogonal u, v, w with $p = u \vee v$ and $q = v \vee w$. Classical logic is the special case where all propositions are pairwise compatible; a genuinely quantum logic requires at least one pair of incompatible propositions ([13]; [12]).

Pavicic's unified approach ([10]) shows that by using a uniform implication operator, one can construct an axiomatic system whose Lindenbaum–Tarski algebra is an orthomodular lattice, preserving essential

properties such as the orthomodular law, transitivity, and the law of excluded middle. Dishkant's embedding $UQL \hookrightarrow Br^-$ demonstrates that QL can be represented within modal logic, ensuring semantic completeness and offering tools from modal semantics.

3. Conclusions

Overall, the results consolidate several approaches: algebraic (orthomodular lattices), modal (via T , S_4 , S_5 , Br^-), and Hilbert-space-based (Birkhoff and von Neumann's construction). These show that quantum logic is weaker than classical logic (due to failure of distributivity), but by adding distributivity or other axioms, classical logic is recovered. The compatibility concept explains why quantum propositions can behave non-classically: two observables may not be simultaneously measurable, corresponding to non-compatible subspaces. Thus, quantum logic formalizes the departure from Boolean reasoning required by quantum mechanics.

The connection between subspace lattices and propositions, first articulated by Birkhoff and von Neumann (1936), remains central: the closed subspaces of a Hilbert space form an orthomodular lattice, and their meet, join, and complement correspond directly to quantum logical operations. Subsequent authors (Hughes & Cresswell, 1996; Pavicic, 1998) have refined the axioms, implication operators, and modal embeddings to provide a unified and semantically rich account of QL . These developments underpin modern approaches in quantum foundations, quantum computation, and categorical quantum mechanics, where logical structure plays a critical role.

Alireza Moazzen

Department of Mathematics, Kosar University of Bojnord, P.O.Box 9453155168, Bojnord, Iran

Email: ar.moazzen@kub.ac.ir

منطق کوانتومی

علیرضا مؤذن^{id}

چکیده. در این مقاله با استفاده از روش توصیفی-تحلیلی، ارائه چند آزمایش ذهنی نشان داده شده است مبنی بر اینکه، قانون توزیع پذیری گزاره‌ها در مکانیک کوانتوم برقرار نمی‌باشد. بنابراین منطق حاکم بر این حوزه از علم منطق کلاسیک نمی‌باشد. در واقع جبر متناظر با منطق گزاره‌های کوانتومی یک شبکه مدولی قائم است. بنابراین لزومی ندارد که قانون توزیع پذیری در مورد این قبیل گزاره‌ها برقرار باشد. در منطق کوانتوم برای عملگر استلزام تعریف‌های گوناگونی ارائه می‌شود. از آنجا که هیچ‌کدام از این عملگرها در قضیه استنتاج صدق نمی‌کنند، لذا بایستی عملگر استلزام مناسبی با این خاصیت تعریف شود. این منظور با تعریف منطق کوانتوم متحد برآورده می‌شود. با ساختن جبر لیندنباوم-تارسکی^۱ برای منطق کوانتوم متحد، می‌توان نشان داد که آن در واقع یک منطق کوانتومی است. دیشکانت^۲ یک نشاندهنده^۳ از منطق کوانتومی در دستگاه منطق عرضی^۴ Br^- ارائه کرد. با این کار به معنی^۵ مناسبی برای منطق کوانتومی دست می‌یابیم. یک مدل مناسب برای این منطق زیر فضاهای بسته‌ی یک فضای هیلبرت است.

۱. مقدمه

مکانیک کوانتوم توصیف رفتار ذرات در مقیاس اتمی است و عملکرد ذرات در مقیاس بسیار ریز هیچ شباهتی به رویدادهای قابل آزمایش ندارند. از نظر نیوتن نور از ذرات ساخته شده است. بعد از وی کشف شد که نور شبیه موج نیز رفتار می‌کند. در آغاز قرن بیستم فیزیکدانان دریافته‌اند که نور در واقع گاهی اوقات رفتار ذره‌ای دارد. از لحاظ تاریخی تصور می‌شد که الکترون شبیه یک ذره رفتار می‌کند. ولی پس از آن دریافته‌اند که الکترون در برخی از جنبه‌ها شبیه یک موج نیز رفتار می‌کند. تکامل تدریجی اطلاعات در مورد رفتار ذرات بسیار ریز در طی ربع اول قرن بیستم یک ابهام فزاینده را پدید آورد که سرانجام توسط شرودینگر^۱، هایزنبرگ^۲ و بورن^۳ در سال‌های ۱۹۲۶ و ۱۹۲۷ این ابهام برطرف شد.

اولین نسخه از صورت بندی مکانیک کوانتوم را با نام مکانیک ماتریسی می‌شناسند که مقدمات آن توسط ورنر هایزنبرگ در مقاله مشهورش آورده شده است. نکته اساسی این است که کمیت‌های فیزیکی همچون تکانه و انرژی جنبشی و ... را توسط ماتریس‌های نامتناهی نشان می‌دهند که مقادیر ممکن یک کمیت فیزیکی را می‌توان به عنوان مقادیر ویژه‌ی ماتریس متناظرش در نظر گرفت. از آنجا که ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابجایی ندارد از این به عنوان اندازه‌ناپذیری همزمان کمیت‌های فیزیکی متناظر آن ماتریس‌ها تعبیر می‌شود.

عبارات و کلمات کلیدی: منطق کوانتوم، منطق عرضی، فضای هیلبرت
نوع مقاله: ترویجی

دبیرتخصصی رابط: رسول رکنی‌زاده

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۹/۱۲ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۷/۰۸ تاریخ انتشار آنلاین: ۱۴۰۴/۰۸/۱۱

ارجاع به مقاله: ع. مؤذن، منطق کوانتومی، ریاضی و جامعه، ۱۱ شماره ۲ (۱۴۰۵)، صص. ۸۱-۹۶. <https://dx.doi.org/10.22108/msci.2025.129248.1712>

^۱Erwin Sherodinger ^۲Werner Karl Heisenberg ^۳Max Born

در مقاله مشترک بورن و جردان اولین بیان دقیق اصل عدم قطعیت هایزنبرگ به صورت زیر ارائه شد. اگر P و Q به ترتیب نمایش ماتریسی موقعیت و تکانه یک ذره باشند آنگاه

$$PQ - QP = \frac{h}{\pi i}.$$

در سال ۱۹۲۶ اروین شرودینگر مقاله مشهورش که باعث دریافت جایزه نوبل برای وی شد را چاپ کرد. در این مقاله وی یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی با یک خاصیت قابل توجه را ارائه نمود. این معادله اکنون به نام شرودینگر معروف است که احتمالاً امروز معروفترین معادله در فیزیک است.

ادعایی که شرودینگر مطرح و آنرا اثبات کرد این بود که معادله‌اش دارای جواب‌هایی در فضای L_2 (فضای توابع با مربع انتگرال پذیر) است که برای آن‌ها مقادیر ویژه را متناظر با یافته‌های آزمایشگاهی سطوح انرژی الکترون در اتم هیدروژن می‌توان فرض کرد. جواب معادله‌ی شرودینگر معمولاً با $\psi(x, y, z)$ در حالت سکون نمایش داده می‌شود که تابع‌های مختلط مقدار از سه مولفه x و y و z هستند. در حالت غیرساکن متغیر چهارم زمان t نیز اضافه می‌شود. در آن زمان خود شرودینگر هیچ تعبیر فیزیکی برای تابع ψ نداشت، اما امروزه عموماً تعبیر بورن، که بیان می‌دارد $|\psi|^2 dx dy dz$ احتمال این است که بتوان ذره را در حجم بی‌نهایت کوچک $dx dy dz$ یافت، را پذیرفته‌اند. بنابراین تعبیر جواب‌های معادله شرودینگر موج‌های احتمالاتی هستند.

۲. پیشینه‌ی پژوهش

اندیشه‌ی یادگیری در منطق استنتاجی جهت انطباق با ساختارهای نظریه‌ی کوانتوم به اوایل قرن بیستم برمی‌گردد. آغازگر این مطالعات بیرخوف^۴ و فون نیومان^۵ بودند. آن‌ها منطق کوانتمی بر پایه‌ی شبکه‌های غیرکلاسیک را توصیف کردند [۲] و در دهه‌های بعد افرادی چون دالا چیرا^۶ و گیونتینی^۷ با تمرکز بر ویژگی‌های معنایی و اپتولوژیک نشان دادند منطق کوانتومی واحد دلالت‌هایی فراتر از ساختارهای صرفاً ریاضی است [۴]. کوهن^۸ نیز با تحلیل‌های دقیق در زمینه‌ی منطق فضاهای کوانتومی با استفاده از زیرفضاهای یک فضای هیلبرت سعی نمود مدلی برای فضاهای کوانتومی ارائه کند [۳]. ردی^۹ در قالب مطالعات فلسفه‌ی علم تفسیرهایی... میان منطق کلاسیک و منطق کوانتومی ارائه کرده است [۱۰]. در زبان فارسی نیز، عبادی در بازخوانی موشکافانه‌ای از تحلیل... در باب منطق کوانتومی، به بیان تمایز معمولی میان دو دستگاه منطقی پرداخته است.

۳. اصول موضوعه مکانیک کوانتومی

در ابتدا باید توجه داشت که یک تفاوت اساسی بین مکانیک کلاسیک و مکانیک کوانتومی وجود دارد. S را یک دستگاه فیزیکی در یک حالت معین در نظر بگیرید و فرض کنید A هر کمیت فیزیکی وابسته به S باشد. یک اندازه‌گیری از کمیت A را در نظر بگیرید. از لحاظ مکانیک کلاسیک A یک مقدار “درست” در هر حالت S دارد و تابع اندازه‌گیری، متشکل از “یافتن” این مقدار است. هیچ دلیلی وجود ندارد که پروسه‌ی اندازه‌گیری بایستی حالت دستگاه را تغییر دهد اما این وضعیت در مکانیک کوانتومی برقرار نیست. بر طبق مکانیک کوانتومی در حالت کلی ممکن است مقادیر گوناگونی به عنوان یک نتیجه اندازه‌گیری هرکدام با یک احتمال معین که وابستگی به حالت سیستم دارد داشته باشیم. در حالت کلی حالت دستگاه تحت آزمایش در پروسه اندازه‌گیری تغییر می‌کند. بر طبق مکانیک کوانتومی به هر دستگاه فیزیکی S می‌توان یک فضای هیلبرت H متناظر کرد که تناظری یک‌به‌یک بین حالت‌های S و زیرفضاهای یک بعدی (شعاع‌های) H برقرار است. کمیت‌های فیزیکی S از قبیل انرژی، تکانه و ... توسط عملگرهای هرمیتی H نمایش داده می‌شوند. اگر یک کمیت فیزیکی S توسط

⁴Birkhoff ⁵Von neumann ⁶Dalla Chiara ⁷Giuntini ⁸Cohen ⁹Redei

یک عملگر هرمیتی T نشان داده شده باشد آنگاه می‌توان مقادیر این کمیت را دقیقاً مقادیر ویژه‌ی T در نظر گرفت. توجه دارید که مقادیر ویژه‌ی یک عملگر هرمیتی اعداد حقیقی هستند. فرض کنید این مشاهده‌پذیر اندازه‌گیری شده باشد آنگاه بعد از اندازه‌گیری، دستگاه در حالتی است که متناظر با یک بردار ویژه‌ی T است. به عبارت دقیق‌تر با شعاع تولید شده توسط آن بردار ویژه متناظر است.

صورت‌بندی مکانیک کوانتومی جواب‌هایی برای سؤالات زیر فراهم می‌کند:

(۱) حالت یک دستگاه فیزیکی S به روش ریاضی چگونه قابل نمایش است؟

(۲) برای یک حالت مفروض خروجی‌های ممکن یک اندازه‌گیری چه هستند؟

(۳) یک حالت مفروض در پروسه‌ی اندازه‌گیری چگونه تغییر می‌کند؟

در ادامه، اصول موضوعه‌ی صورت‌بندی ریاضی مکانیک کوانتوم را بیان می‌کنیم.

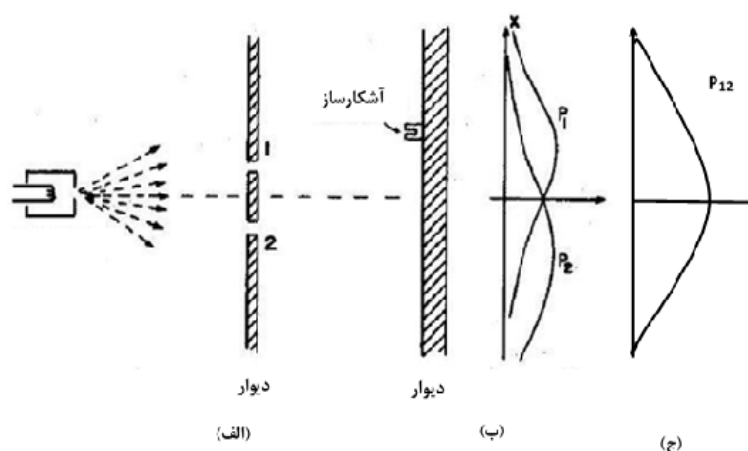
- اصل موضوع یک: در یک زمان معین یک تناظر یک‌به‌یک بین حالت‌های S و شعاع‌های H وجود دارد.
- اصل موضوع دو: T از H است. هر کمیت فیزیکی A از S متناظر با یک عملگر هرمیتی T از H است. این عملگر هرمیتی T مشاهده‌پذیر متناظر با A نامیده می‌شود.
- اصل موضوع سه: نتایج ممکن اندازه‌گیری یک کمیت فیزیکی A مقادیر ویژه‌ی متناظر با مشاهده‌پذیر T هستند. توجه کنید که عملگرهای هرمیتی ممکن است دارای یک مجموعه‌ی پیوسته از مقادیر ویژه باشند. برای سادگی فقط حالت گسسته را در نظر می‌گیریم. در حالت گسسته نیز با دو نوع تباهیده و ناتباهیده مواجه هستیم. اگر فضای ویژه‌ی متناظر با یک مقدار ویژه دارای بُعد بیشتر از یک باشد حالت تباهیده را داریم و در غیر این صورت حالت ناتباهیده را خواهیم داشت.
- اصل موضوع چهار: وقتی کمیت فیزیکی A در حالت نرمال شده‌ی x اندازه‌گیری شود احتمال به‌دست آوردن (در حالت ناتباهیده) مقدار ویژه‌ی a_n برابر است با $p(a_n) = |\langle y_n, x \rangle|^2$ که y_n بردار ویژه‌ی نرمال شده متناظر با مقدار ویژه‌ی a_n است. اصل موضوع زیر را اصل تصویر می‌نامند.
- اصل موضوع پنج: فرض کنید یک دستگاه در حالت $\langle x \rangle$ است و یک اندازه‌گیری از کمیت A در این حالت صورت گرفته باشد. فرض کنیم به‌عنوان یک نتیجه از این اندازه‌گیری مقدار a حاصل شده باشد. بنابر اصل دو، a یک مقدار ویژه‌ی T است. تصویر روی فضای ویژه‌ی a را با p_a نشان می‌دهیم. در آن صورت حالت دستگاه بعد از اندازه‌گیری $\langle y \rangle$ است که $y = p_a(x)$. یک اصل مهم دیگر راجع به ترکیب دو دستگاه است. این اصل بیان می‌دارد که ترکیب دو دستگاه با حاصل ضرب تانسوری فضاهای هیلبرت متناظر آنها نشان داده می‌شود. برای اطلاعات بیشتر به منبع [۵] مراجعه نمایید.

برای درک رفتار کوانتومی الکترون‌ها، ما رفتار آنها را یک‌بار با رفتار گلوله‌ها (ذرات) و بار دیگر با امواج آب مقایسه می‌کنیم. ابتدا آزمایش زیر را با گلوله‌ها در نظر می‌گیریم:

یک وسیله برای پرتاب گلوله‌ها داریم. این وسیله دارای این خاصیت است که گلوله‌ها را پس از شلیک پخش می‌کند. در جلوی این تفنگ دیواری قرار دارد که روی آن دو شکاف باریک تعبیه شده است. عرض هر شکاف به گونه‌ای است که فقط یک گلوله از آن عبور می‌کند. در آن سوی دیوار یک دیواره‌ی نازک چوبی قرار دارد که گلوله‌ها را پس از برخورد جذب می‌کند. در جلوی دیواره نیز یک آشکارساز قرار می‌دهیم. این آشکارساز می‌تواند یک جعبه‌ی کوچک شن باشد که هرگاه یک گلوله داخل می‌شود این آشکارساز متوقف شده و آنرا ذخیره می‌کند. آشکارساز به گونه‌ای تعبیه شده است که می‌تواند به آسانی در راستای دیواره به سمت بالا یا پایین حرکت کند.

ما در پی این سؤال هستیم که:

“احتمال اینکه گلوله‌ای از شکاف‌ها گذشته و در فاصله‌ی x از مرکز به دیواره برخورد کند، چقدر است؟”



شکل ۱. آشکارساز گلوله‌ها

Figure 1: Bullet detector

عبارت $p_1 = p_1(x)$ را احتمال اینکه گلوله‌ای از شکاف (۱) گذشته و به دیواره در فاصله‌ی x برخورد کند، تعریف می‌کنیم. عبارت $p_2 = p_2(x)$ را احتمال اینکه گلوله‌ای از شکاف (۲) گذشته و به دیواره در فاصله‌ی x برخورد کند، تعریف می‌کنیم. و عبارت $p_{12} = p_{12}(x)$ را احتمال برخورد گلوله با دیواره در حالتی که هر دو شکاف باز باشند، تعریف می‌کنیم. بدیهی است که بیشترین مقدار p_1 در محل تلاقی خط راستی است که از منبع و شکاف (۱) و دیواره می‌گذرد. و بیشترین مقدار p_2 در محل تلاقی خط راستی است که از منبع و شکاف (۲) و دیواره می‌گذرد. بیشترین مقدار p_{12} در $x = 0$ است. بنابر تعریف‌های p_1 و p_2 و مقایسه‌ی قسمت‌های (ب) و (ج) در شکل ۱ داریم:

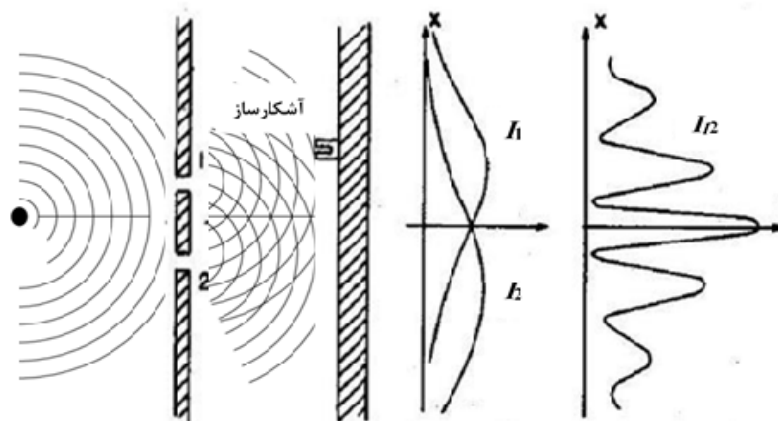
$$p_{12}(x) = p_1(x) + p_2(x).$$

اینک می‌خواهیم شبیه همین آزمایش را با امواج آب انجام دهیم (شکل ۲).

یک حوضچه‌ی کم عمق آب و یک منبع تولیدکننده‌ی امواج کروی را در نظر می‌گیریم. دقیقاً روبروی منبع، یک دیوار با دو شکاف و سپس در پشت این دیوار، یک جذب‌کننده است که با رسیدن امواج به آن، آن‌ها را منعکس نمی‌کند. در جلوی این جذب‌کننده که اصطلاحاً به آن دیواره می‌گوییم یک آشکارساز قرار می‌دهیم که در راستای دیواره به بالا یا پایین حرکت می‌کند. در این جا آشکارساز وسیله‌ای است که شدت موج متحرک (I) را اندازه می‌گیرد. از آن جا که I با مجذور ارتفاع (h) متناسب است، لذا آشکارساز را می‌توان وسیله‌ای تصور کرد که ارتفاع موج متحرک را اندازه می‌گیرد.

با توجه به اصل هویگنس که بیان می‌دارد: "هر نقطه‌ی واقع بر یک موج کروی خود به‌عنوان یک منبع موج رفتار می‌کند"، امواج پس از رسیدن به شکاف‌های (۱) و (۲) تشکیل دو منبع موج می‌دهند. اگر I_1 شدت موج متحرک خارج شده از منبع (۱) در صورت بسته بودن شکاف (۲) و I_2 شدت موج متحرک گسیل شده از منبع (۲) در صورت بسته بودن شکاف (۱) و در نهایت I_{12} شدت موج متحرک منتج از امواج تولید شده توسط شکاف‌های (۱) و (۲) باشد، آنگاه ارتفاع موج آبی که از شکاف (۱) می‌گذرد را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$H_1(t) = \text{Re}(h_1 e^{i\omega t}).$$



شکل ۲. آشکارساز امواج

Figure 2: Wave detector

که در این جا h_1 دامنه موج آب و w بسامد است. و Re قسمت حقیقی تابع را مشخص می‌کند. h_1 در حالت کلی تابعی مختلط بر حسب x و I_1 با $|H_1(t)|^2$ متناسب است. برای شکاف (۲) نیز فرمولی مشابه برقرار است. هنگامی که هر دو شکاف باز باشند، ارتفاع‌های دو موج به هم اضافه می‌شوند و داریم:

$$H_{12}(t) = \text{Rel}(h_1 + h_2)e^{iwt}.$$

در این حالت I_{12} با $|H_1(t) + H_2(t)|^2$ متناسب است. در حالتی که امواج رسیده از شکاف‌های (۱) و (۲) هم‌فاز باشند، I_{12} به بیشترین مقدار خود می‌رسد.

برای منظوری که ما داریم بدون آنکه کلیت را از دست دهیم، می‌توانیم ثابت‌های تناسب را حذف کنیم. پس در نظر می‌گیریم:

$$I_1 = |H_1|^2$$

$$I_2 = |H_2|^2$$

$$I_{12} = |H_1 + H_2|^2.$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$I_{12} = |H_1|^2 + |H_2|^2 + 2|H_1 H_2| \cos \theta,$$

که θ اختلاف فاز بین H_1 و H_2 است. برحسب شدت‌های امواج داریم:

$$I_{12} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \theta.$$

بنابراین $I_{12} \neq I_1 + I_2$ در نتیجه در اینجا با وضعیت کاملاً متفاوتی با آزمایش گلوله‌ها روبرو هستیم.

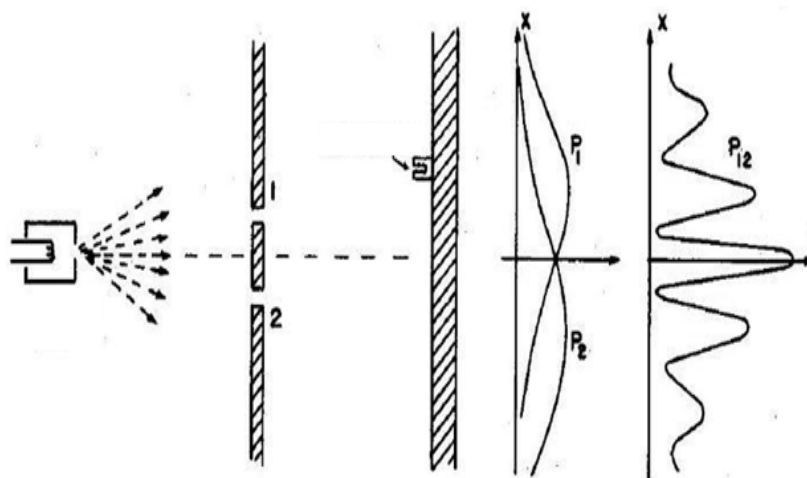
اکنون یک آزمایش ساده با الکترون‌ها را بررسی می‌کنیم. یک منبع پرتاب الکترون شامل یک سیم تنگستن داغ که در جعبه‌ی سوراخ شده‌ای قرار دارد را در نظر می‌گیریم. فرض را بر این قرار می‌دهیم که تمام الکترون‌هایی که از جعبه، گسیل می‌شوند تقریباً دارای انرژی یکسانی هستند. در جلوی این جعبه یک صفحه‌ی فلزی نازک که دو سوراخ کوچک در آن ایجاد شده است قرار می‌دهیم. سپس در پشت این صفحه نیز یک پرده قرار می‌دهیم. در جلوی پرده نیز یک آشکارساز متحرک تعبیه

می‌کنیم. این آشکارساز می‌تواند یک شمارشگر گایگر باشد. پس از برخورد الکترون به دیواره شمارشگر یک صدای خاص شبیه به صدای "کلیک" می‌دهد. اگر آشکارساز را روی محور x حرکت دهیم، آهنگ صدای کلیک‌ها سریعتر یا کندتر خواهد شد. اما اندازه‌ی صدای آن‌ها همیشه یکسان است. اگر دمای سیم را پایین بیاوریم، آنگاه آهنگ صدا نیز پایین می‌آید. اما باز هم صدای کلیک تغییر نمی‌کند. این نکته نیز قابل ذکر است که اگر ما دو آشکارساز جلوی شکاف‌ها قرار دهیم، هیچ‌گاه به‌طور همزمان صدای کلیک از آن‌ها نمی‌شنویم.

حال دقیقاً مانند آزمایش گلوله‌ها به این سؤال جواب می‌دهیم که:

“احتمال اینکه یک برآمدگی در الگوی توزیع الکترون در روی پرده در فاصله‌ی x از مرکز باشد، چقدر است؟”

همانند قبل ما این احتمال را با مشاهده‌ی آهنگ کلیک‌ها به‌دست خواهیم آورد. احتمال اینکه برآمدگی‌ها در یک نقطه به فاصله‌ی x از مرکز برسند، با آهنگ متوسط کلیک‌ها در آن نقطه متناسب است. نتیجه‌ی آزمایش، منحنی جالب p_{12} در شکل ۳ است. همان‌طور که دیده می‌شود این منحنی شبیه الگوی تداخلی امواج در آزمایش قبل است.



شکل ۳. آشکارساز الکترون‌ها در تاریکی

Figure 3: Electron detector in the dark

گزاره‌ی زیر را در نظر بگیرید:

گزاره‌ی E : هر الکترون یا از شکاف (۱) و یا از شکاف (۲) می‌گذرد.

با در نظر گرفتن گزاره‌ی فوق، تمام الکترون‌هایی که به پرده می‌رسند را به دو دسته تقسیم می‌کنیم. دسته‌ی اول آنهایی که از شکاف (۱) گذشته‌اند و دسته‌ی دوم آنهایی که از شکاف (۲) گذشته‌اند. بنابراین انتظار داریم که منحنی مشاهده شده بایستی مجموع اثرات الکترون‌هایی که از شکاف (۱) و الکترون‌هایی که از شکاف (۲) می‌آیند، باشد. این ایده را با یک آزمایش بررسی می‌کنیم.

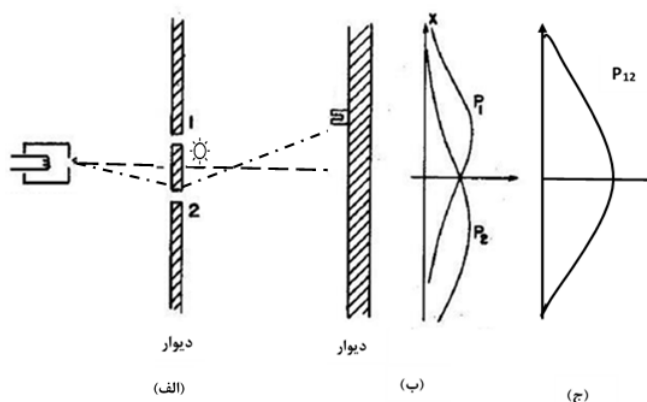
ابتدا یک شمارشگر برای الکترون‌هایی که از شکاف (۱) می‌آیند قرار داده و شکاف (۲) را می‌بندیم و تعداد کلیک‌های آشکارساز را می‌شماریم. از آهنگ متوسط صداها p_1 را به‌دست می‌آوریم. به روش مشابهی p_2 را نیز به‌دست می‌آوریم. حال اگر هر دو شکاف، باز باشد، دیده می‌شود که

$$p_{12} \neq p_1 + p_2.$$

یعنی باز هم شبیه آزمایش امواج آب، تداخل خواهیم داشت. از آنجا که تعداد الکترون‌هایی که به یک نقطه‌ی مشخص می‌رسند مساوی با مجموع تعداد الکترون‌هایی که از شکاف‌های (۱) و (۲) گذاشته‌اند، می‌باشد. به این نتیجه می‌رسیم که گزاره‌ی E نادرست است. در واقع این مطلب که الکترون‌ها یا از شکاف (۱) و یا از شکاف (۲) می‌گذرند، درست نیست. این مطلب را با آزمایش زیر می‌توان بهتر توجیه کرد.

به دستگاه‌های آزمایش (۳) یک منبع نور قوی در پشت دیوار و درست بین دو شکاف اضافه می‌کنیم. هرگاه یک الکترون از دیوار بگذرد، در مسیرش مقداری نور پراکنده می‌کند. لذا می‌توان تشخیص داد که الکترون از کدام شکاف گذشته است. هر بار که یک صدای کلیک از آشکارساز می‌شنویم، یک جرقه‌ی نور یا نزدیک شکاف (۱) و یا نزدیک شکاف (۲) می‌بینیم. اما هیچ‌گاه هر دو جرقه را با هم نمی‌بینیم. بنابراین نتیجه می‌شود که هرگاه به الکترون نگاه می‌کنیم، الکترون یا از شکاف (۱) و یا از شکاف (۲) گذشته است. یعنی به‌طور تجربی گزاره‌ی E باید درست باشد. اینک این سؤال پیش می‌آید که در بحث قبلی اشتباه در مورد گزاره‌ی E در کجا بوده است؟

برای هر موقعیت در محل x ، به کمک آشکارساز الکترون‌هایی را که می‌رسند شمرده و مسیر آنها را نیز ثبت می‌کنیم. انجام این کار به کمک جرقه‌های نور امکان‌پذیر است. در واقع ما دو ستون (۱) و (۲) در نظر می‌گیریم و با شنیدن صدای کلیک، اگر الکترون از شکاف (۱) گذشته باشد، آن را در ستون (۱) و اگر از شکاف (۲) گذشته باشد، آن را در ستون (۲) ثبت می‌کنیم. حال از تعداد ثبت شده در ستون (۱)، p'_1 ، یعنی احتمال اینکه یک الکترون از طریق شکاف (۱) رسیده باشد را به دست می‌آوریم. به‌طور مشابه از تعداد ثبت شده در ستون (۲)، p'_2 را به دست می‌آوریم. اگر این اندازه‌گیری را به تعداد زیاد و برای مقادیر مختلف x انجام دهیم، منحنی‌های p'_1 و p'_2 در قسمت (ب) از شکل ۴ را به دست خواهیم آورد. همان‌طور که دیده می‌شود منحنی p'_1 همان منحنی p_1 و منحنی p'_2 همان منحنی p_2 است. یعنی اینکه الگوی تداخلی p_{12} را از دست داده‌ایم. از طرف دیگر اگر لامپ را خاموش کنیم، باز همان الگوی تداخلی p_{12} تشکیل خواهد شد. این‌طور نتیجه‌گیری می‌شود که هرگاه به الکترون‌ها نگاه نمی‌کنیم، توزیع آنها با حالتی که به آنها نگاه می‌کنیم متفاوت است. علت این امر این است که الکترون‌ها بسیار کوچک هستند و هرگاه نور به آنها برسد تکانه‌ای به آنها می‌دهد که حرکت آنها را تغییر می‌دهد. با استفاده از اصل عدم قطعیت هایزنبرگ ثابت می‌شود که هر ثبات که شکاف‌های عبور را مشخص کند، الگوی تداخلی را برهم می‌زند. (برای اطلاعات بیشتر در این زمینه خواننده علاقه‌مند را به مرجع [۶] ارجاع می‌دهیم). اینک با توجه به آزمایش‌های فوق گزاره‌های



شکل ۴. آشکارساز الکترون‌ها در روشنایی

Figure 4: Electron detector in light

زیر را در نظر می‌گیریم:

الکترون به پرده برخورد می‌کند. A :

الکترون از شکاف (۱) گذشته است. B :

الکترون از شکاف (۲) گذشته است. C :

بنابراین خواهیم داشت:

: الکترون به پرده برخورد کرده و از شکاف (۱) $A \wedge (B \vee C)$:
یا از شکاف (۲) گذشته است.

الکترون از شکاف (۱) گذشته و به پرده برخورد کرده است: $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
یا الکترون از شکاف (۲) گذشته و به پرده برخورد کرده است.

بنا به مطالب فوق گزاره‌ی $A \wedge (B \vee C)$ راست است در حالی که گزاره‌ی $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ را دقیقاً نمی‌توانیم ارزش‌گذاری کنیم. بنابراین در مکانیک کوانتوم دو گزاره‌ی فوق دارای ارزش‌های یکسان نیستند و لذا قانون توزیع‌پذیری رابط عطف نسبت به رابط فصل که یکی از قوانین بنیانی و جدایی‌ناپذیر منطق کلاسیک است، برقرار نمی‌باشد. بنابراین لزوم ارائه‌ی یک منطق جدید که بتواند حقایق فوق در مکانیک کوانتوم را مدلسازی کند، به خوبی نمایان است. این منطق را منطق کوانتومی می‌نامند. اغلب مطالعات در منطق کوانتومی بر روی ساختار جبری مجموعه‌ی گزاره‌ها تمرکز دارد. به عنوان مثال می‌توان به کارهای بیرکهف و فون نویمان اشاره کرد. در منطق کوانتومی QL مجموعه‌ی گزاره‌ها را با Q نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۳.

(الف) هر متغیر گزاره‌ای $p_j; j = 0, 1, 2, \dots$ یک گزاره است.

(ب) اگر A و B گزاره باشند آنگاه $\sim A$ و $A \wedge B$ نیز گزاره هستند.

(ج) تمام گزاره‌های زبان منطق QL از (الف) و (ب) به دست می‌آیند.

ترکیب فصلی دو گزاره‌ی A و B به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A \vee B = \sim (\sim A \wedge \sim B).$$

در مورد عملگر استلزام تعریف‌های گوناگونی توسط محققان ارائه شده است که هر کدام انتظارات خاصی از آن داشته‌اند. مهمترین آن‌ها را در زیر گرد آورده‌ایم.

$$A \rightarrow_0 B \doteq \sim A \vee B$$

$$A \rightarrow_1 B \doteq \sim A \vee (A \wedge B) \quad (Sasaki, Mittelstedt)$$

$$A \rightarrow_2 B \doteq B \vee (\sim A \wedge \sim B) \quad (Dishkant)$$

$$A \rightarrow_3 B \doteq (A \wedge B) \vee (\sim A \wedge B) \vee (\sim A \wedge \sim B)$$

$$A \rightarrow_4 B \doteq (A \wedge B) \vee (\sim A \vee B) \vee ((\sim A \vee B) \wedge B)$$

$$A \rightarrow_5 B \doteq (\sim A \wedge \sim B) \vee (\sim A \wedge B) \vee ((\sim A \wedge B) \wedge A)$$

به علت تنوع در نمادهای فوق، یک نماد مشترک $\rightarrow$ برای عملگر استلزام انتخاب می‌کنیم. حال منطق کوانتومی QL را به عنوان یک طرح اصل موضوعی شامل اصول موضوع و قوانین استنتاج به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

اصول موضوع:

$$\begin{aligned} A_1 : & \quad A \leftrightarrow A \\ A_2 : & \quad A \leftrightarrow \sim \sim A \\ A_3 : & \quad (A \wedge B) \rightarrow A, (A \wedge B) \rightarrow B \\ A_4 : & \quad (A \wedge \sim A) \rightarrow B \end{aligned}$$

قوانین استنتاج:

$$\begin{aligned} R_1 : & \quad A \rightarrow B \& B \rightarrow C \Rightarrow A \rightarrow C \\ R_2 : & \quad A \rightarrow B \Rightarrow \sim B \rightarrow \sim A \\ R_3 : & \quad A \rightarrow B \& A \rightarrow C \Rightarrow A \rightarrow (B \wedge C) \\ R_4 : & \quad A \rightarrow B \& (\sim A \wedge B) \rightarrow (C \wedge \sim C) \Rightarrow B \rightarrow A \end{aligned}$$

در این جا نمادهای $\&$ و $\Rightarrow$ از فرازبان به کار گرفته شده‌اند و به ترتیب به معنی “نتیجه می‌دهد” و “و” می‌باشند. به ساختار منطقی که از حذف قاعده‌ی استنتاج R_4 از منطق کوانتومی به دست می‌آید، منطق کوانتومی کمین MQL گفته و آن را با MQL نشان می‌دهند. واضح است که منطق کلاسیک CL از MQL با افزودن

$$((\sim A \wedge B) \rightarrow (C \wedge \sim C)) \Rightarrow B \rightarrow A$$

به قوانین استنتاج به دست می‌آید.

قضیه ۲.۳. منطق کوانتومی QL با منطق کوانتومی کمین MQL همراه با اصل مدولی قائم^{۱۰} زیر معادل است:

$$OML : \forall A, B \in Q(A \wedge (\sim A \vee (A \wedge B)) \rightarrow B.$$

قضیه ۳.۳. منطق کلاسیک CL با منطق کوانتومی کمین MQL که در اصل توزیع‌پذیری D صدق کند، معادل است.

$$D : \forall A, B, C \in Q((A \wedge (B \vee C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C)))$$

مسئله‌ی استلزام در منطق کوانتومی شدیداً به این حقیقت وابسته است که انتخاب‌های زیادی برای یک عملگر استلزام وجود دارد که البته هیچکدام در قضیه‌ی استنتاج^{۱۱} صدق نمی‌کنند. پاولیچ [۹] نشان داد که هیچکدام از عملگرهای استلزام تعریف شده، به هم ترجیح ندارند. او به کمک یک عملگر استلزام یکنواخت، یک دستگاه اصل موضوعی قیاسی فرمول‌بندی کرد. وی این دستگاه را منطق کوانتوم متحد^{۱۲} نامید. این دستگاه دارای چند خاصیت خوب است. از جمله این که قانون قیاس استثنایی، قانون تعدی و خاصیت مدولی قائم از اصول دستگاه قابل حصول‌اند. علاوه بر این در این دستگاه می‌توان یک تناظر یک‌به‌یک صوری بین یک شبکه‌ی مدولی قائم و استلزام‌های تعریف شده در آن قرار داد.

¹⁰orthomodularity ¹¹deduction theorem ¹²unified quantum logic (UQL)

یک شبکه جبری مانند $L' = (L, \vee, \wedge)$ است که در اصول زیر صدق می‌کند:

$$\begin{array}{lll} (۱) & a \vee b = b \vee a & a \wedge b = b \wedge a \\ (۲) & (a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c) & (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) \\ (۳) & a \wedge (a \vee b) = a & a \vee (a \wedge b) = a. \end{array}$$

بر روی L رابطه‌ی دوتایی $\leq$ به صورت زیر تعریف می‌شود: $a \leq b$ اگر و تنها اگر $a = a \wedge b$. با این تعریف $L' = (L, \leq)$ یک مجموعه‌ی مرتب جزیی خواهد شد. یک شبکه‌ی L' دارای کوچکترین عنصر $\circ$ و بزرگترین عضو ۱ را متمم‌دار^{۱۳} نامیم، هرگاه برای هر $a \in L$ ، یک عنصر $b \in L$ باشد که

$$a \vee b = ۱, \quad a \wedge b = \circ.$$

این عنصر b را متمم a نامند.

یک جبر $L' = (L, \vee, \wedge, ', \circ, ۱)$ را که اولاً یک شبکه باشد و ثانیاً عملگر $s \rightarrow s'$: چنان باشد که برای هر $s \in L$ رابطه‌های $s \wedge s' = \circ$ و $s \vee s' = ۱$ برقرار باشند و نیز اگر $s \leq t$ آنگاه $t' \leq s'$ و ثالثاً برای هر $s \in L$ تساوی $(s')' = s$ برقرار باشد، را یک شبکه‌ی قائم^{۱۴} می‌نامند. یک شبکه‌ی قائم را که در شرط زیر نیز صدق کند، یک شبکه‌ی قائم مدولی^{۱۵} نامند. برای مطالعه بیشتر در مورد شبکه‌ها به منبع [۱] مراجعه نمایید.

$$\forall a \forall c (a \in L \& c \in L \& a \leq c \Rightarrow a \vee (a' \wedge c) = c).$$

در منطق کوانتومی متحد گزاره‌ها و فحس‌ها مشابه قبل تعریف می‌شوند. علامت " $\vdash A$ " به این معنی است که " A " در منطق SQL فرض می‌شود. اصول موضوع آن عبارتند از:

$$\begin{array}{ll} A_1 : & \vdash A \rightarrow A \\ A_2 : & \vdash A \leftrightarrow \sim \sim A \\ A_3 : & \vdash A \rightarrow (A \vee B) \\ A_4 : & \vdash B \rightarrow (A \vee B) \\ A_5 : & \vdash B \rightarrow (A \vee \sim A) \end{array}$$

¹³complemented ¹⁴ortholattice ¹⁵orthomodular lattice

قوانین استنتاج به قرار زیر هستند:

$R_1 :$	$\vdash A \rightarrow B$	$\vdash B \rightarrow C \Rightarrow \vdash A \rightarrow C$
$R_2 :$	$\vdash A \leftrightarrow B \Rightarrow \vdash \sim B \rightarrow \sim A$	
$R_3 :$	$\vdash A \rightarrow C$	$\vdash B \rightarrow C \Rightarrow \vdash (A \vee B) \rightarrow C$
$R_4 :$	$\vdash A \leftrightarrow B \Rightarrow \vdash (C \rightarrow A) \leftrightarrow (C \rightarrow B)$	
$R_5 :$	$\vdash A \leftrightarrow B \Rightarrow \vdash (A \rightarrow C) \leftrightarrow (B \rightarrow C)$	
$R_6 :$	$\vdash (A \vee \sim A) \leftrightarrow B \Leftrightarrow \vdash B$	

با ساختن جبر لیندنباوم-تارسکی^{۱۶} برای UQL می‌توان نشان داد که آن در واقع یک منطق کوانتومی است. دیشکانت^{۱۷} یک نشاندهنده^{۱۸} از منطق کوانتومی در دستگاه منطق عرضی^{۱۹} Br^- ارائه کرد. با این کار به معنی^{۲۰} مناسبی برای منطق کوانتومی دست می‌یابیم. در منطق‌های عرضی دو مفهوم لزوم^{۲۱} و امکان^{۲۲} صورت‌بندی ریاضی می‌شوند. برای یک گزاره‌ی مفروض p ، گزاره‌ی " p یک گزاره‌ی لزومی است" را با Lp و گزاره‌ی " p ممکن است درست باشد" را با Mp نشان می‌دهند. عملگرهای L و M به‌طور شهودی به‌صورت زیر با هم ارتباط دارند:

$$Lp = \sim M \sim p$$

$$Mp = \sim L \sim p.$$

نکته قابل توجه این است که عملگرهای عرضی L و M تابعک‌های درستی نیستند. با توجه به هم ارزی‌های فوق کافی است نشان دهیم که Lp یک تابعک درستی نیست. برای Lp تنها حالت‌های ممکن عبارتند از:

$$Lp \equiv p$$

$$Lp \equiv \sim p$$

$$Lp \equiv p \vee \sim p$$

$$Lp \equiv p \wedge \sim p$$

بنا به تعریف گزاره‌ی LP هم ارزی‌های فوق به‌طور شهودی برقرار نیستند.

تعریف ۴.۳. دو دستگاه A و B را که شامل قضایای یکسان باشند معادل می‌نامند. اگر هر قضیه‌ی دستگاه A قضیه‌ای از دستگاه B باشد ولی قضیه‌ای از دستگاه B یک قضیه از دستگاه A نباشد در آن صورت A را از B ضعیف‌تر نامند. اگر هر قضیه از دستگاه A قضیه‌ای از دستگاه B باشد آن‌گاه B را شامل A می‌نامند.

در ادامه به معرفی یک دستگاه عرضی موسوم به دستگاه T می‌پردازیم. اساس دستگاه T عبارت است از متغیرهای گزاره‌ای و عملگرهای یکانی $\sim$ و L و عملگر دوتایی $\vee$ و پرانتزهای " $()$ " و " $()$ " و قوانین زیر برای ساختن فرمول‌های خوش ساخت (فخس) (الف) هر متغیر گزاره‌ای، یک فخس است.

^{۱۶}Lindenbaum-Tarski

^{۱۷}Dishkant ^{۱۸}Embedding ^{۱۹}modal logic ^{۲۰}semantic ^{۲۱}necessity ^{۲۲}possibility

(ب) اگر α یک فحس باشد آن‌گاه $\sim \alpha$ و $L\alpha$ نیز فحس هستند.

(ج) اگر $\alpha \vee \beta$ فحس باشند آن‌گاه α و β نیز فحس است.

در دستگاه T عطف ($\wedge$) و استلزام ($\supset$) و هم‌ارزی ($\equiv$)، دو گزاره‌ی p و q را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$p \wedge q := \sim (\sim p \vee \sim q)$$

$$p \supset q := \sim p \vee q$$

$$p \equiv q := (p \supset q) \wedge (q \supset p)$$

برای گزاره‌های α و β امکان (M) و استلزام اکید ($\rightarrow_s$) و تساوی ($=$) را نیز به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$M_\alpha := \sim L \sim \alpha$$

$$(\alpha \rightarrow_s \beta) := L(\alpha \supset \beta)$$

$$(\alpha = \beta) := ((\alpha \rightarrow_s \beta) \wedge (\beta \rightarrow_s \alpha)).$$

برای دستگاه T اصول موضوع زیر را در نظر می‌گیرند:

$$A_1 : (p \vee p \supset p)$$

$$A_2 : q \supset (p \vee q)$$

$$A_3 : (p \vee q) \supset (q \vee p)$$

$$A_4 : (q \supset r) \supset ((p \vee q) \supset (p \vee r))$$

$$A_5 : Lp \supset p$$

$$A_6 : L(p \supset q) \supset (Lp \supset Lq)$$

اصل A_5 را ”اصل لزوم“ می‌نامند. در مورد قوانین استنتاج در T علاوه بر قاعده‌ی جایگزینی (SUB) و قیاس استثنایی (MP) قاعده‌ی لزوم N در زیر را نیز به T می‌افزایند.

قاعده‌ی N : اگر α یک قضیه باشد آن‌گاه $L\alpha$ نیز یک قضیه است.

از این پس به جای عبارت ” α یک قضیه است“ از علامت ” $\vdash \alpha$ “ استفاده می‌کنیم. یکی از قضایای جالب در این دستگاه

هم ارزی

$$Lp \equiv \sim M \sim p$$

است. این قضیه را با T_5 نشان می‌دهند. با توجه به قضیه‌ی T_5 این سؤال مطرح می‌شود که آیا قانون کاهش در مورد عملگرهای M و L برقرار است؟ یعنی این‌که آیا می‌توان یک دنباله از این عملگرها را به دنباله‌ای با طول کمتر تبدیل کرد؟ با به کار بردن قاعده‌ی SUB و A_5 و قضیه‌ی زیر

$$T_1 : p \supset Mp$$

می‌توان قضیه‌های زیر را اثبات کرد.

$$LLp \supset Lp$$

$$Mp \supset MMp$$

$$Lp \supset MLp$$

$$LMp \supset Mp.$$

اینک عکس قضیه‌های فوق را در نظر می‌گیریم.

$$R_{\neg a} : Mp \supset LMp$$

$$R_{\neg a} : MLp \supset Lp$$

$$R_{\neg a} : MMp \supset Mp$$

$$R_{\neg a} : Lp \supset LLp$$

اگر آن‌ها برقرار باشند آنگاه هم ارزی‌های زیر و بنابراین قانون کاهش را خواهیم داشت.

$$R_{\neg} : Mp \equiv LMp$$

$$R_{\neg} : MLp \equiv Lp$$

$$R_{\neg} : MMp \equiv Mp$$

$$R_{\neg} : Lp \equiv LLp$$

قضیه‌های $R_{\neg a}$ و $R_{\neg a}$ و $R_{\neg a}$ و $R_{\neg a}$ به صورت زیر به هم مرتبط هستند:

$$R_{\neg a} \iff R_{\neg a} \implies R_{\neg a} \iff R_{\neg a}$$

نمودار فوق پیشنهاد می‌کند که برای به دست آوردن دستگاهی که در آن قانون کاهش برقرار باشد می‌توان $R_{\neg a}$ را به عنوان اصل موضوع جدید به T اضافه کرد. دستگاه حاصل را $S_{\neg}$ می‌نامند. با افزودن $R_{\neg a}$ به T دستگاه دیگری به نام $S_{\neg}$ حاصل می‌شود. دستگاه $S_{\neg}$ از $S_{\neg}$ و $S_{\neg}$ از T قوی‌تر است.

قضیه‌ی $R_{\neg a}$ را به عنوان اصل موضوع در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم

$$A_{\neg} \quad Lp \supset LLp.$$

پس

$$S_{\neg} = T + A_{\neg}.$$

به طور مشابه قرار می‌دهیم

$$A_{\neg} \quad Mp \supset LMp.$$

پس

$$S_{\neg} = T + A_{\neg}.$$

تعریف ۵.۳. در دستگاه $S_{\neg}$ گزاره‌های زیر را می‌توان ثابت کرد

$$(۱) \quad p \supset LMp$$

$$(۲) \quad MLp \supset p.$$

گزاره‌های (۱) و (۲) در دستگاه S_4 قضیه نیستند. با افزودن (۱) و (۲) به S_4 دستگاه S_5 به دست می‌آید. اما اگر (۱) یا (۲) را به T اضافه کنیم دستگاه S_5 حاصل نخواهد شد. اما دستگاهی ضعیف‌تر از آن خواهیم داشت و در عین حال نه شامل S_4 است و نه S_4 شامل این دستگاه است. این دستگاه جدید را ”دستگاه براور“ و شرط (۱) را اصل براور نامند. پس

$$Br = T + (۱).$$

تعریف ۶.۳. دستگاه Br^+ با افزودن قاعده‌ی استنتاج زیر به دستگاه T ، به دست می‌آید:

$$B : \quad \vdash Lp \supset MLq, Lq \supset Lp \Rightarrow \vdash Lp \supset Lq$$

پس

$$Br^+ = T + B.$$

تعریف ۷.۳. دستگاه Br^- با افزودن طرح‌های اصل موضوعی و قوانین استنتاج زیر به منطق کلاسیک به دست می‌آید. در این دستگاه علامت ” $\models A$ “ به این معنی است که ” A در Br^- فرض می‌شود.“ در Br^-

$$\models MA \leftrightarrow \sim L \sim A$$

برقرار است.

اصول موضوع:

$$MA_1 : \quad \models L(A \rightarrow B) \rightarrow (LA \rightarrow LB)$$

$$MA_2 : \quad \models LMA \rightarrow MA$$

$$MA_3 : \quad \models LA \rightarrow LMLA$$

قوانین استنتاج:

$$MR_1 : \quad \models A \Rightarrow \models LA$$

$$MR_2 : \quad \models LMA \rightarrow ML(MA \wedge MB) \Rightarrow \models LMA \rightarrow LMB.$$

دیشکانت با تعریف یک نشاندن به صورت

$$+ : \quad UQL \hookrightarrow Br^-$$

$$p_k^+ := LMq_k$$

$$(\sim A)^+ := L \sim A^+$$

$$(A \wedge B)^+ := LM(A^+ \wedge B^+)$$

$$(A \vee B)^+ := LM(A^+ \vee B^+)$$

که در این جا p_k و q_k به ترتیب گزاره‌های مقدماتی UQL و Br^- هستند توانست منطق کوانتومی متحد را در دستگاه Br^- بنشانند.

برای اطلاعات بیشتر راجع به منطق‌های عرضی به منبع [۷] و برای مطالب مربوط به منطق کوانتومی به منبع [۸] مراجعه نمایید.

۴. ارتباط منطق کوانتومی و فضای هیلبرت

فون نویمن و بیرکف در [۲] از مفاهیم فضای هیلبرت برای توصیف منطق کوانتومی استفاده کردند. در طرح ایشان هر زیرفضای بسته (یا به طور معادل هر عملگر تصویر) روی یک فضای هیلبرت H با یک گزاره‌ی مقدماتی در منطق کوانتومی متناظر است.

برای دو گزاره‌ی p و q و زیرفضاهای متناظر آن‌ها یعنی M_p و M_q اشتراک آن‌ها مجدداً یک زیرفضای بسته خواهد شد که آن را متناظر با گزاره‌ی مرکب $p \vee q$ در نظر می‌گیرند.

$$M_{p \wedge q} := M_p \cap M_q = \{x \in H | x \in M_p, x \in M_q\}$$

$$M_{p \vee q} := M_p \oplus M_q = \{\alpha x + \beta y | \alpha, \beta \in \mathbb{C}, x \in M_p, y \in M_q\} = \langle M_p \cup M_q \rangle$$

که همان زیرفضای تولید شده توسط اجتماع M_p و M_q است.

$$M_{\sim p} = \{x \in H | (x, y) = 0, y \in M_p\} = M_p^\perp.$$

استلزام منطقی دو گزاره‌ی p و q به صورت

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow M_p \subseteq M_q$$

تعریف می‌شود.

اگر T یک راستگو باشد آن‌گاه $M_T = H$ و اگر F یک تناقض باشد آن‌گاه $M_F = \emptyset$. در این صورت بسیاری از قضایا با خواص فضای هیلبرت ثابت می‌شود. مثلاً

$$M_{p \wedge \sim p} = M_p \cap M_{\sim p} = M_p \cap M_p^\perp = \emptyset = M_F.$$

بنابراین

$$p \wedge \sim p \equiv F.$$

باید توجه داشت که ممکن است یک بردار x از فضای هیلبرت H در زیرفضای تولید شده توسط $M_p \vee M_q$ باشد ولی در هیچ‌کدام از زیرفضاهای M_p و M_q نباشد. همین اساس تفاوت منطق‌های کلاسیک و کوانتومی است. یعنی این‌که ممکن است هیچ‌کدام از گزاره‌های p و q درست نباشند ولی ترکیب فصلی آن‌ها درست باشد.

برخی نویسندگان با تعریف مفهوم مقایسه‌پذیری^{۲۳} تعریف دیگری از منطق کوانتوم ارائه می‌نمایند.

دو گزاره‌ی p و q را در منطق L ، مقایسه‌پذیر نامند هر گاه گزاره‌های u ، w و v در L باشند که اولاً $\{u, v, w\}$ یک مجموعه‌ی دوبه‌دو متعامد در L باشد و ثانیاً

$$p = u \vee v, \quad q = v \vee w.$$

در این صورت مجموعه‌ی $\{u, v, w\}$ یک تجزیه‌ی مقایسه‌پذیر برای p و q نامیده می‌شود. حال یک منطق کوانتومی منطقی است که حداقل دو گزاره‌ی نامقایسه‌پذیر داشته باشد. یک منطق کلاسیک منطقی است که هر زوج از گزاره‌های آن مقایسه‌پذیر باشند. برای دیدن مطالب بیشتر در این زمینه به [۱۲] و [۱۱] مراجعه کنید.

²³compatibility

مراجع

- [1] L. Beran, *Orthomodular lattices: algebraic approach*, Publishing Co., Dordrecht, 1985.
 - [2] G. Birkhoff and j. Von Neumann, The logic of quantum mechanics, *Ann. of Math. (2)*, **37** no. 4 (1936) 823-843.
 - [3] D. W. Cohen, *An introduction to Hilbert space and quantum logic*, Springer-Verlag, New York, 1989.
 - [4] M. L. Dalla Chiara, R. Giuntini and M. Rédei, The history of quantum logic, *The many valued and nonmonotonic turn in logic*, Elsevier/North-Holland, Amsterdam, **8** (2007) 205-283.
 - [5] K. Engesser, D. M. Gabbay and D. Lehmann, *A new approach to quantum logic*, Studies in Logic (London), **8**, College Publications, London, 2007.
 - [6] R. P. Feynman, R. B. Leighton and M. Sands, *The Feynman lectures on physics*, **3**, Quantum mechanics. Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass.-London, 1965.
 - [7] G. E. Hughes and M. J. Cresswell, *An introduction to modal logic*, Methuen & Co., Ltd., London, 1968.
 - [8] M. Pavičić, Minimal quantum logic with merged implications, *Internat. J. Theoret. Phys.*, **26** no. 9 (1987) 845-852.
 - [9] M. Pavicic, Unified quantum logic, *Found. Phys.*, **19** no. 8 (1989) 999-1016.
 - [10] , M. Rédei, The birth of quantum *Hist. Philos. Logic*, **28** no. 2 (2007) 107-122.
 - [11] E. W. Stachow, Logical foundations of quantum mechanics, *Internat. J. Theoret. Phys.*, **19** no. 4 (1980) 251-305.
 - [12] K. Svozil, Quantum logic, A brief outline, Arxiv: quant-ph/9902042v2, 2005.
- [۱۳] ا. عبادی، افزوده ای بر منطق کوانتومی پاتنم، فصلنامه‌ی پژوهش‌های فلسفی، ۱۸ شماره ۴۶ (۱۴۰۳) ۱۳۰-۱۴۹.

علیرضا مؤذن

گروه ریاضی، دانشگاه کوثر بجنورد، بجنورد، ایران
ar.moazzen@kub.ac.ir

علیرضا مؤذن در سال ۱۳۷۳ کارشناسی ریاضی را از دانشگاه فردوسی و در سال ۱۳۷۶ کارشناسی ارشد را از دانشگاه شهید باهنر کرمان اخذ کرد. در سال ۱۳۹۰ درگرایش آنالیز ریاضی از دانشگاه سیستان و بلوچستان موفق به اخذ درجه دکتری گردید.

