https://math-sci.ui.ac.ir

Mathematics and Society
ISSN (print): 2345-6493, ISSN (on-line): 2345-6507
Vol. 11 No. 2 (2026), pp. 41–64.

https://www.ui.ac.ir

SOME RESULTS OF THE ϕ-BEST PROXIMITY POINT IN THE COMPLETE METRIC SPACE

MARYAM SHAMS* AND FARAH RASHIDI

Abstract. In this paper, we introduce two types of proximal contractions. First, we define the (ϕ, φ, ψ, H)-proximal contraction and subsequently the weak (ϕ, φ, ψ, H)-proximal contraction. Then, we investigate the existence and uniqueness of the φ-best proximity point for these contractions in a complete metric space, considering specific conditions. One of these specific conditions, required in both theorems, is that the function ψ is non-decreasing and the function φ is lower semi-continuous. The main theorems obtained are generalizations and extensions of existing φ-best proximity point theorems for proximal contractions related to the control function H. If, in the main theorems, the two subsets A and B are equal, then the existence and uniqueness of a fixed point for the corresponding self-mappings are obtained. Subsequently, we illustrate the importance and applicability of the main theorems with the help of examples.

1. Introduction

The analysis and solution of fixed-point problems in metric spaces have long been a focal point for researchers in various fields of mathematics and applied sciences. The Banach contraction principle, as a fundamental result in this area, plays a significant role in solving differential equations, integral equations, and optimization problems. However, the limitations of this principle have driven researchers to

Keywords: Best proximity point, (ϕ, φ, ψ, H)-proximal contraction, (ϕ, φ, ψ, H)-weak proximal contraction, metric space.
Article Type: Resaerch Paper.
Communicated by Alireza Amini Harandi.
*Corresponding author.
Received: 19-10-2024, Accepted: 12-07-2025, Published Online: 03-11-2025.
Cite this article: M. Shams and F. Rashidi, Some results of the ϕ-best proximity point in the complete metric space, *Mathematics and Society*, **11** no. 2 (2026) 41–64. http://dx.doi.org/10.22108/msci.2025.143009.1706 .

develop and generalize contraction concepts. Wardowski, with the introduction of the F-contraction concept [17], took an important step towards generalizing the Banach contraction principle. This concept has inspired extensive research in the field of fixed-point theory, including new concepts of contractions such as F-weak contractions [18] and F-contractive mappings of Hardy-Rogers-type [3], and has yielded significant results regarding the existence and uniqueness of fixed points. Furthermore, the generalization of these concepts to extended metric spaces has provided new research areas. Meanwhile, Jleli and Samet [10], with the introduction of Θ-contractions and a different approach, obtained new results on fixed points. Shams et al. [14], by introducing (ψ, a, φ, F)-generalized contraction mappings, investigated the existence conditions for a unique φ-fixed point. The concept of best proximity point, as a generalization of the concept of fixed point, has recently attracted much attention from researchers. Many researchers have examined the existence and convergence conditions of best proximity points for various mappings [1, 2, 4, 13, 15, 16, 19]. Despite the valuable results available in the field of best proximity point theory and the application of proximal contractions [8, 7], further research is needed to investigate the conditions for the existence and uniqueness of best proximity points in broader classes of proximal mappings. In this article, we address this issue and introduce a new concept of proximal mappings called (H, ψ, φ, ϕ)-proximal contraction and (H, ψ, φ, ϕ)-weak proximal contraction. Then, we prove theorems regarding the existence and uniqueness of a φ-best proximity point for these mappings and demonstrate the effectiveness of our results by providing examples.

Let (X, d) is a metric space and $T : X \to X$ be a self-map. The set of all fixed points of the map T denoted by $F_T = \{x \in X \mid Tx = x\}$.

Moreover, we show by Δ the family of all functions $\psi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ that satisfy the following conditions.

- (ψ_1) ψ is a non-decreasing function.
- (ψ_2) for every positive sequence $\{\alpha_n\}$ we have $\lim_{n\to\infty} \psi(\alpha_n) = 0$ if and only if $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.
- (ψ_3) is a continuous function.

We also consider Θ to be a family of all functions $\phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ that satisfy the following conditions:

- (ϕ_1) ϕ is a non-decreasing function
- (ϕ_2) for all $\alpha > 0$ we have $\lim_{n\to\infty} \phi^n(\alpha) = 0$, where ϕ^n denotes the nth iterate of ϕ.

Lemma 1.1. [11] *If $\phi \in \Theta$, then for all $t > 0$ we have $\phi(t) < t$.*

Liu et al. [11], in 2016, using the functions defined above, first introduced the concept of (ψ, ϕ)-contraction, and then showed that if a mapping $T : X \to X$ is a (ψ, ϕ)-contraction, then T has a unique fixed point.

In 2020, Proinov proved the following theorem in a complete metric space [12].

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2025.143009.1706

Theorem 1.2. [12] *Let (X,d) be a complete metric space and $T : X \to X$ be a mapping such that for every $x, y \in X$ we have:*

$$d(Tx,Ty) > 0 \Rightarrow \psi(d(Tx,Ty)) \leq \phi(d(x,y)),$$

where $\psi, \phi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ satisfy in the following conditions:

(1) *ψ is non-increasing*
(2) *for all $\alpha > 0$, we have $\phi(\alpha) < \psi(\alpha)$.*
(3) *for all $r > 0$ we have $\limsup_{\alpha \to r^+} \phi(\alpha) < \psi(r^+)$.*

We denote by Ψ and Φ, the family of all functions $\psi, \phi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ that satisfing the conditions of above theorem.

Also, we denoted by $\mathcal{H}$, the set of all functions $H : [0,\infty)^3 \to [0,\infty)$ that satisfing the following conditions.

(H_1) $\max\{\alpha, \beta\} \leq H(\alpha, \beta, \eta)$, *for all $\alpha, \beta, \eta \in [0,\infty)$.*
(H_2) $H(0,0,0) = 0$.
(H_3) *H is continuous.*

As simple examples, the following mappings can be mentioned.

$$H(\alpha,\beta,\eta) = \alpha + \beta + \eta \quad H(\alpha,\beta,\eta) = \max\{\alpha,\beta\} + \eta,$$

for all $\alpha, \beta, \eta \in [0,\infty)$.

Let $\varphi : X \to [0,\infty)$ and $T : X \to X$. A point $x \in X$ is called φ- fixed point T, if $x \in F_T$ and $\varphi(x) = 0$.

Jleli et al. [?] introduced the concepts of (H,φ)-contraction and (H,φ)-weak contraction using the mapping H, and proved that these contractions have at least one φ-fixed point.

Let A and B be nonempty subsets of a metric space (X,d). In the following, this paper uses the following notations and concepts.

$$d(A,B) = \inf\{d(x,y); x \in A, y \in B\},$$

$$A_0 = \{x \in A : d(x,y) = d(A,B), y \in B\},$$

$$B_0 = \{y \in B : d(x,y) = d(A,B), x \in A\},$$

It should be noted that the above sets are not always nonempty. For example, Let $A = \{(x, x\sin\frac{1}{x}); x \in (0,1]\}$ and $B = \{(0,0)\}$. Then $d(A,B) = 0$ and $A_0 = \emptyset$.

The set of all best proximity points of a non-self mapping $T : A \to B$ is denoted by

$$B_{\text{est}}(T) = \{x \in A : d(x,Tx) = d(A,B)\}.$$

Also, the set of all zeros of the function $\varphi : A \to [0, \infty)$ is shown by Z_φ. In other words

$$Z_\varphi = \{x \in A; \varphi(x) = 0\}.$$

In 2017, Isik and colleagues, inspired by the above topics, presented the following definitions.

Definition 1.3. [9] *An element $x^* \in A$ is called a φ-best proximity point of the non-self mapping $T : A \to B$ if $x^* \in B_{est}(T) \cap Z_\varphi$.*

Definition 1.4. [9] *Let A and B be two nonempty subsets of a metric space (X, d) and $\varphi : A \to [0, \infty)$ be a given function. Also $H \in \mathcal{H}$. Then:*

(1) *A mapping $T : A \to B$ is called an (H, φ)-proximal contraction if there exists $k \in (0, 1)$ such that for every $u, v, x, y \in A$, we have:*

$$\begin{cases} d(u, Tx) = d(A, B) \\ d(v, Ty) = d(A, B) \end{cases} \Rightarrow H(d(u, v), \varphi(u), \varphi(v)) \leq k(H(d(x, y), \varphi(x), \varphi(y))).$$

(2) *A mapping $T : A \to B$ is called a weak (H, φ)-proximal contraction if there exist $k \in (0, 1)$ and $L \geq 0$ such that for every $u, v, x, y \in A$, we have:*

$$\begin{cases} d(u, Tx) = d(A, B) \\ d(v, Ty) = d(A, B) \end{cases} \Rightarrow$$

$$H(d(u, v), \varphi(u), \varphi(v)) \leq k(H(d(x, y), \varphi(x), \varphi(y))) + L[H(d(y, u), \varphi(y), \varphi(u)) - H(d(0), \varphi(y), \varphi(u))].$$

Isik and colleagues were able to establish conditions under which the mappings satisfying the above definition have a φ-best proximity point.

2. main context

In this section, we first define the concept of (H, ψ, φ, ϕ)-proximal contraction, and then, by imposing certain conditions, we prove the existence and uniqueness of the φ-best proximity point.

Definition 2.1. *Let A and B be two nonempty subsets of a metric space (X, d). We consider functions $\varphi : A \to [0, \infty)$ and $H \in \mathcal{H}$. Mapping $T : A \to B$ is called an (H, ψ, φ, ϕ)-proximal contraction if there exist functions $\psi \in \Psi$ and $\phi \in \Phi$ such that for every $u, v, x, y \in A$, we have:*

$$\begin{cases} d(u, Tx) = d(A, B) \\ d(v, Ty) = d(A, B) \end{cases} \Rightarrow \psi(H(d(u, v), \varphi(u), \varphi(v))) \leq \phi(H(d(x, y), \varphi(x), \varphi(y))), \tag{2.1}$$

where $H(d(x, y), \varphi(x), \varphi(y)) > 0$.

Theorem 2.2. *Let A and B be two nonempty subset of metric space (X, d) and non-self mapping $T : A \to B$ satisfies in the following conditions:*

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2025.143009.1706

1) A_0 *be nonempty and closed.*
2) $T(A_0) \subseteq B_0$.
3) $\varphi : A \to [0, \infty)$ *be lower semi-continuous.*
4) T *be a* (H, ψ, φ, ϕ)*-proximal contraction.*

then T *has a unique* φ*-best proximity point* x^**. Moreover for every* $x \in X$*, we have* $T^n x \to x^*$.

If in Theorem 2.2 we have, $H(\alpha, \beta, \eta) = \alpha + \beta + \eta$, and $\varphi(x) = 0$, then we get the following result:

Corollary 2.3. *Let* A *and* B *be nonempty subsets of a complete metric space* (X, d) *and the mapping* $T : A \to B$ *satisfies the following relation:*

$$\begin{cases} d(u, Tx) = d(A, B) \\ d(v, Ty) = d(A, B) \end{cases} \Rightarrow \psi(d(Tx, Ty)) \leq \phi(d(x, y)),$$

where $d(x, y) > 0$*,* $\psi \in \Psi$*,* $\phi \in \Phi$ *for all* $u, v, x, y \in A$*. If conditions (1), (2), and (3) of Theorem 2.2 hold, then* T *has a unique* φ*-best proximity point.*

If for $t \in \mathbb{R}^+$ and $x \in X$ we have $\varphi(x) = 0$, $\psi(t) = t$ and $\phi(t) = kt$ where $k \in (0, 1)$. In this case, the following result follows from Theorem 2.2.

Corollary 2.4. *Let* A *and* B *be nonempty subsets of a complete metric space* (X, d)*. We consider the mapping* $T : A \to B$ *such that the following relation holds:*

$$\begin{cases} d(u, Tx) = d(A, B) \\ d(v, Ty) = d(A, B) \end{cases} \Rightarrow d(Tx, Ty) \leq kd(x, y),$$

where $d(x, y) > 0$*,* $k \in (0, 1)$*, for every* $u, v, x, y \in A$*, and conditions (1),(2) and (3) of Theorem 2.2 hold, then* T *has a unique best proximity point.*

Corollary 2.5. *Let* A *and* B *be nonempty subsets of the complete metric space* (X, d)*, and let* $T : A \to B$ *be a mapping. Assume there exists* $\tau > 0$ *such that the following relation holds:*

$$\psi(H(d(Tx, Ty), \varphi(Tx), \varphi(Ty))) \leq \psi(H(d(x, y), \varphi(x), \varphi(y))) - \tau,$$

where $H(d(Tx, Ty), \varphi(Tx), \varphi(Ty)) > 0$*, for every* $x, y \in A$*. If* $\psi \in \Psi$ *and conditions (1), (2), and (3) of Theorem 2.2 hold, then* T *has a unique* φ*-best proximity point.*

If we set $A = B$ in Theorem 2.2, then we get the following results:

Corollary 2.6. *Let* (X, d) *be a complete metric space and the mapping* $T : X \to X$ *satisfies the following condition:*

$$\psi(H(d(Tx, Ty), \varphi(Tx), \varphi(Ty))) \leq \phi(H(d(x, y), \varphi(x), \varphi(y))),$$

where $\psi \in \Psi$, $\phi \in \Phi$ *and* $H(d(Tx,Ty),\varphi(Tx),\varphi(Ty)) > 0$ *for all* $x,y \in X$. *If* $\varphi : X \to [0,\infty)$, *is lower semi-continuous then* T *has a unique* φ*-fixed point* x^*. *Moreover, for every* $x \in X$, *we have* $lim_{n\to\infty}T^n x = x^*$.

Corollary 2.7. *Let* (X,d) *be a complete metric space and let* $T : X \to X$ *be a mapping. Assume that there exists* $k \in [0,1)$ *such that the following condition holds:*

$$\begin{aligned}&H(d(Tx,Ty),\varphi(Tx),\varphi(Ty)) > 0\\ &\qquad\Longrightarrow \psi(H(d(Tx,Ty),\varphi(Tx),\varphi(Ty))) \le \psi(H(d(TX,Ty),\varphi(Tx),\varphi(Ty)))^k,\end{aligned}$$

where $\varphi : X \to [0,\infty)$ *is lower semi-continuous and* $\psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *is non-decreasing. Then,* T *has a unique* φ*-fixed point, denoted by* x^*. *Moreover, for every* $x \in X$, *we have* $lim_{n\to\infty}T^n(x) = x^*$.

Example 2.8. *Consider the metric space* $X = [0,1]\times[0,1]$ *equipped with the Euclidean metric. Assume that*

$$A = \{(1-\frac{1}{n},1); n \in \mathbb{N},\}$$

and

$$B = \{(0,0),(\frac{1}{2},0),(1,0)\}.$$

Then $A_0 = \{(0,1),(\frac{1}{2},1)\}$ *and* $B_0 = \{(0,0),(\frac{1}{2},0)\}$ *and* $d(A,B) = 1$.
We define the mapping $T : A \to B$ *as follows:*

$$T(x,1) = \begin{cases} (\frac{1}{2},0) & x \in [\frac{2}{3},1),\\ (0,0) & x = 0 \ \text{or}\ \frac{1}{2},\end{cases}$$

We define the functions $\psi,\phi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $\varphi : A \to [0,\infty)$, $H : [0,\infty) \to [0,\infty)$ *as follows:*

$$\psi(x) = \frac{9}{10}x, \quad \phi(x) = x, \quad \varphi((x,1)) = x, \quad H(\alpha,\beta,\eta) = \alpha+\beta+\eta.$$

We show that the conditions of Theorem 2.2 are satisfied. We can write:

$$\begin{cases} d((u,1),T(x,1)) = d(A,B) = 1,\\ d((v,1),T(y,1)) = 1.\end{cases} \tag{2.2}$$

We examine the following situations:

(1) *if* $x = y = \frac{1}{2}$, *then*

$$\begin{cases} d((u,1),(0,0)) = 1 \Rightarrow u = 0,\\ d((v,1),(0,0)) = 1 \Rightarrow v = 0.\end{cases}$$

So, we have clearly:

$$\psi(H(d((0,1),(0,1))),\varphi((0,1)),\varphi((0,1)))) \le \phi(H(d((x,1),(y,1)),\varphi((x,1)),\varphi((y,1)))).$$

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2025.143009.1706

(2) *if* $x, y \in [\frac{2}{3}, 1)$, *then by* (2.2) *we have:*

$$\begin{cases} d((u,1),(\frac{1}{2},0)) = 1 \Rightarrow u = \frac{1}{2}, \\ d((v,1),(\frac{1}{2},0)) = 1 \Rightarrow v = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Hence

$$\psi(H(d((\frac{1}{2},1),(\frac{1}{2},1)),\varphi((\frac{1}{2},1)),\varphi((\frac{1}{2},1)))) \le \phi(H(d((x,1),(y,1)),\varphi((x,1)),\varphi((y,1)))),$$

so

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \le \frac{9}{10}(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}) \le d((x,1),(y,1)) + x + y.$$

(3) *if* $x = \frac{1}{2}$ *and* $y \in [\frac{2}{3}, 1)$, *then by* (2.2) *we have:*

$$\begin{cases} d((u,1),(0,0)) = 1 \Rightarrow u = 0, \\ d((v,1),(\frac{1}{2},0)) = 1 \Rightarrow v = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Since $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \le \frac{9}{10}(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}) \le \frac{9}{10}(2y)$ *so:*

$$\psi(H(d((0,1),(\frac{1}{2},1)),\varphi((0,1)),\varphi(\frac{1}{2},1)))) \le \phi(H(d((\frac{1}{2},1),(y,1)),\varphi((\frac{1}{2},1),\varphi((y,1)))).$$

For other cases, relation (2.1) *also holds. Therefore, all conditions of Theorem* 2.2 *hold and consequently the mapping* T *has a* φ*-best proximity points* $(0,1)$.

Example 2.9. *Let* $X = \{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, 1\}$, $A = \{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, 1\}$ *and* $B = \{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \dots, 1\}$.

We define functions $d : X \times X \to \mathbb{R}$ *and* $T : A \to B$ *as follow:*

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ \max\{x,y\} & x \neq y, \end{cases} \qquad Tx = \frac{x}{x+1},$$

Let the functions $\psi, \phi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $\varphi : A \to [0,\infty)$ *and* $H : [0,\infty) \to [0,\infty)$ *is defined as follows:*

$$\psi(t) = t, \quad \phi(t) = \frac{1}{2}t, \quad \varphi((x,1)) = x, \quad H(\alpha,\beta,\eta) = \alpha + \beta + \eta.$$

Then $d(A,B) = 0$ *and* $A_0 = \{0\} = B_0$. *So*

$$\begin{cases} d(u,Tx) = d(A,B) = 0 \Rightarrow u = Tx, \\ d(v,Ty) = d(A,B) = 0 \Rightarrow v = Ty. \end{cases}$$

Therefore $u = v = Tx = Ty = 0$. *Hence* $x = y = 0$. *Clearly, all the conditions of Theorem* 2.2 *hold and consequently the function* T *has a* φ*-best proximity points* $x = 0$.

Here we assume the functions $\psi, \phi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ are non-decreasing and lower semi-continuous and also

$$\psi(t) = \phi(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0.$$

Definition 2.10. *Let A and B be non-negative subsets of the metric space (X, d). Consider the function $\varphi : A \to [0, \infty)$ and $H \in \mathcal{H}$. The mapping $T : A \to B$ is called a weakly proximal (H, ψ, φ, ϕ)-weak proximal contraction if there exist functions ψ and ϕ satisfying the above conditions, and we have:*

$$\begin{cases} d(u, Tx) = d(A, B) \\ d(v, Ty) = d(A, B) \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\psi(H(d(u, v), \varphi(u), \varphi(v))) \leq \psi(H(d(x, y), \varphi(x), \varphi(y))) - \phi(H(d(x, y), \varphi(x), \varphi(y)),$$

when $H(d(x, y), \varphi(x), \varphi(y)) > 0$ for every $u, v, x, y \in A$.

Theorem 2.11. *Let A and B be nonempty subsets of a complete metric space (X, d) and a non-self mapping $T : A \to B$ satisfies the following conditions:*

1) *A_0 be a nonempty and closed.*
2) *$T(A_0) \subseteq B_0$.*
3) *$\varphi : A \to [0, \infty)$ be a lower semi-continuous.*
4) *T be a (H, ψ, φ, ϕ)-weak proximal contraction.*

Then T has a unique φ-best proximity point x^*. Moreover, for all $x \in X$ we have $T^n x \to x^*$.

Let for $t \in \mathbb{R}^+$ we have $\psi(t) = t$ and $\phi(t) = (1 - k)t$, when $k \in (0, 1)$. Then the following results is obtained from 2.11.

Corollary 2.12. *Let A and B be nonempty subsets of complete metric space (X, d). We consider the functions $\varphi : A \to [0, \infty)$ and $H \in \mathcal{H}$. If the mapping $T : A \to B$ satisfies in the following condition:*

$$\begin{cases} d(u, Tx) = d(A, B) \\ d(v, Ty) = d(A, B) \end{cases} \quad \Rightarrow H(d(Tx, Ty), \varphi(Tx), \varphi(Ty)) \leq k(H(d(x, y), \varphi(x), \varphi(y))),$$

when $H(d(x, y), \varphi(x), \varphi(y)) > 0$, $k \in (0, 1)$ for all $u, v, x, y \in A$ and conditions (1),(2) and (3) of Theorem 2.11 hold, then T has a unique φ-best proximity point.

Corollary 2.13. *Let (X, d) be a complete metric space and $T : X \to X$ satisfies in the follow condition:*

$$\psi(H(d(Tx, Ty), \varphi(Tx), \varphi(Ty))) \leq \psi(H(d(x, y), \varphi(x), \varphi(y))) - \phi(H(d(x, y), \varphi(x), \varphi(y))),$$

where $H(d(x, y), \varphi(x), \varphi(y)) > 0$ for all $x, y \in X$. Then T has a φ- unique fixed point x^*. Moreover, for all $x \in X$ we have $\lim_{n\to\infty} T^n x = x^*$.

 http://dx.doi.org/10.22108/msci.2025.143009.1706

Example 2.14. *We consider metric space* $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *with Euclidean metric and subsets* $A = \{1, 3\}$ *and* $B = \{1, 2, 4\}$*. So* $A_0 = \{1\}$*,* $B_0 = \{1\}$ *and* $d(A, B) = 0$*. Now let the mapping* T *define as* $Tt = \frac{t+1}{2}$*. We consider functions* $\psi, \phi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$*,* $\varphi : A \to [0, \infty)$*,* $H : [0, \infty) \to [0, \infty)$ *as follows:*

$$\psi(t) = t, \quad \phi(t) = \frac{1}{2}t, \quad \varphi(t) = \ln t, \quad H(\alpha, \beta, \eta) = \alpha + \beta + \eta.$$

We show that conditions of Theorem 2.11 are hold. It can be seen that:

$$\begin{cases} d(u, Tx) = d(A, B) = 0, \\ d(v, Ty) = d(A, B) = 0. \end{cases}$$

So $u = v = x = y = 1$*. Therefore:*

$$\psi(H(d(u, v), \varphi(u), \varphi(v))) \leq \psi(H(d(x, y), \varphi(x), \varphi(y))) - \phi(H(d(x, y), \varphi(x), \varphi(y))).$$

As a result, the mapping T *is a weakly contractive non-self-map and by Theorem 2.11 the mapping* T *has a* φ*-best proximity point.*

3. Conclusions

In this paper, we introduce a new concept of proximal mappings called (H, ψ, φ, ϕ)-proximal contraction and (H, ψ, φ, ϕ)-weak proximal contraction. Then, we prove theorems regarding the existence and uniqueness of a ϕ-best proximity point for these mappings and demonstrate the effectiveness of our results by providing examples.

Acknowledgments

This work has been financially supported by the research deputy of Shahrekord University. The grant number was 3GRN1M1024.

Maryam Shams

Department of Mathematical Sciences, Shahrekord University, Shahrekord, Iran

Email:maryam.shams@sku.ac.ir

Farah Rashidi

Department of Mathematical Sciences, Shahrekord University, Shahrekord, Iran

Email:rashidi.farah66@yahoo.com

https://www.ui.ac.ir

ریاضی و جامعه

شاپا (چاپی): ۲۳۴۵-۶۴۹۳، شاپا(الکترونیکی): ۲۳۴۵-۶۵۰۷

جلد ۱۱، شماره ۲ (۱۴۰۵)، صص. ۴۱-۶۴

https://math-sci.ui.ac.ir

برخی از نتایج φ-بهترین نقطه نزدیکی در فضای متریک کامل

مریم شمس* و فرح رشیدی

چکیده. در این مقاله، دو نوع انقباض مجاوری را معرفی می‌کنیم. ابتدا انقباض (H,ψ,φ,ϕ) -مجاوری و بعد از آن انقباض (H,ψ,φ,ϕ) -مجاوری ضعیف را بیان می‌کنیم، سپس وجود و یکتایی φ -بهترین نقطه نزدیکی را برای این انقباض‌ها در فضای متریک کامل با در نظر گرفتن شرایط خاصی بررسی می‌کنیم. یکی از این شرایط خاص که در هر دو قضیه مورد نیاز است نانزولی بودن تابع ψ و نیم‌پیوسته پایینی بودن تابع φ است. قضیه‌های اصلی به‌دست آمده تعمیم و توسیعی از قضایای φ -بهترین نقطه نزدیکی موجود برای انقباض‌های مجاوری مربوط به تابع کنترل H هستند. اگر در قضیه‌های اصلی دو زیرمجموعه A و B مساوی باشند در این‌صورت وجود و یکتایی نقطه ثابت خود نگاشت‌های نظیر، حاصل می‌شود. در ادامه، به کمک مثال‌هایی اهمیت و کاربردی بودن قضیه‌های اصلی را بیان می‌کنیم.

۱. مقدمه

تحلیل و حل مسائل نقطه ثابت در فضاهای متریک، از دیرباز، کانون توجه محققان در حوزه‌های مختلف ریاضیات و علوم کاربردی بوده است. اصل انقباض باناخ، به عنوان یکی از نتایج بنیادین در این حوزه، نقش به‌سزایی در حل معادلات دیفرانسیل، انتگرال و مسائل بهینه‌سازی ایفا می‌کند. اما محدودیت‌های این اصل، محققان را به سوی توسعه و تعمیم مفاهیم انقباضی سوق داده است. واردوفسکی [۱] با معرفی مفهوم F-انقباض گامی مهم در جهت تعمیم اصل انقباض باناخ برداشت [۱۷]. این مفهوم، الهام‌بخش پژوهش‌های گسترده‌ای در زمینه نقطه ثابت از جمله، مفاهیم جدیدی از انقباضات مانند F-انقباضات ضعیف [۱۸] و نگاشت‌های F-انقباض از نوع هاردی راجرز [۳] شده و نتایج قابل توجهی در مورد وجود و یکتایی نقطه ثابت به‌دست آمده است. همچنین، تعمیم این مفاهیم به فضاهای متریک تعمیم‌یافته، زمینه‌های تحقیقاتی جدیدی را فراهم کرده است. در این میان، جللی و سامت [۲] با معرفی Θ-انقباضات و رویکردی متفاوت، نتایج جدیدی را در مورد نقطه ثابت به دست آوردند [۱۰]. شمس و همکاران [۳] [۱۴]، با معرفی نگاشت های (F,φ,a,ψ) انقباض تعمیم‌یافته، به‌بررسی شرایط وجود φ نقطه ثابت منحصر به فرد پرداختند. مفهوم بهترین نقطه نزدیکی، به‌عنوان تعمیمی از مفهوم نقطه ثابت، اخیراً توجه بسیاری از محققان را به خود جلب کرده است. پژوهشگران زیادی، شرایط وجود و همگرایی بهترین نقطه نزدیکی برای نگاشت‌های مختلف را بررسی کرده‌اند ([۱]، [۲]، [۴]، [۱۳]، [۱۵]،[۱۶]، [۱۹]، [۵]، [۶]). با وجود نتایج

عبارات و کلمات کلیدی: بهترین نقطه نزدیکی، (H,ψ,φ,ϕ)-انقباض مجاوری، (H,ψ,φ,ϕ)-انقباض مجاوری ضعیف، فضای متریک.

نوع مقاله: پژوهشی

دبیرتخصصی رابط: علیرضا امینی هرندی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۷/۲۸ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۴/۲۱ تاریخ انتشار آنلاین: ۱۴۰۴/۰۸/۱۲

ارجاع به مقاله: م. شمس و ف. رشیدی، برخی از نتایج φ-بهترین نقطه نزدیکی در فضای متریک کامل، ریاضی و جامعه، ۱۱ شماره ۲ (۱۴۰۵) ۴۱-۶۴.

https://dx.doi.org/10.22108/msci.2025.143009.1706 .

[1]Wardowski [2]Jleli and samet [3]Shams et al.

ارزشمند موجود در زمینه نظریه بهترین نقطه نزدیکی و کاربرد انقباضات مجاور [۸، ۷]، تحقیقات بیشتری برای بررسی شرایط وجود و یکتایی بهترین نقطه نزدیکی در کلاس‌های گسترده‌تری از نگاشت‌های مجاوری مورد نیاز است. در این مقاله، ما به این موضوع می‌پردازیم و مفهوم جدیدی از نگاشت‌های مجاوری به نام (Φ, φ, Ψ, H) ـانقباض مجاوری و (Φ, φ, Ψ, H) ـانقباض مجاوری ضعیف را معرفی می‌کنیم. سپس، قضایایی را در مورد وجود و یکتایی φـبهترین نقطه نزدیکی برای این نگاشت‌ها ثابت می‌کنیم و با ارائه مثال‌هایی، کارایی نتایج خود را نشان می‌دهیم.

فرض کنید (X, d) یک فضای متریک و $T : X \to X$ یک خودنگاشت باشد. مجموعه همه نقاط ثابت نگاشت T را با $F_T = \{x \in X; Tx = x\}$ نشان می‌دهیم.

به‌علاوه، خانواده همه توابع $\psi : [۰, \infty) \to [۰, \infty)$ را که در شرایط زیر صدق می‌کنند با Δ نمایش می‌دهیم.

($\psi_۱$) ψ یک تابع نانزولی است.

($\psi_۲$) برای هر دنباله مثبت $\{\alpha_n\}$ داریم $\lim_{n\to\infty} \psi(\alpha_n) = ۰$ اگر و فقط اگر $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = ۰$.

($\psi_۳$) یک تابع پیوسته است.

همچنین Θ را خانواده همه توابع $\phi : [۰, \infty) \to [۰, \infty)$ در نظر می‌گیریم به‌طوری‌که در شرایط زیر صدق کنند:

($\phi_۱$) ϕ یک تابع نانزولی است.

($\phi_۲$) برای هر $\alpha > ۰$ داریم $\lim_{n\to\infty} \phi^n(\alpha) = ۰$ که در آن ϕ^n، n امین تکرار ϕ است.

لم ۱.۱. [۱۱] اگر $\phi \in \Theta$، آن‌گاه برای هر $t > ۰$ داریم $\phi(t) < t$.

لیو و همکارانش [۴] در سال ۲۰۱۶، با استفاده از توابع تعریف شده در بالا ابتدا (ψ, ϕ) ـانقباض را تعریف کرد سپس نشان داد که اگر نگاشت $T : X \to X$ از نوع (ψ, ϕ) ـانقباض باشد، در این‌صورت T یک نقطه ثابت منحصر به فرد دارد [۱۱].

در سال ۲۰۲۰، پرونو [۵] قضیه زیر را در فضای متریک کامل ثابت کرد [۱۲].

قضیه ۲.۱. [۱۲] فرض کنید (X, d) یک فضای متریک کامل و نگاشت $T : X \to X$ به‌گونه‌ای باشد که برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم

$$d(Tx, Ty) > ۰ \Rightarrow \psi(d(Tx, Ty)) \leq \phi(d(x, y))$$

که در آن $\psi, \phi : [۰, \infty) \to \mathbb{R}$ در شرایط زیر صدق می‌کند:

(۱) ψ نانزولی است.

(۲) برای هر $\alpha > ۰$، داریم. $\phi(\alpha) < \psi(\alpha)$

(۳) برای هر $r > ۰$ داریم $\limsup_{\alpha\to r^+} \phi(\alpha) < \psi(r^+)$.

خانواده همه توابع $\psi, \phi : [۰, \infty) \to \mathbb{R}$ که در شرایط قضیه فوق صدق می‌کنند را با Ψ و Φ نشان می‌دهیم.

همچنین مجموعه همه توابع $H : [۰, \infty)^۳ \to [۰, \infty)$ صادق در شرایط زیر را با $\mathcal{H}$ نشان می‌دهیم.

($H_۱$) برای هر $\alpha, \beta, \eta \in [۰, \infty)$، داریم $\max\{\alpha, \beta\} \leq H(\alpha, \beta, \eta)$.

($H_۲$) $H(۰, ۰, ۰) = ۰$.

($H_۳$) تابع H پیوسته است.

[4] Liu et al. [5] Proinov

https://dx.doi.org/10.22108/msci.2025.143009.1706

به‌عنوان مثال‌های ساده، می‌توان به نگاشت‌های زیر اشاره کرد. برای هر $\alpha, \beta, \eta \in [0, \infty)$ داشته باشیم

$$H(\alpha, \beta, \eta) = \alpha + \beta + \eta \quad H(\alpha, \beta, \eta) = \max\{\alpha, \beta\} + \eta.$$

فرض کنید $\varphi : X \to [0, \infty)$ و $T : X \to X$ باشند. نقطه $x \in X$ یک φ ـنقطه ثابت T نامیده می‌شود هرگاه $x \in F_T$ و $\varphi(x) = 0$.

جللی و همکاران مفاهیم (H, φ) ـانقباض و (H, φ) ـانقباض ضعیف را با استفاده از نگاشت H معرفی کردند و ثابت کردند این انقباض‌ها حداقل یک φ ـنقطه ثابت دارند [۱۰].

فرض کنید A و B زیرمجموعه‌های ناتهی یک فضای متریک (X, d) باشند. در ادامه این مقاله از نمادها و مفاهیم زیر استفاده می‌شود.

$$d(A, B) = \inf\{d(x, y); x \in A, y \in B\},$$

$$A_0 = \{x \in A : d(x, y) = d(A, B), y \in B\},$$

$$B_0 = \{y \in B : d(x, y) = d(A, B), x \in A\},$$

توجه کنیم که مجموعه‌های بالا همواره ناتهی نیستند، به‌عنوان مثال فرض کنیم $A = \{(x, x \sin \frac{1}{x}); x \in (0, 1]\}$ و $B = \{(0, 0)\}$ در این‌صورت $d(A, B) = 0$ و $A_0 = \emptyset$.

مجموعه همه نقاط بهترین نزدیکی یک غیرخودنگاشت $T : A \to B$ را به‌صورت زیر نشان می‌دهیم

$$B_{est}(T) = \{x \in A : d(x, Tx) = d(A, B)\}.$$

همچنین مجموعه همه صفرهای تابع $\varphi : A \to [0, \infty)$ را با Z_φ نمایش می‌دهیم. به‌عبارت دیگر

$$Z_\varphi = \{x \in A; \varphi(x) = 0\}.$$

در سال ۲۰۱۷، آیسیک و همکاران [۶] با الهام از مطالب فوق تعاریف زیر را ارائه کردند [۹].

تعریف ۳.۱. [۹] عضو $x^* \in A$ یک نقطه φ ـبهترین نزدیکی از غیرخودنگاشت $T : A \to B$ نامیده می‌شود هرگاه $x^* \in B_{est}(T) \cap Z_\varphi$.

تعریف ۴.۱. [۹] فرض کنید A و B دو زیرمجموعه ناتهی از فضای متریک (X, d) باشند و $\varphi : A \to [0, \infty)$ یک تابع داده شده باشد. همچنین $H \in \mathcal{H}$ در این‌صورت

(۱) نگاشت $T : A \to B$ یک (H, φ) ـانقباض مجاوری نامیده می‌شود اگر $k \in (0, 1)$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $u, v, x, y \in A$ داشته باشیم

$$\begin{cases} d(u, Tx) = d(A, B) \\ d(v, Ty) = d(A, B) \end{cases} \Rightarrow H(d(u, v), \varphi(u), \varphi(v)) \le k(H(d(x, y), \varphi(x), \varphi(y))),$$

(۲) نگاشت $T : A \to B$ را یک (H, φ) ـانقباض مجاوری ضعیف می‌نامیم اگر $k \in (0, 1)$ و $L \ge 0$ موجود باشند به‌طوری‌که برای هر $u, v, x, y \in A$ داشته باشیم

$$\begin{cases} d(u, Tx) = d(A, B) \\ d(v, Ty) = d(A, B) \end{cases} \Rightarrow$$

[6] Isik et al.

$$H(d(u,v),\varphi(u),\varphi(v)) \leq k(H(d(x,y),\varphi(x),\varphi(y))) + L[H(d(y,u),\varphi(y),\varphi(u)) - H(d(\circ),\varphi(y),\varphi(u))].$$

آیسیک و همکاران توانستند شرایطی را فراهم کنند که تحت آن شرایط نگاشت‌های صادق در تعریف بالا دارای φ ــبهترین نقطه نزدیکی باشند.

۲. متن اصلی

در این بخش ابتدا مفهوم (H,ψ,φ,ϕ) ــانقباض مجاوری را تعریف کرده، سپس با آوردن شرایطی، وجود و یکتایی φ ــبهترین نقطه نزدیکی را ثابت می‌کنیم.

تعریف ۱.۲. فرض کنیم A و B دو زیرمجموعه ناتهی از فضای متریک (X,d) باشند. توابع $\varphi : A \to [\circ,\infty)$ و $H \in \mathcal{H}$ را در نظر می‌گیریم. نگاشت $T : A \to B$ را یک (H,ψ,φ,ϕ) ــانقباض مجاوری می‌گوییم هرگاه توابع $\psi \in \Psi$ و $\phi \in \Phi$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که برای هر $u,v,x,y \in A$ داشته باشیم:

$$\begin{cases} d(u,Tx) = d(A,B) \\ d(v,Ty) = d(A,B) \end{cases} \Rightarrow \psi(H(d(u,v),\varphi(u),\varphi(v))) \leq \phi(H(d(x,y),\varphi(x),\varphi(y))), \tag{۱}$$

وقتی‌که $H(d(x,y),\varphi(x),\varphi(y)) > \circ$.

قضیه ۲.۲. فرض کنیم A و B دو زیرمجموعه ناتهی از فضای متریک (X,d) باشند و غیرخودنگاشت $T : A \to B$ در شرایط زیر صدق کند:

۱) $A_\circ$ ناتهی و بسته باشد.
۲) $T(A_\circ) \subseteq B_\circ$.
۳) تابع $\varphi : A \to [\circ,\infty)$ نیم‌پیوسته پایینی باشد.
۴) نگاشت T یک (H,ψ,φ,ϕ) ــانقباض مجاوری باشد.

آن‌گاه T یک φ ــبهترین نقطه نزدیکی منحصر به فرد مانند x^* دارد. به‌علاوه برای هر $x \in X$، داریم $T^n x \to x^*$.

اثبات. ابتدا فرض کنیم $t \in A$ یک بهترین نقطه نزدیکی T باشد در این‌صورت $d(t,Tt) = d(A,B)$. همچنین فرض کنیم $\varphi(t) \neq \circ$. از آنجاکه T یک (H,ψ,φ,ϕ) ــانقباض مجاوری می‌باشد لذا با جایگذاری $u = v = x = y = t$ در رابطه (۱) داریم

$$\begin{aligned} \psi(H(\circ,\varphi(t),\varphi(t))) &= \psi(H(d(t,t),\varphi(t),\varphi(t))) \\ &\leq \phi(H(d(t,t),\varphi(t),\varphi(t))) \\ &= \phi(H(\circ,\varphi(t),\varphi(t))) \\ &< \psi(H(\circ,\varphi(t),\varphi(t))), \end{aligned}$$

که این تناقض است، در نتیجه $B_{est}(T) \subseteq Z_\varphi$. حال فرض کنیم $x_\circ \in A_\circ$ از اینکه $Tx_\circ \in T(A_\circ) \subseteq B_\circ$ پس $x_۱ \in A_\circ$ وجود دارد به‌طوری‌که $d(x_۱,Tx_\circ) = d(A,B)$. چون $Tx_۱ \in T(A_\circ)$ مجدداً با استدلال مشابه، نقطه $x_۲ \in A_\circ$ موجود است

https://dx.doi.org/10.22108/msci.2025.143009.1706

که $d(x_{۲}, Tx_{۱}) = d(A, B)$. با ادامه این روش دنباله $\{x_n\}$ در $A_{\circ}$ به‌طوری‌که برای هر $n \in \mathbb{N}$، $d(x_{n+۱}, Tx_n) = d(A, B)$ به‌دست می‌آید. اگر یک $n_{\circ} \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $x_{n_{\circ}} = x_{n_{\circ}+۱}$ در این‌صورت

$$d(x_{n_{\circ}}, Tx_{n_{\circ}}) = d(x_{n_{\circ}+۱}, Tx_{n_{\circ}}) = d(A, B).$$

در نتیجه $x_{n_{\circ}}$ یک φ ـبهترین نقطه نزدیکی نگاشت T است و اثبات کامل می‌شود. بنابراین فرض کنیم برای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $x_{n+۱} \neq x_n$ لذا داریم

$$\begin{cases} d(x_{n+۱}, Tx_n) = d(A, B), \\ d(x_{n+۲}, Tx_{n+۱}) = d(A, B). \end{cases}$$

با توجه به تعریف (H, ψ, φ, ϕ) ـانقباض مجاوری داریم:

$$\begin{aligned} \psi(H(d(x_{n+۱}, x_{n+۲}), \varphi(x_{n+۱}), \varphi(x_{n+۲}))) &\leq \phi(H(d(x_n, x_{n+۱}), \varphi(x_n), \varphi(x_{n+۱}))) \\ &< \psi(H(d(x_n, x_{n+۱}), \varphi(x_n), \varphi(x_{n+۱}))). \end{aligned} \tag{۲}$$

از اینکه ψ نانزولی است می‌توان نتیجه گرفت

$$H(d(x_{n+۱}, x_{n+۲}), \varphi(x_{n+۱}), \varphi(x_{n+۲})) \quad < \quad H(d(x_n, x_{n+۱}), \varphi(x_n), \varphi(x_{n+۱})).$$

بنابراین $\{H(d(x_n, x_{n+۱}), \varphi(x_n), \varphi(x_{n+۱}))\}$ یک دنباله نزولی است که از پایین کراندار نیز هست. در نتیجه $r \geq \circ$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\lim_{n\to\infty} H(d(x_n, x_{n+۱}), \varphi(x_n), \varphi(x_{n+۱})) = r,$$

حال فرض کنیم $\delta_n = H(d(x_n, x_{n+۱}), \varphi(x_n), \varphi(x_{n+۱}))$. اگر $r > \circ$ لذا با حد راست گرفتن از رابطه (۲) داریم

$$\begin{aligned} \psi(r^+) &= \limsup_{\delta_n \to r^+} \psi(\delta_n) \\ &\leq \limsup_{\delta_{n-۱} \to r^+} \phi(\delta_{n-۱}) \\ &\leq \limsup_{t \to r^+} \phi(t) \\ &< \psi(r^+), \end{aligned}$$

که تناقض است لذا $r = \circ$. بنابر خاصیت اول H داریم

$$d(x_{n+۱}, x_{n+۲}) \leq H(d(x_{n+۱}, x_{n+۲}), \varphi(x_{n+۱}), \varphi(x_{n+۲})),$$

و

$$\varphi(x_{n+۱}) \leq H(d(x_{n+۱}, x_{n+۲}), \varphi(x_{n+۱}), \varphi(x_{n+۲})).$$

حال با حدگیری از طرفین نامساوی وقتی‌که $n \to \infty$ داریم

$$\lim_{n\to\infty} d(x_{n+۱}, x_{n+۲}) = \circ,$$

و

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(x_{n+۱}) = \circ.$$

اکنون نشان می‌دهیم دنباله $\{x_n\}$ کوشی است. فرض کنیم $\{x_n\}$ کوشی نیست، پس می‌توان $\varepsilon > ۰$ و دو زیردنباله $\{x_{n_k}\}$ و $\{x_{m_k}\}$ را با شرط

$$d(x_{m_k}, x_{n_k}) \geq \varepsilon, \quad d(x_{m_k}, x_{n_k-۱}) < \varepsilon,$$

وقتی‌که $m_k > n_k > ۰$ در نظر بگیریم. طبق نامساوی مثلثی داریم

$$\varepsilon \leq d(x_{m_k}, x_{n_k}) \leq d(x_{m_k}, x_{n_k-۱}) + d(x_{n_k-۱}, x_{n_k}) < \varepsilon + d(x_{n_k-۱}, x_{n_k}),$$

حال از طرفین حد می‌گیریم وقتی $k \to \infty$، در نتیجه $\lim_{k\to\infty} d(x_{m_k}, x_{n_k}) = \varepsilon$. به‌علاوه بنابر نامساوی مثلثی داریم

$$d(x_{m_k-۱}, x_{n_k-۱}) \leq d(x_{m_k-۱}, x_{m_k}) + d(x_{m_k}, x_{n_k-۱}),$$

و

$$d(x_{m_k}, x_{n_k}) \leq d(x_{n_k}, x_{n_k-۱}) + d(x_{n_k-۱}, x_{m_k-۱}) + d(x_{m_k-۱}, m_k),$$

با حدگیری از طرفین وقتی‌که $k \to \infty$، داریم $\lim_{k\to\infty} d(x_{m_k-۱}, x_{n_k-۱}) = \varepsilon$. از آنجاکه

$$\begin{cases} d(x_{m_k}, Tx_{m_k-۱}) = d(A, B), \\ d(x_{n_k}, Tx_{n_k-۱}) = d(A, B). \end{cases}$$

لذا با استفاده از تعریف (H, ψ, φ, ϕ) ـانقباض مجاوری داریم

$$\psi(\delta_{m,n}) = \psi(H(d(x_{m_k}, x_{n_k}), \varphi(x_{m_k}), \varphi(x_{n_k}))) \leq \phi(\delta_{m-۱,n-۱}).$$

حال از نامساوی بالا حد راست می‌گیریم

$$\begin{aligned} \psi(\varepsilon^+) &= \limsup_{\delta_{m,n}\to\varepsilon^+} \psi(\delta_{m,n}) \\ &\leq \limsup_{\delta_{m-۱,n-۱}\to\varepsilon^+} \phi(\delta_{m-۱,n-۱}) \\ &\leq \limsup_{t\to\varepsilon^+} \phi(t) \\ &< \psi(\varepsilon^+), \end{aligned}$$

که این تناقض است پس دنباله $\{x_n\}$ کوشی است. با توجه به اینکه $A_۰$ کامل است پس $x^* \in A_۰$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x^*) = ۰.$$

چون تابع φ نیم‌پیوسته پایینی است لذا

$$\varphi(x^*) \leq \liminf_{n\to\infty} \varphi(x_{n+۱}) \leq \lim_{n\to\infty} \varphi(x_{n+۱}) = ۰,$$

بنابراین $\varphi(x^*) = ۰$.

با توجه به اینکه $x^* \in A_۰$ و $T(A_۰) \subseteq B_۰$ یک $z \in A_۰$ هست به‌طوری‌که

$$\begin{cases} d(z, Tx^*) = d(A, B), \\ d(x_{n+۱}, Tx_n) = d(A, B). \end{cases}$$

https://dx.doi.org/10.22108/msci.2025.143009.1706

حال اگر یک $n_\circ \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد که برای $n \leq n_\circ$ داشته باشیم $z = x^*$ آن‌گاه $z = \lim_{n\to\infty} x_n = x^*$ و در نتیجه اثبات تمام می‌شود. فرض کنیم چنین $n_\circ$ موجود نباشد و $d(x^*, z) > \circ$. پس با استفاده از تعریف (H, ψ, φ, ϕ) ـانقباض مجاوری داریم

$$\psi(H(d(x_{n+\text{١}}, z), \varphi(x_{n+\text{١}}), \varphi(z))) \leq \phi(H(d(x_n, x^*), \varphi(x_n), \varphi(x^*))) < \psi(H(d(x^*, x_n), \circ, \varphi(x_n))),$$

از اینکه ψ نانزولی است و با به کار بردن رابطه $(H_\text{١})$ داریم

$$d(x_{n+\text{١}}, z) \leq H(d(x_{n+\text{١}}, z), \varphi(x_{n+\text{١}}), \varphi(z)) < H(d(x^*, x_n), \circ, \varphi(x_n)),$$

از طرفین نامساوی بالا حد می‌گیریم لذا

$$H(d(x^*, z)) \leq H(\circ, \circ, \circ) = \circ,$$

این تناقض است بنابراین $z = x^*$. از اینکه $d(z, Tx^*) = d(A, B)$ داریم $d(x^*, Tx^*) = d(A, B)$ پس x^* یک φ ـبهترین نقطه نزدیکی است. حال فرض کنیم $w \in A$ وجود داشته باشد که $d(w, x^*) > \circ$ و

$$\begin{cases} d(w, Tw) = d(A, B), \\ d(x^*, Tx^*) = d(A, B). \end{cases}$$

لذا

$$\psi(H(d(w, x^*), \varphi(w), \varphi(x^*))) \leq \phi(H(d(w, x^*), \varphi(w), \varphi(x^*))) < \psi(H(d(w, x^*), \circ, \circ))$$

که این تناقض است و در نتیجه $d(w, x^*) = \circ$ پس $w = x^*$. بنابراین φ ـبهترین نقطه نزدیکی منحصر به فرد است. □

اگر در قضیه ۲.۲ داشته باشیم $H(\alpha, \beta, \eta) = \alpha + \beta + \eta$ و $\varphi(x) = \circ$ در این‌صورت نتیجه زیر به‌دست می‌آید.

نتیجه ۳.۲. فرض کنیم A و B دو زیرمجموعه ناتهی از فضای متریک کامل (X, d) باشند و نگاشت $T : A \to B$ برای هر $u, v, x, y \in A$ در رابطه زیر صدق کند:

$$\begin{cases} d(u, Tx) = d(A, B) \\ d(v, Ty) = d(A, B) \end{cases} \Rightarrow \psi(d(Tx, Ty)) \leq \phi(d(x, y)),$$

وقتی‌که $d(x, y) > \circ$، $\psi \in \Psi$، $\phi \in \Phi$ و شرایط (۱)، (۲) و (۳) از قضیه ۲.۲ برقرار باشند، آن‌گاه T یک φ ـبهترین نقطه نزدیکی منحصر به فرد دارد.

اگر برای $t \in \mathbb{R}^+$ و $x \in X$ داشته باشیم $\varphi(x) = \circ$، $\psi(t) = t$ و $\phi(t) = kt$ وقتی‌که $k \in (\circ, \text{١})$ در این‌صورت نتیجه زیر، از قضیه ۲.۲ به‌دست می‌آید.

نتیجه ۴.۲. فرض کنیم A و B دو زیرمجموعه ناتهی از فضای متریک کامل (X, d) باشند. نگاشت $T : A \to B$ را طوری در نظر می‌گیریم که برای هر $u, v, x, y \in A$ رابطه زیر برقرار باشد:

$$\begin{cases} d(u, Tx) = d(A, B) \\ d(v, Ty) = d(A, B) \end{cases} \Rightarrow d(Tx, Ty) \leq kd(x, y),$$

وقتی‌که $d(x, y) > \circ$، $k \in (\circ, \text{١})$ و شرایط (۱)، (۲) و (۳) از قضیه ۲.۲ برقرار باشند، آن‌گاه T یک بهترین نقطه نزدیکی منحصر به فرد دارد.

نتیجه ۵.۲. فرض کنیم A و B دو زیرمجموعه ناتهی از فضای متریک کامل (X,d) باشند و نگاشت $T:A\to B$. فرض کنیم $\tau>0$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $u,v,x,y\in A$ رابطه زیر برقرار باشد:

$$\psi(H(d(Tx,Ty),\varphi(Tx),\varphi(Ty)))\le \psi(H(d(x,y),\varphi(x),\varphi(y)))-\tau,$$

وقتی‌که $H(d(Tx,Ty),\varphi(Tx),\varphi(Ty))>0$، $\psi\in\Psi$ و شرایط (۱)، (۲) و (۳) از قضیه ۲.۲ برقرار باشند، آن‌گاه T یک φ -بهترین نقطه نزدیکی منحصر به فرد دارد.

اثبات. برای اثبات کافی است در قضیه ۲.۲ فرض کنیم $\phi(t)=\psi(t)-\tau$. □

اگر در قضیه ۲.۲ قرار دهیم $A=B$ در این‌صورت نتایج زیر به‌دست می‌آیند.

نتیجه ۶.۲. فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک کامل و نگاشت $T:X\to X$ برای هر $x,y\in X$ در شرط زیر صدق کند:

$$\psi(H(d(Tx,Ty),\varphi(Tx),\varphi(Ty)))\le \phi(H(d(x,y),\varphi(x),\varphi(y))),$$

که در آن $\psi\in\Psi$، $\phi\in\Phi$ و $H(d(Tx,Ty),\varphi(Tx),\varphi(Ty))>0$. اگر $\varphi:X\to[0,\infty)$، نیم‌پیوسته پایینی باشد در این‌صورت T یک φ- نقطه ثابت منحصربه‌فرد مانند x^* دارد. علاوه بر این برای هر $x\in X$ داریم $lim_{n\to\infty}T^nx=x^*$

نتیجه ۷.۲. فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک کامل و $T:X\to X$ باشد. فرض کنیم $k\in[0,1)$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که در شرط زیر صدق کند:

$$\begin{aligned}&H(d(Tx,Ty),\varphi(Tx),\varphi(Ty))>0\\&\qquad\Longrightarrow \psi(H(d(Tx,Ty),\varphi(Tx),\varphi(Ty)))\le \psi(H(d(TX,Ty),\varphi(Tx),\varphi(Ty)))^k,\end{aligned}$$

که در آن $\varphi:X\to[0,\infty)$ نیم‌پیوسته پایینی و $\psi:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ نانزولی باشد. در این‌صورت T یک φ نقطه ثابت منحصر به‌فرد مانند x^* دارد. علاوه بر این برای هر $x\in X$ داریم $lim_{n\to\infty}T^n(x)=x^*$

اثبات. کافی است قرار دهیم $\varphi(t)=(\psi(t))^k$ □

مثال ۸.۲. فضای متریک $X=[0,1]\times[0,1]$ را با متر اقلیدسی در نظر می‌گیریم. فرض کنیم

$$A=\{(1-\frac{1}{n},1);n\in\mathbb{N}\}$$

و

$$B=\{(0,0),(\frac{1}{2},0),(1,0)\}.$$

در این‌صورت $A_0=\{(0,1),(\frac{1}{2},1)\}$ و $B_0=\{(0,0),(\frac{1}{2},0)\}$ و $d(A,B)=1$.
نگاشت $T:A\to B$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$T(x,1)=\left\{\begin{array}{ll}(\frac{1}{2},0) & x\in[\frac{2}{3},1),\\(0,0) & x=0 \text{ یا } \frac{1}{2}.\end{array}\right\}$$

https://dx.doi.org/10.22108/msci.2025.143009.1706

توابع $H:[\circ,\infty)\to[\circ,\infty)$، $\varphi:A\to[\circ,\infty)$، $\psi,\phi:[\circ,\infty)\to\mathbb{R}$ را به‌صورت

$$\psi(x)=\frac{۹}{۱\circ}x,\quad \phi(x)=x,\quad \varphi((x,۱))=x,\quad H(\alpha,\beta,\eta)=\alpha+\beta+\eta,$$

تعریف می‌کنیم. نشان می‌دهیم شرایط قضیه ۲.۲ برقرار است. می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{cases} d((u,۱),T(x,۱))=d(A,B)=۱,\\ d((v,۱),T(y,۱))=۱.\end{cases} \tag{۳}$$

حالت‌های زیر را بررسی می‌کنیم:

(۱) اگر $x=y=\frac{۱}{۲}$، آن‌گاه

$$\begin{cases} d((u,۱),(\circ,\circ))=۱\Rightarrow u=\circ,\\ d((v,۱),(\circ,\circ))=۱\Rightarrow v=\circ.\end{cases}$$

بنابراین به‌طور واضح داریم

$$\psi(H(d((\circ,۱),(\circ,۱))),\varphi((\circ,۱)),\varphi((\circ,۱))))\le\phi(H(d((x,۱),(y,۱)),\varphi((x,۱)),\varphi((y,۱)))),$$

(۲) اگر $x,y\in[\frac{۲}{۳},۱)$ آن‌گاه بنابر رابطه (۳) داریم:

$$\begin{cases} d((u,۱),(\frac{۱}{۲},\circ))=۱\Rightarrow u=\frac{۱}{۲},\\ d((v,۱),(\frac{۱}{۲},\circ))=۱\Rightarrow v=\frac{۱}{۲}.\end{cases}$$

در نتیجه

$$\psi(H(d((\frac{۱}{۲},۱),(\frac{۱}{۲},۱)),\varphi((\frac{۱}{۲},۱)),\varphi((\frac{۱}{۲},۱))))\le\phi(H(d((x,۱),(y,۱)),\varphi((x,۱)),\varphi((y,۱)))),$$

پس

$$\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\le\frac{۹}{۱\circ}(\frac{۲}{۳}+\frac{۲}{۳})\le d((x,۱),(y,۱))+x+y.$$

(۳) اگر $x=\frac{۱}{۲}$ و $y\in[\frac{۲}{۳},۱)$ آن‌گاه بنابر رابطه (۳) داریم:

$$\begin{cases} d((u,۱),(\circ,\circ))=۱\Rightarrow u=\circ,\\ d((v,۱),(\frac{۱}{۲},\circ))=۱\Rightarrow v=\frac{۱}{۲}.\end{cases}$$

با توجه به این‌که $\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\le\frac{۹}{۱\circ}(\frac{۲}{۳}+\frac{۲}{۳})\le\frac{۹}{۱\circ}(۲y)$ بنابراین

$$\psi(H(d((\circ,۱),(\frac{۱}{۲},۱)),\varphi((\circ,۱)),\varphi(\frac{۱}{۲},۱))))\le\phi(H(d((\frac{۱}{۲},۱),(y,۱)),\varphi((\frac{۱}{۲},۱),\varphi((y,۱)))).$$

برای حالت‌های دیگر نیز رابطه (۱) برقرار است. بنابراین همه شرایط قضیه ۲.۲ برقرار است و در نتیجه نگاشت T یک φ-بهترین نقطه نزدیکی $(\circ,۱)$ را دارد.

مثال ۹.۲. فرض کنیم $X=\{\circ,\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳},\dots,۱\}$ و زیرمجموعه‌های $A=\{\circ,\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۴},\dots,۱\}$ و $B=\{\circ,\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۵},\dots,۱\}$. نگاشت‌های $d:X\times X\to\mathbb{R}$ و $T:A\to B$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$d(x,y)=\begin{cases}\circ & x=y,\\ \max\{x,y\} & x\ne y,\end{cases}\qquad Tx=\frac{x}{x+۱},$$

فرض کنیم توابع $\psi, \phi : [\circ, \infty) \to \mathbb{R}$، $\varphi : A \to [\circ, \infty)$ و $H : [\circ, \infty) \to [\circ, \infty)$ به‌صورت زیر تعریف شده باشند:

$$\psi(t) = t, \quad \phi(t) = \frac{1}{2}t, \quad \varphi((x, 1)) = x, \quad H(\alpha, \beta, \eta) = \alpha + \beta + \eta.$$

در این‌صورت $d(A, B) = \circ$ و $A_\circ = \{\circ\} = B_\circ$. پس

$$\begin{cases} d(u, Tx) = d(A, B) = \circ \Rightarrow u = Tx, \\ d(v, Ty) = d(A, B) = \circ \Rightarrow v = Ty. \end{cases}$$

بنابراین $u = v = Tx = Ty = \circ$ لذا $x = y = \circ$ به وضوح همه شرایط قضیه ۲.۲ برقرار است و در نتیجه نگاشت T یک φ ـبهترین نقطه نزدیکی $x = \circ$ دارد.

در اینجا فرض می‌کنیم توابع $\psi, \phi : [\circ, \infty) \to \mathbb{R}$ نانزولی و نیم‌پیوسته پایینی باشند و همچنین

$$\psi(t) = \phi(t) = \circ \Leftrightarrow t = \circ.$$

تعریف ۱۰.۲. فرض کنیم A و B دو زیرمجموعه ناتهی از فضای متریک (X, d) باشند. تابع $\varphi : A \to [\circ, \infty)$ و $H \in \mathcal{H}$ را در نظر بگیرید. نگاشت $T : A \to B$ را یک (H, ψ, φ, ϕ) ـانقباض مجاوری ضعیف می‌گوییم هرگاه توابع ψ و ϕ وجود داشته باشند به‌طوری‌که در شرایط بالا صدق کنند و برای هر $u, v, x, y \in A$ داشته باشیم:

$$\begin{cases} d(u, Tx) = d(A, B) \\ d(v, Ty) = d(A, B) \end{cases} \Rightarrow \tag{۴}$$

$$\psi(H(d(u, v), \varphi(u), \varphi(v))) \leq \psi(H(d(x, y), \varphi(x), \varphi(y))) - \phi(H(d(x, y), \varphi(x), \varphi(y))),$$

وقتی‌که $H(d(x, y), \varphi(x), \varphi(y)) > \circ$.

قضیه ۱۱.۲. فرض کنیم A و B دو زیرمجموعه ناتهی از فضای متریک کامل (X, d) باشند و غیرخودنگاشت $T : A \to B$ در شرایط زیر صدق کند:

۱) $A_\circ$ ناتهی و بسته باشد.

۲) $T(A_\circ) \subseteq B_\circ$.

۳) تابع $\varphi : A \to [\circ, \infty)$ نیم‌پیوسته پایینی باشد.

۴) نگاشت T یک (H, ψ, φ, ϕ) ـانقباض مجاوری ضعیف باشد.

در این‌صورت T یک φ ـبهترین نقطه نزدیکی منحصر به فرد مانند x^* دارد. به‌علاوه برای هر $x \in X$، داریم $T^n x \to x^*$.

اثبات. فرض کنیم $t \in A$ یک بهترین نقطه نزدیکی T باشد. با جایگذاری $u = v = x = y = t$ در رابطه (۴) داریم

$$\begin{aligned} \psi(H(\circ, \varphi(t), \varphi(t))) &\leq \psi(H(\circ, \varphi(t), \varphi(t))) - \phi(H(\circ, \varphi(t), \varphi(t))) \\ &< \psi(H(\circ, \varphi(t), \varphi(t))), \end{aligned}$$

که این تناقض است، چون $\varphi(t) > \circ$. پس $H(\circ, \varphi(t), \varphi(t)) = \circ$ در نتیجه بنابر خاصیت (H_1) داریم $\varphi(t) = \circ$ لذا

$$B_{est}(T) \subseteq Z_\varphi.$$

https://dx.doi.org/10.22108/msci.2025.143009.1706

حال فرض کنیم $x_0 \in A_0$. از آنجا که $Tx_0 \in T(A_0) \subseteq B_0$ پس $x_1 \in A_0$ وجود دارد به‌طوری‌که $d(x_1, Tx_0) = d(A, B)$. چون $Tx_1 \in T(A_0)$ با استدلال مشابه، نقطه $x_2 \in A_0$ وجود دارد به‌طوری‌که $d(x_2, Tx_1) = d(A, B)$. با ادامه این روش دنباله $\{x_n\}$ در A_0 به‌طوری‌که برای هر $n \in \mathbb{N}$، $d(x_{n+1}, Tx_n) = d(A, B)$ به‌دست می‌آید. اگر یک $n_0 \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $x_{n_0} = x_{n_0+1}$ در این‌صورت

$$d(x_{n_0}, Tx_{n_0}) = d(x_{n_0+1}, Tx_{n_0}) = d(A, B).$$

در نتیجه x_{n_0} یک φ ـبهترین نقطه نزدیکی نگاشت T است. پس فرض کنیم برای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $x_n \neq x_{n+1}$ لذا داریم

$$\begin{cases} d(x_{n+1}, Tx_n) = d(A, B), \\ d(x_{n+2}, Tx_{n+1}) = d(A, B). \end{cases}$$

بنابر رابطه (۴) داریم:

$$\begin{aligned} \psi(H(d(x_{n+1}, x_{n+2}), \varphi(x_{n+1}), \varphi(x_{n+2}))) &\leq \psi(H(d(x_n, x_{n+1}), \varphi(x_n), \varphi(x_{n+1}))) \\ &- \phi(H(d(x_n, x_{n+1}), \varphi(x_n), \varphi(x_{n+1}))) \\ &\leq \psi(H(d(x_n, x_{n+1}), \varphi(x_n), \varphi(x_{n+1}))), \end{aligned}$$

از اینکه ψ نانزولی است می‌توانیم بنویسیم

$$H(d(x_{n+1}, x_{n+2}), \varphi(x_{n+1}), \varphi(x_{n+2})) < H(d(x_n, x_{n+1}), \varphi(x_n), \varphi(x_{n+1})),$$

بنابراین $\{H(d(x_n, x_{n+1}), \varphi(x_n), \varphi(x_{n+1}))\}$ یک دنباله نزولی و از پایین کراندار است. در نتیجه $r \geq 0$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\lim_{n\to\infty} H(d(x_n, x_{n+1}), \varphi(x_n), \varphi(x_{n+1})) = r,$$

فرض کنیم $\theta_n = H(d(x_n, x_{n+1}), \varphi(x_n), \varphi(x_{n+1}))$ حال اگر $r > 0$ لذا داریم

$$\begin{aligned} \psi(r^+) &= \limsup_{\theta_n \to r^+} \psi(\theta_n) \\ &\leq \limsup_{\theta_{n-1} \to r^+} [\psi(\theta_{n-1}) - \phi(\theta_{n-1})] \\ &= \limsup_{\theta_{n-1} \to r^+} \psi(\theta_{n-1}) - \liminf_{\theta_{n-1} \to r^+} \phi(\theta_{n-1}) \\ &< \psi(r^+), \end{aligned}$$

که تناقض است در نتیجه $r = 0$. بنابر خواص H داریم

$$\max\{\varphi(x_{n+1}), d(x_{n+1}, x_{n+2})\} \leq H(d(x_{n+1}, x_{n+2}), \varphi(x_{n+1}), \varphi(x_{n+2})).$$

پس

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq H(d(x_{n+1}, x_{n+2}), \varphi(x_{n+1}), \varphi(x_{n+2})),$$

و

$$\varphi(x_{n+1}) \leq H(d(x_{n+1}, x_{n+2}), \varphi(x_{n+1}), \varphi(x_{n+2})).$$

https://dx.doi.org/10.22108/msci.2025.143009.1706

حال با حدگیری از طرفین نامساوی وقتی که $n \to \infty$ داریم

$$\lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, x_{n+2}) = 0,$$

و

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(x_{n+1}) = 0.$$

نشان می‌دهیم دنباله $\{x_n\}$ کوشی است. فرض کنیم $\{x_n\}$ کوشی نیست، پس می‌توان $\varepsilon > 0$ و دو زیردنباله $\{x_{n_k}\}$ و $\{x_{m_k}\}$ وقتی‌که $m_k > n_k > 0$، را با شرط

$$d(x_{m_k}, x_{n_k}) \geq \varepsilon, \quad d(x_{m_k}, x_{n_k-1}) < \varepsilon,$$

در نظر بگیریم. مشابه با اثبات قضیه قبل داریم $\lim_{k\to\infty} d(x_{m_k}, x_{n_k}) = \varepsilon$ و $\lim_{k\to\infty} d(x_{m_k-1}, x_{n_k-1}) = \varepsilon$. با استفاده از خواص دنباله $\{x_n\}$ داریم

$$\begin{cases} d(x_{m_k}, Tx_{m_k-1}) = d(A, B), \\ d(x_{n_k}, Tx_{n_k-1}) = d(A, B). \end{cases}$$

پس فرض کنیم $\theta_{m,n} = H(d(x_{m_k}, x_{n_k}), \varphi(x_{m_k}), \varphi(x_{n_k}))$ لذا داریم

$$\psi(\theta_{m,n}) \leq \psi(\theta_{m-1,n-1}) - \phi(\theta_{m-1,n-1}).$$

حال از نامساوی قبل حد بالا می‌گیریم

$$\begin{aligned} \psi(\varepsilon^+) &= \limsup_{\theta_{m,n}\to\varepsilon^+} \psi(\theta_{m,n}) \\ &\leq \limsup_{\theta_{m-1,n-1}\to\varepsilon^+} [\psi(\theta_{m-1,n-1}) - \phi(\theta_{m-1,n-1})] \\ &= \limsup_{\theta_{m-1,n-1}\to\varepsilon^+} \psi(\theta_{m-1,n-1}) - \liminf_{\theta_{m-1,n-1}\to\varepsilon^+} \phi(\theta_{m-1,n-1}), \end{aligned}$$

با توجه به خواص ϕ این تناقض است، پس دنباله $\{x_n\}$ کوشی است. با توجه به اینکه A_0 کامل است پس $x^* \in A_0$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x^*) = 0.$$

با استفاده از خواص تابع φ داریم $\varphi(x^*) = 0$. از آنجاکه $x^* \in A_0$ و $T(A_0) \subseteq B_0$ یک $z \in A_0$ وجود دارد که

$$\begin{cases} d(z, Tx^*) = d(A, B), \\ d(x_{n+1}, Tx_n) = d(A, B). \end{cases}$$

حال اگر یک $n_0 \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد که برای $n \geq n_0$ داشته باشیم $z = x^*$، آنگاه $z = \lim_{n\to\infty} x_n = x^*$ و در نتیجه اثبات تمام می‌شود. فرض کنیم برای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $d(x^*, z) > 0$. پس با استفاده از تعریف (H, ψ, φ, ϕ)-انقباض مجاوری ضعیف می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned} \psi(H(d(x_{n+1}, z), \varphi(x_{n+1}), \varphi(z))) &\leq \psi(H(d(x_n, x^*), \varphi(x_n), \varphi(x^*))) - \phi(H(d(x_n, x^*), \varphi(x_n), \varphi(x^*))) \\ &\leq \psi(H(d(x_n, x^*), \varphi(x_n), \varphi(x^*))), \end{aligned}$$

https://dx.doi.org/10.22108/msci.2025.143009.1706

چون ψ نانزولی است و بنابر رابطه (H_1) داریم

$$d(x_{n+1}, z) \leq H(d(x_{n+1}, z), \varphi(x_{n+1}), \varphi(z)) < H(d(x_n, x^*), \varphi(x_n), 0),$$

حال از طرفین نامساوی بالا حد می‌گیریم، پس

$$H(d(x^*, z)) \leq H(0, 0, 0) = 0,$$

و این تناقض است در نتیجه $z = x^*$. طبق $d(z, Tx^*) = d(A, B)$ داریم $d(x^*, Tx^*) = d(A, B)$ پس x^* یک φ ـبهترین نقطه نزدیکی است. حال فرض کنیم $w \in A$ وجود داشته باشد که $d(w, x^*) > 0$ و

$$\begin{cases} d(w, Tw) = d(A, B), \\ d(x^*, Tx^*) = d(A, B). \end{cases}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \psi(H(d(w, x^*), \varphi(w), \varphi(x^*))) &\leq \psi(H(d(w, x^*), \varphi(w), \varphi(x^*))) - \phi(H(d(w, x^*), \varphi(w), \varphi(x^*))) \\ &< \psi(H(d(w, x^*), 0, 0)), \end{aligned}$$

این تناقض است، پس فرض خلف باطل است و $d(w, x^*) = 0$. در نتیجه φ ـبهترین نقطه نزدیکی منحصر به فرد است. $\square$

فرض کنیم برای $t \in \mathbb{R}^+$ داشته باشیم $\psi(t) = t$ و $\phi(t) = (1 - k)t$ وقتی‌که $k \in (0, 1)$ در این‌صورت نتیجه زیر از قضیه ۱۱.۲ به‌دست می‌آید.

نتیجه ۱۲.۲. فرض کنیم A و B دو زیرمجموعه ناتهی از فضای متریک کامل (X, d) باشند. توابع $\varphi : A \to [0, \infty)$ و $H \in \mathcal{H}$ را در نظر می‌گیریم. اگر نگاشت $T : A \to B$ برای هر $u, v, x, y \in A$ در رابطه زیر صدق کند:

$$\begin{cases} d(u, Tx) = d(A, B) \\ d(v, Ty) = d(A, B) \end{cases} \Rightarrow H(d(Tx, Ty), \varphi(Tx), \varphi(Ty)) \leq k(H(d(x, y), \varphi(x), \varphi(y))),$$

وقتی‌که $H(d(x, y), \varphi(x), \varphi(y)) > 0$، $k \in (0, 1)$ و شرایط (۱)، (۲) و (۳) از قضیه ۱۱.۲ برقرار باشند، آن‌گاه T یک φ ـبهترین نقطه نزدیکی منحصر به فرد دارد.

نتیجه ۱۳.۲. فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک کامل و $T : X \to X$ برای هر $x, y \in X$ در شرط زیر صدق کند:

$$\psi(H(d(Tx, Ty), \varphi(Tx), \varphi(Ty))) \leq \psi(H(d(x, y), \varphi(x), \varphi(y))) - \phi(H(d(x, y), \varphi(x), \varphi(y))),$$

که $H(d(x, y), \varphi(x), \varphi(y)) > 0$. در این‌صورت T یک φ ـنقطه ثابت منحصر به فرد مانند x^* دارد. علاوه بر این، برای هر $x \in X$، داریم $\lim_{n\to\infty} T^n x = x^*$.

مثال ۱۴.۲. فضای متریک $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ را با متر معمولی و زیرمجموعه‌های $A = \{1, 3\}$ و $B = \{1, 2, 4\}$ را در نظر می‌گیریم. لذا $A_0 = \{1\}$، $B_0 = \{1\}$ و $d(A, B) = 0$. حال فرض کنیم نگاشت T به‌صورت $Tt = \frac{t+1}{2}$ تعریف شده باشد. توابع $\psi, \phi : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad \varphi : A \to [0, \infty), \quad H : [0, \infty) \to [0, \infty)$ را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\psi(t) = t, \quad \phi(t) = \frac{1}{2}t, \quad \varphi(t) = \ln t, \quad H(\alpha, \beta, \eta) = \alpha + \beta + \eta,$$

https://dx.doi.org/10.22108/msci.2025.143009.1706

نشان می‌دهیم شرایط قضیه ۱۱.۲ برقرار است. مشاهده می‌شود که:

$$\begin{cases} d(u,Tx) = d(A,B) = 0, \\ d(v,Ty) = d(A,B) = 0. \end{cases}$$

پس $u = v = x = y = 1$ بنابراین

$$\psi(H(d(u,v),\varphi(u),\varphi(v))) \leq \psi(H(d(x,y),\varphi(x),\varphi(y))) - \phi(H(d(x,y),\varphi(x),\varphi(y))),$$

در نتیجه نگاشت T یک (H,ψ,φ,ϕ) ـانقباض مجاوری ضعیف است و بنابر قضیه ۱۱.۲ نگاشت T یک φ ـبهترین نقطه نزدیکی $x = 1$ را دارد.

تشکر و قدردانی

این مقاله مستخرج از نتایج طرح تحقیقاتی اجرا شده به شماره قرارداد 3GRN1M1024 از محل اعتبارات معاونت پژوهش و فناوری دانشگاه شهرکرد می‌باشد.

مراجع

[1] A. Amini-Harandi, Common best proximity points theorems in metric spaces, *Optim. lett.*, **8** no. 2 (2014) 581–589.

[2] M. A. Al-Thagafi and N. Shahzad, Convergence and existence results for best proximity points, *Nonlinear Anal.*, **70** no. 10 (2009) 3665–3671.

[3] M. Cosentino and P. Vetro, Fixed point results for F-contractive mappings of Hardy-Rogers-type, *Filomat*, **28** no. 4 (2014) 715–722.

[4] A. A Eldred and P. Veeramani, Existence and convergence of best proximity points, *J. Math. Anal. Appl.*, **323** no. 2 (2006) 1001–1006.

[5] M. Gabeleh, Semi-normal structure and best proximity pair results in convex metric spaces, *Banach J. Math. Anal.*, **8** no. 2 (2014) 214–228.

[6] M. Gabeleh, Best proximity points and fixed point results for certain maps in Banach spaces, *Numer. Funct. Anal. Optim.*, **36** no. 8 (2015) 1013–1028.

[7] M. Gabeleh and J. Markin, A note on the paper Best proximity point results for p-proximal contractions, *Acta Math. Hungar.*, **164** no. 1 (2021) 326–329.

[8] M. Gabeleh and C. Vetro, A note on best proximity point theory using proximal contractions, *J. Fixed Point Theory Appl.*, **20** no. 4 (2018) 11 pp.

[9] H. IŞik, M. S. Sezen and C. Vetro, ϕ-best proximity point theorems and applications to variational inequality problems, *J. Fixed Point Theory Appl.*, **19** no.4 (2017) 3177–3189.

[10] M. Jleli, B. Samet and C. Vetro, Fixed point theory in partial metric spaces via φ-fixed point's concept in metric spaces, *J. Inequal. Appl.*, **2014** (2014) 9 pp.

[11] X. D. Liu, S. S. Chang, Y. Xiao and L. C. Zhao, Some fixed point theorems concerning (ψ,ϕ)-type contraction in complete metric spaces, *J. Nonlinear Sci. Appl.*, **9** no. 6 (2016) 4127–4136.

https://dx.doi.org/10.22108/msci.2025.143009.1706

[12] P. D. Proinov, Fixed point theorem for generalized contractive mappings in metric spaces, *J. Fixed Point Theory Appl.*, **22** no. 1 (2020) 27 pp.

[13] V. Sankar Raj, A best proximity point theorem for weakly contractive non-self-mappings, *Nonlinear Anal.*, **74** no. 14 (2011) 4804–4808.

[14] M. Shams, S. Zamani, S. Jafari and M. De La Sen, Existence of φ-fixed point for generalized contractive mappings, *AIMS Math.*, **6** no. 7 (2021) 7017-7033.

[15] W. Sintunavarat and P. Kumam, Coupled best proximity point theorem in metric spaces, *Fixed Point Theory Appl.*, **2012** (2012) 16 pp.

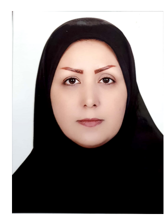
[16] T. Suzuki, M. Kikkawa and C. Vetro, The existence of best proximity points in metric spaces with the property UC, *Nonlinear Anal.*, **71** no. 7-8 (2009) 2918-2926.

[17] D. Wardowski, Fixed points of new type of contractive mappings in complete metric spaces, *Fixed Point Theory Appl.*, **2012** (2012) 6 pp.

[18] D. Wardowski and N. V. Dung, Fixed points of F-weak contractions on complete metric spaces, *Demonstr. Math.*, **47** no. 1 (2014) 146–155.

[19] J. Zhang and Y. Su, Best proximity point theorems for weakly contractive mapping and weakly Kannan mapping in partial metric spaces, *Fixed Point Theory APPL.*, **2014** (2014) 8 pp.

مریم شمس
گروه علوم ریاضی، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد، ایران
maryam.shams@sku.ac.ir



مریم شمس استادیار دانشکده علوم ریاضی دانشگاه شهرکرد است. وی دانش‌آموخته مقطع کارشناسی ارشد و دکتری ریاضی‌محض گرایش آنالیز از دانشگاه یزد است.

فرح رشیدی
گروه علوم ریاضی، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد، ایران
rashidi.farah66@yahoo.com

فرح رشیدی دانش‌آموخته مقطع دکتری ریاضی گرایش آنالیز، از دانشگاه شهرکرد است.

https://dx.doi.org/10.22108/msci.2025.143009.1706