

HARNACK INEQUALITIES FOR NONLINEAR PARABOLIC EQUATIONS UNDER INTEGRAL RICCI CURVATURE BOUNDS

SHAHROUD AZAMI[✉] AND MEHDI JAFARI^{✉*}

ABSTRACT. This work is devoted to the study of gradient estimates and Harnack inequalities for positive solutions to a class of nonlinear parabolic equations on compact Riemannian manifolds under integral Ricci curvature bounds. More precisely, we consider equations of the form:

$$\partial_t v = \Delta v + av(\ln v)^b + q(x, t)A(v),$$

where $a, b \in \mathbb{R}$ and $A(v)$ is a smooth function. These equations naturally generalize the classical heat equation and arise in various geometric and physical contexts. We establish Li-Yau, Hamilton, and Souplet-Zhang type gradient estimates, and deduce corresponding Harnack inequalities. Our results extend previous works by relaxing the curvature conditions to integral lower bounds on the Ricci tensor, thereby allowing for more general geometric settings.

1. Introduction

Understanding the behavior of heat-type equations on Riemannian manifolds has been deeply influenced by gradient estimates, which serve as a bridge between geometric curvature conditions and analytic properties of PDEs. Foundational contributions in this area include the works of Li and

Keywords: Gradient estimate, Harnack inequality, Parabolic equation.

Article Type: Research Paper.

Communicated by Mohamad Reza Pouryayevali.

*Corresponding author.

Received: 18-10-2024, Accepted: 29-04-2025, Published Online: 28-10-2025.

Cite this article: S. Azami and M. Jafari, Harnack inequalities for nonlinear parabolic equations under integral ricci curvature bounds, *Mathematics and Society*, **11** no. 1 (2026) 57–80. <https://dx.doi.org/10.22108/msci.2025.143102.1705>.

Yau [13], Hamilton [10], and Zhang and Zhu [23], which have significantly shaped modern geometric analysis.

Let $\rho(y)$ be the minimal eigenvalue of the Ricci curvature operator $\text{Ric} : T_y M \rightarrow T_y M$ at a point $y \in M$. Define its negative part as

$$\text{Ric}_-(y) = \max\{-\rho(y), 0\}.$$

Given a point $y \in M$ and radius $r > 0$, the geodesic ball $B(y, r)$ can be used to introduce a scale-sensitive curvature quantity as proposed in [7]:

$$k(y, p, r) = r^2 \left(\int_{B(y, r)} |\text{Ric}_-|^p d\mu \right)^{1/p}, \quad k(p, r) = \sup_{y \in M} k(y, p, r).$$

The seminal Li-Yau estimate [13] addresses the heat equation $u_t = \Delta u$ under Ricci lower bounds $\text{Ric} \geq -K$ on complete manifolds, yielding:

$$(1.1) \quad \frac{|\nabla u|^2}{u^2} - \alpha \frac{u_t}{u} \leq \frac{n\alpha^2 K}{2(\alpha - 1)} + \frac{n\alpha^2}{2t}, \quad \alpha > 1.$$

Hamilton [10] later proposed a refinement involving a dynamic weight $\alpha(t) = e^{2Kt}$, resulting in:

$$\frac{|\nabla u|^2}{u^2} - e^{2Kt} \frac{u_t}{u} \leq e^{4Kt} \frac{n}{2t}.$$

Sun [19] offered another variation where the time-dependence is linear in Kt :

$$\frac{|\nabla u|^2}{u^2} - \left(1 + \frac{2}{3}Kt\right) \frac{u_t}{u} \leq \left(\frac{n}{2t} + \frac{nK}{4}\right) \left(1 + \frac{2}{3}Kt\right) - \frac{nK}{12}.$$

Li and Xu [12] introduced a formulation using hyperbolic functions:

$$\frac{|\nabla u|^2}{u^2} - \left(\frac{\cosh(Kt) \sinh(Kt) - Kt}{\sinh^2(Kt)} + 1 \right) \frac{u_t}{u} \leq \frac{n}{2} K (1 + \coth(Kt)).$$

This was further approximated in linear form by [5]:

$$\frac{|\nabla u|^2}{u^2} - \left(1 + \frac{2}{3}Kt\right) \frac{u_t}{u} \leq \frac{n}{2} \left(\frac{1}{t} + K + \frac{1}{3}K^2 t \right).$$

Expanding the scope of gradient estimates, Yang [21] built upon Ma's earlier investigations [14], dealing with equations of the type:

$$u_t = \Delta u + au \log u + bu,$$

on noncompact manifolds with Ricci curvature bounded from below. Additionally, Abolarinwa et al. [1] derived elliptic-type estimates for solutions to:

$$u_t = \Delta_f u - pu^\beta - qu,$$

where $\beta \in \mathbb{R}$ and p, q are smooth functions defined on weighted Riemannian manifolds.

Further generalizations emerged through the efforts of Zhang and Zhu [23, 24], who obtained Li-Yau-style estimates under the integral curvature constraints introduced by Petersen and Wei [16, 17]:

$$(1.2) \quad k(p, r) = \sup_{y \in M} r^2 \left(\int_{B(y, r)} |\text{Ric}_-|^p d\mu \right)^{1/p} \leq \kappa.$$

Their results include:

$$\alpha \bar{J}(t) \frac{|\nabla u|^2}{u^2} - \frac{u_t}{u} \leq \frac{C_1}{\bar{J}} \left(1 + \frac{C_2}{\bar{J}} \right) + \frac{C_3}{t\bar{J}},$$

where $\bar{J}(t)$ is a strictly decreasing positive function, and constants C_i depend on n, p, α . Rose [18] broadened the context to include manifolds where Ric_- belongs to the Kato class. Subsequently, Olive [15] examined Neumann boundary problems within compact domains subject to similar curvature bounds.

2. Main Results

Let (M^n, g) be a compact Riemannian manifold. We study positive solutions $v(x, t)$ of the nonlinear parabolic equation:

$$\partial_t v = \Delta v + av(\ln v)^b + q(x, t)A(v),$$

where $A(v)$ is twice differentiable and $q(x, t)$ is smooth with spatial and temporal derivatives under control. Setting $h = \ln v$, we derive evolution equations for h and construct the auxiliary function

$$G = I|\nabla h|^2 - \alpha h_t + a\alpha h^b + \alpha qB(h) - \alpha\varphi(t),$$

where $B(h)$ encodes the structure of $A(v)$ and φ is a time-dependent function selected to facilitate maximum principle arguments.

Under integral Ricci curvature bounds of the form

$$\left(\int_{B(y, r)} |\text{Ric}^-|^p \right)^{1/p} \leq \kappa r^{-2},$$

and using appropriate cutoff functions, we prove Li-Yau type gradient estimates:

$$\frac{|\nabla v|^2}{v^2} - \alpha \frac{v_t}{v} \leq \frac{n\alpha^2}{2(2-\varepsilon)\bar{I}(t)} \left(\frac{1}{t} + C(x, t) \right),$$

where $\bar{I}(t)$ is a decreasing function depending on the geometry, and $C(x, t)$ aggregates the bounds on $A(v)$ and its derivatives, as well as on $q(x, t)$.

By integrating these inequalities along space-time curves, we derive classical Harnack inequalities of the form

$$v(x_1, t_1) \leq v(x_2, t_2) \left(\frac{t_2}{t_1} \right)^\delta \exp \left(C \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{|\dot{\zeta}(s)|^2}{\bar{I}(s)} + \Psi(s) \right) ds \right),$$

where $\zeta(s)$ is a minimizing path joining x_1 and x_2 in space-time and $\Psi(s)$ involves geometric and analytic terms.

Our estimates include four types:

- Li-Yau type with constant α ,
- Hamilton type with $\alpha(t) = \delta e^{\kappa t}$,
- Li-He type with hyperbolic functions,
- Linear Li-He type with $\alpha(t) = \delta + \kappa t$.

These generalizations are new even in the linear case and improve upon known results.

3. Summary of Proofs/Conclusions

The core of the proof involves computing the evolution of the function G under the operator $(\Delta - \partial_t)$ and applying the Bochner-Weitzenböck formula:

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla h|^2 = |\text{Hess } h|^2 + \text{Ric}(\nabla h, \nabla h) + \langle \nabla \Delta h, \nabla h \rangle.$$

We carefully estimate all terms involving $A(v)$, $q(x, t)$, and the curvature, then use the maximum principle with suitable cutoff functions to control the behavior of G .

Integration along space-time paths yields classical Harnack inequalities, confirming that integral curvature bounds are sufficient for obtaining meaningful analytic control on solutions to nonlinear parabolic equations.

Shahroud Azami

Department of Mathematics, Faculty of Science, Imam Khomeini International University, Qazvin, Iran
azami@sci.ikiu.ac.ir

Mehdi Jafari

Department of Mathematics, Payame Noor University, PO BOX 19395-4697, Tehran, Iran
m.jafarii@pnu.ac.ir

نامساوی هارناک برای معادلات سهموی غیرخطی تحت کران‌های خمیدگی ریچی انتگرالی پایین

شاهرود اعظمی^۱ و مهدی جعفری^{۲*}

چکیده. فرض کنید (M^n, g) یک خمینه فشرده ریمانی باشد. در این مقاله، ما برآوردهای گرادیان فضا-زمان را برای جواب‌های مثبت معادلات سهموی غیرخطی

$$\partial_t v = \Delta v + av(\ln v)^b + q(x, t)A(v),$$

روی گوی‌های ژئودزیکی $B(O, r)$ در M برای $0 < r \leq 1$ و $p > \frac{n}{p}$ هنگامی که خمیدگی ریچی انتگرالی پایین $k(p, 1)$ به اندازه کافی کوچک است به دست می‌آوریم. سپس با انتگرال‌گیری از برآوردهای گرادیان، نامساوی‌های هارناک^۱ مربوطه را پیدا می‌کنیم.

۱. مقدمه

فرض کنید برای $y \in M$ ، $\rho(y)$ کوچکترین مقدار ویژه برای تانسور ریچی $\text{Ric} : T_y M \rightarrow T_y M$ باشد. تعریف می‌کنیم $\text{Ric}_-(y) = \max\{-\rho(y), 0\}$. فرض کنید $B(y, r)$ نشان دهنده گوی ژئودزیکی به شعاع r و مرکز y در M باشد. طبق [۷] برای $p, r > 0$ فرض کنید

$$k(y, p, r) = r^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B(y, r)} |\text{Ric}_-|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, \quad k(p, r) = \sup_{y \in M} k(y, p, r).$$

برآوردهای گرادیان، ابزارهای مهمی در آنالیز هندسی هستند که توسط یائو^۱ [۲۲] و لی-یائو^۲ [۱۳] معرفی شدند. لی و یائو [۱۳] برآوردهای گرادیان سهموی روی جواب‌های u از معادله حرارت $u_t = \Delta u$ را به دست آوردند که در آن خمینه پایه یعنی (M^n, g) یک خمینه ریمانی کامل با متریک ثابت و خمیدگی ریچی با کران پایین $-K$ که در آن $K \geq 0$ می‌باشد. در واقع

عبارات و کلمات کلیدی: برآورد گرادیان، نامساوی هارناک، معادله سهموی.

نوع مقاله: پژوهشی

دبیرتخصصی رابط: محمدرضا پوریایولی

* نویسنده مسئول

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۷/۲۷ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۲/۰۹ تاریخ انتشار آنلاین: ۱۴۰۴/۰۸/۰۶

ارجاع به مقاله: ش. اعظمی و م. جعفری، نامساوی هارناک برای معادلات سهموی غیرخطی تحت کران‌های خمیدگی ریچی انتگرالی پایین، ریاضی و جامعه، ۱۱ شماره ۱ (۱۴۰۵) ۸۰-۵۷.

<http://dx.doi.org/10.22108/msci.2025.143102.1705>

^۱S. T. Yau ^۲P. Li and S. T. Yau

آنها ثابت کردند

$$(۱) \quad \frac{|\nabla u|^2}{u^2} - \alpha \frac{u_t}{u} \leq \frac{n\alpha^2 K}{2(\alpha-1)} + \frac{n\alpha^2}{2t},$$

که در آن $\alpha > 1$ یک عدد ثابت است. این برآورد، برآورد لی-یائو نامیده می‌شود. هامیلتون در [۱۰] ثابت α در نامساوی (۱) را به تابع $\alpha(t) = e^{2Kt}$ تعمیم داد و نامساوی زیر را به دست آورد

$$\frac{|\nabla u|^2}{u^2} - e^{2Kt} \frac{u_t}{u} \leq e^{2Kt} \frac{n}{2t}.$$

این نوع برآورد گرادیان را برآورد نوع هامیلتون می‌نامند. در سال ۲۰۰۶، سان [۱۹]^۳ نوع دیگری از برآورد را برای جواب‌های مثبت معادله $u_t = \Delta u$ به صورت زیر به دست آورد.

$$\frac{|\nabla u|^2}{u^2} - \left(1 + \frac{2}{3}Kt\right) \frac{u_t}{u} \leq \left(\frac{n}{2t} + \frac{nK}{4}\right) \left(1 + \frac{2}{3}Kt\right) - \frac{nK}{12}.$$

سپس لی و خو^۴ در [۱۲] برآوردهای گرادیان را برای این جواب مثبت معادله $u_t = \Delta u$ به شکل زیر محاسبه کردند

$$\frac{|\nabla u|^2}{u^2} - \left(\frac{\cosh(Kt) \sinh(Kt) - Kt}{\sinh^2(Kt)} + 1\right) \frac{u_t}{u} \leq \frac{n}{2} K (1 + \coth(Kt)),$$

که مدل خطی شده آن به صورت زیر می‌باشد [۵]،

$$\frac{|\nabla u|^2}{u^2} - \left(1 + \frac{2}{3}Kt\right) \frac{u_t}{u} \leq \frac{n}{2} \left(\frac{1}{t} + K + \frac{1}{3}K^2 t\right).$$

یانگ^۵ در [۲۱] نتایج ما^۶ [۱۴] را تعمیم داد و ثابت کرد برآوردهای گرادیان موضعی برای جواب مثبت معادله $u_t = \Delta u + au \log u + bu$ روی خمینه‌های کامل نافشرده با متریک و خمیدگی ثابت از پایین کراندار است (اعداد ثابت حقیقی هستند).

سپس ابولارینوا^۷ و همکارانش [۱] برآوردهای گرادیان بیضوی را برای جواب‌های مثبت معادله سهموی غیرخطی وزنی $u_t = \Delta f u - p u^\beta - q u$ روی خمینه ریمانی وزنی به دست آوردند که $\beta \in \mathbb{R}$ و p و q توابع هموارند. ژانگ^۸ و سو^۹ در [۲۴، ۲۳] کران‌های گرادیان نوع لی-یائو را برای هر جواب مثبت u از معادله حرارت $u_t = \Delta u$ تحت کران‌های خمیدگی ریچی انتگرالی پایین معرفی شده توسط وی^{۱۰} و پترسون^{۱۱} [۱۶، ۱۷]،

$$(۲) \quad k(p, r) = \sup_{y \in M} r^2 \left(\int_{B(y, r)} |\text{Ric}_-|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \kappa$$

به صورت زیر به دست آوردند

$$\alpha \bar{J} \frac{|\nabla u|^2}{u^2} - \frac{u_t}{u} \leq \frac{C_1}{\bar{J}} \left(1 + \frac{C_2}{\bar{J}}\right) + \frac{C_3}{t \bar{J}},$$

که در آن $\bar{J} = \bar{J}(t)$ و $i = 1, 2, 3$ ، $C_i = C_i(n, p, \alpha)$ تابع پتانسیلی کاهشی است. سپس روسه^{۱۲} [۱۸] نامساوی بالا را به خمینه‌های ریمانی فشرده با قسمت‌های منفی خمیدگی ریچی در کلاس کاتو^{۱۳} تعمیم داد. همچنین اولیو^{۱۴} [۱۵]

³H. J. Sun ⁴X. Xu ⁵Yang ⁶Ma ⁷A. Abolarinwa ⁸Q. S. Zhang ⁹M. Zhu ¹⁰G. Wei ¹¹P. Petersen ¹²C. Rose

¹³Kato ¹⁴X. R. Olivé

نتایج ژانگ و سو [۲۳، ۲۴] را به جواب مثبت معادله $u_t = \Delta u$ با شرط مرزی نیومن^{۱۵} روی خمینه ریمانی فشرده با کران $M^n \subset N$ که در فرض خمیدگی ریچی انتگرالی پایین

$$D^2 \sup_{y \in N} r^2 \left(\int_{B(y,r)} |\text{Ric}_-|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq K$$

برای $k(n, p)$ به اندازه کافی کوچک و $p > \frac{n}{2}$ و $\text{diam}(M) \leq D$ صدق می‌کند تعمیم داد. اخیراً وانگ^{۱۶} [۲۰] برآوردهای گرادیان را برای هر جواب مثبت معادله سهموی غیرخطی $u_t = \Delta u + au \log u$ تحت کران‌های خمیدگی انتگرالی پایین به دست آورده است. برای مطالعه بیشتر در مورد برآورد گرادیان می‌توان به [۳، ۴، ۶، ۹، ۱۱] رجوع کرد.

در ادامه مطالعات فوق و با الهام گرفتن از [۲] و [۸]، در این مقاله ما برآوردهای گرادیان را برای جواب‌های مثبت معادله سهموی غیرخطی

$$(۳) \quad v_t = \Delta v + av(\ln v)^b + q(x, t)A(v)$$

روی خمینه‌های ریمانی فشرده (M^n, g) و خمیدگی ریچی انتگرالی پایین (۲) به دست می‌آوریم که در آن $q(x, t)$ یک تابع C^2 ، $A(v)$ یک تابع C^2 روی v و a و b ثابت‌های حقیقی هستند. فرض کنید $h = \ln v$ در این صورت

$$(۴) \quad (\Delta - \partial_t)h = -|\nabla h|^2 - ah^b - qB(h),$$

که $B(h) = \frac{A(v)}{v}$ همچنین داریم

$$B_h = A'(v) - \frac{A(v)}{v}, \quad B_{hh} = vA''(v) - A'(v) + \frac{A(v)}{v}.$$

علاوه بر این برای $u > 0$ چند ثابت حقیقی غیرمنفی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} \lambda_1 &:= \sup_{B(O, \frac{1}{2}) \times (0, \infty)} |B|, & \theta_1 &:= \sup_{B(O, \frac{1}{2}) \times (0, \infty)} |q|, \\ \lambda_2 &:= \sup_{B(O, \frac{1}{2}) \times (0, \infty)} |B_h|, & \theta_2 &:= \sup_{B(O, \frac{1}{2}) \times (0, \infty)} |\nabla q|, \\ \lambda_3 &:= \sup_{B(O, \frac{1}{2}) \times (0, \infty)} |B_{hh}|, & \theta_3 &:= \sup_{B(O, \frac{1}{2}) \times (0, \infty)} |\Delta q|. \end{aligned}$$

چون فرض کرده‌ایم که v جواب مثبت روی خمینه ریمانی فشرده M است می‌توان برای ثابت‌های مثبت D_1 و D_2 داشته باشیم $D_1 \leq v(x, t) \leq D_2$. برای سادگی تعریف می‌کنیم

$$\tilde{D}_i = \max\{|\ln \tilde{D}_1|^{b-i}, |\ln \tilde{D}_2|^{b-i}\}, \quad i = 0, 1, 2.$$

برای اثبات نتایج این مقاله، دانستن لم‌های زیر ضروری است. اولین لم به صورت زیر بیان می‌شود که اثبات آن در [۲۳] موجود است.

¹⁵Neumann ¹⁶W. Wang

لم ١.١. $\kappa = \kappa(n, p)$ وءوء ءارء به ءورى كه اءر $k(p, 1) \leq \kappa$ آنگاه ءسءگاه

$$(٥) \quad \begin{cases} \Delta I - 2VI - 5 \frac{|\nabla I|^2}{\epsilon I} - I_t = 0, & \text{on } B(O, r) \times (0, \infty), \\ I(., 0) = 1, & \text{on } B(O, r), \\ I(., t) = 1, & \text{on } \partial B(O, r), \end{cases}$$

برائى هر $0 < r \leq 1$ و $t \in [0, \infty)$ ءواب يءءا ءارء كه ءر شرط $1 \leq I(x, t) \leq \bar{I}_r(t)$ صء مى ءنء و

$$\bar{I}_r(t) = 2^{-\frac{1}{b-1}} \exp\{-2C\kappa r^{-2}([2C(b-1)\kappa]^{\frac{n}{2p-n}} + 1)t\}$$

برائى ءابء $C = C(n, p)$ ، $V = |\text{Ric}_-|$ و $b = \frac{5}{\epsilon}$.

لم زىر ءر [٧] بىان و اثءاء شده اسء.

لم ٢.١. فرض ءنءء (M^n, g) يك ءمىنه رىمانى فشءه باشء. برائى هر $p > \frac{n}{2}$ ءابءءاى k و C موءوءنء كه $k(p, 1) \leq \kappa$ و برائى هر ءوى ژئوءزىءى $B(x, r)$ كه $0 < r \leq 1$ ءابع $\psi \in C^\infty_0(B(x, r))$ وءوء ءارء به ءورى كه $0 \leq \psi \leq 1$ و ءر $B(x, \frac{r}{2})$ ءارىم $\psi \equiv 1$ و همءنىن $|\nabla \psi|^2 + |\Delta \psi| \leq \frac{C}{r^2}$.

مشابه با ءارى كه ءر مقاله [٢٠] انءام شده اسء ءو ءابع α, C^1 و $\alpha : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ را معرفى مى ءنىم. فرض ءنءء ءو ءءء ءقىقى مءبء ϵ و δ وءوء ءارء به ءورى كه شراىء زىر برءرار باشنء

$$(A1) \quad 1 < \alpha(t)$$

$$(A2) \quad \frac{1}{\alpha} \left[2(2 - \epsilon) \frac{\phi}{n} - \alpha' \right] \leq 2(2 - \epsilon) \frac{\phi}{n}$$

$$(A3) \quad 2(2 - \epsilon) \frac{\phi}{n} \bar{J} - \alpha' \geq 0$$

$$(A4) \quad \alpha \phi' + (2 - \epsilon) \frac{\phi}{n} \bar{J} \geq 0$$

$$(A5) \quad 0 < \frac{\alpha}{\alpha - 1} \leq \delta$$

$$(A6) \quad 0 < \epsilon \leq \frac{2}{1 + n\delta^2}$$

كه ءر آن $\alpha' = \frac{d}{dt} \alpha$ و $\phi' = \frac{d}{dt} \phi$. ءر ابءءا برآورء ءراءىان زىر را برائى ءوابءاى مءبء (٣) ءءء ءران ءمىءىءى انءءرالى پائىن (٢) ارائه مى ءهىم.

ءضىه ٣.١. فرض ءنءء (M, g) يك ءمىنه رىمانى فشءه n -ءءءى و u يك ءواب مءبء (٣) روى M باشء. فرض ءنءء ءو ءءء ءقىقى مءبء ϵ و δ و ءو ءابع α و ϕ وءوء ءارنء كه ءر شراىء (A١) - (A٤) صء مى ءنءنء. برائى $p > \frac{n}{2}$ ءابء κ كه $k(p, 1) \leq \kappa$ و برائى هر نءءه $O \in M$ ءابء مءبء C_1 وءوء ءارء به ءورى كه

$$(٤) \quad \begin{aligned} G \leq & \frac{n\alpha^2}{2(2 - \epsilon)\bar{I}} \frac{1}{t} + \frac{n\alpha^2}{(2 - \epsilon)\bar{I}} \left[\frac{C_1^2 n\alpha^2}{2(2 - \epsilon)(\alpha - 1)\bar{I}} + b\bar{D}_1 |a| + \theta_1 \lambda_2 + C_1 \right] \\ & + \sqrt{\frac{n\alpha^2}{(2 - \epsilon)\bar{I}}} C_2, \end{aligned}$$

که در آن $C_1 = C(n, p)$ ، $G = I|\nabla h|^2 - \alpha h_t + \alpha \alpha h^b + \alpha qB - \alpha \phi$ و

$$C_2 = \frac{\left(|a|b(\alpha - 1)\tilde{D}_1 + \omega(\alpha - 1)\theta_1\lambda_2 + |a|b(b - 1)\alpha\tilde{D}_2 + 3\theta_1\lambda_3(\alpha - 1) \right)^2}{4 \left[\frac{(2-\epsilon)I}{n\alpha^2}(\bar{I} - \alpha)^2 - \epsilon \right]} + \frac{1}{2\theta_1\lambda_2}\lambda_1\theta_2 + |a|b\tilde{D}_1\alpha\phi + \alpha\lambda_1\theta_3 + \theta_1\lambda_2\alpha\phi + \frac{\alpha}{2\theta_1\lambda_2}\lambda_2\theta_2. \quad (7)$$

دو عدد حقیقی مثبت ϵ و λ و دو تابع α و ϕ به فرم‌های زیر هستند.

۱- نوع لی-یائو

$$\alpha(t) = 1, \quad \phi(t) = \frac{n}{(2 - \epsilon)\alpha\bar{I}},$$

$$0 < \epsilon \leq \frac{2(\alpha - 1)^2}{(\alpha - 1)^2 + n\alpha^2}.$$

۲- نوع هامیلتونی

$$\alpha(t) = \delta e^{\kappa t}, \quad \phi(t) = \frac{\delta \kappa n e^{\kappa t}}{2(2 - \epsilon)\bar{I}},$$

$$\delta > 1 \quad \text{برای هر} \quad 0 < \epsilon \leq \frac{2(\delta - 1)^2}{(\delta - 1)^2 + n\delta^2}.$$

۳- نوع لی-خو

$$\alpha(t) = \delta + \frac{\cosh(\kappa t) \sinh(\kappa t) - \kappa t}{\sinh(\kappa t)}, \quad \phi(t) = \frac{n\kappa}{(2 - \epsilon)\bar{I}}(\delta + \coth(\kappa t)),$$

$$\delta > 1 \quad \text{برای هر} \quad 0 < \epsilon < \frac{\delta}{\delta - 1}.$$

۴- نوع لی-خو، خطی

$$\alpha(t) = \kappa t + \delta, \quad \phi(t) = \frac{\kappa n}{2(2 - \epsilon)\bar{I}},$$

$$\delta > 1 \quad \text{برای هر} \quad 0 < \epsilon \leq \frac{2(\delta - 1)^2}{(\delta - 1)^2 + n\delta^2}.$$

با انتگرال‌گیری از برآورد گرادیان در فضا-زمان، نامساوی هارناک به‌دست می‌آید. برای دو نقطه $(y_1, s_1) \in M \times (0, \infty)$ و $(y_2, s_2) \in M \times (0, \infty)$ که $s_1 < s_2$ تعریف می‌کنیم

$$\mathcal{J}(y_1, s_1, y_2, s_2) = \inf_{s_1} \int_{s_1}^{s_2} |\zeta'(t)|_g^2 dt,$$

که در آن اینفیم روی همهٔ خم‌های هموار $\zeta: [s_1, s_2] \rightarrow M$ که y_1 را به y_2 وصل می‌کند محاسبه شده است.

نتیجه ۴.۱. با در نظر گرفتن فرضیات قضیه ۳.۱ برای $(y_1, s_1) \in B(O, \frac{1}{r}) \times (0, \infty)$ و $(y_2, s_2) \in B(O, \frac{1}{r}) \times (0, \infty)$ که $s_1 < s_2$ نامساوی‌های هارناک زیر را به‌دست می‌آوریم

۰.۱ برای برآورد نوع لی-یائو

$$(A) \quad v(y_1, s_1) \leq v(y_2, s_2) \left(\frac{s_2}{s_1} \right)^{\frac{n\alpha}{\gamma(\gamma-\epsilon)\bar{I}(T)}} \exp \left\{ \frac{\alpha}{\gamma\bar{I}(T)} \mathcal{J}(y_1, s_1, y_2, s_2) \right. \\ \left. + \left(C_{\gamma} + |a|\alpha D_0 + \alpha\lambda_1\theta_1 + \frac{n}{(\gamma-\epsilon)\bar{I}(T)} \right) (s_2 - s_1) \right\},$$

که

$$C_{\gamma} = \frac{n\alpha}{(\gamma-\epsilon)\bar{I}(T)} \left[\frac{C_1^{\gamma} n\alpha}{\gamma(\gamma-\epsilon)(\alpha-1)\bar{I}(T)} + b\tilde{D}_1|a| + \theta_1\lambda_2 + C_1 \right] \\ + \sqrt{\frac{n\alpha}{(\gamma-\epsilon)\bar{I}(T)}} C_2.$$

۰.۲ برای برآورد هامیلتونی

$$(A) \quad v(y_1, s_1) \leq v(y_2, s_2) \left(\frac{s_2}{s_1} \right)^{\frac{n\delta^{\gamma}e^{\gamma\kappa s_2}}{\gamma(\gamma-\epsilon)\bar{I}(T)}} \exp \left\{ \frac{\delta e^{\kappa s_2}}{\gamma\bar{I}(T)} \mathcal{I}(y_1, s_1, y_2, s_2) \right. \\ \left. \left(C_{\delta} + |a|\delta e^{\kappa s_2} D_0 + \delta e^{\kappa s_2} \lambda_1\theta_1 + \frac{\delta^{\gamma} \kappa n e^{\gamma\kappa s_2}}{\gamma(\gamma-\epsilon)\bar{I}(T)} \right) (s_2 - s_1) \right\},$$

که

$$C_{\delta} = \frac{n\delta^{\gamma}e^{\gamma\kappa s_2}}{(\gamma-\epsilon)\bar{I}(T)} \left[\frac{C_1^{\gamma} n\delta^{\gamma}e^{\gamma\kappa s_2}}{\gamma(\gamma-\epsilon)(\delta e^{\kappa s_1} - 1)\bar{I}(T)} + b\tilde{D}_1|a| + \theta_1\lambda_2 + C_1 \right] \\ + \sqrt{\frac{n\delta^{\gamma}e^{\gamma\kappa s_2}}{(\gamma-\epsilon)\bar{I}(T)}} C_2',$$

و

$$C_2' = \frac{\left(|a|(\delta e^{\kappa s_2} - 1)b\tilde{D}_1 + \delta(\delta e^{\kappa s_2} - 1)\theta_1\lambda_2 + |a|\delta e^{\kappa s_2}b(b-1)\tilde{D}_2 + \gamma(\delta e^{\kappa s_2} - 1)\theta_1\lambda_2 \right)^{\gamma}}{\gamma \left[\frac{(\gamma-\epsilon)\bar{I}}{n(\delta e^{\kappa s_2})^{\gamma}} (\bar{I} - \delta e^{\kappa s_1})^{\gamma} - \epsilon \right]} \\ + \frac{1}{\gamma\theta_1\lambda_2} \lambda_1\theta_2 + |a|b\tilde{D}_1 \frac{\delta\kappa n\delta^{\gamma}e^{\gamma\kappa s_2}}{\gamma(\gamma-\epsilon)\bar{I}(T)} + \delta e^{\kappa s_2} \lambda_1\theta_2 + \theta_1\lambda_2 \frac{\delta\kappa n\delta^{\gamma}e^{\gamma\kappa s_2}}{\gamma(\gamma-\epsilon)\bar{I}(T)} + \frac{\delta e^{\kappa s_2}}{\gamma\theta_1\lambda_2} \lambda_2\theta_2.$$

۰.۳ برای برآورد نوع لی-خو

$$(A) \quad v(y_1, s_1) \leq v(y_2, s_2) \left(\frac{s_2}{s_1} \right)^{\frac{n\alpha(s_2)}{\gamma(\gamma-\epsilon)\bar{I}(T)}} \exp \left\{ \frac{\alpha(s_2)}{\gamma\bar{I}(T)} \mathcal{I}(y_1, s_1, y_2, s_2) + (C_{\epsilon} + |a|\alpha(s_2)D_0 \right. \\ \left. + \alpha(s_2)\lambda_1\theta_1 + \alpha(s_2) \frac{n\kappa}{(\gamma-\epsilon)\bar{I}(T)} (\delta + \coth(\kappa s_1)) \right) (s_2 - s_1) \right\},$$

که

$$C_{\varphi} = \frac{n\alpha^{\varphi}(s_{\varphi})}{(\varphi - \epsilon)\bar{I}(T)} \left[\frac{C_{\varphi}^{\varphi} n\alpha^{\varphi}(s_{\varphi})}{\varphi(\varphi - \epsilon)(\alpha(s_{\varphi}) - 1)\bar{I}(T)} + b\tilde{D}_{\varphi}|a| + \theta_{\varphi}\lambda_{\varphi} + C_{\varphi} \right] \\ + \sqrt{\frac{n\alpha^{\varphi}(s_{\varphi})}{(\varphi - \epsilon)\bar{I}(T)}} C'_{\varphi},$$

و

$$C'_{\varphi} = \frac{\left(|a|(\alpha(s_{\varphi}) - 1)b\tilde{D}_{\varphi} + \Delta(\alpha(s_{\varphi}) - 1)\theta_{\varphi}\lambda_{\varphi} + |a|b(b - 1)\alpha(s_{\varphi})\tilde{D}_{\varphi} + \varphi\theta_{\varphi}\lambda_{\varphi}(\alpha(s_{\varphi}) - 1) \right)^{\varphi}}{\varphi \left[\frac{(\varphi - \epsilon)\bar{I}}{n\alpha^{\varphi}(s_{\varphi})} (\bar{I} - \alpha(s_{\varphi}))^{\varphi} - \epsilon \right]} \\ + \frac{1}{\varphi\theta_{\varphi}\lambda_{\varphi}} \lambda_{\varphi}\theta_{\varphi} + |a|b\tilde{D}_{\varphi}\alpha(s_{\varphi}) \frac{n\kappa}{(\varphi - \epsilon)\bar{I}(T)} (\delta + \coth(\kappa s_{\varphi})) + \alpha(s_{\varphi})\lambda_{\varphi}\theta_{\varphi} \\ + \theta_{\varphi}\lambda_{\varphi}\alpha(s_{\varphi}) \frac{n\kappa}{(\varphi - \epsilon)\bar{I}(T)} (\delta + \coth(\kappa s_{\varphi})) + \frac{\alpha(s_{\varphi})}{\varphi\theta_{\varphi}\lambda_{\varphi}} \lambda_{\varphi}\theta_{\varphi}.$$

$$\alpha(s_{\varphi}) = \left(\delta + \frac{\sinh(\kappa s_{\varphi}) \cosh(\kappa s_{\varphi}) - \kappa s_{\varphi}}{\sinh(\kappa s_{\varphi})} \right) \text{ و}$$

۴. برای برآورد گرادیان نوع لی-خو خطی

$$v(y_{\varphi}, s_{\varphi}) \leq v(y_{\varphi}, s_{\varphi}) \left(\frac{s_{\varphi}}{s_{\varphi}} \right)^{\frac{n(\delta + \kappa s_{\varphi})^{\varphi}}{\varphi(\varphi - \epsilon)\bar{I}(T)}} \exp \left\{ \frac{\delta + \kappa s_{\varphi}}{\varphi\bar{I}(T)} \mathcal{I}(y_{\varphi}, s_{\varphi}, y_{\varphi}, s_{\varphi}) + (C_{\varphi} + |a|\delta D_{\varphi}) \right. \\ \left. + \delta\lambda_{\varphi}\theta_{\varphi} + \frac{n\kappa\delta}{(\varphi - \epsilon)\bar{I}(T)} \right\} (s_{\varphi} - s_{\varphi}) \\ + \frac{\kappa}{\varphi} \left(|a|D_{\varphi} + \lambda_{\varphi}\theta_{\varphi} + \frac{n\kappa}{(\varphi - \epsilon)\bar{I}(T)} \right) (s_{\varphi}^{\varphi} - s_{\varphi}^{\varphi}) \Big\}, \quad (11)$$

که

$$C_{\varphi} = \frac{n(\delta + \kappa s_{\varphi})^{\varphi}}{(\varphi - \epsilon)\bar{I}(T)} \left[\frac{C_{\varphi}^{\varphi} n(\delta + \kappa s_{\varphi})^{\varphi}}{\varphi(\varphi - \epsilon)(\delta + \kappa s_{\varphi} - 1)\bar{I}(T)} + b\tilde{D}_{\varphi}|a| + \theta_{\varphi}\lambda_{\varphi} + C_{\varphi} \right] \\ + \sqrt{\frac{n(\delta + \kappa s_{\varphi})^{\varphi}}{(\varphi - \epsilon)\bar{I}(T)}} C'_{\varphi},$$

و

$$C'_{\varphi} = \frac{\left((\delta + \kappa s_{\varphi} - 1) \left(|a|b\tilde{D}_{\varphi} + \Delta\theta_{\varphi}\lambda_{\varphi} + \varphi\theta_{\varphi}\lambda_{\varphi} \right) + |a|(\delta + \kappa s_{\varphi})b(b - 1)\tilde{D}_{\varphi} \right)^{\varphi}}{\varphi \left[\frac{(\varphi - \epsilon)\bar{I}}{n(\delta + \kappa s_{\varphi})^{\varphi}} (\bar{I} - \delta - \kappa s_{\varphi})^{\varphi} - \epsilon \right]} \\ + \frac{1}{\varphi\theta_{\varphi}\lambda_{\varphi}} \lambda_{\varphi}\theta_{\varphi} + |a|b\tilde{D}_{\varphi}(\kappa s_{\varphi} + \delta) \frac{n\kappa}{\varphi(\varphi - \epsilon)\bar{I}(T)} + (\kappa s_{\varphi} + \delta)\lambda_{\varphi}\theta_{\varphi} \\ + \theta_{\varphi}\lambda_{\varphi}(\kappa s_{\varphi} + \delta) \frac{n\kappa}{\varphi(\varphi - \epsilon)\bar{I}(T)} + \frac{\kappa s_{\varphi} + \delta}{\varphi\theta_{\varphi}\lambda_{\varphi}} \lambda_{\varphi}\theta_{\varphi}.$$

۲. اثبات نتایج

برای اثبات نتایج، لم زیر مورد نیاز است.

لم ۱.۲. فرض کنید (M^n, g) یک خمینه ریمانی فشرده باشد که فرضیات قضیه ۳.۱ را برآورده کند. همچنین فرض کنید $I = I(x, t)$ یک تابع هموار مثبت باشد و

$$G = I|\nabla h|^2 - \alpha h_t + a\alpha h^b + \alpha qB - \alpha\phi,$$

که $h_t = \partial_t h$ آنگاه

$$\begin{aligned} (\Delta - \partial_t)G &\geq \frac{(2-\epsilon)I}{n\alpha^2} G^2 + \frac{2(2-\epsilon)(\alpha-I)I}{n\alpha^2} G|\nabla h|^2 \\ &\quad + \frac{(2-\epsilon)I}{n\alpha^2} (I-\alpha)^2 |\nabla h|^4 - 2\langle \nabla h, \nabla G \rangle \\ &\quad - \epsilon I |\nabla h|^4 + 2a(\alpha-I)bh^{b-1} |\nabla h|^2 - 2(I-\alpha)\langle \nabla h, \nabla(qB) \rangle \\ &\quad + \alpha B\Delta q + a\alpha\Delta h^b + \alpha q\Delta B + 2\alpha\langle \nabla q, \nabla B \rangle. \end{aligned} \quad (12)$$

اثبات. با استفاده از فرمول بوچنر-ویتزنبوک^{۱۷}

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla h|^2 = |\text{Hess}h|^2 + \text{Ric}(\nabla h, \nabla h) + \langle \nabla\Delta h, \nabla h \rangle,$$

داریم

$$\begin{aligned} \Delta G &= 2I|\text{Hess}h|^2 + 2I\langle \nabla h, \nabla\Delta h \rangle + 2I\text{Ric}(\nabla h, \nabla h) + |\nabla h|^2 \Delta I \\ &\quad + 2\langle \nabla I, \nabla|\nabla h|^2 \rangle - \alpha\Delta h_t + a\alpha\Delta h^b + \alpha q\Delta B + \alpha B\Delta q + 2\alpha\langle \nabla q, \nabla B \rangle. \end{aligned} \quad (13)$$

با به کار بردن رابطه (۴) در رابطه (۱۳) داریم

$$\begin{aligned} \Delta G &= 2I|\text{Hess}h|^2 + 2I\langle \nabla h, \nabla(h_t - |\nabla h|^2 - ah^b - qB) \rangle \\ &\quad + 2I\text{Ric}(\nabla h, \nabla h) + |\nabla h|^2 \Delta I + 2\langle \nabla I, \nabla|\nabla h|^2 \rangle - \alpha\Delta h_t \\ &\quad + a\alpha\Delta h^b + \alpha q\Delta B + \alpha B\Delta q + 2\alpha\langle \nabla q, \nabla B \rangle. \end{aligned} \quad (14)$$

همچنین داریم

$$\begin{aligned} G_t &= I_t|\nabla h|^2 + 2I\langle \nabla h, \nabla h_t \rangle - \alpha h_{tt} - \alpha' h_t + a\alpha' h^b + ab\alpha h^{b-1} h_t \\ &\quad + \alpha' qB + \alpha q_t B + \alpha q B_t - \alpha' \phi - \alpha \phi' \\ &= I_t|\nabla h|^2 + 2I\langle \nabla h, \nabla h_t \rangle - \alpha\Delta h_t - 2\alpha\langle \nabla h, \nabla h_t \rangle \\ &\quad - \alpha' h_t + a\alpha' h^b + \alpha' qB - \alpha' \phi - \alpha \phi'. \end{aligned} \quad (15)$$

¹⁷Bochner-Weitzenböck

با ترکیب دو رابطه (۱۴) و (۱۵) نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}
 (\Delta - \partial_t)G &= 2I|\text{Hess}h|^2 + 2\text{Ric}(\nabla h, \nabla h) \\
 &\quad - 2\langle \nabla h, I\nabla|\nabla h|^2 + |\nabla h|^2\nabla I - \alpha\nabla h_t + a\alpha\nabla h^b - \nabla(\alpha\phi) + \alpha\nabla(qB) \rangle \\
 &\quad + 2ab(\alpha - I)f^{b-1}|\nabla h|^2 - 2(I - \alpha)\langle \nabla(qB), \nabla h \rangle + 2|\nabla h|^2\langle \nabla I, \nabla h \rangle \\
 &\quad + |\nabla h|^2\Delta I + \alpha a\Delta h^b + \alpha q\Delta B + \alpha B\Delta q + 2\alpha\langle \nabla B, \nabla q \rangle \\
 &\quad + 2\langle \nabla I, \nabla|\nabla h|^2 \rangle - I_t|\nabla h|^2 - a\alpha'h^b + \alpha'h_t - \alpha'qB + \alpha\phi' + \alpha'\phi \\
 &= 2I|\text{Hess}h|^2 + 2\text{Ric}(\nabla h, \nabla h) - 2\langle \nabla h, \nabla h \rangle \\
 &\quad + 2a(\alpha - I)bh^{b-1}|\nabla h|^2 + 2(\alpha - I)\langle \nabla h, \nabla(qB) \rangle + 2|\nabla h|^2\langle \nabla I, \nabla h \rangle \\
 &\quad + |\nabla h|^2\Delta I + a\alpha\Delta h^b + \alpha q\Delta B + \alpha B\Delta q + 2\alpha\langle \nabla B, \nabla q \rangle \\
 &\quad + 2\langle \nabla I, \nabla|\nabla h|^2 \rangle - I_t|\nabla h|^2 + \alpha'h_t - \alpha'qB - a\alpha'h^b + \alpha\phi' + \alpha'\phi.
 \end{aligned}
 \tag{۱۶}$$

برای هر عدد حقیقی $\epsilon > 0$ با استفاده از نامساوی کوشی داریم

$$2\langle \nabla I, \nabla|\nabla h|^2 \rangle \geq -\epsilon I|\text{Hess}h|^2 - \frac{4|\nabla I|^2}{\epsilon I}|\nabla h|^2
 \tag{۱۷}$$

و

$$2|\nabla h|^2\langle \nabla I, \nabla h \rangle \geq -\epsilon I|\nabla h|^4 - \frac{|\nabla I|^2}{\epsilon I}|\nabla h|^2.
 \tag{۱۸}$$

با جایگذاری (۱۷) و (۱۸) در (۱۶) داریم

$$\begin{aligned}
 (\Delta - \partial_t)G &\geq (2 - \epsilon)I|\text{Hess}h|^2 - 2\langle \nabla h, \nabla G \rangle \\
 &\quad + \left(\Delta I - \frac{5|\nabla I|^2}{\epsilon I} - I_t - 2VI \right) |\nabla h|^2 - \epsilon I|\nabla h|^4 \\
 &\quad + 2a(\alpha - I)bh^{b-1}|\nabla h|^2 - 2(I - \alpha)\langle \nabla(qB), \nabla h \rangle \\
 &\quad + a\alpha\Delta h^b + \alpha q\Delta B + \alpha B\Delta q + 2\alpha\langle \nabla B, \nabla q \rangle \\
 &\quad - a\alpha'h^b + \alpha'h_t - \alpha'qB + \alpha\phi' + \alpha'\phi,
 \end{aligned}
 \tag{۱۹}$$

که $V = |\text{Ric}_-|$ از لم ۱۰.۱ نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}
 (\Delta - \partial_t)G &\geq (2 - \epsilon)I|\text{Hess}h|^2 + \frac{\phi}{n}g|^2 - 2(2 - \epsilon)I\frac{\phi}{n}\Delta h - (2 - \epsilon)I\frac{\phi^2}{n} - 2\langle \nabla h, \nabla G \rangle - \epsilon I|\nabla h|^4 \\
 &\quad + 2a(\alpha - I)bh^{b-1}|\nabla h|^2 - 2(I - \alpha)\langle \nabla(qB), \nabla h \rangle + \alpha B\Delta q + a\alpha\Delta h^b \\
 &\quad + 2\alpha\langle \nabla q, \nabla B \rangle + \alpha'h_t + \alpha q\Delta B - a\alpha'h^b - \alpha'qB + \alpha\phi' + \alpha'\phi.
 \end{aligned}
 \tag{۲۰}$$

با قرار دادن (۲) در رابطه (۲۰)، رابطه زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned}
 (\Delta - \partial_t)G \geq & (\gamma - \epsilon)I|\text{Hess}h + \frac{\phi}{n}g|^\gamma + \gamma(\gamma - \epsilon)I\frac{\phi}{n}|\nabla h|^\gamma \\
 & - \left[\gamma(\gamma - \epsilon)\frac{\phi}{n}I - \alpha' \right] h_t + \left[\gamma(\gamma - \epsilon)\frac{\phi}{n}I - \alpha' \right] (ah^b + qB) \\
 & - \left[\gamma(\gamma - \epsilon)\frac{\phi}{n}I - \alpha' \right] \phi + (\gamma - \epsilon)I\frac{\phi^\gamma}{n} - \gamma\langle \nabla h, \nabla G \rangle - \epsilon I|\nabla h|^\gamma \\
 & + \gamma a(\alpha - I)bh^{b-1}|\nabla h|^\gamma - \gamma(I - \alpha)\langle \nabla(qB), \nabla h \rangle \\
 & + a\alpha\Delta h^b + \alpha q\Delta B + \alpha B\Delta q + \alpha\phi' + \gamma\alpha\langle \nabla B, \nabla q \rangle.
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

از شرایط (A۲) - (A۴) نتیجه می‌شود

$$\begin{cases} \frac{1}{\alpha} \left[\gamma(\gamma - \epsilon)\frac{\phi}{n}I - \alpha' \right] \leq \gamma(\gamma - \epsilon)\frac{\phi}{n}, \\ \gamma(\gamma - \epsilon)\frac{\phi}{n}I - \alpha' > 0, \\ \alpha\phi' + (\gamma - \epsilon)I\frac{\phi^\gamma}{n} \geq 0. \end{cases}
 \tag{22}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
 (\Delta - \partial_t)G \geq & (\gamma - \epsilon)I|\text{Hess}h + \frac{\phi}{n}g|^\gamma \\
 & + \left[\gamma(\gamma - \epsilon)\frac{\phi}{n}I - \alpha' \right] \frac{G}{\alpha} - \gamma\langle \nabla h, \nabla G \rangle - \epsilon I|\nabla h|^\gamma \\
 & + \gamma a(\alpha - I)bh^{b-1}|\nabla h|^\gamma - \gamma(I - \alpha)\langle \nabla(qB), \nabla h \rangle \\
 & + \alpha a\Delta h^b + \alpha q\Delta B + \alpha B\Delta q + \gamma\alpha\langle \nabla B, \nabla q \rangle.
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

از طرف دیگر، از نامساوی کوشی داریم

$$\begin{aligned}
 |\text{Hess}h + \frac{\phi}{n}g|^\gamma & \geq \frac{1}{n}(\Delta h + \phi)^\gamma = \frac{1}{n}(h_t - |\nabla h|^\gamma - ah^b - qB + \phi)^\gamma \\
 & = \frac{1}{n\alpha^\gamma} [G + (\alpha - I)|\nabla h|^\gamma]^\gamma.
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
 (\Delta - \partial_t)G \geq & \frac{(\gamma - \epsilon)I}{n\alpha^\gamma} G^\gamma + \frac{\gamma(\gamma - \epsilon)(\alpha - I)I}{n\alpha^\gamma} G|\nabla h|^\gamma \\
 & + \frac{(\gamma - \epsilon)I}{n\alpha^\gamma} (I - \alpha)^\gamma |\nabla h|^\gamma + \left[\gamma(\gamma - \epsilon)\frac{\phi}{n}I - \alpha' \right] \frac{G}{\alpha} - \gamma\langle \nabla h, \nabla G \rangle \\
 & - \epsilon I|\nabla h|^\gamma + \gamma a(\alpha - I)bh^{b-1}|\nabla h|^\gamma + \gamma(\alpha - I)\langle \nabla h, \nabla(qB) \rangle \\
 & + a\alpha\Delta h^b + \alpha q\Delta B + \alpha B\Delta q + \gamma\alpha\langle \nabla q, \nabla B \rangle.
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

□

در نتیجه (۲۵) رابطه (۱۲) را نتیجه می‌دهد و اثبات کامل است.

اثبات قضیه ۳.۱. طبق لم ۲.۱ می‌توان یک تابع برشی مانند ψ انتخاب کرد که $0 \leq \psi \leq 1$ ، $\text{supp } \psi \subset\subset B(O, \frac{1}{r})$ ، $\psi \equiv 1$ در $B(O, \frac{1}{r})$ و $|\nabla \psi|^2 + |\Delta \psi| \leq C$. با ضرب کردن دو طرف نامساوی (۱۲) در $t\psi^4$ نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} \sqrt{t}\psi^4(\Delta - \partial_t)(\sqrt{t}\psi^4 G) &= t\psi^4(\Delta - \partial_t)G + \sqrt{t}\psi^4 \left(\sqrt{t}G\Delta\psi^4 + \sqrt{t}\langle \nabla G, \nabla \psi^4 \rangle - \frac{1}{\sqrt{t}}\psi^4 G \right) \\ &\geq \frac{(4-\epsilon)I}{n\alpha^4}(\sqrt{t}\psi^4 G)^4 + \frac{4(4-\epsilon)(\alpha-I)I}{n\alpha^4}t\psi^4 G|\nabla h|^4 \\ &\quad + \frac{(4-\epsilon)I}{n\alpha^4}(I-\alpha)^4 t\psi^4 |\nabla h|^4 - 4t\psi^4 \langle \nabla h, \nabla h \rangle \\ &\quad - \epsilon t\psi^4 I|\nabla h|^4 + 4at\psi^4(\alpha-I)bh^{b-1}|\nabla h|^4 + 4t\psi^4(\alpha-I)\langle \nabla h, \nabla(qB) \rangle \\ &\quad + at\psi^4 \alpha \Delta h^b + \alpha t\psi^4 B\Delta q + t\psi^4 \alpha q \Delta B + 4t\psi^4 \alpha \langle \nabla q, \nabla B \rangle \\ &\quad + \psi^4 \left(tG\Delta\psi^4 + t\langle \nabla G, \nabla \psi^4 \rangle - \frac{1}{\sqrt{t}}\psi^4 G \right). \end{aligned} \quad (26)$$

چون

$$\alpha \Delta h = \alpha(h_t - |\nabla h|^4 - ah^b - qB) = -h - (\alpha - I)|\nabla h|^4 - \alpha\phi$$

داریم

$$\begin{aligned} \alpha \Delta h^b &= \alpha \left(b(b-1)h^{b-2}|\nabla h|^4 + bh^{b-1}\Delta h \right) \\ &= \alpha b(b-1)h^{b-2}|\nabla h|^4 - bh^{b-1}h - bh^{b-1}(\alpha - I)|\nabla h|^4 - bh^{b-1}\alpha\phi, \end{aligned} \quad (27)$$

و

$$\begin{aligned} \alpha \Delta B &= \alpha (B_{hh}|\nabla h|^4 + B_h \Delta h) \\ &= \alpha B_{hh}|\nabla h|^4 + B_h (-G - (\alpha - I)|\nabla h|^4 - \alpha\phi) \\ &\geq -\alpha\lambda_3|\nabla h|^4 + \lambda_2 (-G - (\alpha - I)|\nabla h|^4 - \alpha\phi). \end{aligned} \quad (28)$$

برای هر $\delta_1 > 0$ و $\delta_2 > 0$ داریم

$$\langle \nabla q, \nabla B \rangle = B_h \langle \nabla q, \nabla h \rangle \geq -\frac{1}{4\delta_1}\lambda_2\theta_2 - \delta_1|\nabla h|^4 \quad (29)$$

و

$$\langle \nabla h, \nabla(qB) \rangle = qB_h|\nabla h|^4 + B\langle \nabla h, \nabla q \rangle \geq -\theta_1\lambda_2|\nabla h|^4 - \frac{1}{4\delta_2}\lambda_1\theta_2 - \delta_2|\nabla h|^4. \quad (30)$$

با استفاده از روابط (۲۷)-(۳۰) در رابطه (۲۶) نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}
 \sqrt{t}\psi^\gamma(\Delta - \partial_t)(\sqrt{t}\psi^\gamma G) &\geq \frac{(\gamma - \epsilon)I}{n\alpha^\gamma}(\sqrt{t}\psi^\gamma G)^\gamma + \frac{\gamma(\gamma - \epsilon)(\alpha - I)I}{n\alpha^\gamma}t\psi^\gamma G|\nabla h|^\gamma - \gamma t\psi^\gamma \langle \nabla h, \nabla G \rangle \\
 &+ \left[\frac{(\gamma - \epsilon)I}{n\alpha^\gamma}(I - \alpha)^\gamma - \epsilon \right] t\psi^\gamma |\nabla h|^\gamma + \gamma at\psi^\gamma (\alpha - I)bf^{b-1}|\nabla h|^\gamma \\
 &+ \gamma t\psi^\gamma (\alpha - I) \left(-\theta_1 \lambda_\gamma |\nabla h|^\gamma - \frac{1}{\gamma \delta_1} \lambda_1 \theta_\gamma - \delta_\gamma |\nabla h|^\gamma \right) \\
 &+ at\psi^\gamma \left(\alpha b(b-1)h^{b-2}|\nabla h|^\gamma - bh^{b-1}h - bh^{b-1}(\alpha - I)|\nabla h|^\gamma - bh^{b-1}\alpha\phi \right) \\
 &- \alpha t\psi^\gamma \lambda_1 \theta_\gamma + t\psi^\gamma \theta_1 (-\alpha \lambda_\gamma |\nabla h|^\gamma + \lambda_\gamma (-G - (\alpha - I)|\nabla h|^\gamma - \alpha\phi)) \\
 &+ \gamma t\psi^\gamma \alpha \left(-\frac{1}{\gamma \delta_\gamma} \lambda_\gamma \theta_\gamma - \delta_\gamma |\nabla h|^\gamma \right) + \psi^\gamma \left(tG\Delta\psi^\gamma + t\langle \nabla G, \nabla \psi^\gamma \rangle - \frac{1}{\gamma} \psi^\gamma G \right).
 \end{aligned}
 \tag{31}$$

برای هر $T > 0$ فرض کنید نقطه ماکزیم $\sqrt{t}\psi^\gamma G$ در $B(O, 1) \times (0, T]$ باشد. می‌توان فرض کرد که مقدار آن مثبت است چون در غیراین صورت اثبات بدیهی می‌شود. چون در این نقطه $\nabla(\psi^\gamma G) = 0$ داریم $\psi \nabla G = -\gamma G \nabla \psi$ بنابراین

$$\begin{aligned}
 \sqrt{t}\psi^\gamma(\Delta - \partial_t)(\sqrt{t}\psi^\gamma G) &\geq \frac{(\gamma - \epsilon)I}{n\alpha^\gamma}(\sqrt{t}\psi^\gamma G)^\gamma + \frac{\gamma(\gamma - \epsilon)(\alpha - I)I}{n\alpha^\gamma}t\psi^\gamma G|\nabla h|^\gamma + \gamma t\psi^\gamma G \langle \nabla h, \nabla \psi \rangle \\
 &+ \left[\frac{(\gamma - \epsilon)I}{n\alpha^\gamma}(I - \alpha)^\gamma - \epsilon \right] t\psi^\gamma |\nabla h|^\gamma + \gamma at\psi^\gamma (\alpha - I)bh^{b-1}|\nabla h|^\gamma \\
 &+ \gamma t\psi^\gamma (\alpha - I) \left(-\theta_1 \lambda_\gamma |\nabla h|^\gamma - \frac{1}{\gamma \delta_1} \lambda_1 \theta_\gamma - \delta_1 |\nabla h|^\gamma \right) \\
 &+ at\psi^\gamma \left(\alpha b(b-1)h^{b-2}|\nabla h|^\gamma - bh^{b-1}G - bh^{b-1}(\alpha - I)|\nabla h|^\gamma - bh^{b-1}\alpha\phi \right) \\
 &- \alpha t\psi^\gamma \lambda_1 \theta_\gamma + t\psi^\gamma \theta_1 (-\alpha \lambda_\gamma |\nabla h|^\gamma + \lambda_\gamma (-G - (\alpha - I)|\nabla h|^\gamma - \alpha\phi)) \\
 &+ \gamma t\psi^\gamma \alpha \left(-\frac{1}{\gamma \delta_\gamma} \lambda_\gamma \theta_\gamma - \delta_\gamma |\nabla h|^\gamma \right) + \gamma t\psi^\gamma G\Delta\psi - \epsilon t\psi^\gamma G|\nabla \psi|^\gamma - \frac{1}{\gamma} \psi^\gamma G.
 \end{aligned}
 \tag{32}$$

با انتخاب $0 < \epsilon < \frac{\gamma}{1+n\delta^\gamma}$ و با استفاده از $\delta \leq \frac{\alpha}{\alpha-1}$ داریم $0 < \frac{\gamma-\epsilon}{n\alpha^\gamma}(1-\alpha)^\gamma - \epsilon$. چون $I \leq 1$ نتیجه می‌شود

$$\frac{(\gamma - \epsilon)I}{n\alpha^\gamma}(I - \alpha)^\gamma - \epsilon > 0.$$

با توجه به شرایط انتخاب تابع ψ در ابتدای اثبات قضیه ۳.۱ و همچنین استفاده از رابطه (۳۲) نتیجه می‌شود یک ثابت C_1 وجود دارد که

$$\begin{aligned} \sqrt{t}\psi^\gamma(\Delta - \partial_t)(\sqrt{t}\psi^\gamma G) &\geq \frac{(\gamma - \epsilon)I}{n\alpha^\gamma}(\sqrt{t}\psi^\gamma G)^\gamma + \frac{\gamma(\gamma - \epsilon)(\alpha - I)I}{n\alpha^\gamma}t\psi^\gamma G|\nabla h|^\gamma - C_1 t\psi^\gamma G|\nabla h| \\ &+ \left[\frac{(\gamma - \epsilon)I}{n\alpha^\gamma}(I - \alpha)^\gamma - \epsilon \right] t\psi^\gamma |\nabla h|^\gamma + \gamma at\psi^\gamma (\alpha - I)bh^{b-1}|\nabla h|^\gamma \\ &+ \gamma t\psi^\gamma (\alpha - I) \left(-\theta_1 \lambda_2 |\nabla h|^\gamma - \frac{1}{\gamma \delta_1} \lambda_1 \theta_2 - \delta_1 |\nabla h|^\gamma \right) \\ &+ at\psi^\gamma \left(\alpha b(b-1)h^{b-2}|\nabla h|^\gamma - bh^{b-1}G - bh^{b-1}(\alpha - I)|\nabla h|^\gamma - bh^{b-1}\alpha\phi \right) \\ &- \alpha t\psi^\gamma \lambda_1 \theta_2 + t\psi^\gamma \theta_1 (-\alpha \lambda_2 |\nabla h|^\gamma + \lambda_2 (-G - (\alpha - I)|\nabla h|^\gamma - \alpha\phi)) \\ &+ \gamma t\psi^\gamma \alpha \left(-\frac{1}{\gamma \delta_1} \lambda_1 \theta_2 - \delta_1 |\nabla h|^\gamma \right) - C_1 t\psi^\gamma G - \frac{1}{\gamma} \psi^\gamma G. \end{aligned} \quad (33)$$

فرض کنید $\delta_2 = \theta_1 \lambda_3$ و $\delta_1 = \theta_1 \lambda_2$ آنگاه داریم

$$\begin{aligned} \sqrt{t}\psi^\gamma(\Delta - \partial_t)(\sqrt{t}\psi^\gamma G) &\geq \frac{(\gamma - \epsilon)I}{n\alpha^\gamma}(\sqrt{t}\psi^\gamma G)^\gamma + \frac{\gamma(\gamma - \epsilon)(\alpha - I)I}{n\alpha^\gamma}t\psi^\gamma G|\nabla h|^\gamma - C_1 t\psi^\gamma G|\nabla h| \\ &+ \left[\frac{(\gamma - \epsilon)I}{n\alpha^\gamma}(I - \alpha)^\gamma - \epsilon \right] t\psi^\gamma |\nabla h|^\gamma \\ &- t\psi^\gamma \left(|a|(\alpha - I)b\tilde{D}_1 + \delta(\alpha - I)\theta_1 \lambda_2 + \alpha b(b-1)|a|\tilde{D}_2 + \gamma(\alpha - I)\theta_1 \lambda_2 \right) |\nabla h|^\gamma \\ &+ \left(-b\tilde{D}_1 |a|t\psi^\gamma - \theta_1 \lambda_2 t\psi^\gamma - C_1 t\psi^\gamma - \frac{1}{\gamma} \psi^\gamma \right) G \\ &- \frac{t\psi^\gamma}{\gamma \theta_1 \lambda_2} \lambda_1 \theta_2 - |a|t\psi^\gamma b\tilde{D}_1 \alpha\phi - \alpha t\psi^\gamma \lambda_1 \theta_2 - t\psi^\gamma \theta_1 \lambda_2 \alpha\phi - \frac{t\psi^\gamma \alpha}{\gamma \theta_1 \lambda_2} \lambda_1 \theta_2. \end{aligned} \quad (34)$$

با استفاده از نامساوی $(A, B > 0)$ ، $Ax^\gamma - Bx \geq -\frac{B^\gamma}{\gamma A}$ داریم

$$\begin{aligned} \frac{\gamma(\gamma - \epsilon)(\alpha - I)I}{n\alpha^\gamma}t\psi^\gamma G|\nabla h|^\gamma - C_1 t\psi^\gamma G|\nabla h| &\geq -\frac{C_1^\gamma n\alpha^\gamma}{\gamma(\gamma - \epsilon)(\alpha - I)I}t\psi^\gamma G \\ &\geq -\frac{C_1^\gamma n\alpha^\gamma}{\gamma(\gamma - \epsilon)(\alpha - 1)\bar{I}}t\psi^\gamma G \end{aligned}$$

9

$$\begin{aligned} &\left[\frac{(\gamma - \epsilon)I}{n\alpha^\gamma}(I - \alpha)^\gamma - \epsilon \right] t\psi^\gamma |\nabla h|^\gamma \\ &- t\psi^\gamma \left(|a|(\alpha - I)b\tilde{D}_1 + \delta(\alpha - I)\theta_1 \lambda_2 + |a|\alpha b(b-1)\tilde{D}_2 + \gamma(\alpha - I)\theta_1 \lambda_2 \right) |\nabla h|^\gamma \\ &\geq -\frac{\left(|a|(\alpha - I)b\tilde{D}_1 + \delta(\alpha - I)\theta_1 \lambda_2 + \alpha b(b-1)|a|\tilde{D}_2 + \gamma(\alpha - I)\theta_1 \lambda_2 \right)^\gamma}{\gamma \left[\frac{(\gamma - \epsilon)\bar{I}}{n\alpha^\gamma}(\bar{I} - \alpha)^\gamma - \epsilon \right]} t\psi^\gamma. \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \sqrt{t}\psi^\gamma(\Delta - \partial_t)(\sqrt{t}\psi^\gamma G) &\geq \frac{(\gamma - \epsilon)I}{n\alpha^\gamma}(\sqrt{t}\psi^\gamma G)^\gamma - \left[\frac{C_1^\gamma n\alpha^\gamma}{\gamma(\gamma - \epsilon)(\alpha - 1)\bar{I}} + b\tilde{D}_1|a| + \theta_1\lambda_\gamma \right] t\psi^\epsilon G \\ &\quad - \frac{\left(|a|(\alpha - I)b\tilde{D}_1 + \delta(\alpha - I)\theta_1\lambda_\gamma + \alpha b(b - 1)|a|\tilde{D}_\gamma + \gamma(\alpha - I)\theta_1\lambda_\gamma \right)^\gamma}{\gamma \left[\frac{(\gamma - \epsilon)\bar{I}}{n\alpha^\gamma}(\bar{I} - \alpha)^\gamma - \epsilon \right]} t\psi^\epsilon \\ &\quad - \left(C_1 t\psi^\gamma + \frac{1}{\gamma} \psi^\epsilon \right) G \\ &\quad - \frac{t\psi^\epsilon}{\gamma\theta_1\lambda_\gamma} \lambda_1\theta_\gamma - |a|t\psi^\epsilon b\tilde{D}_1\alpha\phi - \alpha t\psi^\epsilon \lambda_1\theta_\gamma - t\psi^\epsilon \theta_1\lambda_\gamma\alpha\phi - \frac{t\psi^\epsilon\alpha}{\gamma\theta_1\lambda_\gamma} \lambda_\gamma\theta_\gamma. \end{aligned} \quad (36)$$

با توجه به اصل ماکزیمم داریم

$$\begin{aligned} \circ &\geq \frac{(\gamma - \epsilon)I}{n\alpha^\gamma}(\sqrt{t}\psi^\gamma G)^\gamma - \left[\frac{C_1^\gamma n\alpha^\gamma}{\gamma(\gamma - \epsilon)(\alpha - 1)\bar{I}} + b\tilde{D}_1|a| + \theta_1\lambda_\gamma \right] t\psi^\epsilon G \\ &\quad - \frac{\left(|a|(\alpha - I)b\tilde{D}_1 + \delta(\alpha - I)\theta_1\lambda_\gamma + \alpha b(b - 1)|a|\tilde{D}_\gamma + \gamma(\alpha - I)\theta_1\lambda_\gamma \right)^\gamma}{\gamma \left[\frac{(\gamma - \epsilon)\bar{I}}{n\alpha^\gamma}(\bar{I} - \alpha)^\gamma - \epsilon \right]} t\psi^\epsilon \\ &\quad - \left(C_1 t\psi^\gamma + \frac{1}{\gamma} \psi^\epsilon \right) G \\ &\quad - \frac{t\psi^\epsilon}{\gamma\theta_1\lambda_\gamma} \lambda_1\theta_\gamma - |a|t\psi^\epsilon b\tilde{D}_1\alpha\phi - \alpha t\psi^\epsilon \lambda_1\theta_\gamma - t\psi^\epsilon \theta_1\lambda_\gamma\alpha\phi - \frac{t\psi^\epsilon\alpha}{\gamma\theta_1\lambda_\gamma} \lambda_\gamma\theta_\gamma. \end{aligned} \quad (37)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} G &\leq \frac{n\alpha^\gamma}{\gamma(\gamma - \epsilon)\bar{I}} \frac{1}{t} + \frac{n\alpha^\gamma}{(\gamma - \epsilon)\bar{I}} \left[\frac{C_1^\gamma n\alpha^\gamma}{\gamma(\gamma - \epsilon)(\alpha - 1)\bar{I}} + b\tilde{D}_1|a| + \theta_1\lambda_\gamma + C_1 \right] \\ &\quad + \sqrt{\frac{n\alpha^\gamma}{(\gamma - \epsilon)\bar{I}}} C_\gamma, \end{aligned}$$

که

$$\begin{aligned} C_\gamma &= \frac{\left(|a|(\alpha - 1)b\tilde{D}_1 + \delta(\alpha - 1)\theta_1\lambda_\gamma + \alpha b(b - 1)|a|\tilde{D}_\gamma + \gamma(\alpha - 1)\theta_1\lambda_\gamma \right)^\gamma}{\gamma \left[\frac{(\gamma - \epsilon)\bar{I}}{n\alpha^\gamma}(\bar{I} - \alpha)^\gamma - \epsilon \right]} \\ &\quad + \frac{1}{\gamma\theta_1\lambda_\gamma} \lambda_1\theta_\gamma + |a|b\tilde{D}_1\alpha\phi + \alpha\lambda_1\theta_\gamma + \theta_1\lambda_\gamma\alpha\phi + \frac{\alpha}{\gamma\theta_1\lambda_\gamma} \lambda_\gamma\theta_\gamma. \end{aligned}$$

برای به‌دست آوردن نتیجه مورد نظر روی $G(x, t)$ برای یک محدوده مناسب حول $x \in M$ قرار می‌دهیم $\psi(x, t) = 1$ جایی‌که $d(x, O) < 1$ و چون (x_1, t_1) نقطه ماکزیمم $\sqrt{t}\psi^\gamma G$ در $(\circ, T]$ است نتیجه می‌گیریم

$$G(x, T) = \frac{\sqrt{T}\psi^\gamma(x, T)G(x, T)}{\sqrt{T}\psi^\gamma(x, T)} \leq \frac{\sqrt{t_1}\psi^\gamma(x_1, t_1)G(x_1, t_1)}{\sqrt{T}\psi^\gamma(x, T)} \leq G(x_1, t_1).$$

چون $\bar{I}(t)$ تابعی نزولی و T دلخواه است نامساوی (۶) برقرار است. حال داریم
(۱) برآورد گرادیان نوع لی-یائو: فرض کنید

$$\alpha(t) = 1, \quad \phi(t) = \frac{n}{(2-\epsilon)\alpha\bar{I}},$$

$$0 < \epsilon \leq \frac{2(\alpha-1)^2}{(\alpha-1)^2 + n\alpha^2}.$$

با محاسبه مستقیم داریم

$$2(2-\epsilon)\frac{\phi}{n}\bar{I} - \alpha' = \frac{2}{\alpha} \geq 0,$$

و

$$\alpha\phi' + (2-\epsilon)\frac{\phi^2}{n}\bar{I} = \frac{n}{(2-\epsilon)\alpha^2\bar{I}} \geq 0.$$

همچنین $\alpha(t) > 1$ و $\frac{1}{\alpha} \geq [2(2-\epsilon)\frac{\phi}{n} - \alpha']$ بنابراین در این حالت α و ϕ در شرایط (A۶)-(A۱) صدق می‌کند.

(۲) برآورد گرادیان نوع هامیلتونی: فرض کنید

$$\alpha(t) = \delta e^{\kappa t}, \quad \phi(t) = \frac{\delta \kappa n e^{\kappa t}}{2(2-\epsilon)\bar{I}},$$

$$\delta > 1 \quad \text{برای هر} \quad 0 < \epsilon \leq \frac{2(\delta-1)^2}{(\delta-1)^2 + n\delta^2}.$$

محاسبه مستقیم نشان می‌دهد که

$$2(2-\epsilon)\frac{\phi}{n}\bar{I} - \alpha' = \delta \kappa e^{\kappa t} - \delta \kappa e^{\kappa t} = 0.$$

و

$$\alpha\phi' + (2-\epsilon)\frac{\phi^2}{n}\bar{I} = \frac{2\delta^2 \kappa^2 n e^{2\kappa t}}{2(2-\epsilon)\bar{I}} \geq 0.$$

دیده می‌شود که $\alpha(t) > 1$ و $\frac{1}{\alpha} \geq [2(2-\epsilon)\frac{\phi}{n} - \alpha']$ بنابراین در این حالت α و ϕ در شرایط (A۶)-(A۱) صدق می‌کند.

(۳) برآورد گرادیانی نوع لی-خو: فرض کنید

$$\alpha(t) = \delta + \frac{\cosh(\kappa t) \sinh(\kappa t) - \kappa t}{\sinh(\kappa t)}, \quad \phi(t) = \frac{\kappa n}{(2-\epsilon)\bar{I}}(\coth(\kappa t) + \delta),$$

$$\delta > 1 \quad \text{برای هر} \quad 0 < \epsilon < \frac{\delta}{\delta-1}.$$

بنابراین $\alpha'(t) \leq 0$ و در نتیجه داریم

$$2(2-\epsilon)\frac{\phi}{n}\bar{I} - \alpha' \geq 0.$$

و

$$\alpha\phi' + (2-\epsilon)\frac{\phi^2}{n}\bar{I} \geq 0.$$

بنابراین در این حالت α و ϕ در شرایط (A۶) - (A۱) صدق می‌کند.
(۴) برآورد گرادیان نوع لی-خو خطی: فرض کنید

$$\alpha(t) = \delta + \kappa t, \quad \phi(t) = \frac{n\kappa}{2(2-\epsilon)\bar{I}},$$

$$\delta > 1 \quad \text{برای هر} \quad 0 < \epsilon \leq \frac{2(\delta-1)^2}{(\delta-1)^2 + n\delta^2}.$$

بنابراین داریم

$$2(2-\epsilon)\frac{\phi}{n}\bar{I} - \alpha' = 0.$$

و

$$\alpha\phi' + (2-\epsilon)\frac{\phi^2}{n}\bar{I} = \frac{n\kappa^2}{4(2-\epsilon)\bar{I}} \geq 0.$$

بنابراین در این حالت α و ϕ در شرایط (A۶) - (A۱) صدق می‌کند.

□

اثبات نتیجه ۴.۱. فرض کنید $\zeta(t)$ کوتاه‌ترین ژئودزیک باشد که y_1 را به y_2 وصل می‌کند و $\zeta(s_1) = y_1$ و $\zeta(s_2) = y_2$.
حال مسیر $(\zeta(t), t)$ در فضا-زمان را در نظر بگیرید. از قضیه ۳.۱ برآوردهای گرادیان زیر را داریم

$$(۴۰) \quad I|\nabla \ln v|^2 - \alpha(\ln v)_t + a\alpha(\ln v)^b + \alpha qB - \alpha\phi \leq \frac{n\alpha^2}{2(2-\epsilon)\bar{I}} \frac{1}{t} + C_3,$$

که

$$C_3 = \frac{n\alpha^2}{(2-\epsilon)\bar{I}} \left[\frac{C_1^2 n\alpha^2}{2(2-\epsilon)(\alpha-1)\bar{I}} + b\tilde{D}_1|a| + \theta_1\lambda_2 + C_1 \right] + \sqrt{\frac{n\alpha^2}{(2-\epsilon)\bar{I}}} C_2.$$

با انتگرال‌گیری از این رابطه در طول ζ ، رابطه زیر به دست می‌آید

$$(۴۱) \quad \begin{aligned} \ln \frac{v(y_1, s_1)}{v(y_2, s_2)} &= - \int_{s_1}^{s_2} \frac{d}{dt} (\ln v(\zeta(t), t)) dt \\ &= - \int_{s_1}^{s_2} \left(\partial_t (\ln v) + \langle \nabla (\ln v)(\zeta(t), t), \dot{\zeta}(t) \rangle \right) dt \\ &\leq \int_{s_1}^{s_2} \left\{ -\frac{\bar{I}(t)}{\alpha} |\nabla (\ln v)|^2 + \frac{n\alpha^2}{2(2-\epsilon)\bar{I}(t)} \frac{1}{t} + C_3 - a\alpha(\ln v)^b - \alpha qB + \alpha\phi \right. \\ &\quad \left. - \langle \nabla (\ln v), \dot{\zeta}(t) \rangle \right\} dt \\ &\leq \int_{s_1}^{s_2} \left\{ \frac{\alpha|\dot{\zeta}(t)|^2}{4\bar{I}(t)} + \frac{n\alpha^2}{2(2-\epsilon)\bar{I}(t)} \frac{1}{t} + C_3 + |a|\alpha D_0 + \alpha\lambda_1\theta_1 + \alpha\phi \right\} dt, \end{aligned}$$

که در آن از رابطه (۴۰) برای به دست آوردن نامساوی موجود در سومین خط و از نامساوی $\tilde{b}x - \tilde{a}x^2 \leq \frac{\tilde{b}^2}{4\tilde{a}}$ برای به دست آوردن نامساوی بعدی استفاده شده است. چون $\bar{I}(t)$ تابعی نزولی است داریم

$$\max \frac{1}{\bar{I}(t)} \leq \frac{1}{\bar{I}(T)}.$$

بنابراین نامساوی (۴۱) به صورت

$$\log \frac{v(y_1, s_1)}{v(y_2, s_2)} \leq \frac{1}{\bar{I}(T)} \int_{s_1}^{s_2} \alpha |\dot{\zeta}(t)|^2 dt + \int_{s_1}^{s_2} \left\{ \frac{n\alpha^2}{2(2-\epsilon)\bar{I}(T)} \frac{1}{t} + C_4 + |a|\alpha D_0 + \alpha\lambda_1\theta_1 + \alpha\phi \right\} dt \quad (42)$$

تبدیل می‌شود که

$$C_4 = \frac{n\alpha^2}{(2-\epsilon)\bar{I}(T)} \left[\frac{C_1^2 n\alpha^2}{2(2-\epsilon)(\alpha-1)\bar{I}(T)} + b\tilde{D}_1|a| + \theta_1\lambda_2 + C_1 \right] + \sqrt{\frac{n\alpha^2}{(2-\epsilon)\bar{I}(T)}} C_2.$$

حال در برآورد نوع لی-یائو، داریم

$$\log \frac{v(y_1, s_1)}{v(y_2, s_2)} \leq \frac{\alpha}{\bar{I}(T)} \int_{s_1}^{s_2} |\dot{\zeta}(t)|^2 dt + \frac{n\alpha^2}{2(2-\epsilon)\bar{I}(T)} \log\left(\frac{s_2}{s_1}\right) + \left(C_4 + |a|\alpha D_0 + \alpha\lambda_1\theta_1 + \frac{n}{(2-\epsilon)\bar{I}(T)} \right) (s_2 - s_1). \quad (44)$$

این مطلب، نامساوی (۸) را نتیجه می‌دهد.

از برآورد نوع هامیلتونی، داریم $\delta e^{\kappa s_1} \leq \alpha(t) = \delta e^{\kappa t} \leq \delta e^{\kappa s_2}$. بنابراین

$$\log \frac{v(y_1, s_1)}{v(y_2, s_2)} \leq \frac{\delta e^{\kappa s_2}}{\bar{I}(T)} \int_{s_1}^{s_2} |\dot{\zeta}(t)|^2 dt + \int_{s_1}^{s_2} \left\{ \frac{n\delta^2 e^{2\kappa s_2}}{2(2-\epsilon)\bar{I}(T)} \frac{1}{t} + C_5 + |a|\delta e^{\kappa s_2} D_0 + \delta e^{\kappa s_2} \lambda_1\theta_1 + \frac{\delta^2 \kappa n e^{2\kappa s_2}}{2(2-\epsilon)\bar{I}(T)} \right\} dt, \quad (45)$$

که

$$C_5 = \frac{n\delta^2 e^{2\kappa s_2}}{(2-\epsilon)\bar{I}(T)} \left[\frac{C_1^2 n\delta^2 e^{2\kappa s_2}}{2(2-\epsilon)(\delta e^{\kappa s_1} - 1)\bar{I}(T)} + b\tilde{D}_1|a| + \theta_1\lambda_2 + C_1 \right] + \sqrt{\frac{n\delta^2 e^{2\kappa s_2}}{(2-\epsilon)\bar{I}(T)}} C'_5.$$

نامساوی (۴۵) نامساوی (۹) را نتیجه می‌دهد.

در برآورد نوع لی-خو، داریم $\alpha'(t) \geq 0$ ، پس $\alpha(t) \leq \alpha(s_2) = \left(\delta + \frac{\cosh(\kappa s_2) \sinh(\kappa s_2) - \kappa s_2}{\sinh(\kappa s_2)} \right)$ همچنین

$$\phi(t) \leq \frac{n\kappa}{(2-\epsilon)\bar{I}(T)} (\delta + \coth(\kappa s_1)).$$

بنابراین رابطه زیر به دست می آید

$$\log \frac{v(y_1, s_1)}{v(y_2, s_2)} \leq \frac{\alpha(s_2)}{\bar{I}(T)} \int_{s_1}^{s_2} |\dot{\zeta}(t)|^2 dt + \int_{s_1}^{s_2} \left\{ \frac{n\alpha^2(s_2)}{2(2-\epsilon)\bar{I}(T)} \frac{1}{t} + C_\epsilon + |a|\alpha(s_2)D_0 + \alpha(s_2)\lambda_1\theta_1 \right. \\ \left. + \alpha(s_2) \frac{n\kappa}{(2-\epsilon)\bar{I}(T)} (\delta + \coth(\kappa s_1)) \right\} dt, \quad (46)$$

که

$$C_\epsilon = \frac{n\alpha^2(s_2)}{(2-\epsilon)\bar{I}(T)} \left[\frac{C_1^2 n\alpha^2(s_2)}{2(2-\epsilon)(\alpha(s_1)-1)\bar{I}(T)} + b\tilde{D}_1|a| + \theta_1\lambda_2 + C_1 \right] \\ + \sqrt{\frac{n\alpha^2(s_2)}{(2-\epsilon)\bar{I}(T)}} C'_\epsilon.$$

به این صورت رابطه (۱۰) نتیجه می شود.

در حالت برآورد گرادیان نوع لی-خو خطی، داریم

$$\log \frac{v(y_1, s_1)}{v(y_2, s_2)} \leq \frac{\delta + \kappa s_2}{\bar{I}(T)} \int_{s_1}^{s_2} |\dot{\zeta}(t)|^2 dt + \int_{s_1}^{s_2} \left\{ \frac{n(\delta + \kappa s_2)^2}{2(2-\epsilon)\bar{I}(T)} \frac{1}{t} + C_\gamma \right. \\ \left. + |a|(\delta + \kappa t)D_0 + (\delta + \kappa t)\lambda_1\theta_1 + \frac{n\kappa(\delta + \kappa t)}{(2-\epsilon)\bar{I}(T)} \right\} dt. \quad (47)$$

که

$$C_\gamma = \frac{n(\delta + \kappa s_2)^2}{(2-\epsilon)\bar{I}(T)} \left[\frac{C_1^2 n(\delta + \kappa s_2)^2}{2(2-\epsilon)(\delta + \kappa s_1 - 1)\bar{I}(T)} + b\tilde{D}_1|a| + \theta_1\lambda_2 + C_1 \right] \\ + \sqrt{\frac{n(\delta + \kappa s_2)^2}{(2-\epsilon)\bar{I}(T)}} C'_\gamma.$$

□

بنابراین (۱۱) نتیجه می شود.

مراجع

- [1] A. Abolarinwa, N. K. Oladejo and S. O. Salawu, Gradient estimates for a weighted nonlinear parabolic equation and applications, *Open Math.*, **18** no. 1 (2020) 1150-1163.
- [2] S. Azami, Differential gradient estimates for nonlinear parabolic equations under integral Ricci curvature bounds, *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. RACSAM*, **118** no. 2 (2024) Paper No. 51 20 pp.
- [3] S. Azami, Differential Harnack inequality for the Newell-Whitehead-Segel equation under Finsler-geometric flow, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, **21** no. 4 (2024) Paper No. 2450074 16 pp.
- [4] S. Azami, Gradient estimates of a nonlinear Lichnerowicz equation under the Finsler-geometric flow, *Quaest. Math.*, **46** (2023) no. 12 2489-2505.
- [5] D. Bakry and Z. M. Qian, Harnack inequalities on a manifold with positive or negative Ricci curvature, *Rev. Mat. Iberoamericana*, **15** no. 1 (1999) 143-179.

- [6] S. Bhattacharyya, S. Azami and S. K. Hui, Hamilton and Souplet–Zhang type estimations on semilinear parabolic system along geometric flow, *Indian J. Pure Appl. Math.*, (2024). <https://doi.org/10.1007/s13226-024-00586-4>
- [7] X. Z. Dai, G. F. Wei and Z. L. Zhang, Local Sobolev constant estimate for integral Ricci curvature bounds, *Adv. Math.*, **325** (2018) 1-33.
- [8] L. V. Dai, N. T. Dung, N. D. Tuyen and L. Zhao, Gradient estimates for weighted p -Laplacian equations on Riemannian manifolds with a Sobolev inequality and integral Ricci bounds, *Kodai Math. J.*, **45** no. 1 (2022) 19–37.
- [9] S. Hajiaghasi and S. Azami, Gradient estimates for a nonlinear equation under the almost Ricci soliton condition, *Comput. Methods Differ. Equ.*, **12** no. 4 (2024) 710–718.
- [10] R. S. Hamilton, A matrix Harnack estimates for the heat equation, *Comm. Anal. Geom.*, **1** (1993) 113–126.
- [11] Y. Li, S. Bhattacharyya, S. Azami and S. K. Hui, Li-Yau type estimation of a semilinear parabolic system along geometric flow, *J. Inequal. Appl.*, **2024** Paper No. 131 16 pp.
- [12] J. Li and X. Xu, Differential Harnack inequalities on Riemannian manifolds I: linear heat equation, *Adv. Math.*, **226** no. 1 (2011) 4456–4491.
- [13] P. Li and S. T. Yau, On the parabolic kernel of the Schrödinger operator, *Acta Math.*, **156**(1986), 153-201.
- [14] L. Ma, Gradient estimates for a simple elliptic equation on non-compact Riemannian manifolds, *J. Funct. Anal.*, **241** no. 1 (2006) 374–382.
- [15] X. R. Olivé, Neumann Li-Yau gradient estimate under integral Ricci curvature bounds, *Proc. Am. Math. Soc.*, **147** (2019) 411–426.
- [16] P. Petersen and G. Wei, Relative volume comparison with integral curvature bounds, *Geom. Funct. Anal.*, **7** no. 6 (1997) 1031–1045.
- [17] P. Petersen and G. Wei, Analysis and geometry on manifolds with integral Ricci curvature bounds. II, *Trans. Am. Math. Soc.*, **353** no. 2 (2001) 457–478.
- [18] C. Rose, Li-Yau gradient estimate for compact manifolds with negative part of Ricci curvature in the Kato class, *Ann. Glob. Anal. Geom.*, **55** no. 3 (2019) 443–449.
- [19] H.J. Sun, Higher eigenvalue estimates on Riemannian manifolds with Ricci curvature bounded below, *Acta Math. Sinica (Chin. Ser.)*, **49** no. 3 (2006) 539–548.
- [20] W. Wang, Harnack inequality, heat kernel bounds and eigenvalue estimates under integral Ricci curvature bounds, *J. Differential Equations*, **269** (2020) 1243–1277.
- [21] Y. Y. Yang, Gradient estimate for a nonlinear parabolic equation on Riemannian manifold, *Proc. Am. Math. Soc.*, **136** (2008) 4095–4102.
- [22] S. T. Yau, Harmonic functions on complete Riemannian manifolds, *Commun. Pure Appl. Math.*, **28** no. 2 (1975) 201-228.
- [23] Q. S. Zhang and M. Zhu, Li-Yau gradient bound for collapsing manifolds under integral curvature condition, *Proc. Am. Math. Soc.*, **145** no. 7 (2017) 3117–3126.

- [24] Q. S. Zhang and M. Zhu, Li-Yau gradient bounds on compact manifolds under nearly optimal curvature conditions, *J. Funct. Anal.*, **275** no. 2 (2018) 478–515.

شاهرود اعظمی

گروه ریاضی محض، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)، قزوین، ایران
azami@sci.ikiu.ac.ir

شاهرود اعظمی متولد اسفندماه ماه سال ۱۳۵۸ است. وی در سال ۱۳۷۸ وارد مقطع کارشناسی رشته ریاضی محض دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی شد و در سال ۱۳۸۲ وارد مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض، گرایش هندسه، دانشگاه صنعتی شریف شد. وی در سال ۱۳۸۸ وارد مقطع دکتری در رشته ریاضی محض گرایش هندسه دانشگاه صنعتی امیرکبیر گردید و در سال ۱۳۹۲ فارغ التحصیل شد. او هم‌اکنون عضو هیات علمی دانشگاه بین‌المللی امام‌خمینی (ره) می‌باشد. تخصص اصلی وی هندسه دیفرانسیل، آنالیز هندسی روی خمینه‌ها و شارهای هندسی می‌باشد.



مهدی جعفری

دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران
m.jafarii@pnu.ac.ir

مهدی جعفری متولد اردیبهشت ماه ۱۳۵۹ در شهر اصفهان است. وی در سال ۱۳۷۷ وارد مقطع کارشناسی رشته ریاضی محض دانشگاه صنعتی اصفهان شد و در سال ۱۳۸۲ وارد مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض، گرایش هندسه، دانشگاه صنعتی امیرکبیر شد. وی در سال ۱۳۸۷ وارد مقطع دکتری در رشته ریاضی محض گرایش هندسه گردید و در سال ۱۳۹۱ فارغ التحصیل گردید. او هم‌اکنون عضو هیات علمی دانشگاه پیام‌نور اصفهان می‌باشد. تخصص اصلی وی هندسه دیفرانسیل با رویکردهای فیزیکی، معادلات دیفرانسیل و هندسه شبه ریمانی می‌باشد.

