

A NEURAL NETWORK-BASED ALGORITHM FOR PRICING EUROPEAN BARRIER OPTIONS

AFSHIN BABAEI^{✉*} AND MARYAM REZAEI MIRARKOLAEI[✉]

ABSTRACT. In recent decades, researchers in various disciplines have made many efforts to find an appropriate approach to predict the financial market. Since it is very difficult to fully predict the financial markets, machine learning methods can help to improve this prediction. The neural network method is one of these machine learning methods that works better in modeling economic behaviors. In this study, the neural network algorithm based on an improved extreme learning machine with Legendre polynomial bases is used to determine the price of the double-barrier option. The Kronecker product of two Legendre polynomials is chosen as the basis functions of the hidden neurons. The model we consider to evaluate the double barrier option is a generalization of the Cox model, which represents the inverse relationship between the price of the underlying asset and its volatility. In this model, the parameters of the problem are chosen as time-dependent functions. First, we implement the neural network method on the proposed model and then show the correctness of the method by presenting several numerical results.

1. Introduction

The huge profits generated by stock options trading over the past decade have made this financial instrument extremely popular in the securities markets, attracting many investors and speculators. An option is a right, not an obligation, to exercise a specific underlying asset at an agreed strike price on or before the expiration date. Option holders have the right to exercise their option or not, depending on market conditions. However, if option holders fail to manage this right properly, their investment portfolio

Keywords: Neural network, Legendre polynomial, Barrier option, Option Pricing.

Article Type: Research Paper.

Communicated by Soghra Nobakhtian.

*Corresponding author.

Received: 04-10-2024, Accepted: 13-04-2025, Published Online: 09-07-2025.

Cite this article: A. Babaei and M. Rezaei Mirarkolaei, A neural network-based algorithm for pricing European barrier options, *Journal of Mathematics and Society*, **10** no. 3 (2025) 23–52. <http://dx.doi.org/10.22108/msci.2025.142958.1698>.

may be severely jeopardized. In financial markets, options are used by investors to control investment risks.

In financial markets, there are various types of options, including: European, American, Asian, barrier, lookback, etc. In this study, among the above types of options, we intend to focus on the barrier option.

The option pricing model plays an important role in modern financial theories, as it has been used in cost budgets [6, 13, 41], asset valuations [40], resource allocation [20], etc. The study of option pricing and its modeling problem is of great importance. The first mathematical studies of financial markets date back to 1900 [48]. In 1973, the classic Black-Scholes model was proposed by Fisher Black and Myron Scholes and became the benchmark for fair market option pricing. Over the decades, the Black-Scholes model has been widely accepted because it can effectively model the options pricing and provides a mechanism for extracting implied volatility. It is also used in the price of commodity futures and investment portfolios. In an ideal market, a European option price can be obtained by solving the partial differential equation (classical Black-Scholes model)

$$(1.1) \quad \frac{\partial V(S, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V(S, t)}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V(S, t)}{\partial S} - rV(S, t) = 0, \quad (S, t) \in (0, +\infty) \times (0, T),$$

under the final and boundary conditions

$$\begin{aligned} \text{Call option : } & \begin{cases} V(S, T) = \max(S - K, 0), & 0 < S < +\infty, \\ V(0, t) = 0, \quad \lim_{S \rightarrow +\infty} V(S, t) = S - Ke^{-r(T-t)}, & 0 < t < T, \end{cases} \\ \text{Put option : } & \begin{cases} V(S, T) = \max(K - S, 0), & 0 < S < +\infty, \\ V(0, t) = Ke^{-r(T-t)}, \quad \lim_{S \rightarrow +\infty} V(S, t) = 0, & 0 < t < T, \end{cases} \end{aligned}$$

where S is underlying asset price, σ is annual volatility of asset price, r is risk-free interest rate, K is striking price, T is expiration date, and t is the elapsed time of the option's life. In the above equation, the price of the underlying asset S follows the geometric Brownian motion and satisfies in the following stochastic differential equation

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW,$$

where $\mu S_t dt$ is drift, μ is mean growth rate, $\sigma S_t dW$ is diffusion, and W is a geometric Brownian motion process in probability space.

For decades, the classical Black-Scholes model has been used to price options, commodity futures, and investments. However, this model has some shortcomings, including:

- No dividends are allocated to stocks.
- The model parameters are assumed to be fixed.
- Transactions are free of any fees or taxes.
- They are performed continuously.

- This model does not show the inverse relationship between the price of the underlying asset and its volatility that is observed in market reality.

To overcome the shortcomings of the classical Black-Scholes model, extended models such as Cox models have been introduced [15]. Models developed from the classic Black-Scholes model do not have a closed-form solution due to their high computational complexity. Therefore, numerical methods are better alternatives for solving such mathematical models. Approach for option pricing are classified into two categories of parametric and nonparametric methods.

Parametric models are usually described by a smaller number of parameters, which can simplify the analysis. However, nonparametric methods may require more calculations or be more difficult to interpret the results due to the internal layers that are created. On the other hand, we know that financial markets behave nonlinearly, and this nonlinear learning capability allows nonparametric methods to model these behaviors well. While parametric methods usually depend on linear assumptions. Therefore, nonparametric methods are often preferred in financial problems due to their very high learning capabilities, flexibility, and adaptability to complex and large data.

In recent years, many researchers have turned to nonparametric methods such as neural networks and support vector regression (SVR) methods for option pricing [7, 23, 21, 31, 51]. Neural network methods are a subset of machine learning algorithms because they allow systems to learn from data and improve without being explicitly programmed.

In the following, our goal is to apply the aforementioned Legendre neural network method to price the European double barrier knock-out option under the Cox model, which is known as the constant elasticity of variance (CEV) model. Cox introduced this model to show the inverse relationship between the price of the underlying asset and its volatility. If in the model (1.1), we consider the volatility as $\sigma(S) = \delta S^\beta$, we obtain the following equation [14]:

$$(1.2) \quad \frac{\partial V(S, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \delta^2 S^{2\beta+2} \frac{\partial^2 V(S, t)}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V(S, t)}{\partial S} - rV(S, t) = 0, \quad B_l < S < B_u, \quad 0 < t < T,$$

where $\sigma(S)$ is the local volatility function, β is the elasticity of volatility, δ is the scale parameter of the initial instantaneous volatility at time $t = 0$, and $\sigma_0 = \sigma(S_0) = \delta S_0^\beta$. If β is set to zero in the differential equation (1.2), then the Cox model will be the classic Black-Scholes model. Since in this paper we seek to consider a more efficient model that is closer to the real market model, we adopt a generalization of the Cox model. In this model, the dividend yield, which we denote by q , is attributed to the underlying asset and the parameters of interest rate and dividend yield are functions of time [44]:

$$(1.3) \quad \frac{\partial V(S, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \delta^2 S^{2\beta+2} \frac{\partial^2 V(S, t)}{\partial S^2} + (r(t) - q(t))S \frac{\partial V(S, t)}{\partial S} - r(t)V(S, t) = 0,$$

with the final and boundary conditions:

$$(1.4) \quad \text{Call option : } \begin{cases} V(S, T) = \max(S - K, 0), & B_l < S < B_u, \\ V(B_l, t) = \Psi(t), & V(B_u, t) = \Phi(t), \quad 0 < t < T, \end{cases}$$

$$(1.5) \quad \text{Put option : } \begin{cases} V(S, T) = \max(K - S, 0), & B_l < S < B_u, \\ V(B_l, t) = \Psi(t), & V(B_u, t) = \Phi(t), \quad 0 < t < T, \end{cases}$$

where B_l and B_u are the lower and upper bound barriers, respectively. The functions $\Psi(t)$ and $\Phi(t)$ are the discounts paid when the price of the underlying asset hits the respective barrier levels. This generalized Black-Scholes equation will be used to price the barrier option.

2. Main Results

Theorem 1. Suppose the vector $P(S)$ is defined as $P(S) = [P_0(S), P_1(S), \dots, P_{N+1}(S)]^T$ where $P_n(S)$, $n = 0, 1, \dots, N + 1$, is the n th shifted Legendre polynomial in the interval $[0, 1]$ and the vector $P'(S)$ is defined as $P'(S) = [P'_0(S), P'_1(S), \dots, P'_{N+1}(S)]^T$ where $P'_n(S)$, $n = 0, 1, \dots, N + 1$ is the first-order derivative of the shifted Legendre polynomial $P_n(S)$. Also, using the properties of the derivative of the shifted Legendre polynomial, we have:

$$P'_{n+1}(S) = P'_{n-1}(S) + 2(2n + 1)P_n(S).$$

Therefore, with the help of the above recursion relation, we will have the matrix form $P'(S) = MP(S)$ where the matrix M is defined as follows:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 10 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 14 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 10 & 0 & 18 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 6 & 0 & 14 & 0 & \cdots & 2(2N + 1) & 0 \\ 2 & 0 & 10 & 0 & 18 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(N+2) \times (N+2)}.$$

From the Kronecker product of two Legendre polynomials $P(S) = [P_0(S), P_1(S), \dots, P_{N+1}(S)]^T$ and $P(t) = [P_0(t), P_1(t), \dots, P_{N+1}(t)]^T$, we get:

$$\begin{aligned} \zeta(S, t) = P(S) \otimes P(t) = & [P_0(S)P_0(t), P_0(S)P_1(t), \dots, P_0(S)P_{N+1}(t) \\ & P_1(S)P_0(t), P_1(S)P_1(t), \dots, P_1(S)P_{N+1}(t), \dots, \\ & P_{N+1}(S)P_0(t), P_{N+1}(S)P_1(t), \dots, P_{N+1}(S)P_{N+1}(t)]^T. \end{aligned}$$

$\zeta(S, t)$ is the basis function of the hidden neural networks.

Now, the theory of the European double barrier knock-out option pricing is described using the neural network method. Note that the valuation process of the double-barrier put option is the same as the double-barrier call option.

Theorem 2. Consider the continuous function of two variables $V(S, t) : [B_l, B_u] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$. For $N \in \mathbb{N}$, constant values γ_{ij} , $i, j = 0, 1, \dots, N + 1$, and the shifted Legendre polynomials $P_0(S), P_1(S), \dots, P_{N+1}(S)$ and $P_0(t), P_1(t), \dots, P_{N+1}(t)$, exist such that the shifted Legendre neural network with $(N + 1)^2$ neuron will be as follows:

$$(2.1) \quad \tilde{V}(S, t) = \sum_{i=0}^{N+1} \sum_{j=0}^{N+1} \gamma_{ij} P_i(S) P_j(t) = \zeta^T(S, t) \Gamma,$$

where

$$\Gamma = [\gamma_{00}, \gamma_{01}, \dots, \gamma_{0,N+1}, \gamma_{10}, \gamma_{11}, \dots, \gamma_{1,N+1}, \dots, \gamma_{N+1,0}, \gamma_{N+1,1}, \dots, \gamma_{N+1,N+1}]^T,$$

and $\tilde{V}(S, t)$ is the approximate solution of the equation (1.3). Then, the following relation holds

$$\begin{aligned} \|V(S, t) - \tilde{V}(S, t)\|^2 &= \iint_D [V(S, t) - \tilde{V}(S, t)]^2 dS dt \\ &= \iint_D \left[V(S, t) - \sum_{i=0}^{N+1} \sum_{j=0}^{N+1} \gamma_{ij} P_i(S) P_j(t) \right]^2 dS dt < \varepsilon, \end{aligned}$$

where ε is a very small number.

According to the relation (2.1), the derivatives of the double-barrier option price function can be approximated as follows:

$$(2.2) \quad \frac{\partial V(S, t)}{\partial S} \simeq \zeta^T(S, t) (M^T \otimes I) \Gamma,$$

$$(2.3) \quad \frac{\partial^2 V(S, t)}{\partial S^2} \simeq \zeta^T(S, t) ((M^T)^2 \otimes I) \Gamma,$$

$$(2.4) \quad \frac{\partial V(S, t)}{\partial t} \simeq \zeta^T(S, t) (I \otimes M^T) \Gamma.$$

Suppose $\Delta S = \frac{B_u - B_l}{m}$ and $\Delta t = \frac{T}{m}$, are uniform spatial and temporal step lengths, respectively, and $S_i = B_l + i\Delta S$, $i = 0, 1, \dots, m$, and $t_j = j\Delta t$, $j = 0, 1, \dots, m$, are equidistant collocation points, respectively, on the intervals $[B_l, B_u]$ and $[0, T]$. By rewriting the problem (1.3)-(1.4) based on the relations (2.1)-(2.4), and substituting the assumed collocation points, the following system of linear equations is

obtained:

$$(2.5) \quad \begin{cases} \zeta^T(S_i, t_j) \left[(I \otimes M^T) + \frac{1}{2} \delta^2 S_i^{2\beta+2} ((M^T)^2 \otimes I) \right. \\ \quad \left. + (r(t_j) - q(t_j)) S_i (M^T \otimes I) - r(t_j) (I \otimes I) \right] \Gamma = 0, \\ \zeta^T(S_i, T) \Gamma = \max(S_i - K, 0), \\ \zeta^T(B_l, t_j) \Gamma = \Psi(t_j), \\ \zeta^T(B_u, t_j) \Gamma = \Phi(t_j). \end{cases}$$

The system of equations (2.5) can be written in the following matrix form:

$$(2.6) \quad A\Gamma = F,$$

where

$$A = \begin{bmatrix} \zeta^T(S_i, t_j) \left[(I \otimes M^T) + \frac{1}{2} \delta^2 S_i^{2\beta+2} ((M^T)^2 \otimes I) + (r(t_j) - q(t_j)) S_i (M^T \otimes I) - r(t_j) (I \otimes I) \right] \\ \zeta^T(S_i, T) \\ \zeta^T(B_l, t_j) \\ \zeta^T(B_u, t_j) \end{bmatrix},$$

and

$$F = \begin{bmatrix} 0 \\ \max(S_i - K, 0) \\ \Psi(t_j) \\ \Phi(t_j) \end{bmatrix}.$$

By solving the system of linear equations (2.6), the unknown coefficients of the Legendre neural network are obtained in such a way that $\|V(S, t) - \tilde{V}(S, t)\|^2$ is minimized. For each internal layer in the system (2.6), to optimize the weight of the hidden layer, the learning machine method Γ uses the least squares approach instead of the process of successive iterations, such that the norm 2 minimizes the output error, that is, the optimal solution of the (2.6) is as $\Gamma^* = \arg \min_{\Gamma} \|A\Gamma - F\|^2$.

According to the condition of the matrix A , solving the system (2.6) leads to the following three cases:

- (1) If A is a square matrix and invertible, then $\Gamma = A^{-1}F$.
- (2) If A is rectangular, then $\Gamma^* = A^T(\lambda I + AA^T)^{-1}F$ and Γ^* is the least squares solution of $A\Gamma = F$, i.e. $\Gamma^* = \arg \min_{\Gamma} \|A\Gamma - F\|^2$. λ is a regularization factor that can be adjusted subject to an specific sample.
- (3) If A is a singular matrix, then $\Gamma^* = A^T(\lambda I + AA^T)^{-1}F$.

In this way, the unknown weights of the Legendre neural network are obtained.

Now, we examine the theoretical results presented in the previous section. The values of N and m are considered to be 25 and 100, respectively. The numerical results are extracted from a system with specifications 6500 CPU @ 3.20GHz 3.19GHz-Intel Core(TM) i5 and using the software MATLAB R2015a. The

double-barrier option pricing problem is solved using the neural network algorithm and considering the following three different cases for the interest rate and dividend parameters [47]:

- 1) $r(t) = 0.075 + 0.05t$, $q(t) = 0.05$,
- 2) $r(t) = 0.1 + 0.05e^{-t}$, $q(t) = 0.03 + 0.001e^{0.01t}$,
- 3) $r(t) = 0.1 + 0.0005t$, $q(t) = 0.02$.

The expiration date to solve the problem is considered to be in years. The periods selected for solving double barrier option pricing problem are 3 months, 4 months, 6 months, and 1 year. The strike price is 0.5 and the underlying asset price is chosen from the interval $[0, 1]$. The volatility elasticity in the relation $\sigma(S) = \delta S^\beta$ takes negative values, because as the underlying asset price increases, $\sigma(S)$ must remain bounded.

Figure 1 shows the double barrier call options price for three different cases of r and q based on the remaining life of the option until the expiration date with a maturity period of 1 year. As can be seen in the figure, at high prices, the longer the remaining life of the option until expiration, the higher the option price. But at low prices, the shorter the remaining life of the option until expiration, the higher the option price.

Figure 2 shows the value of barrier options for $r(t) = 0.075 + 0.05t$ and $q(t) = 0.05$ based on different values of β with 6-month maturity date. Figure 3 shows the value of barrier options for $r(t) = 0.1 + 0.05e^{-t}$ and $q(t) = 0.03 + 0.001e^{0.01t}$ based on different values of β s with 3-month maturity date.

3. Conclusions

In this study, using the Legendre neural network method based on an improved extreme learning machine algorithm, the evaluation of double-barrier options under the generalized constant elasticity variance model has been investigated. The neural network method is used in the valuation of options to increase the speed of decision-making and improve market forecasts. By learning from historical data, neural networks can predict market movements. Also, neural networks, with the ability to analyze large amounts of historical data in a short time, can identify patterns, complex relationships in the data, and optimal hedging strategies that human traders may overlook. In addition, neural networks enable traders to effectively protect their portfolios against adverse market conditions. In this paper, the risk-free interest rate and dividend parameters of the valuation model are considered to be time-dependent to bring the proposed model closer to the actual market model. The Kronecker product of Legendre polynomials is considered as the basis function of the proposed method. The algorithm procedure is fully described and, while theoretically examining the method, its performance is examined by providing appropriate numerical simulations. The obtained numerical results show the accuracy of the proposed method. Due to the effectiveness of the method investigated, this method can be used for valuation of different types of options and also for calculation of implied volatility.

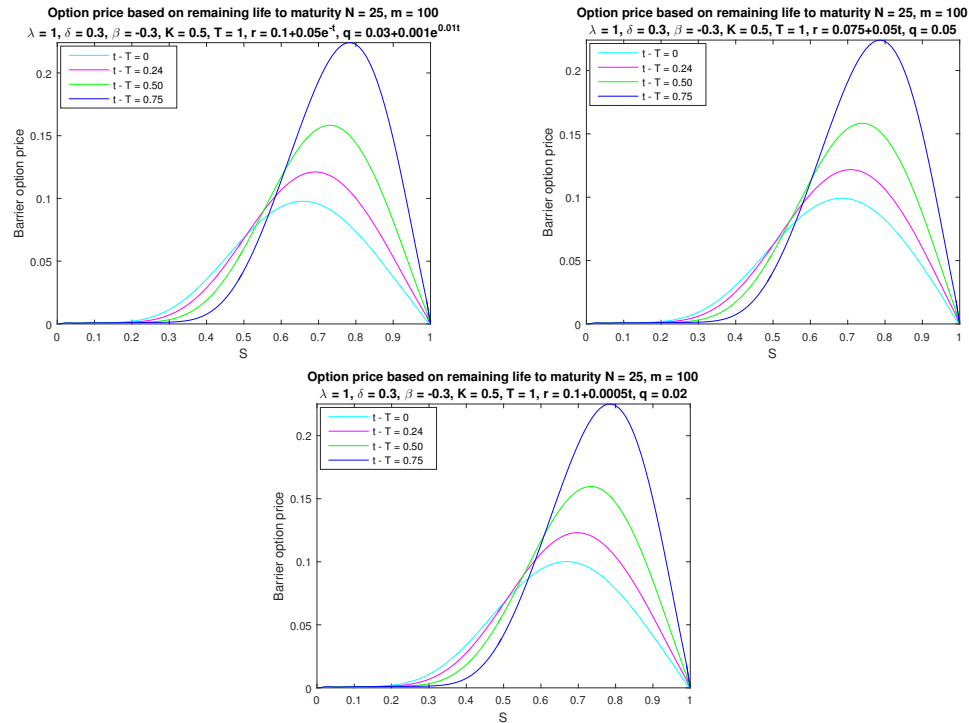


FIGURE 1. Barrier option price for three different cases of r and q based on the remaining life of the option.

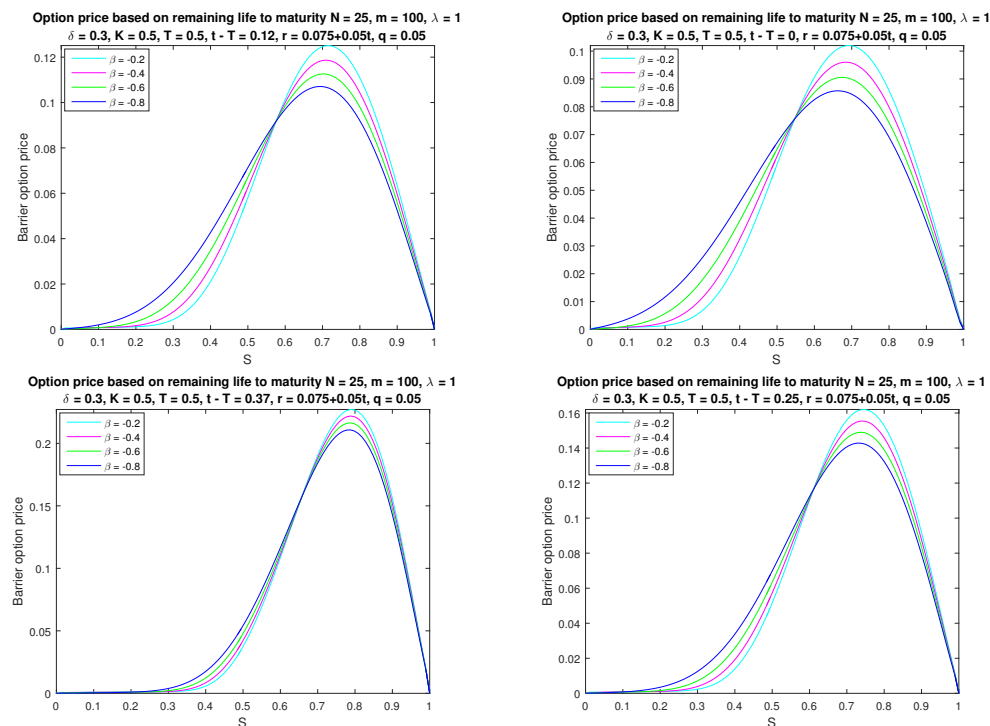


FIGURE 2. Barrier option price for the first case of r and q based on different values of β .

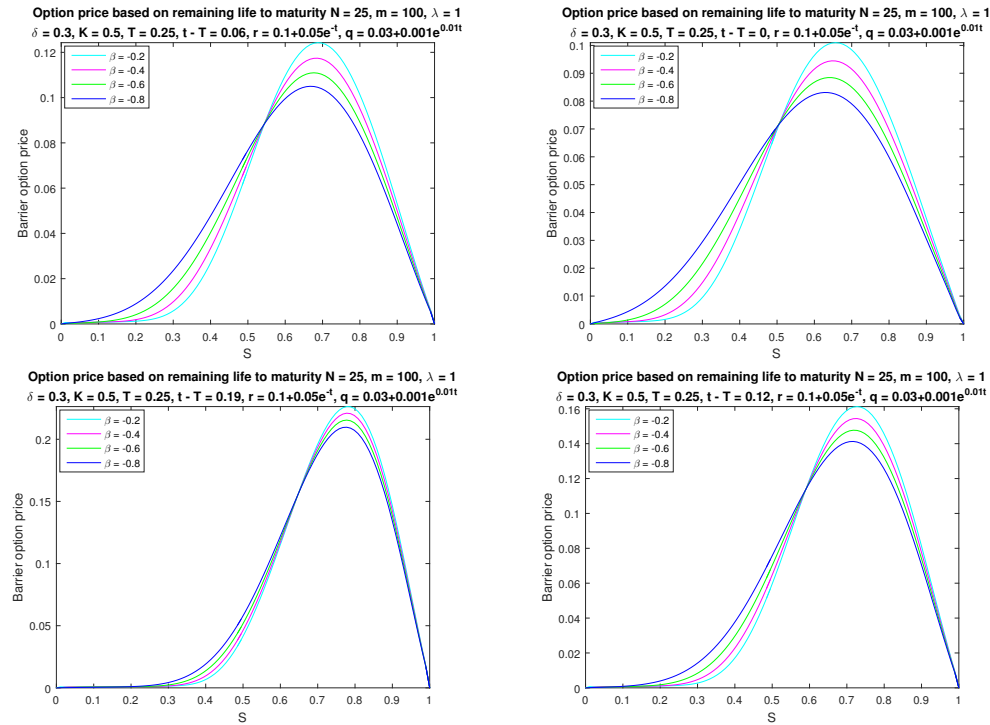


FIGURE 3. Barrier option price for the second case of r and q based on different values of β .

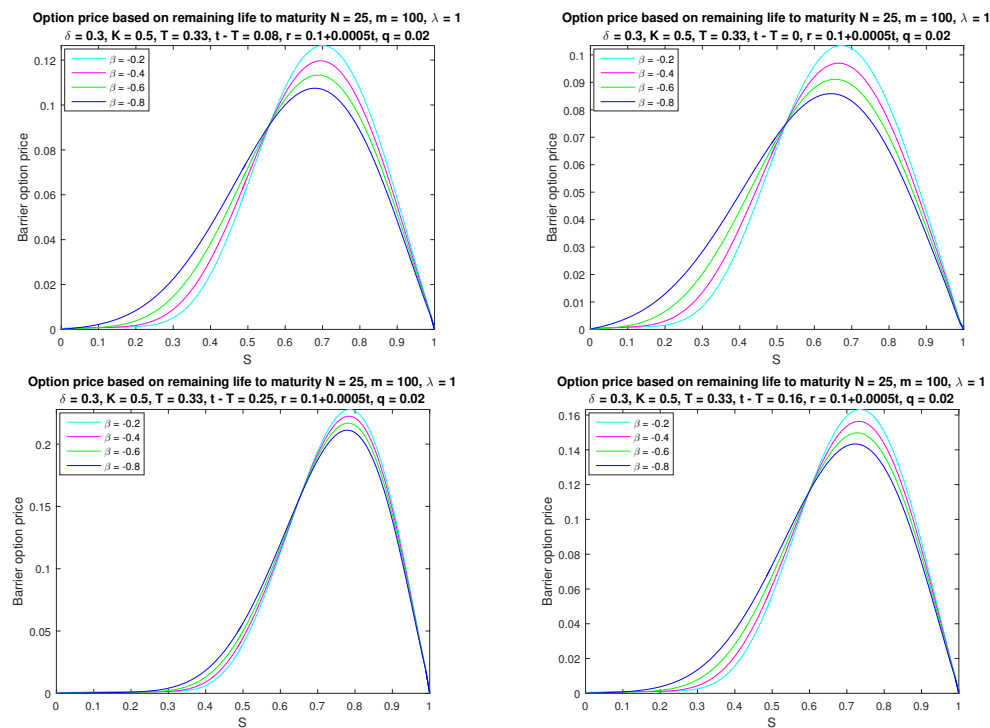


FIGURE 4. Barrier option price for the third case of r and q based on different values of β .



Afshin Babaei

Department of Applied Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences, University of Mazandaran, Babolsar, Iran

Email: babaei@umz.ac.ir

Maryam Rezaei

Department of Applied Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences, University of Mazandaran, Babolsar, Iran

Email: rezaei.mirar@yahoo.com

الگوریتمی مبتنی بر شبکه عصبی برای قیمت‌گذاری اختیارات مانع اروپایی

افشین بابائی*^{ID} و مریم رضایی میرارکلایی^{ID}

چکیده. در دهه‌های اخیر، محققان در رشته‌های مختلف تلاش‌های زیادی برای یافتن رویکردهایی مناسب جهت پیش‌بینی بازارهای مالی انجام داده‌اند. با توجه به اینکه پیش‌بینی کامل بازارهای مالی بسیار دشوار است، روش‌های یادگیری ماشین، می‌توانند به بهبود این پیش‌بینی‌ها کمک کنند. روش شبکه عصبی یکی از این روش‌های یادگیری ماشین است که در مدل‌سازی رفتارهای اقتصادی خوب عمل کرده است. در این مطالعه، از الگوریتم شبکه عصبی مبتنی بر روش ماشین یادگیری حداکثری بهبود یافته با پایه چندجمله‌ای لژاندر، برای تعیین قیمت اختیار مانع دوگانه استفاده شده است. حاصل ضرب کرونکر دو چندجمله‌ای لژاندر به‌عنوان توابع پایه شبکه‌های پنهان انتخاب می‌شود. مدلی که برای ارزش‌گذاری اختیار مانع دوگانه در نظر گرفته شده، تعمیم مدل کاکس است که نشان‌دهنده رابطه معکوس بین قیمت دارایی پایه و نوسانات آن است. در این مدل، پارامترهای مسأله به‌صورت توابع وابسته به زمان انتخاب می‌شوند. ابتدا روش شبکه عصبی را بر روی مدل پیشنهادی پیاده‌سازی و سپس با ارائه برخی نتایج عددی صحت روش مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۱. مقدمه

سود هنگفت حاصل از معاملات اختیار معامله سهام در دهه گذشته، باعث محبوبیت چشمگیر این ابزار مالی در بازارهای اوراق بهادار شده و سرمایه‌گذاران و سفته‌بازان^۱ زیادی را به خود جذب کرده است. اختیار معامله یک حق و نه یک الزام است که روی یک دارایی پایه^۲ مشخص با قیمت اجرای^۳ توافق شده، در زمان تاریخ سررسید یا قبل از آن اجرا می‌شود. دارندگان اختیار معامله، بسته به وضعیت بازار این حق را دارند که اختیار خود را اجرا کنند یا نه. با این وجود، اگر دارندگان اختیار معامله نتوانند این حق را به درستی مدیریت کنند، ممکن است سبب^۴ سرمایه‌گذاریشان به شدت به خطر بیفتد. در بازارهای مالی، اختیارهای معامله توسط سرمایه‌گذاران برای کنترل ریسک‌های سرمایه‌گذاری استفاده می‌شوند. محاسبه دقیق قیمت فعلی یک اختیار معامله یا پیش‌بینی قیمت آتی آن به سرمایه‌گذار کمک می‌کند تا تصمیمات عاقلانه‌تری را به شیوه مؤثرتری اتخاذ کند.

اگر چه اختیار معامله، ریسک بالایی به ویژه برای فروشندگان قرارداد به دلیل نقدینگی کمتر آن دارد، اما اصلی‌ترین کاربرد آن مدیریت سرمایه‌گذاری است که با توجه به میزان ریسک‌پذیری سرمایه‌گذاران، اختیار معامله‌های متنوعی در بازار مالی، داد و ستد می‌شوند. با توجه به تاریخ اجرا، اختیار معامله‌ها به دو دسته اروپایی و آمریکایی تقسیم می‌شوند که به این دو اختیار

عبارت و کلمات کلیدی: شبکه عصبی، چندجمله‌ای لژاندر، اختیار مانع، قیمت‌گذاری اختیار معامله.

نوع مقاله: پژوهشی

دبیرتخصصی رابط: صغری نویختیان

*نویسنده مسئول

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۷/۱۳ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۱/۲۴ تاریخ انتشار آنلاین: ۱۴۰۴/۰۴/۱۸

ارجاع به مقاله: ا. بابائی و م. رضایی میرارکلایی، الگوریتمی مبتنی بر شبکه عصبی برای قیمت‌گذاری اختیارات مانع اروپایی، نشریه ریاضی و جامعه، ۱۰ شماره ۳ (۱۴۰۴) ۵۲-۲۳.

<http://dx.doi.org/10.22108/msci.2025.142958.1698>

¹investors and speculators ²underlying asset ³exercise price ⁴portfolio

معامله، اختیارهای وانیلی^۵ گفته می‌شود. تفاوت بین این دو اختیار در این است که دارنده اختیار معامله اروپایی تنها می‌تواند از حق خود، مبنی بر خرید یا فروش دارایی موضوع قرارداد، در تاریخ انقضا^۶ قرارداد استفاده کند. اما دارنده اختیار معامله آمریکایی می‌تواند در هر زمانی تا تاریخ انقضای قرارداد، از حق خود استفاده کند.

نوع دیگری از اختیارهای معامله وجود دارد که به آن‌ها اختیارهای نامتعارف^۷ می‌گویند و از نظر تاریخ انقضا، قیمت توافقی^۸، بازده مورد انتظار^۹ و ... با اختیارهای وانیلی متفاوت هستند. اختیارهای آسیایی^{۱۰}، مانع^{۱۱}، باینری^{۱۲}، انتخابگر^{۱۳} و گذشته‌نگر^{۱۴} نمونه‌هایی از مهمترین اختیارهای نامتعارف هستند. در این پژوهش قصد داریم که از بین انواع اختیارات فوق، بر روی اختیار مانع تمرکز کنیم.

اختیارهای مانع به دلیل ارزان‌تر بودن آن نسبت به سایر اختیارها، علاقه‌مندان زیادی را به خود جلب کرده‌اند. ارزش این نوع از اختیار معامله به مسیر حرکت قیمت دارایی پایه، در طول عمر قرارداد اختیار، بستگی دارد. به این دلیل آن‌ها را اختیارهای وابسته به مسیر نیز می‌نامند. این اختیارها در بازار فرابورس^{۱۵} بر روی سهام، نرخ بهره، شاخص‌های سهام، کالاها و ارزها^{۱۶} معامله می‌شوند. اختیارهای مانع بیشتر از اختیارهای وانیلی توسط معامله‌گران استفاده می‌شوند، زیرا قیمت اولیه^{۱۷} آن‌ها به‌طور کلی کمتر از اختیارهای وانیلی است و خاصیت اهرمی اختیار معامله را افزایش می‌دهند. بر اساس قیمت‌های هدفی که روی دارایی پایه در نظر گرفته می‌شوند، دو نوع اختیار مانع وجود دارند: اختیارهایی با یک مانع و اختیارهایی با مانع دوگانه. در اختیارهای مانع یگانه، دارایی پایه فقط یک قیمت هدف در بالا یا پایین خود دارد. وقتی که قیمت دارایی پایه به مانع نزدیک می‌شود یا از مانع فراتر می‌رود، ارزش اختیارهای مانع، بی‌ارزش یا ارزشمند می‌شوند. پس، در اختیار بی‌ارزش^{۱۸}، هنگامی که دارایی پایه به قیمت مشخص رسید، قرارداد اختیار معامله بی‌ارزش خواهد شد. اما در اختیار ارزشمند^{۱۹} تا زمانی که دارایی پایه به یک قیمت مشخص نرسد، اختیار ارزشی ندارد و به محض اینکه قیمت دارایی پایه به سطح معین رسید، قرارداد اختیار معامله را از آن زمان به بعد می‌توان اجرا نمود. اختیارهای مانع دوگانه ترکیبی از دو اختیار مانع یگانه با یک مانع زیر و یک مانع بالاتر از قیمت فعلی دارایی پایه است. بنابراین، اگر یک معامله‌گر معتقد باشد که قیمت دارایی پایه بعید است به سطح مانع برسد، ممکن است برای خرید، اختیار بی‌ارزش را انتخاب کند که قیمت اولیه اختیار از اختیار بدون مانع کمتر است. در نقطه مقابل، اگر معامله‌گر پیش‌بینی کند قیمت دارایی پایه از سطح مانع عبور می‌کند، بهتر است به جای خرید اختیار بدون مانع، اختیار ارزشمند با مانع را خریداری نماید که قیمت اولیه آن اختیار نیز از اختیار بدون مانع کمتر است. در اختیارهای مانع دوگانه، اگر موانع پایینی و بالایی به ترتیب برابر با صفر و بی‌نهایت باشند، اختیارهای مانع دوگانه اروپایی به اختیارهای اروپایی منتهی می‌شوند. در این پژوهش بر روی اختیار مانع دوگانه بی‌ارزش اروپایی تمرکز می‌کنیم، یعنی زمانی که دارایی پایه به قیمت مشخصی برسد، اختیار منقضی می‌شود [۲۵].

مدل ارزش‌گذاری اختیارهای معامله نقش مهمی در نظریه‌های مالی مدرن ایفا می‌کند، چنان‌که در بودجه‌های هزینه^{۲۰} [۴، ۱۱، ۳۹]، ارزیابی دارایی‌ها^{۲۱} [۳۸]، تخصیص منابع^{۲۲} [۱۸] و غیره به کار گرفته شده است. مطالعه ارزش‌گذاری اختیارهای معامله و مسأله مدل‌سازی آن از اهمیت زیادی برخوردار است. اولین مطالعه‌های ریاضی در مورد بازارهای مالی به سال ۱۹۰۰ میلادی برمی‌گردد [۴۶]. در سال ۱۹۷۳، مدل بلک-شولز کلاسیک توسط فیشر بلک^{۲۳} و مایرون شولز^{۲۴} پیشنهاد و به نقطه عطفی برای ارزش‌گذاری اختیارهای بازار منصفانه تبدیل شد [۶، ۳۳]. در طی چندین دهه، مدل بلک-شولز به‌طور گسترده پذیرفته شده است، زیرا می‌تواند به طور مؤثر، قیمت اختیارهای معامله را مدل کرده و مکانیزمی برای استخراج نوسانات ضمنی فراهم کند. از این مدل، در ارزش‌گذاری معاملات آتی کالا^{۲۵} و سبد سرمایه‌گذاری نیز استفاده می‌شود.

⁵vanilla options ⁶expiration date ⁷exotic options ⁸strike price ⁹expected return ¹⁰asian ¹¹barrier ¹²binary ¹³chooser ¹⁴lookback ¹⁵over-the-counter ¹⁶currencies ¹⁷premium ¹⁸knock-out option ¹⁹knock-in option ²⁰cost budgets ²¹asset valuations ²²resource allocation ²³Fisher Black ²⁴Myron Scholes ²⁵commodity futures

در یک بازار ایده‌آل، قیمت اختیار اروپایی^{۲۶} را می‌توان با حل معادله دیفرانسیل جزئی (مدل بلک-شولز کلاسیک)

$$(1.1) \quad \frac{\partial V(S, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V(S, t)}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V(S, t)}{\partial S} - rV(S, t) = 0, \quad (S, t) \in (0, +\infty) \times (0, T),$$

تحت شرایط نهایی و مرزی

$$\text{اختیار خرید: } \begin{cases} V(S, T) = \max(S - K, 0), & 0 < S < +\infty, \\ V(0, t) = 0, \quad \lim_{S \rightarrow +\infty} V(S, t) = S - Ke^{-r(T-t)}, & 0 < t < T, \end{cases}$$

$$\text{اختیار فروش: } \begin{cases} V(S, T) = \max(K - S, 0), & 0 < S < +\infty, \\ V(0, t) = Ke^{-r(T-t)}, \quad \lim_{S \rightarrow +\infty} V(S, t) = 0, & 0 < t < T, \end{cases}$$

به‌دست آورد که S قیمت دارایی پایه، σ نوسانات سالانه قیمت دارایی پایه^{۲۷}، r نرخ بهره بدون ریسک^{۲۸}، K قیمت توافقی، T تاریخ انقضا و t مدت زمان سپری شده از عمر اختیار می‌باشند. در رابطه فوق، قیمت دارایی پایه S از حرکت براونی هندسی^{۲۹} تبعیت کرده و در معادله دیفرانسیل تصادفی زیر صدق می‌کند:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW,$$

که $\mu S_t dt$ رانش^{۳۰}، μ نرخ رشد میانگین^{۳۱}، $\sigma S_t dW$ انتشار^{۳۲} و W فرایند حرکت براونی هندسی در فضای احتمال است.

۲. مبانی نظری و پیشینه پژوهش

اصطلاح «ارزش‌گذاری» یک اختیار، فرآیند علمی برای تعیین قیمت منصفانه با توجه به قیمت فعلی دارایی پایه است، چنان‌که حاوی ریسک برای هیچ‌یک از طرفین نباشد [۶، ۲۶].

عوامل زیادی بر قیمت اختیار معامله تأثیر می‌گذارند: قیمت دارایی پایه، قیمت توافقی، نوسانات سالانه قیمت دارایی، نرخ بهره بدون ریسک، سود تقسیمی سهام^{۳۳}، تاریخ انقضا، زمان باقیمانده تا تاریخ انقضا، نگرش سرمایه‌گذاران نسبت به بازار، روند بازار و غیره. اگرچه مدل بلک-شولز کلاسیک به‌طور گسترده برای ارزش‌گذاری اختیارها پذیرفته شده است، اما همچنان دارای برخی کاستی‌ها است، از جمله:

- سود تقسیمی به سهام تعلق نمی‌گیرد.
- پارامترهای مدل ثابت در نظر گرفته شده‌اند.
- معاملات بدون هیچ‌گونه هزینه و مالیات هستند.
- معاملات به‌طور پیوسته انجام می‌شوند.
- این مدل، رابطه معکوس بین قیمت دارایی پایه و نوسان‌پذیری آن را که در واقعیت بازار مشاهده می‌شود، نشان نمی‌دهد.

برای رفع کاستی‌های مدل بلک-شولز کلاسیک، مدل‌های توسعه‌یافته مطرح شده‌اند. مرتون^{۳۴} چند مدل بلک-شولز اصلاح‌شده را بر اساس این فرض که بازده سهام^{۳۵} پیوسته نیست، پیشنهاد کرد [۳۴]. کاکس^{۳۶} و همکاران از روش‌های آربیتراژ^{۳۷} برای برآورد قیمت اختیارهای خرید^{۳۸} استفاده کرده‌اند که در آنها به سهام، سودی پرداخته نمی‌شود [۱۳].

²⁶ european option price ²⁷ annual volatility of asset price ²⁸ risk-free interest rate ²⁹ geometric brownian motion ³⁰ drift
³¹ mean growth rate ³² diffusion ³³ stock dividend ³⁴ Merton ³⁵ stock return ³⁶ Cox ³⁷ Arbitrage ³⁸ call options

چان^{۳۹} فرآیندهای لوی^{۴۰} را برای ارزش‌گذاری اختیار معامله در نظر گرفت که در این حالت، اختلال^{۴۱} دارای اندازه پرش تصادفی^{۴۲} است [۹]. آمستر^{۴۳} و همکاران مدل ارزش‌گذاری اختیار معامله با هزینه‌های معاملات خطی غیرافزایشی^{۴۴} را بررسی و جواب تقریبی را با روش جواب بالا و پایین^{۴۵} به دست آوردند [۲]. با تغییر استراتژی اجرای تاریخ انقضا و عایدی^{۴۶} معامله (یعنی اصلاح شرایط مرزی و نهایی معادله بلک-شولز)، اختیارهای آمریکایی [۳۵]، اختیارهای آسیایی [۴۷، ۱۶]، اختیارهای مانع [۴۲]، اختیارهای گذشته‌نگر [۱۴] و دیگر اختیارها مورد مطالعه قرار گرفته‌اند.

مدل‌های توسعه‌یافته از مدل بلک-شولز کلاسیک به دلیل پیچیدگی محاسباتی بالا، دارای فرم بسته جواب نیستند. بنابراین، بیشتر روش‌های عددی جایگزین‌های بهتری برای حل چنین مدل‌های ریاضی هستند. رویکردها برای ارزش‌گذاری اختیارهای معامله به دو دسته روش‌های پارامتریک و ناپارامتریک^{۴۷} طبقه‌بندی می‌شوند. روش‌های پارامتریک به تکنیک‌هایی گفته می‌شوند که داده‌ها از یک توزیع خاص پیروی می‌کنند و این توزیع به وسیله تعدادی پارامتر توصیف می‌شود. به عبارت دیگر، این روش‌ها نیاز به دانستن یا فرض کردن شکل توزیع دارند، مانند توزیع نرمال، توزیع نمایی و غیره. اما روش‌های ناپارامتریک به تکنیک‌هایی گفته می‌شوند که هیچ‌گونه فرضی درباره توزیع داده‌ها ندارند و این باعث می‌شود بتوانند برای انواع مختلفی از داده‌ها مورد استفاده قرار گیرند. این روش‌ها به جای توزیع خاص، از ویژگی‌های داده‌ها مانند ترتیب و تعداد استفاده می‌کنند. معمولاً مدل‌های پارامتریک با تعداد کمتری از پارامترها توصیف می‌شوند که این می‌تواند تجزیه و تحلیل را ساده‌تر کند. اما روش‌های ناپارامتریک ممکن است به خاطر لایه‌های درونی که ایجاد می‌شوند، نیاز به محاسبات بیشتری داشته و یا تفسیر نتایج دشوارتر باشند. از طرفی می‌دانیم که بازارهای مالی به صورت غیرخطی رفتار می‌کنند و این قابلیت یادگیری غیرخطی به روش‌های ناپارامتریک اجازه می‌دهد تا به خوبی این رفتارها را مدل‌سازی کنند. در حالی که روش‌های پارامتریک معمولاً به فرضیات خطی وابسته هستند. بنابراین روش‌های ناپارامتریک به دلیل توانایی‌های بسیار بالا در یادگیری، انعطاف‌پذیری و سازگاری با داده‌های پیچیده و بزرگ، اغلب در مسائل مالی ترجیح داده می‌شوند.

تأثیرگذارترین روش‌های پارامتریک مرسوم، روش درخت دوجمله‌ای^{۴۸}، روش بلک-شولز^{۴۹}، روش تفاضلات متناهی^{۵۰}، روش فوریه^{۵۱} و روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو^{۵۲} هستند [۸، ۲۰، ۲۶، ۳۲، ۴۳]. روش درخت دوجمله‌ای یک مدل کلی است که در محدوده دوره کوچک به مدل بلک-شولز همگرا می‌شود و انعطاف‌پذیری بیشتری برای ترکیب سایر عوامل مانند سود سهام و نرخ‌های بهره متغیر زمانی در هر زمان قبل از انقضا در میانه روند شبیه‌سازی دارد. روش‌های درخت دوجمله‌ای، تفاضلات متناهی و شبیه‌سازی مونت‌کارلو قابلیت‌های متفاوتی دارند. به عنوان مثال، اگرچه روش‌های درخت دوجمله‌ای و شبیه‌سازی مونت‌کارلو، چارچوب‌های شبیه‌سازی مشابهی دارند، اما در روش درخت دوجمله‌ای، قیمت سهام تنها با نوسانات و احتمال تعیین می‌شود، در حالی که روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو، شامل یک متغیر تصادفی با توزیع نرمال اضافی است که اجازه تغییرات تصادفی زیادی را جدا از نوسانات و احتمال می‌دهد. در واقع، روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو از دنباله تولید شده قیمت سهام استفاده می‌کند که توسط معادله دیفرانسیل تصادفی کنترل می‌شود. روش تفاضلات متناهی، مکانیسم شبیه‌سازی متفاوتی نسبت به روش‌های درخت دوجمله‌ای و شبیه‌سازی مونت‌کارلو دارد. این روش، صورت گسسته معادله دیفرانسیل جزئی بلک-شولز را تقریب می‌زند.

در سال‌های اخیر، بسیاری از محققان برای ارزش‌گذاری اختیار معامله به روش‌های ناپارامتریک مانند شبکه‌های عصبی^{۵۳} و روش‌های رگرسیون بردار پشتیبان^{۵۴} (SVR) روی آورده‌اند [۵، ۲۱، ۱۹، ۲۹، ۴۸]. شبکه‌های عصبی و SVR برای انتخاب الگوهای غیرخطی از سری‌های زمانی طراحی شده‌اند [۷، ۲۸]. در اقتصاد، مدل‌های شبکه عصبی، علاوه بر ارزش‌گذاری اختیار معامله، برای پیش‌بینی قیمت سهام [۳۶، ۴۴، ۵۲]، پیش‌بینی روند قیمت سهام [۳۰، ۴۹]، پیش‌بینی شاخص سهام^{۵۵} [۳۱، ۵۰]، و پیش‌بینی قیمت آتی [۱۰، ۲۲] نیز مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. در بازار مالی ایران نیز محققان بسیاری

³⁹Chan ⁴⁰Levy processes ⁴¹noise ⁴²random size jump ⁴³Amster ⁴⁴non-increasing linear transaction costs ⁴⁵upper and lower solution method ⁴⁶payoff ⁴⁷parametric and nonparametric methods ⁴⁸binomial tree method ⁴⁹Black-Scholes method ⁵⁰finite differences method ⁵¹Fourier method ⁵²Monte Carlo simulations method ⁵³neural networks ⁵⁴support vector regression ⁵⁵stock index

از شبکه‌های عصبی برای پیش‌بینی بخش‌های مختلف بازار استفاده کرده‌اند [۵۴، ۵۶، ۵۵]. شبکه‌های عصبی نه تنها در زمینه‌های مالی، بلکه کاربردهای موفقی در زمینه‌های مختلفی همچون درک تصویر، تشخیص گفتار، کشف دارو، تشخیص الگو، پردازش گرافیکی، ارزیابی ریسک، سیستم کنترل، پیش‌بینی و طبقه‌بندی داشته‌اند [۱، ۱۵، ۴۱، ۱۷، ۲۷، ۳۷، ۴۰، ۵۱]. این موفقیت به دلیل قابلیت تقریب سرتاسری شبکه‌های عصبی است که تابع را به طور دقیق و بدون فرض هیچ رابطه ریاضی بین ورودی و خروجی آن، تقریب می‌زند.

روش شبکه عصبی، زیرمجموعه‌ای از الگوریتم‌های یادگیری ماشین هستند، چرا که به سیستم‌ها اجازه می‌دهند از داده‌ها یاد بگیرند و بدون اینکه به‌طور صریح برنامه‌ریزی شوند، بهبود یابند. شبکه‌های عصبی از مجموعه‌ای از رشته‌های عصبی^{۵۶} (واحدهای پردازش) که به‌صورت لایه‌ای سازماندهی شده‌اند، تشکیل می‌شوند و میان ورودی و خروجی قرار می‌گیرند. این ساختار به آن‌ها این امکان را می‌دهد که الگوها را شناسایی کنند و وابستگی‌ها را در داده‌ها یاد بگیرند. همچنین، شبکه‌های عصبی با استفاده از الگوریتم‌های یادگیری (مانند گرادینان کاهشی^{۵۷}) آموزش می‌بینند که به آن‌ها اجازه می‌دهند از داده‌های نمونه، الگوها و ویژگی‌ها را استخراج کنند [۳].

الگوریتم‌های یادگیری ممکن است به‌صورت سنتی و یا به‌صورت ماشین یادگیری حداکثری^{۵۸} باشند. سرعت یادگیری الگوریتم‌های سنتی (مثل کمترین مربعات ماشین بردار پشتیبان^{۵۹}) بسیار کندتر از حد مورد نیاز است. دو دلیل کلیدی سرعت یادگیری پایین عبارت است از: ۱) الگوریتم‌های یادگیری مبتنی بر گرادینان، از سرعت پایینی برای آموزش^{۶۰} شبکه‌های عصبی بهره می‌گیرند. ۲) تمام پارامترهای شبکه‌های عصبی به‌طور مکرر با استفاده از چنین الگوریتم‌های یادگیری تنظیم می‌شوند. پس با توجه به این دو مورد، انتخاب تعداد لایه‌های پنهان و رشته‌های عصبی هر لایه، تأثیر زیادی بر کیفیت مدل و بهینه‌سازی عملکرد آن دارد. در صورتی که در ماشین یادگیری حداکثری، لایه‌های پنهان نیاز به تنظیم ندارند. الگوریتم‌های مبتنی بر گرادینان کلاسیک ممکن است با مشکلات متعددی مانند مینیمم‌های محلی، نرخ یادگیری نامناسب و بیش از حد مناسب و غیره مواجه شوند. اما الگوریتم ماشین یادگیری حداکثری تمایل دارد به جواب‌های ساده دست یابد. ماشین یادگیری حداکثری، مقیاس‌پذیری بالاتر و پیچیدگی محاسبات کمتری دارد و محدودیت‌های بهینه‌سازی ملایم‌تری نسبت به یادگیری‌های سنتی از جمله کمترین مربعات ماشین بردار پشتیبان دارد. زمانی که نرخ یادگیری خیلی کوچک باشد، الگوریتم یادگیری بسیار کند همگرا می‌شود. با این حال، زمانی که نرخ یادگیری خیلی بزرگ باشد، الگوریتم یادگیری ناپایدار و واگرا می‌شود [۲۳، ۲۴]. با توجه به اینکه یادگیری مبتنی بر گرادینان در اکثر کاربردها بسیار وقت‌گیر است، پس در این پژوهش، الگوریتم ماشین یادگیری حداکثری بهبود یافته^{۶۱} بر پایه شبکه‌های عصبی لژاندر را برای ارزش‌گذاری اختیار مانع در نظر می‌گیریم.

در مقایسه با روش‌های پارامتریک مثل تفاضل متناهی، شبکه عصبی لژاندر از گسسته‌سازی اجتناب و کارایی راه‌حل را بهبود می‌بخشد. در این نوع الگوریتم شبکه عصبی، حاصل ضرب دو چندجمله‌ای لژاندر به‌عنوان تابع پایه رشته‌های عصبی پنهان انتخاب می‌شوند. همچنین، این الگوریتم، دو رشته عصبی ورودی دارد که برای دریافت اطلاعات مربوط به قیمت سهام و زمان تا تاریخ انقضا استفاده می‌شوند. زمانی که اختیار معامله حاوی چندین سهم باشد، اطلاعات سهام را می‌توان به‌طور جداگانه با افزودن رشته‌های عصبی در لایه ورودی، پردازش کرد. تنها رشته عصبی موجود در لایه خروجی، برای نمایش جواب عددی معادله دیفرانسیل است. جواب مسأله و مشتقات آن با استفاده از شبکه عصبی لژاندر بیان شده و با در نظر گرفتن شرایط نهایی و مرزی، مسأله ارزش‌گذاری اختیار معامله به یک دستگاه معادلات جبری تبدیل و از الگوریتم ماشین یادگیری حداکثری بهبود یافته برای به‌دست آوردن وزن‌های شبکه عصبی استفاده می‌گردد.

در ادامه، هدف ما به کارگیری روش شبکه عصبی لژاندر اشاره شده برای ارزش‌گذاری اختیار مانع دوگانه بی‌ارزش اروپایی^{۶۲} تحت مدل کاکس می‌باشد که به مدل واریانس کشسانی ثابت^{۶۳} (CEV) معروف است. کاکس این مدل را جهت نشان دادن رابطه معکوس بین قیمت دارایی پایه و نوسان‌پذیری آن معرفی کرد. اگر در مدل (۱.۱)، نوسان‌پذیری را به‌صورت تابع

⁵⁶neurons ⁵⁷gradient descent ⁵⁸extreme learning machine ⁵⁹least square support vector machine ⁶⁰train ⁶¹improved extreme learning machine ⁶²european double barrier knock-out option ⁶³constant elasticity of variance

$\sigma(S) = \delta S^\beta$ در نظر بگیریم، معادله زیر حاصل می‌شود [۱۲]:

$$(۱.۲) \quad \frac{\partial V(S, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \delta^2 S^{2\beta+2} \frac{\partial^2 V(S, t)}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V(S, t)}{\partial S} - rV(S, t) = 0, \quad B_l < S < B_u, \quad 0 < t < T,$$

که در آن $\sigma(S)$ تابع نوسان‌پذیری محلی^{۶۴}، β کشسانی نوسان‌پذیری^{۶۵} و δ پارامتر مقیاس ثابت نوسان‌پذیری لحظه‌ای اولیه^{۶۶} در زمان $t = 0$ را نشان می‌دهند و $\sigma_0 = \sigma(S_0) = \delta S_0^\beta$. اگر در معادله دیفرانسیل (۱.۲)، β برابر صفر در نظر گرفته شود، آنگاه مدل کاکس همان مدل بلک-شولز کلاسیک (۱.۱) خواهد بود. با توجه به اینکه در این مقاله به دنبال در نظر گرفتن مدلی کارآمدتر هستیم که به مدل واقعی بازار نزدیک‌تر باشد، تعمیمی از مدل کاکس را اتخاذ می‌کنیم. در این مدل، سود، که با q نشان می‌دهیم، به دارایی پایه تعلق می‌گیرد و پارامترهای نرخ بهره و سود تقسیمی به صورت تابعی از زمان می‌باشند [۴۲]:

$$(۲.۲) \quad \frac{\partial V(S, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \delta^2 S^{2\beta+2} \frac{\partial^2 V(S, t)}{\partial S^2} + (r(t) - q(t))S \frac{\partial V(S, t)}{\partial S} - r(t)V(S, t) = 0,$$

با شرایط نهایی و مرزی

$$(۳.۲) \quad \text{اختیار خرید: } \begin{cases} V(S, T) = \max(S - K, 0), & B_l < S < B_u, \\ V(B_l, t) = \Psi(t), \quad V(B_u, t) = \Phi(t), & 0 < t < T, \end{cases}$$

$$(۴.۲) \quad \text{اختیار فروش: } \begin{cases} V(S, T) = \max(K - S, 0), & B_l < S < B_u, \\ V(B_l, t) = \Psi(t), \quad V(B_u, t) = \Phi(t), & 0 < t < T, \end{cases}$$

که B_l و B_u ، به ترتیب، مانع‌های مرزی پایین و بالا هستند. تابع‌های $\Psi(t)$ و $\Phi(t)$ تخفیف‌هایی هستند که وقتی قیمت دارایی پایه به سطوح مانع مربوط برخورد کند، پرداخت می‌شوند. از این معادله بلک-شولز تعمیم‌یافته جهت ارزش‌گذاری اختیار مانع استفاده خواهد شد. در ادامه و در بخش روش‌شناسی پژوهش، تئوری حل مسأله بیان خواهد شد.

۳. روش‌شناسی پژوهش

در این بخش، ابتدا مباحث تئوری مورد نیاز برای پژوهش، مثل ویژگی‌های دیفرانسیلی چندجمله‌ای لژاندر و ضرب کرونگر^{۶۷} ماتریس‌ها بیان شده و سپس به حل مسأله می‌پردازیم.

در این مقاله، چندجمله‌ای‌های متعامد لژاندر به عنوان توابع فعال‌ساز^{۶۸} در لایه‌های داخلی شبکه عصبی مورد استفاده قرار می‌گیرند. چندجمله‌ای‌های لژاندر بر بازه $[-1, 1]$ طبق رابطه بازگشتی زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_0(x) &= 1, & \tilde{P}_1(x) &= x, \\ \tilde{P}_{n+1}(x) &= \frac{2n+1}{n+1} x \tilde{P}_n(x) - \frac{n}{n+1} \tilde{P}_{n-1}(x), & n &\geq 1. \end{aligned}$$

چندجمله‌ای‌های لژاندر نسبت به تابع وزن $w(x) = 1$ متعامد هستند، یعنی اگر $n \neq m$ ، آنگاه

$$\int_{-1}^{+1} \tilde{P}_m(x) \tilde{P}_n(x) dx = 0.$$

یادآور می‌شویم که قیمت و زمان نمی‌توانند مقادیری منفی باشند. بنابراین، از چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال‌یافته^{۶۹} به عنوان رشته‌های عصبی در لایه‌های داخلی استفاده می‌کنیم که به صورت $P_n(x) = \tilde{P}_n(2x - 1)$ تعریف می‌شوند. تابع انتقال

⁶⁴local volatility function ⁶⁵elasticity of volatility ⁶⁶initial instantaneous volatility ⁶⁷Kronecker product ⁶⁸activation functions ⁶⁹shifted Legendre polynomials

$x \mapsto 2x - 1$ بازه $[0, 1]$ را به بازه $[-1, 1]$ نگاشت می‌کند. چندجمله‌ای‌های $P_n(x)$ طبق رابطه زیر بر بازه $[0, 1]$ متعامد هستند، اگر $n \neq m$

$$\int_0^1 P_m(x)P_n(x)dx = \frac{1}{2n+1}\delta_{mn}.$$

چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال یافته به صورت صریح از رابطه زیر به دست می‌آیند:

$$P_n(x) = (-1)^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} (-x)^k.$$

در جدول زیر، تعدادی از چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال یافته را مشاهده می‌کنیم:

جدول ۱. نمونه‌هایی از چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال یافته.

Table 1: Examples of shifted Legendre polynomials.

n	$P_n(x)$
۰	۱
۱	$2x - 1$
۲	$6x^2 - 6x + 1$
۳	$20x^3 - 30x^2 + 12x - 1$
۴	$70x^4 - 140x^3 + 90x^2 - 20x + 1$
۵	$252x^5 - 630x^4 + 560x^3 - 210x^2 + 30x - 1$

قضیه ۱.۳. فرض کنیم بردار $P(S) = [P_0(S), P_1(S), \dots, P_{N+1}(S)]^T$ به صورت $P(S)$ تعریف شود که $P_n(S)$ ، $n = 0, 1, \dots, N+1$ امین چندجمله‌ای لژاندر انتقال یافته در بازه $[0, 1]$ بوده و بردار $P'(S)$ به صورت $P'(S) = [P'_0(S), P'_1(S), \dots, P'_{N+1}(S)]^T$ تعریف شود که $P'_n(S)$ ، $n = 0, 1, \dots, N+1$ مشتق مرتبه اول چندجمله‌ای لژاندر انتقال یافته $P_n(S)$ است. همچنین، با استفاده از ویژگی‌های مشتق چندجمله‌ای لژاندر انتقال یافته داریم:

$$P'_{n+1}(S) = P'_{n-1}(S) + 2(2n+1)P_n(S).$$

بنابراین، به کمک رابطه بازگشتی فوق، فرم ماتریسی $P'(S) = MP(S)$ را خواهیم داشت که ماتریس M به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 10 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 14 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 10 & 0 & 18 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 6 & 0 & 14 & 0 & \dots & 2(2N+1) & 0 \\ 2 & 0 & 10 & 0 & 18 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(N+2) \times (N+2)}.$$

تعریف ۲.۳. اگر A یک ماتریس $p_1 \times p_2$ و B یک ماتریس $p_3 \times p_4$ باشد که $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{R}^+$ ، آنگاه ضرب کرونکر دو ماتریس A و B ، ماتریسی از مرتبه $p_1 p_2 \times p_3 p_4$ است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1p_2}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p_11}B & \cdots & a_{p_1p_2}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & \cdots & a_{11}b_{1p_4} & \cdots & a_{1p_2}b_{11} & \cdots & a_{1p_2}b_{1p_4} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11}b_{p_31} & \cdots & a_{11}b_{p_3p_4} & \cdots & a_{1p_2}b_{p_31} & \cdots & a_{1p_2}b_{p_3p_4} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{p_11}b_{11} & \cdots & a_{p_11}b_{1p_4} & \cdots & a_{p_1p_2}b_{11} & \cdots & a_{p_1p_2}b_{1p_4} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p_11}b_{p_31} & \cdots & a_{p_11}b_{p_3p_4} & \cdots & a_{p_1p_2}b_{p_31} & \cdots & a_{p_1p_2}b_{p_3p_4} \end{bmatrix}.$$

اگر ماتریس های $A \in C^{k_1 \times k_2}$ ، $B \in C^{k_3 \times k_4}$ ، $D \in C^{k_5 \times k_6}$ و $E \in C^{k_7 \times k_8}$ را داشته باشیم به طوری که $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7, k_8$ ثابت های مثبت هستند، آنگاه ضرب کرونکر ماتریس ها در ویژگی های زیر صدق می کند:

$$(A \otimes B)(D \otimes E) = (AD) \otimes (BE),$$

$$A \otimes B \in C^{k_1 k_2 \times k_3 k_4}, \quad D \otimes E \in C^{k_5 k_6 \times k_7 k_8}.$$

از ضرب کرونکر دو چندجمله ای لژاندر انتقال یافته $P(S) = [P_0(S), P_1(S), \dots, P_{N+1}(S)]^T$ و $P(t) = [P_0(t), P_1(t), \dots, P_{N+1}(t)]^T$ داریم:

$$\zeta(S, t) = P(S) \otimes P(t) = [P_0(S)P_0(t), P_0(S)P_1(t), \dots, P_0(S)P_{N+1}(t),$$

$$P_1(S)P_0(t), P_1(S)P_1(t), \dots, P_1(S)P_{N+1}(t), \dots,$$

$$P_{N+1}(S)P_0(t), P_{N+1}(S)P_1(t), \dots, P_{N+1}(S)P_{N+1}(t)]^T.$$

$\zeta(S, t)$ تابع پایه رشته های عصبی پنهان است.

اکنون تئوری ارزش گذاری اختیار خرید مانع دوگانه بی ارزش با استفاده از روش شبکه عصبی توصیف می شود. توجه داشته باشید که روند ارزش گذاری اختیار فروش دوگانه همانند اختیار خرید است.

قضیه ۳.۳. تابع پیوسته دو متغیره $V(S, t) : [B_l, B_u] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. به ازای $N \in \mathbb{N}$ ، مقادیر ثابت γ_{ij} ، $i, j = 0, 1, \dots, N+1$ و $P_0(S), P_1(S), \dots, P_{N+1}(S)$ انتقال یافته و $P_0(t), P_1(t), \dots, P_{N+1}(t)$ وجود دارند به طوری که شبکه عصبی لژاندر انتقال یافته با $(N+1)^2$ رشته عصبی، به صورت زیر خواهد بود:

$$(۱.۳) \quad \tilde{V}(S, t) = \sum_{i=0}^{N+1} \sum_{j=0}^{N+1} \gamma_{ij} P_i(S) P_j(t) = \zeta^T(S, t) \Gamma,$$

که در آن

$$\Gamma = [\gamma_{00}, \gamma_{01}, \dots, \gamma_{0,N+1}, \gamma_{10}, \gamma_{11}, \dots, \gamma_{1,N+1}, \dots, \gamma_{N+1,0}, \gamma_{N+1,1}, \dots, \gamma_{N+1,N+1}]^T,$$

و $\tilde{V}(S, t)$ جواب تقریبی معادله (۲.۲) است. آنگاه رابطه زیر برقرار است

$$\begin{aligned} \|V(S, t) - \tilde{V}(S, t)\|^2 &= \iint_D [V(S, t) - \tilde{V}(S, t)]^2 dS dt \\ &= \iint_D \left[V(S, t) - \sum_{i=0}^{N+1} \sum_{j=0}^{N+1} \gamma_{ij} P_i(S) P_j(t) \right]^2 dS dt < \varepsilon, \end{aligned}$$

که ε عددی بسیار کوچک است.

□

اثبات. [۵۳] را ببینید.

مرتبه همگرایی روش شبکه عصبی برای تابع یک متغیره، تحت قضیه زیر بیان می‌شود.

قضیه ۴.۳. (مرتبه همگرایی). تابع $V \in C^\infty(0, 1)$ را در نظر گرفته و فرض کنیم که $\tilde{V}(S) = \sum_{i=0}^{N-1} \gamma_i P_i(S)$ ، تقریب تابع V و ε_N ، خطای تقریب با N رشته عصبی پنهان باشد. آنگاه $|\varepsilon_N(S)| = O(2^{-N+1})$.

اثبات. فرض کنیم S_0 به نحوی انتخاب شود که $|S - S_0| < \frac{1}{2}$. با در نظر گرفتن بسط سری تیلور V حول نقطه S_0 داریم:

$$(۲.۳) \quad V(S) = \frac{V(S_0)}{0!} (S - S_0)^0 + \dots + \frac{V^{(k)}(S_0)}{k!} (S - S_0)^k + \dots = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{V^{(i)}(S_0)}{i!} (S - S_0)^i.$$

معادله (۲.۳)، را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$(۳.۳) \quad V(S) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{V^{(i)}(S_0)}{i!} (S - S_0)^i + \sum_{i=N}^{+\infty} \frac{V^{(i)}(S_0)}{i!} (S - S_0)^i = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{V^{(i)}(S_0)}{i!} (S - S_0)^i + O((S - S_0)^N).$$

بنابراین، برای خطای تقریب $\tilde{V}(S)$ داریم:

$$\begin{aligned} |\varepsilon_N(S)| &= |V(S) - \tilde{V}(S)| = \left| \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{V^{(i)}(S_0)}{i!} (S - S_0)^i - \sum_{i=0}^{N-1} \gamma_i P_i(S) \right| \\ &= \left| \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{V^{(i)}(S_0)}{i!} (S - S_0)^i - \gamma_i P_i(S) \right) + \sum_{i=N}^{+\infty} \frac{V^{(i)}(S_0)}{i!} (S - S_0)^i \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^{N-1} \left| \frac{V^{(i)}(S_0)}{i!} (S - S_0)^i - \gamma_i P_i(S) \right| + \sum_{i=N}^{+\infty} \frac{|V^{(i)}(S_0)|}{i!} |S - S_0|^i \leq 2O(|S - S_0|^N), \end{aligned}$$

□

از این رو $|\varepsilon_N(S)| = O(2^{-N+1})$.

مطابق با رابطه (۱.۳)، مشتقات تابع قیمت اختیار مانع دوگانه را می‌توان به صورت زیر تقریب زد:

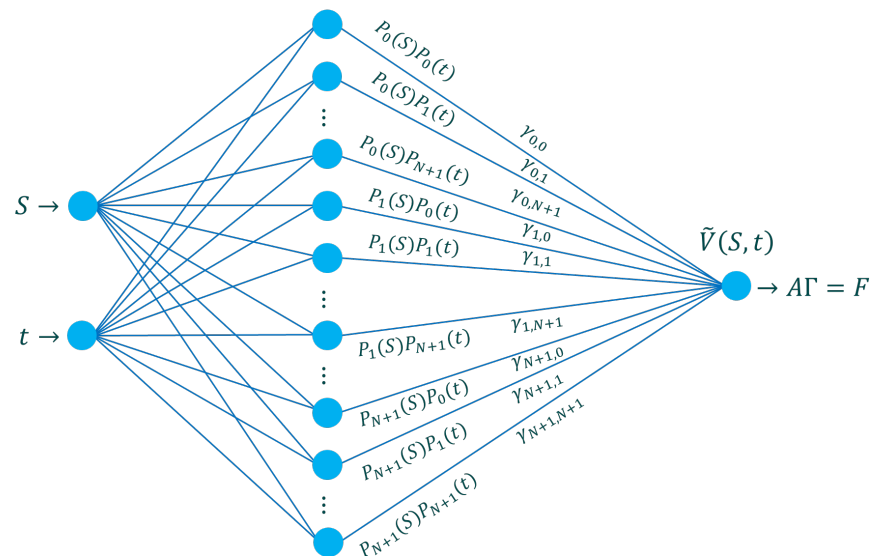
$$(۴.۳) \quad \frac{\partial V(S, t)}{\partial S} \simeq \zeta^T(S, t) (M^T \otimes I) \Gamma,$$

$$(۵.۳) \quad \frac{\partial^2 V(S, t)}{\partial S^2} \simeq \zeta^T(S, t) ((M^T)^2 \otimes I) \Gamma,$$

$$(۶.۳) \quad \frac{\partial V(S, t)}{\partial t} \simeq \zeta^T(S, t) (I \otimes M^T) \Gamma.$$

فرض کنیم $\Delta S = \frac{B_u - B_l}{m}$ و $\Delta t = \frac{T}{m}$ ، به ترتیب، طول گام مکانی و زمانی یکنواخت و $S_i = B_l + i\Delta S$ ، $i = 0, 1, \dots, m$ ، $t_j = j\Delta t$ ، $j = 0, 1, \dots, m$ ، نقاط هم محلی متساوی الفاصله، به ترتیب، روی بازه $[B_l, B_u]$ و $[0, T]$ باشند. با بازنویسی مسأله (۲.۲)-(۳.۲) براساس روابط (۱.۳)-(۶.۳)، و جایگذاری نقاط هم محلی مفروض، دستگاه معادلات خطی زیر به دست می آید:

$$(۷.۳) \quad \begin{cases} \zeta^T(S_i, t_j) \left[(I \otimes M^T) + \frac{1}{\Gamma} \delta^\gamma S_i^{\gamma\beta+\gamma} ((M^T)^\gamma \otimes I) + (r(t_j) - q(t_j)) S_i (M^T \otimes I) - r(t_j) (I \otimes I) \right] \Gamma = 0, \\ \zeta^T(S_i, T) \Gamma = \max(S_i - K, 0), \\ \zeta^T(B_l, t_j) \Gamma = \Psi(t_j), \\ \zeta^T(B_u, t_j) \Gamma = \Phi(t_j). \end{cases}$$



شکل ۱. نمودار الگوریتم شبکه عصبی ماشین یادگیری با پایه چندجمله‌ای لژاندر انتقال یافته برای ارزش‌گذاری اختیار معامله.

Figure 1: Diagram of a learning machine neural network algorithm with a shifted Legendre polynomial basis for option valuation.

دستگاه معادلات (۷.۳) را می‌توان به فرم ماتریسی زیر نوشت:

$$(۸.۳) \quad A\Gamma = F,$$

$$A = \begin{bmatrix} \zeta^T(S_i, t_j) \left[(I \otimes M^T) + \frac{1}{\Gamma} \delta^\gamma S_i^{\gamma\beta+\gamma} ((M^T)^\gamma \otimes I) + (r(t_j) - q(t_j)) S_i (M^T \otimes I) - r(t_j) (I \otimes I) \right] \\ \zeta^T(S_i, T) \\ \zeta^T(B_l, t_j) \\ \zeta^T(B_u, t_j) \end{bmatrix},$$

و

$$F = \begin{bmatrix} \circ \\ \max(S_i - K, \circ) \\ \Psi(t_j) \\ \Phi(t_j) \end{bmatrix}.$$

با حل دستگاه معادلات خطی (۸.۳)، ضرایب مجهول شبکه عصبی لژاندر به نحوی دست می‌آید که $\|V(S, t) - \tilde{V}(S, t)\|^2$ مینیمم شود. این روند در شکل ۱ نمایش داده شده است. برای هر لایه درونی در دستگاه (۸.۳)، جهت بهینه‌سازی وزن لایه پنهان، روش ماشین یادگیری Γ از رویکرد حداقل مربعات به جای روند تکرارهای متوالی استفاده می‌کند، طوری که نرم ۲ خطای خروجی را به حداقل برساند، یعنی جواب بهینه دستگاه (۸.۳) به صورت $\Gamma^* = \arg \min_{\Gamma} \|A\Gamma - F\|^2$ است.

با توجه به وضعیت ماتریس A ، حل دستگاه (۸.۳) به سه حالت زیر منجر می‌شود:

(۱) اگر A ، ماتریس مربعی و معکوس‌پذیر باشد آنگاه $\Gamma = A^{-1}F$.

(۲) اگر ماتریس A مستطیلی باشد، آنگاه $\Gamma^* = A^T(\lambda I + AA^T)^{-1}F$ و Γ^* جواب کمترین مربعات $A\Gamma = F$ است، یعنی $\Gamma^* = \arg \min_{\Gamma} \|A\Gamma - F\|^2$.

تنظیم شود.

(۳) اگر A ماتریس منفرد باشد آنگاه $\Gamma^* = A^T(\lambda I + AA^T)^{-1}F$.

بدین ترتیب، وزن‌های مجهول شبکه عصبی لژاندر به دست می‌آیند.

۴. تحلیل داده‌ها و یافته‌ها

در این بخش نتایج حاصل از تئوری مسأله که در بخش روش‌شناسی پژوهش مطرح شده را بررسی می‌کنیم. مقدار N و m مطرح شده در بخش روش‌شناسی پژوهش به ترتیب ۲۵ و ۱۰۰ در نظر گرفته می‌شود. نتایج عددی ارائه شده از سیستمی با مشخصات 3.19GHz CPU @ 3.20GHz Intel Core(TM) i5-6500 و با استفاده از نرم‌افزار MATLAB R2015a استخراج شده است. مسأله ارزش‌گذاری اختیار خرید مانع دوگانه به کمک الگوریتم شبکه عصبی و با در نظر گرفتن سه حالت مختلف زیر برای پارامترهای نرخ بهره و سود تقسیمی حل می‌شود [۴۵]:

$$۱) \quad r(t) = 0.075 + 0.05t, \quad q(t) = 0.05,$$

$$۲) \quad r(t) = 0.1 + 0.05e^{-t}, \quad q(t) = 0.03 + 0.001e^{0.1t},$$

$$۳) \quad r(t) = 0.1 + 0.0005t, \quad q(t) = 0.02.$$

تاریخ انقضا برای حل مسأله بر اساس سال در نظر گرفته شده است. دوره‌های منتخب برای حل مسأله ارزش‌گذاری اختیار مانع دوگانه (۲.۲)، ۳ ماه، ۴ ماه، ۶ ماه و ۱ سال می‌باشند. قیمت توافقی برابر ۰/۵ و قیمت دارایی پایه از بازه $[0, 1]$ انتخاب می‌شوند. کشسانی نوسان‌پذیری در رابطه $\sigma(S) = \delta S^\beta$ ، مقادیر منفی می‌پذیرد، زیرا با افزایش قیمت دارایی پایه، $\sigma(S)$ باید کران‌دار باقی بماند.

شکل ۲، قیمت اختیار خرید مانع دوگانه را، برای سه حالت مختلف r و q بر اساس عمر باقی‌مانده اختیار تا زمان تاریخ انقضا با دوره سررسید ۱ ساله، نشان می‌دهد. همان‌طور که در شکل دیده می‌شود، در قیمت‌های بالا، هر چقدر عمر باقی‌مانده اختیار تا زمان سررسید بیشتر باشد، قیمت اختیار نیز بالاتر خواهد بود. اما در قیمت‌های پایین، هر چقدر عمر باقی‌مانده اختیار تا زمان سررسید کمتر باشد، قیمت اختیار بالاتر خواهد بود.

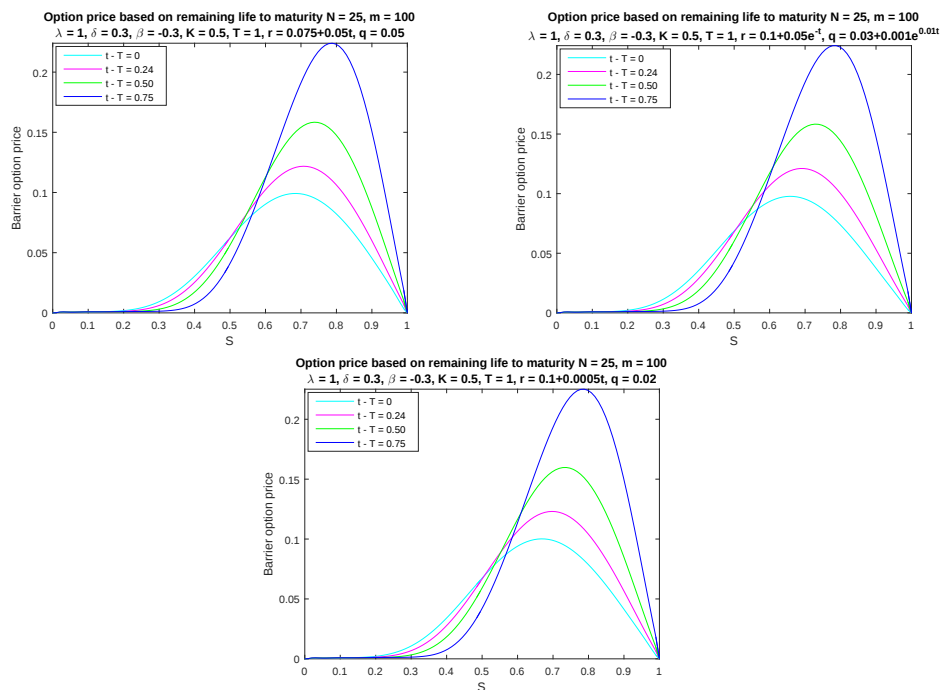
شکل ۳، قیمت اختیار مانع برای $r(t) = 0.075 + 0.05t$ و $q(t) = 0.05$ بر اساس β های مختلف با تاریخ سررسید ۶ ماهه را نشان می‌دهد. شکل ۴، قیمت اختیار مانع برای $r(t) = 0.1 + 0.05e^{-t}$ و $q(t) = 0.03 + 0.001e^{0.1t}$ بر

اساس β های مختلف با تاریخ سررسید ۳ ماهه را نشان می‌دهد. شکل ۵، قیمت اختیار مانع برای $r(t) = 0.1 + 0.0005t$ و $q(t) = 0.2$ بر اساس β های مختلف با تاریخ سررسید ۴ ماهه را ارائه می‌کند.

در شکل‌های ۳-۵، β های مختلف از مجموعه $\{-8, -6, -4, -2\}$ انتخاب شده‌اند. در هر کدام از این شکل‌ها، حالت‌های مختلفی از قیمت اختیار معامله را بر حسب عمر باقی‌مانده تا زمان سررسید، یعنی $t \in \{0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}\}$ ، ملاحظه می‌کنیم. این شکل‌ها بیان‌گر این هستند که در قیمت‌های بزرگتر از قیمت توافقی، هر چقدر β افزایش یابد، قیمت اختیار خرید مانع نیز افزایش می‌یابد و در قیمت‌های پایین‌تر از قیمت توافقی، هر چقدر β کاهش یابد، قیمت اختیار خرید مانع نیز افزایش می‌یابد.

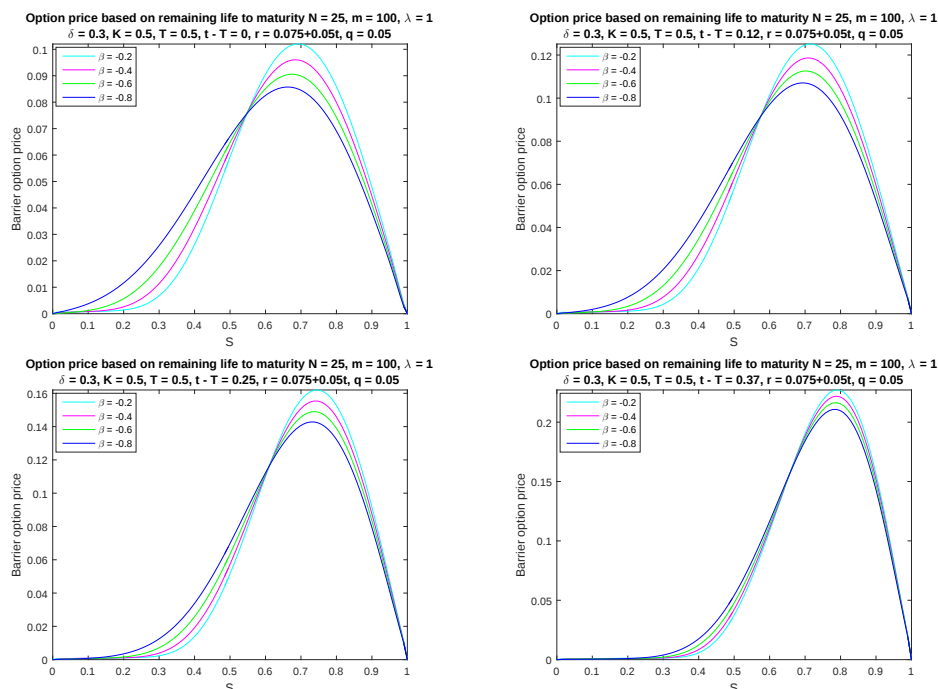
شکل‌های ۶-۸، قیمت اختیار خرید مانع دوگانه برای سه حالت مختلف r و q را بر اساس δ های مختلف نمایش می‌دهند. δ در این شکل‌ها از مجموعه $\{0.2, 0.3, 0.4, 0.5\}$ انتخاب شده است. علاوه بر این، در این شکل‌ها قیمت اختیار مانع به ازای عمرهای مختلف باقی‌مانده اختیار تا تاریخ انقضا، یعنی $t \in \{0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}\}$ ، نشان داده شده است. از این شکل‌ها می‌توان نتیجه گرفت که هر چقدر قیمت دارایی پایه نسبت به قیمت توافقی افزایش یابد و δ نیز کاهش یابد، قیمت اختیار خرید مانع نیز افزایش یافته و هر چقدر قیمت دارایی پایه نسبت به قیمت توافقی کاهش یابد و δ نیز افزایش یابد، قیمت اختیار خرید مانع نیز افزایش می‌یابد.

شکل ۹، زمان اجرای برنامه را به ازای N و m های مختلف برای سه مثال نشان می‌دهد. همان‌طور که دیده می‌شود، زمان اجرای برنامه پایین می‌باشد.



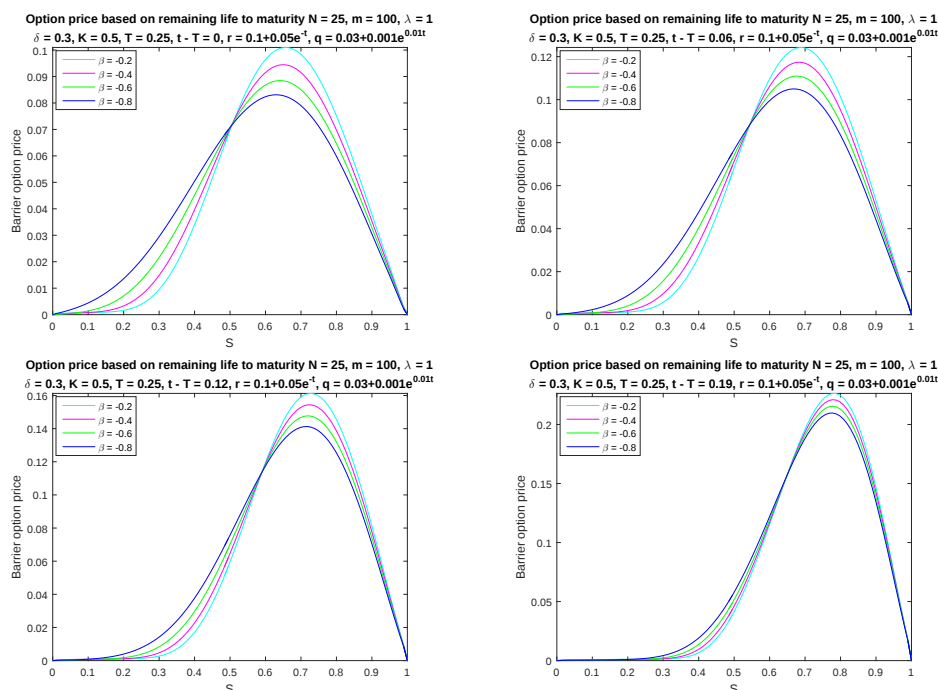
شکل ۲. قیمت اختیار مانع برای سه حالت مختلف r و q بر اساس عمر باقی‌مانده اختیار.

Figure 2: Barrier option price for three different cases of r and q based on the remaining life of the option.



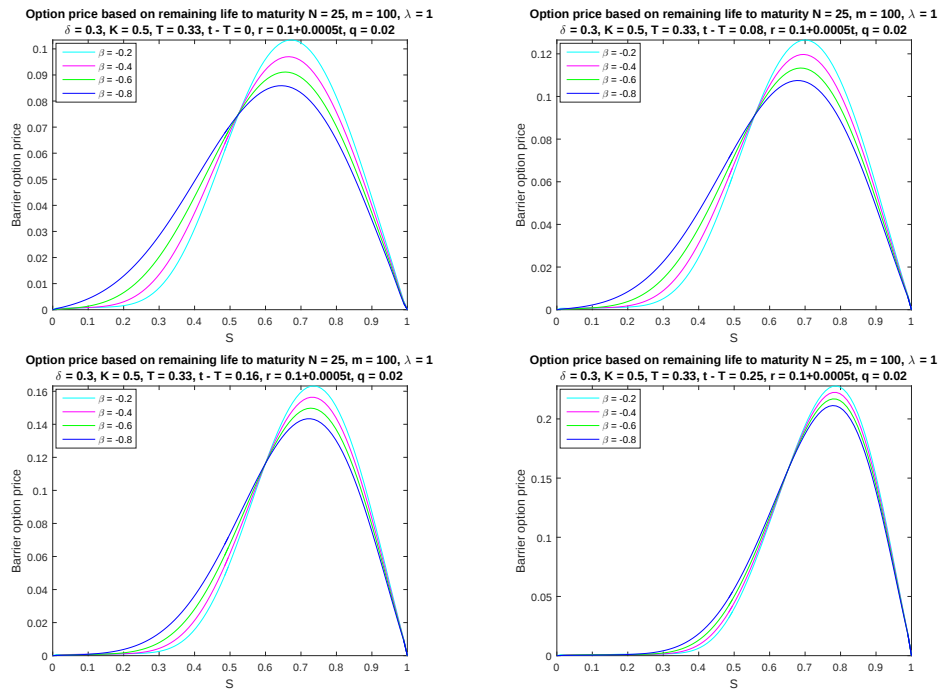
شکل ۳. قیمت اختیار مانع برای حالت اول r و q بر اساس مقادیر مختلف β .

Figure 3: Barrier option price for the first case of r and q based on different values of β .



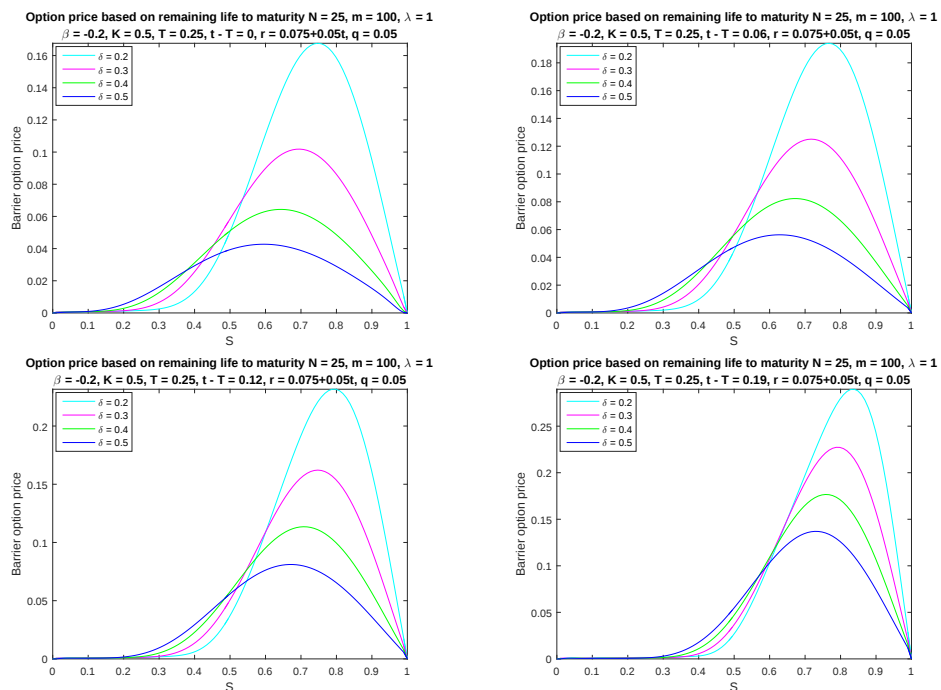
شکل ۴. قیمت اختیار مانع برای حالت دوم r و q بر اساس مقادیر مختلف β .

Figure 4: Barrier option price for the second case of r and q based on different values of β .



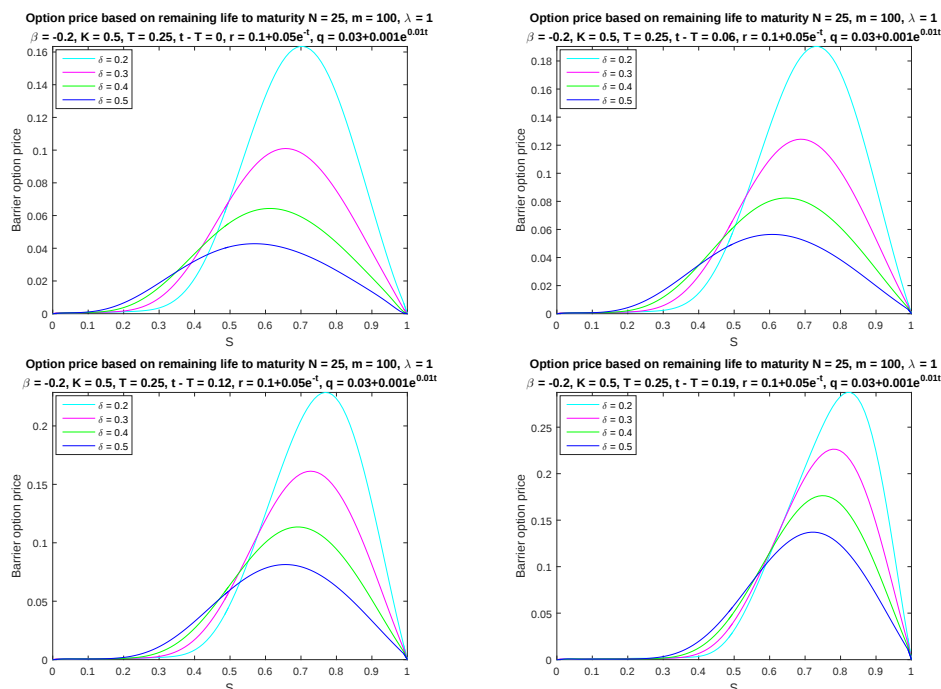
شکل ۵. قیمت اختیار مانع برای حالت سوم r و q بر اساس مقادیر مختلف از β .

Figure 5: Barrier option price for the third case of r and q based on different values of β .



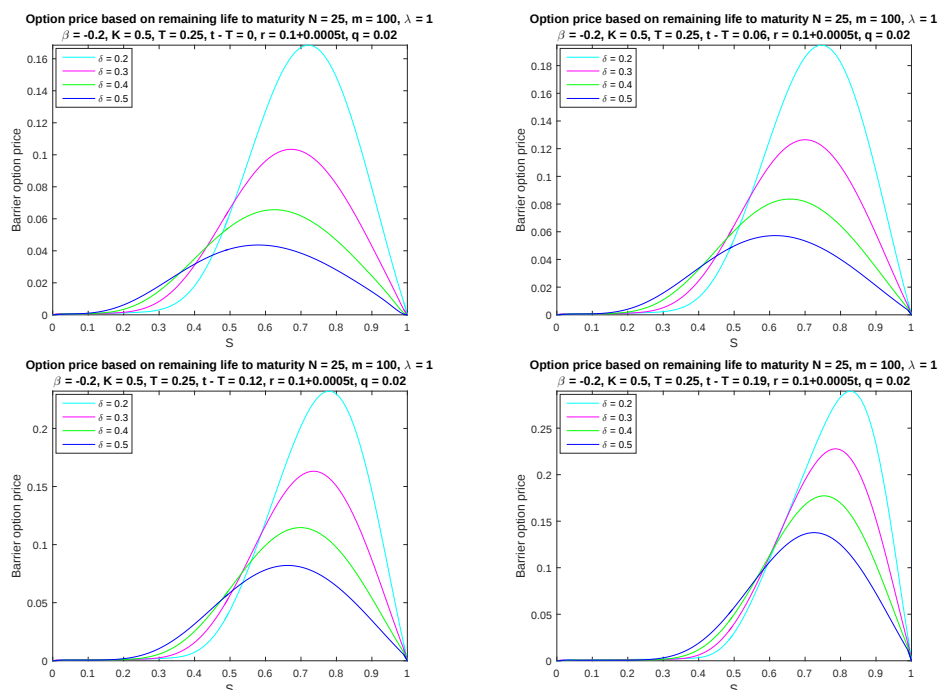
شکل ۶. قیمت اختیار مانع برای حالت اول r و q بر اساس مقادیر مختلف از δ .

Figure 6: Barrier option price for the first case of r and q based on different values of δ .



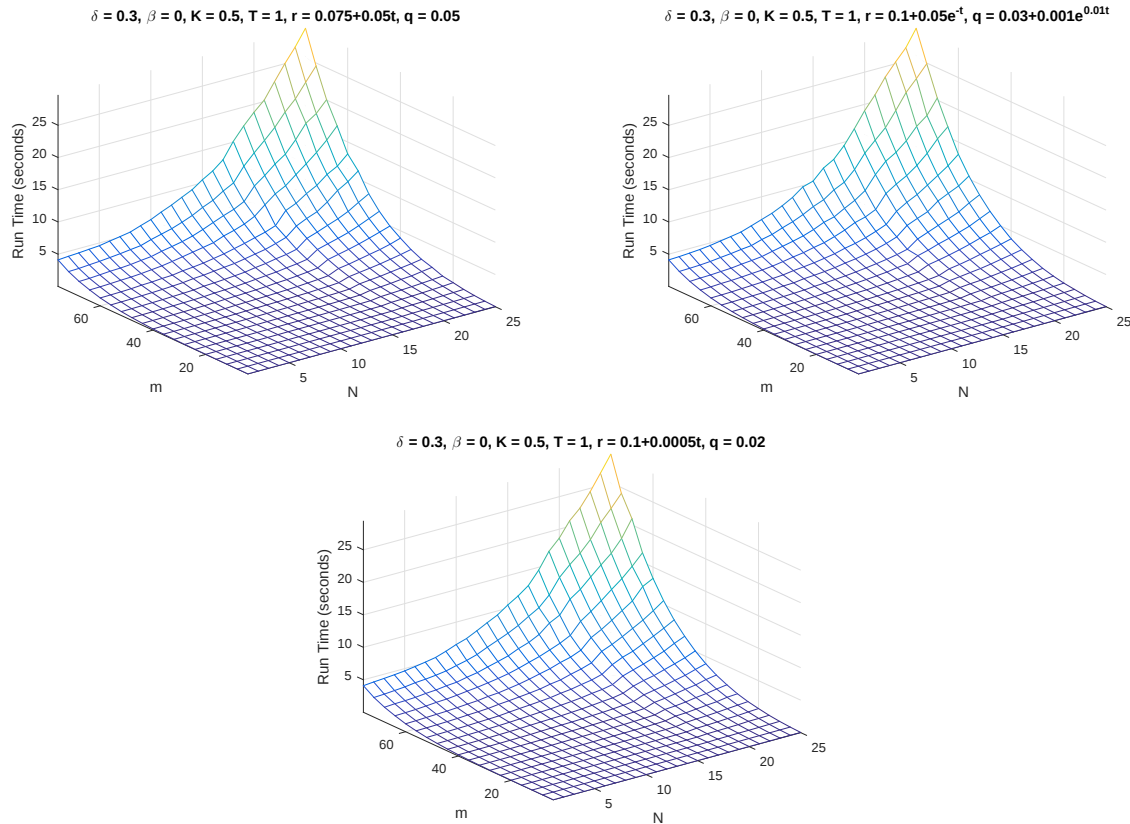
شکل ۷. قیمت اختیار مانع برای حالت دوم r و q بر اساس مقادیر مختلف از δ .

Figure 7: Barrier option price for the second case of r and q based on different values of δ .



شکل ۸. قیمت اختیار مانع برای حالت سوم r و q بر اساس مقادیر مختلف از δ .

Figure 8: Barrier option price for the third case of r and q based on different values of δ .



شکل ۹. زمان اجرای برنامه برای تعیین قیمت اختیار معامله به ازای N و m های مختلف.

Figure 9: Running time of the program to determine the option price for different N and m .

۵. بحث و نتیجه‌گیری

در این پژوهش، به کمک روش شبکه عصبی لژاندر مبتنی بر الگوریتم ماشین یادگیری حداکثری بهبود یافته، ارزش‌گذاری اختیارات مالی مانع دوگانه تحت مدل واریانس کشسانی ثابت تعمیم‌یافته مورد بررسی قرار گرفته است. روش شبکه عصبی در ارزش‌گذاری اختیارات مالی معامله برای افزایش سرعت تصمیم‌گیری و بهبود پیش‌بینی‌های بازار استفاده می‌شود. شبکه‌های عصبی با یادگیری از داده‌های تاریخی، می‌توانند حرکات بازار را پیش‌بینی کنند. همچنین، شبکه‌های عصبی با توانایی تجزیه و تحلیل مقادیر زیادی از داده‌های تاریخی در زمان کوتاه می‌توانند الگوها، روابط پیچیده در داده‌ها و استراتژی‌های پوشش ریسک بهینه را شناسایی کنند چیزهایی که معامله‌گران انسانی ممکن است نادیده بگیرند. علاوه بر این، شبکه‌های عصبی، معامله‌گران را قادر می‌سازند تا از سبد سهام خود در برابر شرایط نامطلوب بازار به‌طور مؤثر محافظت کنند. در این مقاله، پارامترهای نرخ بهره بدون ریسک و سود تقسیمی مدل ارزش‌گذاری به صورت وابسته به زمان در نظر گرفته شده تا مدل پیشنهادی به مدل واقعی بازار نزدیک‌تر شود. حاصل ضرب کرونر چندجمله‌ای‌های لژاندر به عنوان توابع پایه روش پیشنهادی در نظر گرفته شده است. روند الگوریتم به‌طور کامل شرح داده شده و ضمن بررسی نظری روش، با ارائه شبیه‌سازی‌های عددی مناسب عملکرد آن مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج عددی حاصل، صحت روش پیشنهاد شده را نشان می‌دهند. با توجه به مؤثر بودن روش بررسی شده، از این روش می‌توان برای ارزش‌گذاری انواع اختیارات مالی معامله و همچنین برای محاسبه نوسانات ضمنی استفاده کرد.

۶. پیشنهادات و محدودیت‌ها

برای تحقیقات آتی می‌توان موارد زیر را لحاظ کرد:

- (۱) روش مطرح شده در این پژوهش را می‌توان برای ارزش‌گذاری سایر اختیار معامله‌ها نیز به کار برد.
- (۲) سایر توابع پایه مانند توابع هرمیت ^{۷۰}، لاگر ^{۷۱}، ژاکوبی ^{۷۲} و چبیشف ^{۷۳} می‌توانند به عنوان توابع پایه شبکه‌های پنهان انتخاب شوند.

۷. تشکر و قدردانی

این طرح با استفاده از اعتبار ویژه پژوهشی دانشگاه مازندران اجرا گردید.

مراجع

- [1] M. B. Abdulla, A. L. Costa and R. L. Sousa, Probabilistic identification of subsurface gypsum geohazards using artificial neural networks, *Neural Comput. Appl.*, **29** (2018) 1377–1391. <https://doi.org/10.1007/s00521-016-2655-3>
- [2] P. Amster, C. G. Averbuj, M. C. Mariani and D. Rial, A Black-Scholes option pricing model with transaction costs, *J. Math. Anal. Appl.*, **303** (2005) 688–695. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2004.08.067>
- [3] M. Awad and R. Khanna, *Efficient learning machines: theories, concepts, and applications for engineers and system designers*, Springer nature, 2015.
- [4] P. Basu, Capital adjustment cost and inconsistency in inconsistency dynamic panel models with fixed effects, *Ger. Econ. Rev.*, **20** (2019) 1002–1018. <https://doi.org/10.1111/geer.12202>
- [5] S. Becker, P. Cheridito, A. Jentzen and T. Welte, Solving high-dimensional optimal stopping problems using deep learning, *Eur. J. Appl. Math.*, **32** (2021) 470–514. <https://doi.org/10.1017/S0956792521000073>
- [6] F. Black and M. Scholes, The pricing of options and corporate liabilities, *J. Polit. Econ.*, **81** (1973) 637–654. <https://doi.org/10.1086/260062>
- [7] L. Cao and F. E. Tay, Financial forecasting using support vector machines, *Neural Comput. Appl.*, **10** (2001) 184–192. <https://doi.org/10.1007/s005210170010>
- [8] P. Carr, M. Stanley and D. Madan, Option valuation using the fast fourier transform, *J. Comput. Finance*, **2** (2001) 61–73.
- [9] T. Chan, Pricing contingent claims on stocks driven by Levy processes, *Ann. Appl. Probab.*, **9** (1999) 504–528.
- [10] Y. Chen, X. Xie, T. Zhang, J. Bai and M. Hou, A deep residual compensation extreme learning machine and applications, *J. Forecast.*, **39** (2020) 986–999. <https://doi.org/10.1002/for.2663>
- [11] R. Clere, A new way to estimate cost of capital, *J. Int. Fin. Manag. Acc.*, **4** (2019) 223–249.
- [12] J. Cox, Notes on option pricing I: constant elasticity of variance diffusions, *J. Portfolio Manage.*, **22** (1996) 15–17.
- [13] J. C. Cox, S. A. Ross and M. Rubinstein, Option pricing: a simplified approach, *J. Financ. Econ.*, **7** (1979) 229–263. [https://doi.org/10.1016/0304-405X\(79\)90015-1](https://doi.org/10.1016/0304-405X(79)90015-1)

⁷⁰Hermit ⁷¹Laguerre ⁷²Jacobi ⁷³Chebyshev

- [14] A. Conze and Viswanathan, Path dependent options: The case of lookback options, *J. Financ.*, **46** (1991) 1893–907. <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1991.tb04648.x>
- [15] L. Deng and D. Yu, Deep Learning: Methods and Applications, *Found. Trends Signal Process.*, **7** (2014) 197–387. <http://dx.doi.org/10.1561/20000000039>
- [16] D. Dufresne, Laguerre series for Asian and other options, *Math. Finance*, **10** (2000) 407–428. <https://doi.org/10.1111/1467-9965.00101>
- [17] A. K. Dwivedi, Artificial neural network model for effective cancer classification using microarray gene expression data, *Neural Comput. Appl.*, **29** (2018) 1545–1554. <https://doi.org/10.1007/s00521-016-2701-1>
- [18] W. Fang, S. Ding, Y. Li, W. Zhou and N. Xiong, OKRA: optimal task and resource allocation for energy minimization in mobile edge computing systems, *Wirel. Netw.*, **25** (2019) 2851–2867. <https://doi.org/10.1007/s11276-019-02000-y>
- [19] R. Gencay and M. Qi, Pricing and hedging derivative securities with neural networks: Bayesian regularization, early stopping, and bagging, *IEEE Trans. Neural Netw.*, **12** (2001) 726–734. <https://doi.org/10.1109/72.935086>
- [20] P. Glasserman, *Monte Carlo methods in financial engineering*, Springer, New York, 2004.
- [21] J. Han and A. Jentzen, Deep learning-based numerical methods for high-dimensional parabolic partial differential equations and backward stochastic differential equations, *Commun. Math. Stat.*, **5** (2017) 349–380. <https://doi.org/10.1007/s40304-017-0117-6>
- [22] M. Hou, Y. Yang, T. Liu and W. Peng, Forecasting time series with optimal neural networks using multi-objective optimization algorithm based on AICc, *Front. Comput. Sci.*, **12** (2018) 1261–1263. [https://doi.org/10.1016/S0925-2312\(03\)00372-2](https://doi.org/10.1016/S0925-2312(03)00372-2)
- [23] G. B. Huang, Q. Y. Zhu and C. K. Siew, Extreme learning machine: theory and applications, *Neurocomputing*, **70**(1) (2006) 489–501.
- [24] G. B. Huang, H. Zhou and X. Ding, Extreme learning machine for regression and multiclass classification, *IEEE Trans Syst Man Cybernet Part B Cybernet*, **42**(2) (2012) 513–529.
- [25] J. C. Hull, *Fundamentals of futures and options markets*, Pearson, California, 2005.
- [26] J. C. Hull, *Options, Futures and Other Derivatives*, Pearson Education India, 2003.
- [27] Y. Jiao, X. Pan, Z. Zhao and C. Hou, Learning sparse partial differential equations for vector-valued images, *Neural Comput. Appl.*, **29** (2018) 1205–1216. <https://doi.org/10.1007/s00521-016-2623-y>
- [28] K. Kim, Financial time series forecasting using support vector machines, *Neurocomputing*, **55** (2003) 307–319. [https://doi.org/10.1016/S0925-2312\(03\)00372-2](https://doi.org/10.1016/S0925-2312(03)00372-2)
- [29] M. Kohler, A. Krzyak and N. Todorovic, Pricing of high-dimensional American options by neural networks, *Math. Finance*, **20** (2010) 384–410. <https://doi.org/10.1111/j.1467-9965.2010.00404.x>
- [30] L. Lei, Wavelet neural network prediction method of stock price trend based on rough set attribute reduction, *Appl. Soft Comput.*, **62** (2018) 923–932. <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2017.09.029>
- [31] W. Leigh, R. Purvis and J. M. Ragusa, Forecasting the NYSE composite index with technical analysis, pattern recognizer, neural network, and genetic algorithm: a case study in romantic decision support, *Decis. Support Syst.*, **32** (2002) 361–377. [https://doi.org/10.1016/S0167-9236\(01\)00121-X](https://doi.org/10.1016/S0167-9236(01)00121-X)

- [32] X. Liang, H. Zhang, J. Xiao and Y. Chen, Improving option price forecasts with neural networks and support vector regressions, *Neurocomputing*, **72** (2009) 3055–3065. <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2009.03.015>
- [33] R. C. Merton, Theory of rational options pricing, *J. Econ. Manag. Sci.*, **4** (1973) 141–183. <https://doi.org/10.2307/3003143>
- [34] R. C. Merton, Option prices when underlying stock returns are discontinuous, *J. Financ. Econ.*, **3** (1976) 125–144. [https://doi.org/10.1016/0304-405X\(76\)90022-2](https://doi.org/10.1016/0304-405X(76)90022-2)
- [35] A. J. Menkveld and T. Vorst, A pricing model for American options with Gaussian interest rates, *Ann. Oper. Res.*, **100** (2000) 211–226. <https://doi.org/10.1023/A:1019275302878>
- [36] K. Michalak and P. Lipinski, Prediction of high increases in stock prices using neural networks, *Neural Netw. World*, **15** (2005) 359–366.
- [37] H. Muzhou, L. Taohua, Y. Yunlei, Z. Hao, L. Hongjuan, Y. Xiugui and L. Xinge, A new hybrid constructive neural network method for impacting and its application on tungsten price prediction, *Appl. Intell.*, **47** (2017) 28–43. <https://doi.org/10.1007/s10489-016-0882-z>
- [38] Staveley-O’Carroll, Exchange rate targeting in the presence of foreign debt obligations, *J. Macroecon.*, **56** (2018) 113–134. <https://doi.org/10.1016/j.jmacro.2017.12.005>
- [39] M. Podisuk, Regulatory quality, financial integration and equity cost of capital, *Rev. Int. Econ.*, **27** (2019) 916–935. <https://doi.org/10.1111/roie.12403>
- [40] J. Qiao and W. Zhang, Dynamic multi-objective optimization control for wastewater treatment process, *Neural Comput. Appl.*, **29** (2018) 1261–1271. <https://doi.org/10.1007/s00521-016-2642-8>
- [41] B. Ramsundar, S. Kearnes, P. Riley, D. Webster, D. Konerding and V. Pande, Massively multitask networks for drug discovery, *arXiv preprint arXiv:1502.02072*, (2015).
- [42] M. Rezaei, A. R. Yazdanian, A. Ashrafi and S. M. Mahmoudi, Numerical Pricing Based on Fractional Black-Scholes Equation with Time-Dependent Parameters under the CEV Model: Double Barrier Options, *Comput. Math. Appl.*, **90** (2021) 104–111. <https://doi.org/10.1016/J.CAMWA.2021.02.021>
- [43] M. Rezaei, A. R. Yazdanian, A. Ashrafi and S. M. Mahmoudi, Numerically Pricing Nonlinear Time-Fractional Black-Scholes Equation with Time-Dependent Parameters under Transaction Costs, *Comput. Econ.*, **60** (2022) 243–280. <https://doi.org/10.1007/s10614-021-10148-z>
- [44] A. N. Refenes, A. N. Burgess and Y. Bentz, Neural networks in financial engineering: a study in methodology, *IEEE Trans. Neural Netw.*, **8** (1997) 1222–1267. <https://doi.org/10.1109/72.641449>
- [45] M. Rezaei, A. R. Yazdanian, S. M. Mahmoudi and A. Ashrafi, A Compact Difference Scheme for Time-Fractional Black-Scholes Equation with Time-Dependent Parameters under the CEV Model: American Options, *Comput. Methods Differ. Equ.*, **9** (2021) 523–552. <https://doi.org/10.22034/CMDE.2020.36000.1623>
- [46] P. A. Samuelson, M. Davis and A. Etheridge, *Louis Bachelier’s Theory of Speculation: The Origins of Modern Finance*, Princeton University Press: Princeton, NJ, USA, 2006.
- [47] S. Simon, M. J. Goovaerts and J. Dhaene, An easy computable upper bound for the price of an arithmetic Asian option, *Insur. Math. Econ.*, **26** (2000) 175–183. [https://doi.org/10.1016/S0167-6687\(99\)00051-7](https://doi.org/10.1016/S0167-6687(99)00051-7)
- [48] J. Sirignano and K. Spiliopoulos, DGM: A deep learning algorithm for solving partial differential equations, *J. Comput. Phys.*, **375** (2018) 1339–1364. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2018.08.029>

- [49] B. Wu and T. Duan, A performance comparison of neural networks in forecasting stock price trend, *Int. J. Comput. Intell. Syst.*, **10** (2017) 336–346. <https://doi.org/10.2991/ijcis.2017.10.1.23>
- [50] J. Z. Wang, J. J. Wang, Z. G. Zhang and S. P. Guo, Forecasting stock indices with back propagation neural network, *Expert Syst. Appl.*, **38** (2011) 14346–14355. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2011.04.222>
- [51] Y. Wang, M. Liu, Z. Bao and S. Zhang, Stacked sparse autoencoder with PCA and SVM for data-based line trip fault diagnosis in power systems, *Neural Comput. Appl.*, **31** (2019) 6719–6731. <https://doi.org/10.1007/s00521-018-3490-5>
- [52] L. Xi, H. Muzhou, M. H. Lee, J. Li, D. Wei, H. Hai and Y. Wu, A new constructive neural network method for noise processing and its application on stock market prediction, *Appl. Soft Comput.*, **15** (2014) 57–66. <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2013.10.013>
- [53] Y. Yang, M. Hou, H. Sun, T. Zhang, F. Weng and J. Luo, Neural network algorithm based on Legendre improved extreme learning machine for solving elliptic partial differential equations, *Soft Comput.*, **24** (2020) 1083–1096. <https://doi.org/10.1007/s00500-019-03944-1>
- [۵۴] ا. امینی مهر، س. باجلان و ه. حکمت، مطالعه‌ای بر رفتار داده‌های بازده شاخص بورس تهران و ارائه روش پیش‌بینی تغییر رژیم مبتنی بر شبکه‌های عصبی عمیق، نشریه چشم‌انداز مدیریت مالی، ۳۴ (۱۴۰۰) ۱۴۵–۱۷۱.
- [۵۵] س. سلیمانی سروسناتی، س. م. ر. داودی و ع. خردمند، سبد بهینه نوسانگیری روزانه بر پایه پیش‌بینی بازدهی مقدار با رهیافت شبکه‌های عصبی، نشریه چشم‌انداز مدیریت مالی، ۱۲ (۱۴۰۱) ۱۰۳–۱۲۰.
- [۵۶] ص. عزیزی و ح. محمدی، مدلسازی متغیرهای اثرگذار بر کارایی سرمایه‌گذاری بر مبنای ترکیب شبکه‌های عصبی مصنوعی و الگوریتم بهینه‌سازی حرکت تجمعی ذرات، نشریه چشم‌انداز مدیریت مالی، ۱۳ (۱۴۰۲) ۳۵–۶۲.

افشین بابائی

گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه مازندران، بابلسر، ایران.
babaei@umz.ac.ir

افشین بابائی متولد خردادماه ماه ۱۳۶۰ در شهر رشت است. وی در سال ۱۳۷۹ وارد مقطع کارشناسی رشته ریاضی کاربردی دانشگاه گیلان شد و در سال ۱۳۸۴ وارد مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی در دانشگاه علم و صنعت ایران شد. در سال ۱۳۸۷ دوره دکتری در گرایش آنالیز عددی را در دانشگاه علم و صنعت ایران و تحت نظر دکتر عبدالله شیدفر آغاز و در سال ۱۳۹۱ از پایان نامه خود دفاع نمود. وی از سال ۱۳۹۱ تا کنون عضو هیات علمی دانشگاه مازندران است.



مریم رضایی میراکلاهی

گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه مازندران، بابلسر، ایران.
rezaei.mirar@yahoo.com

مریم رضائی در سال ۱۳۸۷ وارد مقطع کارشناسی رشته ریاضی محض دانشگاه مازندران شد و در سال ۱۳۹۲ وارد مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی در دانشگاه تربیت مدرس شده است. در سال ۱۳۹۶ دوره دکتری در گرایش آنالیز عددی را در دانشگاه سمنان آغاز و در سال ۱۴۰۰ از پایان‌نامه خود در زمینه ارزش‌گذاری اختیار معامله تحت مدل‌های کسری دفاع نمود.

