

THE BOCHNER-EBERLEIN-DOSS PROPERTY FOR THE SEMIGROUP ALGEBRA $\ell^1(\mathbb{Z}^2, \max)$

FATEMEH ABTAHI^{ORCID}

ABSTRACT. In recent years, and in the continuation of BSE algebras, the concept of BED algebra for a commutative and semisimple Banach algebra $\mathcal{A}$ has been introduced and studied by some authors. It has also been proved that if $\mathcal{A}$ is regular and also contains a bounded approximate identity $\{e_\alpha\}_\alpha$ such that for every α , the Gelfand transformation e_α , i.e. $\widehat{e_\alpha}$ has compact support, then $\mathcal{A}$ is a BSE algebra if and only if it is a BED algebra. In other words, for such algebras two concepts of BSE and BED coincide. In this paper, let us assume that S is the commutative semigroup $(\mathbb{Z}^2, \max)$. In recent years, it has been proven that the semigroup algebra $\ell^1(\mathbb{Z}^2, \max)$ is a BSE algebra. In this paper, we show that $\ell^1(\mathbb{Z}^2, \max)$ contains a bounded approximate identity with the condition mentioned above. We also show that $\ell^1(\mathbb{Z}^2, \max)$ is regular. Thus, as a main result, we obtain that $\ell^1(\mathbb{Z}^2, \max)$ is also a BED algebra.

1. Introduction

The history of the introduction and study of BSE algebras dates back to 1930, when Bochner, Schoenberg, and Eberlein were independently and separately investigating analytic functions. This extensive research eventually led to the proof of an important theorem, known as the Bochner-Schoenberg-Eberlein theorem. In this theorem, a necessary and sufficient condition is given for a

Keywords: BED algebra, BSE algebra, BSE norm, character space, semigroup algebra.

Article Type: Research Paper.

Communicated by Alireza Amini Harandi.

Received: 09-07-2024, Accepted: 05-02-2025, Published Online: 23-05-2025.

Cite this article: F. Abtahi, The Bochner-Eberlein-Doss Property for the semigroup algebra $\ell^1(\mathbb{Z}^2, \max)$, *Journal of Mathematics and Society*, **10** no. 3 (2025) 149–163.

<http://dx.doi.org/10.22108/msci.2025.142095.1674> .

continuous and bounded function defined on the dual of a locally compact Hausdorff abelian group G to be the Fourier-stieltjes transform of a bounded complex measure. It should be noted that the necessary introduction and information about locally compact abelian groups and their duals, as well as measure algebras and the Fourier-stieltjes transform of measures can be found in [12].

Then in 1990, Takahashi and Hattori extended this topic and study the commutative and without order Banach algebras that were valid in generalizations of Bochner-Schoenberg-Eberlein theorem [16]. In fact, the concept of BSE algebras was first introduced by these two mathematicians and in the following of the research work of Bochner, Schoenberg and Eberlein. the recent papers on BSE algebras are [1], [2], and [6].

BED algebras are also an important class of commutative and semisimple Banach algebras and take their name from the first letters of the names of three mathematicians, Bochner, Eberlein and Doss, who studied and researched in this field. First, Bochner proposed and studied the BED property in 1933, using the theory of harmonic functions without considering a name for these algebras. Then, Schoenberg in 1942, using Bochner's achievements, investigated further the properties of these algebras. Finally, in 1967 Doss, using the theories and achievements of Bochner and Schoenberg, proved a fundamental theorem. This theorem, in fact, characterizes the absolute continuous measures on the locally compact Hausdorff abelian group G and will be discussed later. Various forms of this theorem and its results are detailed in [9], [10], and [11].

Function $\tau \in C_b(\widehat{G})$ is the Fourier-stieltjes transform of a absolutely continuous complex measure if and only if the following conditions hold;

- (i). there exists $L > 0$ such that for any $q \in \text{span}(\widehat{G})$ as

$$q(x) = \sum_{i=1}^n c_i(-x, \gamma_i)$$

and with $\|q\|_\infty \leq 1$ we have

$$\left| \sum_{i=1}^n c_i \tau(\gamma_i) \right| \leq L.$$

- (ii). For any $\varepsilon > 0$, there exists a compact subset K of $\widehat{G}$ such that for any $q \in \text{span}(\widehat{G} \setminus K)$ as

$$q(x) = \sum_{i=1}^n c_i(-x, \gamma_i)$$

and with $\|q\|_\infty \leq 1$ we have

$$\left| \sum_{i=1}^n c_i \tau(\gamma_i) \right| < \varepsilon.$$

In 2007, Inoue and Takahashi, using Doss's achievements, which actually characterized the Gelfand image of the group algebra $L^1(G)$ and presented a new method for characterizing the Gelfand image

of any arbitrary commutative and semisimple Banach algebra. The research of these authors was actually conducted around Doss' results. In this way, BED algebras were introduced [14]. As the recent works on the BED we refer to [3], [4] and [5].

To introduce BED algebras, we need some introductions, which will be given below. The most complete references in this regard can be mentioned in references [14] and [15].

Let $\mathcal{A}$ be a commutative Banach algebra. A bounded net $\{x_\alpha\}_\alpha$ in $\mathcal{A}$ is a bounded approximate identity for $\mathcal{A}$ if $\lim_\alpha \|ax_\alpha - a\| = 0$, for each $a \in \mathcal{A}$. Suppose that $\mathcal{A}^*$ and $\Delta(\mathcal{A})$ are the dual space and the character space of $\mathcal{A}$, respectively. Then $\Delta(\mathcal{A})$ is always a locally compact Hausdorff space, equipped with the weak* topology, inherited from $\mathcal{A}^*$, called Gelfand topology. Suppose that $\text{span}(\Delta(\mathcal{A}))$ is the linear span of $\Delta(\mathcal{A})$ in $\mathcal{A}^*$. Note that each $q \in \text{span}(\Delta(\mathcal{A}))$ has the unique expression as

$$q = \sum_{\varphi \in \Delta(\mathcal{A})} \widehat{q}(\varphi)\varphi,$$

in which $\widehat{q}$ is a unique complex-valued function on $\Delta(\mathcal{A})$, with finite support. Moreover as usual, $C_b(\Delta(\mathcal{A}))$ denotes the Banach algebra of all complex-valued bounded and continuous functions on $\Delta(\mathcal{A})$, under the supremum norm and pointwise product.

We also recall the Gelfand representation of $\mathcal{A}$, which is a norm-decreasing algebra homomorphism, defined as

$$\Gamma_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow C_b(\Delta(\mathcal{A})) \quad a \mapsto \widehat{a},$$

where $\widehat{a}(\varphi) = \varphi(a)$ ($\varphi \in \Delta(\mathcal{A})$). The image of $\Gamma_{\mathcal{A}}$ is denoted by $\widehat{\mathcal{A}}$. We say that $\mathcal{A}$ is semisimple if $\Gamma_{\mathcal{A}}$ is injective. Furthermore, $\mathcal{A}$ is called regular if for any closed subset E of $\Delta(\mathcal{A})$ and each $\varphi_0 \in \Delta(\mathcal{A}) \setminus E$, there exists $a \in \mathcal{A}$ such that $\widehat{a}(\varphi_0) = 1$ and $\widehat{a}(\varphi) = 0$, for all $\varphi \in E$.

A function $g \in C_b(\Delta(\mathcal{A}))$ is called a BSE function if there exists a constant $L > 0$ such that for every finite number of $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ in $\Delta(\mathcal{A})$ and the same number of complex numbers $d_1, \dots, d_n$, the inequality

$$\left| \sum_{j=1}^n d_j g(\varphi_j) \right| \leq L \left\| \sum_{j=1}^n d_j \varphi_j \right\|_{\mathcal{A}^*}$$

holds. The BSE norm of g ($\|g\|_{\text{BSE}}$) is the infimum of all such L . The set of all BSE functions is denoted by $C_{\text{BSE}}(\Delta(\mathcal{A}))$. Moreover, $C_{\text{BSE}}(\Delta(\mathcal{A}))$ is a commutative and semisimple Banach algebra under the norm $\|\cdot\|_{\text{BSE}}$ and pointwise product [16, Lemma 1]. Now for the commutative and semisimple Banach algebra $\mathcal{A}$, let

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \{\Phi \in C_b(\Delta(\mathcal{A})) : \Phi \cdot \widehat{\mathcal{A}} \subseteq \widehat{\mathcal{A}}\}.$$

The members of $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ are called multiplier. Following [16], $\mathcal{A}$ is called a BSE algebra if $\mathcal{M}(\mathcal{A}) = C_{\text{BSE}}(\Delta(\mathcal{A}))$. In the sequel, we will introduce BED algebras. For each $g \in C_{\text{BSE}}(\Delta(\mathcal{A}))$ and any

compact subset K of $\Delta(\mathcal{A})$, let

$$\|g\|_{\text{BSE},K} = \sup \left\{ \left| \sum_{\varphi \in \Delta(\mathcal{A})} \widehat{q}(\varphi)g(\varphi) \right| : q \in \text{span}(\Delta(\mathcal{A})), \|q\|_{\mathcal{A}^*} \leq 1, \widehat{q}(\varphi) = 0 \ (\varphi \in K) \right\}.$$

Moreover, suppose that $\|g\|_{\text{BSE},\infty} = \inf_K \|g\|_{\text{BSE},K}$ and

$$C_{\text{BSE}}^0(\Delta(\mathcal{A})) = \{g \in C_{\text{BSE}}(\Delta(\mathcal{A})) : \|g\|_{\text{BSE},\infty} = 0\}.$$

Then $C_{\text{BSE}}^0(\Delta(\mathcal{A}))$ is always a closed ideal of $C_{\text{BSE}}(\Delta(\mathcal{A}))$ [14, Corollary 3.9]. By [?, Definitions 2.1 and 2.2], $C_{\text{BSE}}(\Delta(\mathcal{A}))$ and $C_{\text{BSE}}^0(\Delta(\mathcal{A}))$ are called the BSE–extension and the Inoue-Doss ideal associated with $\mathcal{A}$, respectively. Following [14], a commutative and semisimple Banach algebra $\mathcal{A}$ is called a BED algebra if $\widehat{\mathcal{A}} = C_{\text{BSE}}^0(\Delta(\mathcal{A}))$. Note all BED algebras has the BSE norm property in the sense that there exists $K > 0$ such that $\|a\| \leq K\|\widehat{a}\|_{\text{BSE}}$ ($a \in \mathcal{A}$). We refer the readers to [14], in order to achieve several necessary and sufficient conditions for establishing the equality of $\widehat{\mathcal{A}}$ and $C_{\text{BSE}}^0(\Delta(\mathcal{A}))$. Moreover, we refer to [3], [4] and [5] as the recent works in this context.

In this paper, we study the BED property for the semigroup algebra $\ell^1(\mathbb{Z}^2, \max)$. Our approach for this investigation is to apply the results of [8] together with [14, Theorem 4.7]. Indeed, it has been proved in [14, Theorem 4.7] that if $\mathcal{A}$ is a regular Banach algebra which possesses a bounded approximate identity $\{e_\lambda\}_{\lambda \in I}$ such that each $\widehat{e}_\lambda$ ($\lambda \in I$) has compact support, then $\mathcal{A}$ is a BSE algebra if and only if $\mathcal{A}$ is of BED. Furthermore, $\ell^1(\mathbb{Z}^2, \max)$ is a BSE algebra by [8]. Here, we verify the conditions of [14, Theorem 4.7] for $\ell^1(\mathbb{Z}^2, \max)$ to prove by using [8] that $\ell^1(\mathbb{Z}^2, \max)$ is a BED algebra, as well.

2. Main Results

In this section, we provide our main result. Before, we precisely introduce the semigroup algebra $\ell^1(\mathbb{Z}^2, \max)$; see [8] and [13], for more information about semigroup algebras.

The semigroup $(\mathbb{Z}^2, \max)$ is the set $\mathbb{Z}^2$ with coordinatwise maximum operation, defined as

$$(m_1, n_1)(m_2, n_2) = (\max\{m_1, m_2\}, \max\{n_1, n_2\}),$$

for all $(m_1, n_1), (m_2, n_2) \in \mathbb{Z}^2$. It is clear that $(\mathbb{Z}^2, \max)$ is abelian. The ℓ^1 –algebra $\ell^1(\mathbb{Z}^2, \max)$ is a linear space, defined as

$$\ell^1(\mathbb{Z}^2, \max) = \left\{ f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{C}; \|f\|_1 = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} |f(m,n)| < \infty \right\},$$

which is a Banach algebra under the norm $\|\cdot\|_1$ and the convolution product, defined as

$$f * g(m, n) = \sum_{(m_1, n_1)(m_2, n_2) = (m, n)} |f(m_1, n_1)g(m_2, n_2)| \quad ((m, n) \in \mathbb{Z}^2),$$

for all $f, g \in \ell^1(\mathbb{Z}^2, \max)$. The character space of $\ell^1(\mathbb{Z}^2, \max)$ is introduced, as follows.

Let $\mathbb{Z}_\infty = \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ and for each $n \in \mathbb{Z}$, $n < \infty$. For every $n \in \mathbb{Z}$, let

$$(n, \infty] = \{m \in \mathbb{Z} : n < m\} \cup \{\infty\}.$$

Moreover, suppose that

$$\mathcal{B} = \{\{m\} : m \in \mathbb{Z}\} \cup \{(n, \infty] : n \in \mathbb{Z}\},$$

which is clearly a basis for a topology on $\mathbb{Z}_\infty$. Then $\mathbb{Z}_\infty$ is equipped with this topology and we consider $\mathbb{Z}_\infty^2 = \mathbb{Z}_\infty \times \mathbb{Z}_\infty$, with the product topology. It should be noted that any open neighborhood of ∞ , contains an open set $(n, \infty]$ ($n \in \mathbb{Z}$). Moreover, it is easily verified that for each $n \in \mathbb{Z}$, the set $[n, \infty]$ is compact in $\mathbb{Z}_\infty$.

By [8, Lemma 2.8], $\Delta(\ell^1(\mathbb{Z}^2, \max))$ is homeomorphic with $\mathbb{Z}_\infty^2$. Indeed,

$$\Delta(\ell^1(\mathbb{Z}^2, \max)) = \{\varphi_{(M,N)} : (M, N) \in \mathbb{Z}_\infty^2\},$$

where for each $(M, N) \in \mathbb{Z}_\infty^2$ we have

$$\varphi_{(M,N)}(f) = \sum_{n=-\infty}^M \sum_{m=-\infty}^N f(m, n) \quad (f \in \ell^1(\mathbb{Z}^2, \max)).$$

Note that Gelfand topology on $\Delta(\ell^1(\mathbb{Z}^2, \max))$ is coincided with the product topology on $\mathbb{Z}_\infty^2$, discussed above; see [8, Lemma 2.8] for more details.

Following [13], an abelian semigroup S is called separating if for all $s, t \in S$, the equations $s^2 = t^2 = st$ imply $s = t$. By [13, Theorem 5.8], the semigroup algebra $\ell^1(S)$ is semisimple if and only if S is separating. As stated in [8], it is easily verified that $(\mathbb{Z}^2, \max)$ is separating. It follows that $\ell^1(\mathbb{Z}^2, \max)$ is semisimple.

Recall that for each $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$, the complex-valued function $\delta_{(m,n)}$ is defined on $\mathbb{Z}^2$ as

$$\delta_{(m,n)}(l, k) = \begin{cases} 1 & (l, k) = (m, n) \\ 0 & (l, k) \neq (m, n). \end{cases}$$

Let S be the semigroup $(\mathbb{Z}^2, \max)$. Then for all $m, n \in \mathbb{Z}$, $\text{supp } \widehat{\delta_{(m,n)}} \subseteq [m, \infty] \times [n, \infty]$. In particular, $\widehat{\delta_{(m,n)}}$ has compact support.

Let S be the semigroup $(\mathbb{Z}^2, \max)$. Then for each $(M_0, N_0) \in \mathbb{Z}^2$ there exists $f \in \ell^1(S)$ such that $\widehat{f}(\varphi_{(M_0, N_0)}) = 1$ and $\widehat{f}(\varphi_{(M, N)}) = 0$, for all $(M, N) \in \mathbb{Z}_\infty^2$ with $(M, N) \neq (M_0, N_0)$.

Let S be the semigroup $(\mathbb{Z}^2, \max)$. Then for each closed subset E of $\mathbb{Z}_\infty^2$ with $(\infty, \infty) \notin E$, there exists $f \in \ell^1(S)$ such that $\widehat{f}(\varphi_{(\infty, \infty)}) = 1$ and $\widehat{f}(\varphi_{(M, N)}) = 0$, for all $(M, N) \in E$.

Let S be the semigroup $(\mathbb{Z}^2, \max)$. Then for each closed subset E of $\mathbb{Z}_\infty^2$ and $M_0 \in \mathbb{Z}$ with $(M_0, \infty) \notin E$, there exists $f \in \ell^1(S)$ such that $\widehat{f}(\varphi_{(M_0, \infty)}) = 1$ and $\widehat{f}(\varphi_{(M, N)}) = 0$, for all $(M, N) \in E$.

In fact since E is closed and $(M_0, \infty) \notin E$, there exists $N_0 \in \mathbb{Z}$ such that

$$(2.1) \quad \{M_0\} \times (N_0, \infty] \cap E = \emptyset.$$

Define the complex-valued function f on S as

$$f(m, n) = \begin{cases} 1 & (m, n) = (M_0, N_0 + 1) \\ -1 & (m, n) = (M_0 + 1, N_0 + 1) \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

which obviously belongs to $\ell^1(S)$. Moreover,

$$\widehat{f}(\varphi_{(M_0, \infty)}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{M_0} f(m, n) = f(M_0, N_0 + 1) = 1.$$

Also regarding to equation (2.1), for all $(M, N) \in E$ four cases occur. If $M = M_0$ and $N \leq N_0$, then it is easily observed that $\widehat{f}(\varphi_{(M_0, N)}) = 0$. Similarly, if $M < M_0$ and $N \in \mathbb{Z}_{\infty}$, then $\widehat{f}(\varphi_{(M, N)}) = 0$. Moreover, if $M \geq M_0 + 1$ and $N \geq N_0 + 1$, then

$$\widehat{f}(\varphi_{(M, N)}) = f(M_0 + 1, N_0 + 1) + f(M_0, N_0 + 1) = -1 + 1 = 0.$$

Finally, for the case $M \geq M_0 + 1$ and $N \leq N_0$, it is obviously obtained that $\widehat{f}(\varphi_{(M, N)}) = 0$.

Let S be the semigroup $(\mathbb{Z}^2, \max)$. Then for each closed subset E of $\mathbb{Z}_{\infty}^2$ and $N_0 \in \mathbb{Z}$ with $(\infty, N_0) \notin E$, there exists $f \in \ell^1(S)$ such that $\widehat{f}(\varphi_{(\infty, N_0)}) = 1$ and $\widehat{f}(\varphi_{(M, N)}) = 0$, for all $(M, N) \in E$.

The semigroup algebra $\ell^1(\mathbb{Z}^2, \max)$ is regular.

The semigroup algebra $\ell^1(\mathbb{Z}^2, \max)$ is a BED algebra.

In fact by [8], $\{\delta_{(-n, -n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ is a bounded approximate identity for $\ell^1(\mathbb{Z}^2, \max)$. Moreover, $\widehat{\delta_{(-n, -n)}}$ ($n \in \mathbb{N}$) has compact support. In addition, $\ell^1(\mathbb{Z}^2, \max)$ is regular. Since $\ell^1(\mathbb{Z}^2, \max)$ is a BSE algebra [8], it follows $\ell^1(\mathbb{Z}^2, \max)$ is a BED algebra, as well.

The semigroup algebra $\ell^1(\mathbb{Z}^2, \max)$ has BSE norm property.

3. Conclusions

Let S be the abelian semigroup $(\mathbb{Z}^2, \max)$. Recently, it was proved that the semigroup algebra $\ell^1(\mathbb{Z}^2, \max)$ is a BSE algebra. Here, we establish that $\ell^1(\mathbb{Z}^2, \max)$ is a BED algebra, as well.

Fatemeh Abtahi

Department of Pure Mathematics, Faculty of Mathematics and Statistics, University of Isfahan, Isfahan, Iran

Email: f.abtahi@sci.ui.ac.ir, abtahif2002@yahoo.com

خاصیت بوخنر-ابرلین-داس برای جبر نیم‌گروهی $(\mathbb{Z}^2, \max)$

فاطمه ابطی^{ID}

چکیده. در سال‌های اخیر و در ادامه جبرهای BSE، مفهوم جبر BED برای جبر باناخ جابجایی و نیم‌ساده A معرفی و توسط برخی از نویسندگان مورد بررسی و مطالعه قرار گرفته است. همچنین ثابت شده است که اگر A منظم و نیز شامل یک همانی تقریبی کراندار $\{e_\alpha\}_\alpha$ باشد به‌طوری‌که برای هر α ، تبدیل گلفند e_α یعنی $\widehat{e}_\alpha$ دارای محمل فشردگی باشد، آنگاه A یک جبر BSE است اگر و تنها اگر یک جبر BED باشد. به بیان دیگر، برای چنین جبرهایی دو مفهوم BSE و BED بر هم منطبق هستند. در این مقاله، فرض کنیم S نیم‌گروه جابجایی $(\mathbb{Z}^2, \max)$ باشد. در سال‌های اخیر ثابت شده است که جبر نیم‌گروهی $(\mathbb{Z}^2, \max)$ یک جبر BSE است. در این مقاله، نشان می‌دهیم $(\mathbb{Z}^2, \max)$ شامل یک همانی تقریبی کراندار با شرط ذکر شده در قبل است. همچنین نشان می‌دهیم $(\mathbb{Z}^2, \max)$ منظم است. بنابراین به‌عنوان یک نتیجه اصلی به‌دست می‌آوریم که $(\mathbb{Z}^2, \max)$ یک جبر BED نیز است.

۱. مقدمه و مفاهیم مورد نیاز

تاریخچه معرفی و مطالعه در خصوص جبرهای BSE به سال ۱۹۳۰ برمی‌گردد. هنگامی‌که بوخنر^۱، شوئنبرگ^۲ و نیز ابرلین^۳ به‌صورت مستقل و جداگانه در حال تحقیق در زمینه توابع تحلیلی بودند. این تحقیقات گسترده سرانجام منجر به اثبات یک قضیه مهم، معروف به قضیه بوخنر-شوئنبرگ-ابرلین شد. در این قضیه، یک شرط لازم و کافی ارائه شده است برای این‌که یک تابع پیوسته و کراندار تعریف شده روی دوگان یک گروه آبدی به‌طور موضعی فشرده و هاسدورف G بتواند تبدیل فوریه-اشتیلیس یک اندازه مختلط کراندار باشد. لازم به ذکر است که مقدمات و اطلاعات لازم در خصوص گروه‌های آبدی به‌طور موضعی فشرده و دوگان آن‌ها، همچنین جبرهای اندازه و تبدیل فوریه-اشتیلیس اندازه‌ها در [۱۲] آمده است. سپس در سال ۱۹۹۰ تاکاهاسی^۴ و هاتوری^۵ به تعمیم این مطلب پرداخته و به مطالعه جبرهای باناخ جابجایی و بدون ترتیبی پرداختند که در تعمیم قضیه بوخنر-شوئنبرگ-ابرلین صدق می‌کردند [۱۶]. در واقع، مفهوم جبرهای BSE برای اولین بار توسط این دو ریاضیدان و در ادامه کارهای تحقیقاتی بوخنر، شوئنبرگ و ابرلین ارائه شد. به‌عنوان مقالات اخیر در زمینه جبرهای BSE می‌توان مراجع [۱]، [۲] و [۶] را نام برد. جبرهای BED نیز یک دسته مهم از جبرهای باناخ جابجایی و نیم‌ساده است و نام خود را از حرف اول سه ریاضیدان برجسته به نام‌های بوخنر، ابرلین و داس^۶ که در این زمینه مطالعه و تحقیق داشته‌اند، گرفته است. برای اولین بار بوخنر در

عبارات و کلمات کلیدی: جبر BED، جبر BSE، جبر نیم‌گروهی، فضای مشخصه، نرم BSE.

نوع مقاله: پژوهشی

دبیرتخصصی رابط: علیرضا امینی‌هرندی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۴/۱۹ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۱۱/۱۴ تاریخ انتشار آنلاین: ۱۴۰۴/۰۳/۰۲

ارجاع به مقاله: ف. ابطی، خاصیت بوخنر-ابرلین-داس برای جبر نیم‌گروهی $(\mathbb{Z}^2, \max)$ ، نشریه ریاضی و جامعه، ۱۰ شماره ۳ (۱۴۰۴) ۱۶۳-۱۴۹.

<http://dx.doi.org/10.22108/msci.2025.142095.1674>

¹S. Bochner ²I. J. Schoenberg ³W. F. Eberlein ⁴Y. Takahashi ⁵O. Hatori ⁶R. Doss

سال ۱۹۳۳ با استفاده از تئوری تابع‌های هارمونی، خاصیت BED را بدون آن‌که نامی برای این جبرها در نظر بگیرد، مطرح کرد و مورد مطالعه قرار داد. سپس شوئنبرگ در سال ۱۹۴۲ با استفاده از دستاوردهای بوخنر، به بررسی بیشتر ویژگی‌های این جبرها پرداخت. در نهایت در سال ۱۹۶۷ ریاضیدان برجسته‌ای به نام داس، با به‌کارگیری نظریات و دستاوردهای بوخنر و شوئنبرگ به اثبات قضیه‌ای اساسی پرداخت. این قضیه در حقیقت، به مشخصه‌سازی اندازه‌های پیوسته مطلق روی گروه به‌طور موضعی فشرده و هاسدورف G می‌پردازد و در ادامه خواهد آمد. صورت‌های مختلف این قضیه و نتایج آن به تفصیل در مراجع [۹]، [۱۰] و [۱۱] آمده‌اند.

قضیه ۱.۱. فرض کنیم G یک گروه آبدی به‌طور موضعی فشرده و هاسدورف باشد. در این صورت تابع $\tau \in C_b(\hat{G})$ تبدیل فوریه-اشتیلیس یک اندازه مختلط به‌طور مطلق پیوسته است اگر و تنها اگر شرایط زیر برقرار باشند؛
(الف). عدد ثابت $L > 0$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $q \in \text{span}(\hat{G})$ به‌صورت

$$q(x) = \sum_{i=1}^n c_i(-x, \gamma_i)$$

و با شرط $\|q\|_{\infty} \leq 1$ داشته باشیم

$$\left| \sum_{i=1}^n c_i \tau(\gamma_i) \right| \leq L.$$

(ب). برای هر $\varepsilon > 0$ ، مجموعه فشرده K از $\hat{G}$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $q \in \text{span}(\hat{G} \setminus K)$ به‌صورت

$$q(x) = \sum_{i=1}^n c_i(-x, \gamma_i)$$

و با شرط $\|q\|_{\infty} \leq 1$ داشته باشیم

$$\left| \sum_{i=1}^n c_i \tau(\gamma_i) \right| < \varepsilon.$$

در سال ۲۰۰۷ اینو^۷ و تاکاهاسی با استفاده از دستاوردهای داس که در واقع تصویر نگاشت گلفند جبر گروهی $L^1(G)$ را مشخصه‌سازی می‌کرد، روش جدیدی را برای مشخصه‌سازی تصویر نگاشت گلفند هر جبر باناخ جابجایی و نیم‌ساده دلخواه ارائه دادند. تحقیقات این نویسندگان در حقیقت پیرامون نتایج داس انجام شد. به این ترتیب جبرهای BED معرفی شدند [۱۴]. از جمله مقالات اخیر در خصوص جبرهای BED مراجع [۳]، [۴] و [۵] هستند.

برای معرفی جبرهای BED به مقدماتی نیازمندیم که در ادامه خواهد آمد. به‌عنوان کامل‌ترین منابع در این خصوص می‌توان به مراجع [۱۴] و [۱۵] اشاره کرد.

فرض کنیم A یک جبر باناخ جابجایی و A^* دوگان آن باشد. تور کراندار $\{e_{\alpha}\}_{\alpha}$ در A را یک همانی تقریبی کراندار برای A نامیم اگر برای هر $x \in A$ داشته باشیم

$$\lim_{\alpha} \|xe_{\alpha} - x\| = 0.$$

فضای مشخصه (گلفند) A که آن را با نماد $\Delta(A)$ نشان می‌دهند، در واقع زیرمجموعه‌ای از A^* متشکل از تمام تابع‌های ضربی ناصفر است. لازم است بیان کنیم که $\Delta(A)$ همواره با توپولوژی ضعیف-ستاره القایی از دوگان A مجهز می‌شود. در

⁷J. Inoue

این صورت طبق [۱۵]، قضیه ۳.۲۰۲، $\Delta(\mathcal{A})$ همراه با این توپولوژی همواره یک فضای به‌طور موضعی فشرده و هاسدورف است. فضای برداری تولید شده توسط $\Delta(\mathcal{A})$ در $\mathcal{A}^*$ را با نماد $span(\Delta(\mathcal{A}))$ نمایش می‌دهیم. بنابراین هر $q \in span(\Delta(\mathcal{A}))$ دارای نمایشی یکتا به‌صورت

$$q = \sum_{\varphi \in \Delta(\mathcal{A})} \hat{q}(\varphi) \varphi,$$

است که در آن $\hat{q}$ یک تابع مختلط-مقدار یکتا تعریف شده روی $\Delta(\mathcal{A})$ با محمل متناهی است. به‌علاوه طبق معمول، $C_b(\Delta(\mathcal{A}))$ جبر باناخ جابجایی متشکل از تمام توابع مختلط-مقدار پیوسته و کراندار روی $\Delta(\mathcal{A})$ و همراه با ضرب نقطه‌ای توابع و نرم سوپریم تعریف شده به‌صورت

$$\|g\|_\infty = \sup_{\psi \in \Delta(\mathcal{A})} |g(\psi)| \quad (g \in C_b(\Delta(\mathcal{A}))),$$

است. حال به معرفی نگاشت گلفند $\mathcal{A}$ می‌پردازیم که در نظریه جبرهای BED نقش به‌سزایی دارد. در حقیقت، نگاشت گلفند $\mathcal{A}$ هم‌ریختی نرم-کاهشی

$$\Gamma_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow C_b(\Delta(\mathcal{A})) \quad x \mapsto \hat{x},$$

است که در آن $\hat{x}$ ، تبدیل گلفند x است و به‌صورت $\hat{x}(\psi) = \psi(x)$ ($\psi \in \Delta(\mathcal{A})$) تعریف می‌شود. برد $\Gamma_{\mathcal{A}}$ را با نماد $\hat{\mathcal{A}}$ نمایش می‌دهیم. درواقع داریم

$$\hat{\mathcal{A}} = \{\hat{x} : x \in \mathcal{A}\}.$$

در این صورت جبر باناخ جابجایی $\mathcal{A}$ را نیم‌ساده نامیم اگر $\Gamma_{\mathcal{A}}$ یک‌به‌یک باشد. از این پس و سرتاسر مقاله $\mathcal{A}$ را یک جبر باناخ جابجایی و نیم‌ساده در نظر می‌گیریم. همچنین $\mathcal{A}$ را منظم نامیم اگر برای هر زیرمجموعه بسته E از $\Delta(\mathcal{A})$ و هر $\varphi_0 \in \Delta(\mathcal{A}) \setminus E$ ، عضو $a \in \mathcal{A}$ موجود باشد به‌طوری‌که $\hat{a}(\varphi_0) = 1$ و برای هر $\varphi \in E$ داشته باشیم $\hat{a}(\varphi) = 0$. حال به‌معرفی تابع BSE می‌پردازیم. براساس [۱۶]، تابع $\tau \in C_b(\Delta(\mathcal{A}))$ تابع BSE نامیم اگر عدد $L > 0$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر تعداد متناهی $\psi_1, \dots, \psi_n$ از اعضای $\Delta(\mathcal{A})$ و به همان تعداد عدد مختلط $c_1, \dots, c_n$ داشته باشیم

$$\left| \sum_{j=1}^n c_j \tau(\psi_j) \right| \leq L \left\| \sum_{j=1}^n c_j \psi_j \right\|_{\mathcal{A}^*}.$$

مجموعه تمام توابع BSE را با نماد $C_{BSE}(\Delta(\mathcal{A}))$ نمایش می‌دهیم که به‌وضوح یک زیرفضای برداری از $C_b(\Delta(\mathcal{A}))$ است. نرم BSE برای τ در واقع اینفیموم تمام اعداد $L > 0$ است که در نامساوی بالا صدق می‌کنند. این نرم را با نماد $\|\tau\|_{BSE}$ نمایش می‌دهیم. براساس [۱۶]، لم ۱، $C_{BSE}(\Delta(\mathcal{A}))$ تحت نرم $\|\cdot\|_{BSE}$ و ضرب نقطه‌ای توابع یک جبر باناخ جابجایی و نیم‌ساده است. به‌علاوه، براساس [۱۶] همواره داریم $\hat{\mathcal{A}} \subseteq C_{BSE}(\Delta(\mathcal{A}))$ و برای هر $b \in \mathcal{A}$ نامساوی

$$\|\hat{b}\|_{BSE} \leq \|b\|$$

برقرار است. براساس [۷] و نیز [۱۷]، $\mathcal{A}$ یک جبر با نرم BSE نامیده می‌شود اگر عدد $M > 0$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $b \in \mathcal{A}$ داشته باشیم

$$\|b\| \leq M \|\hat{b}\|_{BSE}.$$

حال قرار می‌دهیم

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \{\Phi \in C_b(\Delta(\mathcal{A})) : \Phi \cdot \hat{\mathcal{A}} \subseteq \hat{\mathcal{A}}\}.$$

در این صورت اعضای $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ ضربگر نامیده می‌شوند. بر اساس [۱۶]، $\mathcal{A}$ یک جبر BSE نامیده می‌شود اگر

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}) = C_{BSE}(\Delta(\mathcal{A})).$$

در ادامه به معرفی جبرهای BED می‌پردازیم. مجموعه تمام زیرمجموعه‌های فشرده از $\Delta(\mathcal{A})$ را با نماد $\mathcal{K}(\Delta(\mathcal{A}))$ نمایش می‌دهیم. حال برای هر $g \in C_{BSE}(\Delta(\mathcal{A}))$ و هر $K \in \mathcal{K}(\Delta(\mathcal{A}))$ قرار می‌دهیم

$$\|g\|_{BSE,K} = \sup \left\{ \left| \sum_{\varphi \in \Delta(\mathcal{A})} \widehat{q}(\varphi) g(\varphi) \right| : q \in \text{span}(\Delta(\mathcal{A})), \|q\|_{\mathcal{A}^*} \leq 1, \widehat{q}(\varphi) = 0 \ (\varphi \in K) \right\}$$

و نیز

$$\|g\|_{BSE,\infty} = \inf_{K \in \mathcal{K}(\Delta(\mathcal{A}))} \|g\|_{BSE,K}.$$

فرض کنیم

$$C_{BSE}^{\circ}(\Delta(\mathcal{A})) = \{g \in C_{BSE}(\Delta(\mathcal{A})) : \|g\|_{BSE,\infty} = 0\}.$$

در این صورت بر اساس [۱۶]، نتیجه ۹.۳، $C_{BSE}^{\circ}(\Delta(\mathcal{A}))$ همواره یک ایده‌آل بسته از $C_{BSE}(\Delta(\mathcal{A}))$ است. بر اساس [۱۶]، جبر باناخ جابجایی و نیم‌ساده $\mathcal{A}$ یک جبر BED نامیده می‌شود اگر

$$\widehat{\mathcal{A}} = C_{BSE}^{\circ}(\Delta(\mathcal{A})).$$

به‌سادگی می‌توان نشان داد که تمام جبرهای BED دارای نرم BSE هستند. در [۱۶]، شرایط لازم و نیز شرایط کافی متعددی برای تساوی $\widehat{\mathcal{A}}$ و $C_{BSE}^{\circ}(\Delta(\mathcal{A}))$ ارائه شده است که در شناسایی جبرهای BED نقش به‌سزایی دارند. در این مقاله، خاصیت BED را برای جبر باناخ جابجایی و نیم‌ساده $\ell^1(\mathbb{Z}^2, \max)$ مورد مطالعه و بررسی قرار می‌دهیم. دستاورد ما برای این تحقیق بر اساس کاربردی از نتایج ارائه شده در [۸] همراه با [۱۶]، قضیه ۷.۴ است. در واقع، در [۱۶]، قضیه ۷.۴ ثابت شده است که اگر $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ جابجایی، نیم‌ساده و منظم شامل یک همانی تقریبی کراندار $\{e_{\alpha}\}_{\alpha}$ باشد به‌طوری‌که برای هر α ، تابع $\widehat{e_{\alpha}}$ دارای محمل فشرده است، آنگاه $\mathcal{A}$ یک جبر BSE است اگر و تنها اگر یک جبر BED باشد. در [۸] ثابت شده است که $\ell^1(\mathbb{Z}^2, \max)$ یک جبر BSE است. در این مقاله، نشان می‌دهیم که $\ell^1(\mathbb{Z}^2, \max)$ در شرایط [۱۶]، قضیه ۷.۴ صدق می‌کند. این مطلب به همراه نتیجه اصلی ارائه شده در [۸] در خصوص خاصیت BSE $\ell^1(\mathbb{Z}^2, \max)$ ، نشان می‌دهد که $\ell^1(\mathbb{Z}^2, \max)$ یک جبر BED است.

۲. نتایج عمومی

در این بخش، به مطالب عمومی و مقدماتی می‌پردازیم که در نتیجه اصلی این مقاله که در بخش بعد می‌آید، سهم به‌سزایی دارند. ابتدا به معرفی جبر نیم‌گروهی $\ell^1(\mathbb{Z}^2, \max)$ می‌پردازیم. برای اطلاعات بیشتر در این خصوص به مراجع [۸] و [۱۳] مراجعه شود.

نیم‌گروه $(\mathbb{Z}^2, \max)$ ، در واقع مجموعه $\mathbb{Z}^2$ همراه با عمل ماکزیمم مؤلفه‌ای تعریف شده به‌صورت

$$(m_1, n_1)(m_2, n_2) = (\max\{m_1, m_2\}, \max\{n_1, n_2\}) \quad ((m_1, n_1), (m_2, n_2) \in \mathbb{Z}^2)$$

است. به‌سادگی دیده می‌شود که $(\mathbb{Z}^2, \max)$ یک نیم‌گروه جابجایی است. قرار می‌دهیم

$$\ell^1(\mathbb{Z}^2, \max) = \left\{ f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{C}; \|f\|_1 = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} |f(m,n)| < \infty \right\}$$

و برای هر $f, g \in \ell^1(\mathbb{Z}^2, \max)$ ضرب پیچشی این دو تابع را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f * g(m, n) = \sum_{(m_1, n_1)(m_2, n_2) = (m, n)} |f(m_1, n_1)g(m_2, n_2)| \quad ((m, n) \in \mathbb{Z}^2).$$

در این صورت $\ell^1(\mathbb{Z}^2, \max)$ تحت نرم $\|\cdot\|_1$ و عمل ضرب پیچشی تعریف شده در بالا یک جبر باناخ جابجایی است. برای معرفی فضای مشخصه این جبر باناخ، مقدماتی را به‌صورت زیر فراهم می‌آوریم. برای هر $n \in \mathbb{Z}$ فرض کنیم

$$(n, \infty] = \{m \in \mathbb{Z} : n < m\} \cup \{\infty\}$$

و همچنین قرار می‌دهیم $\mathbb{Z}_\infty = \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$. در این صورت گردایه

$$B = \{\{m\} : m \in \mathbb{Z}\} \cup \{(n, \infty] : n \in \mathbb{Z}\},$$

به‌وضوح یک پایه برای یک توپولوژی روی $\mathbb{Z}_\infty$ است که $\mathbb{Z}_\infty$ را با این توپولوژی در نظر می‌گیریم. متذکر می‌شویم که هر همسایگی باز حول ∞ ، یک مجموعه باز به‌صورت $(n, \infty]$ ($n \in \mathbb{Z}$) را شامل می‌شود. به‌علاوه، برای هر $n \in \mathbb{Z}$ ، مجموعه $[n, \infty]$ در $\mathbb{Z}_\infty$ فشرده است. حال $\mathbb{Z}_\infty^2 = \mathbb{Z}_\infty \times \mathbb{Z}_\infty$ را مجهز به توپولوژی حاصل‌ضرب می‌کنیم. بر اساس [۸، لم ۸.۲]، $\Delta(\ell^1(\mathbb{Z}^2, \max))$ همان‌ریخت با $\mathbb{Z}_\infty^2$ است؛ در واقع داریم

$$\Delta(\ell^1(\mathbb{Z}^2, \max)) = \{\varphi_{(M,N)} : (M, N) \in \mathbb{Z}_\infty^2\},$$

که در آن برای هر $(M, N) \in \mathbb{Z}_\infty^2$ داریم

$$\varphi_{(M,N)}(f) = \sum_{n=-\infty}^M \sum_{m=-\infty}^N f(m, n) \quad (f \in \ell^1(\mathbb{Z}^2, \max)).$$

لازم به ذکر است که توپولوژی گل‌فند روی $\Delta(\ell^1(\mathbb{Z}^2, \max))$ بر توپولوژی حاصل‌ضرب روی $\mathbb{Z}_\infty^2$ که در بالا معرفی و مورد بحث قرار گرفت، منطبق است. برای مشاهده این مطلب و جزئیات بیشتر به [۸، لم ۸.۲] مراجعه شود. بر اساس [۱۳]، نیم‌گروه جابجایی S را جداکننده نامیم اگر برای هر $s, t \in S$ تساوی

$$s^2 = t^2 = st$$

نتیجه دهد $s = t$. بر اساس [۱۳، قضیه ۸.۵]، جبر نیم‌گروهی $\ell^1(S)$ نیم‌ساده است اگر و تنها اگر S جداکننده باشد. همان‌طور که در [۸] به آن اشاره شده است، $(\mathbb{Z}^2, \max)$ یک نیم‌گروه جداکننده است. بنابراین $\ell^1(\mathbb{Z}^2, \max)$ نیم‌ساده است. در پایان این بخش یک گزاره کاربردی را اثبات می‌کنیم. پیش از آن یادآوری می‌کنیم که برای هر $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ ، تابع مختلط-مقدار $\delta_{(m,n)}$ روی $\mathbb{Z}^2$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود؛

$$\delta_{(m,n)}(l, k) = \begin{cases} 1 & (l, k) = (m, n) \\ 0 & (l, k) \neq (m, n). \end{cases}$$

گزاره ۱.۲. فرض کنیم S نیم گروه $(\mathbb{Z}^2, \max)$ باشد. در این صورت برای هر $m, n \in \mathbb{Z}$ داریم

$$\text{supp } \widehat{\delta_{(m,n)}} \subseteq [m, \infty] \times [n, \infty].$$

به ویژه، $\widehat{\delta_{(m,n)}}$ دارای محمل فشرده است.

اثبات. فرض کنیم $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ ثابت باشد. در این صورت برای هر $M, N \in \mathbb{Z}_\infty$ ، اگر

$$\sum_{k=-\infty}^N \sum_{l=-\infty}^M \delta_{(m,n)}(l, k) \neq 0.$$

آن گاه باید داشته باشیم $M \geq m$ و $N \geq n$ و بنابراین خواهیم داشت $(M, N) \in [m, \infty] \times [n, \infty]$. در نتیجه داریم

$$\text{supp } \widehat{\delta_{(m,n)}} \subseteq [m, \infty] \times [n, \infty].$$

پس ادعای مورد نظر ثابت شد. همچنین از آنجایی که $[m, \infty] \times [n, \infty]$ یک زیرمجموعه فشرده از $\mathbb{Z}_\infty^2$ است لذا محمل تابع $\widehat{\delta_{(m,n)}}$ فشرده خواهد بود و بنابراین اثبات کامل شد. $\square$

۳. نتایج اصلی

این بخش به نتایج اصلی این مقاله اختصاص دارد. ابتدا با چند گزاره متوالی نشان می دهیم که $\ell^1(\mathbb{Z}^2, \max)$ یک جبر منظم است.

گزاره ۱.۳. فرض کنیم S نیم گروه $(\mathbb{Z}^2, \max)$ باشد. در این صورت برای هر $(M_0, N_0) \in \mathbb{Z}^2$ ، تابع $f \in \ell^1(S)$ وجود دارد به طوری که $\widehat{f}(\varphi_{(M_0, N_0)}) = 1$ و برای هر $(M, N) \in \mathbb{Z}_\infty^2$ با شرط $(M, N) \neq (M_0, N_0)$ داریم $\widehat{f}(\varphi_{(M, N)}) = 0$.

اثبات. تابع مختلط-مقدار f را روی S به صورت زیر تعریف می کنیم

$$f(m, n) = \begin{cases} 1 & (m, n) = (M_0, N_0) \text{ or } (M_0 + 1, N_0 + 1) \\ -1 & (m, n) = (M_0, N_0 + 1) \text{ or } (M_0 + 1, N_0) \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

واضح است که $f \in \ell^1(S)$ و همچنین

$$\widehat{f}(\varphi_{(M_0, N_0)}) = \sum_{n=-\infty}^{N_0} \sum_{m=-\infty}^{M_0} f(m, n) = f(M_0, N_0) = 1.$$

به علاوه، برای هر $(M, N) \neq (M_0, N_0)$ چهار حالت اتفاق می افتد.

حالت اول. اگر $M = M_0$ و $N \geq N_0 + 1$ آن گاه داریم

$$\widehat{f}(\varphi_{(M_0, N)}) = \sum_{n=-\infty}^N \sum_{m=-\infty}^{M_0} f(m, n) = f(M_0, N_0 + 1) + f(M_0, N_0) = -1 + 1 = 0.$$

حالت دوم. اگر $M \geq M_0 + 1$ و $N = N_0$ آن گاه داریم

$$\widehat{f}(\varphi_{(M, N_0)}) = \sum_{n=-\infty}^{N_0} \sum_{m=-\infty}^M f(m, n) = f(M_0 + 1, N_0) + f(M_0, N_0) = 0.$$

حالت سوم. اگر $M \geq M_0 + 1$ و $N \geq N_0 + 1$ آن‌گاه داریم

$$\widehat{f}(\varphi_{(M,N)}) = f(M_0 + 1, N_0 + 1) + f(M_0, N_0 + 1) + f(M_0 + 1, N_0) + f(M_0, N_0) = 0.$$

□ در نهایت اگر $M < M_0$ یا $N < N_0$ آن‌گاه به‌وضوح داریم $\widehat{f}(\varphi_{(M,N)}) = 0$ ، بنابراین اثبات کامل می‌شود.

گزاره ۲.۳. فرض کنیم S نیم‌گروه $(\mathbb{Z}^2, \max)$ باشد. در این صورت برای هر زیرمجموعه بسته E از $\mathbb{Z}_\infty^2$ که (∞, ∞) را شامل نباشد، تابع f متعلق به $\ell^1(S)$ موجود است به‌طوری‌که $\widehat{f}(\varphi_{(\infty, \infty)}) = 1$ و برای هر $(M, N) \in E$ داریم $\widehat{f}(\varphi_{(M,N)}) = 0$.

اثبات. چون E بسته است و شامل (∞, ∞) نیست، لذا $M_0, N_0 \in \mathbb{Z}$ موجودند به‌طوری‌که

$$(1) \quad (M_0, \infty] \times (N_0, \infty] \cap E = \emptyset.$$

حال تابع مختلط-مقدار f را روی S به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f(m, n) = \begin{cases} 1 & (m, n) = (M_0 + 1, N_0 + 1) \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

واضح است که $f \in \ell^1(S)$. به‌علاوه،

$$\widehat{f}(\varphi_{(\infty, \infty)}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m, n) = f(M_0 + 1, N_0 + 1) = 1.$$

همچنین با استفاده از (۱)، برای هر $(M, N) \in E$ ، دو حالت $M \leq M_0$ یا $N \leq N_0$ اتفاق می‌افتد. با استفاده از تعریف f ، در هر دو حالت داریم

$$\widehat{f}(\varphi_{(M,N)}) = 0.$$

□ بنابراین اثبات کامل می‌شود.

گزاره ۳.۳. فرض کنیم S نیم‌گروه $(\mathbb{Z}^2, \max)$ باشد. در این صورت برای هر زیرمجموعه بسته E از $\mathbb{Z}_\infty^2$ و هر $M_0 \in \mathbb{Z}$ با شرط $(M_0, \infty) \notin E$ ، تابع f متعلق به $\ell^1(S)$ موجود است به‌طوری‌که $\widehat{f}(\varphi_{(M_0, \infty)}) = 1$ و برای هر $(M, N) \in E$ داریم $\widehat{f}(\varphi_{(M,N)}) = 0$.

اثبات. چون E بسته است و شامل (M_0, ∞) نیست، لذا $N_0 \in \mathbb{Z}$ موجود است به‌طوری‌که

$$(2) \quad \{M_0\} \times (N_0, \infty] \cap E = \emptyset.$$

حال تابع مختلط-مقدار f را روی S به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f(m, n) = \begin{cases} 1 & (m, n) = (M_0, N_0 + 1) \\ -1 & (m, n) = (M_0 + 1, N_0 + 1) \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

که به‌وضوح متعلق به $\ell^1(S)$ است. به‌علاوه،

$$\widehat{f}(\varphi_{(M_0, \infty)}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{M_0} f(m, n) = f(M_0, N_0 + 1) = 1.$$

همچنین با توجه به (۲)، برای هر $(M, N) \in E$ چهار حالت اتفاق می‌افتد.

حالت اول. اگر $M = M_0$ و $N \leq N_0$ آن‌گاه به‌سادگی دیده می‌شود که $\hat{f}(\varphi_{(M, N)}) = 0$.

حالت دوم. به‌طور مشابه اگر $M < M_0$ و $N \in \mathbb{Z}_\infty$ آن‌گاه $\hat{f}(\varphi_{(M, N)}) = 0$.

حالت سوم. اگر $M \geq M_0 + 1$ و $N \geq N_0 + 1$ آن‌گاه

$$\hat{f}(\varphi_{(M, N)}) = f(M_0 + 1, N_0 + 1) + f(M_0, N_0 + 1) = -1 + 1 = 0.$$

در نهایت، اگر $M \geq M_0 + 1$ و $N \leq N_0$ آن‌گاه به‌سادگی به‌دست می‌آوریم $\hat{f}(\varphi_{(M, N)}) = 0$ ، پس اثبات کامل می‌شود. $\square$

مشابه با گزاره ۳.۳، گزاره زیر حاصل می‌شود که از اثبات آن صرف نظر می‌کنیم.

گزاره ۴.۳. فرض کنیم S نیم‌گروه $(\mathbb{Z}^2, \max)$ باشد. در این صورت برای هر زیرمجموعه بسته E از $\mathbb{Z}_\infty^2$ و هر $N_0 \in \mathbb{Z}$ با شرط $(\infty, N_0) \notin E$ ، تابع f متعلق به $\ell^1(S)$ موجود است به‌طوری‌که $\hat{f}(\varphi_{(\infty, N_0)}) = 1$ و برای هر $(M, N) \in E$ داریم $\hat{f}(\varphi_{(M, N)}) = 0$.

نتیجه بعد به‌سادگی با استفاده از گزاره‌های ۱.۳، ۲.۳، ۳.۳ و ۴.۳ حاصل می‌شود.

نتیجه ۵.۳. جبر نیم‌گروهی $\ell^1(\mathbb{Z}^2, \max)$ منظم است.

حال قضیه اصلی این مقاله را ارائه می‌دهیم.

قضیه ۶.۳. جبر نیم‌گروهی $\ell^1(\mathbb{Z}^2, \max)$ یک جبر BSE است.

اثبات. با استفاده از [۸]، $\{\delta_{(-n, -n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ یک همانی تقریبی کراندار برای $\ell^1(\mathbb{Z}^2, \max)$ است. به‌علاوه، بر اساس گزاره ۱.۲، برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، تابع $\delta_{(-n, -n)}$ ($n \in \mathbb{N}$) دارای محمل فشردگی است. همچنین طبق نتیجه ۵.۳، $\ell^1(\mathbb{Z}^2, \max)$ منظم است. چون $\ell^1(\mathbb{Z}^2, \max)$ یک جبر BSE است [۸]، لذا [۱۴]، قضیه ۷.۴ نتیجه می‌دهد که $\ell^1(\mathbb{Z}^2, \max)$ یک جبر BSE است. $\square$

از آنجایی‌که تمام جبرهای BED دارای نرم BSE هستند لذا نتیجه بعد از قضیه ۶.۳ حاصل می‌شود.

نتیجه ۷.۳. جبر نیم‌گروهی $\ell^1(\mathbb{Z}^2, \max)$ یک جبر با نرم BSE است.

مراجع

- [1] F. Abtahi, Z. Kamali and M. Toutounchi, The Bochner-Schoenberg-Eberlein property for vector-valued Lipschitz algebras, *J. Math. Anal. Appl.*, **479** (2019) 1172–1181.
- [2] F. Abtahi, Z. Kamali and M. Toutounchi, The BSE concepts for vector-valued Lipschitz algebras, *Commun. Pure Appl. Anal.*, **20** no. 3 (2021) 1171–1186.
- [3] F. Abtahi and A. Pedaran, On the structure of quasi-topology and BED property for direct sum of Banach algebras, *Acta Math. Hungar.*, **166** no. 2 (2022) 580–593.
- [4] F. Abtahi and A. Pedaran, On characterizations of the image of Gelfand transform and BED property for vector valued ℓ^p -algebras, *J. Math. Anal. Appl.*, **517** (2023) 126570.

- [5] F. Abtahi and A. Pedaran, BED property for the tensor product of Banach algebras, *Publ. Math. Debrecen.*, **105** no. 1-2 (2024) 91–105.
- [6] F. Abtahi and M. Toutounchi, BSE norm for abstract Segal algebras, *Journal of Mathematics and Society*, **9** no. 4 (2024) 87–102.
- [7] H. G. Dales and A. Ülger, *Banach function algebras and BSE norms*, Graduate course during 23rd Banach algebra conference, Oulu, Finland, 2017.
- [8] P. A. Dabhi and R. S. Upadhyay, The semigroup algebra $\ell^1(\mathbb{Z}^2, \max)$ is a Bochner-Schoenberg-Eberlein BSE algebra, *Mediterr. J. Math.*, **16** no. 1 (2019) 13 pp.
- [9] R. Doss, On the Fourier-Stieltjes transforms of singular or absolutely continuous measures, *Math. Z.*, **97** (1967) 77–84.
- [10] R. Doss, On the transform of a singular or an absolutely continuous measure, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **19** (1968) 361–363.
- [11] R. Doss, Approximation and representations for Fourier transforms, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **153** (1971) 211–221.
- [12] E. Hewitt and K. A. Ross, *Abstract Harmonic Analysis*, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1979.
- [13] E. Hewitt and H. S. Zuckerman, The ℓ^1 -algebra of a commutative semigroup, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **83** (1956) 70–97.
- [14] J. Inoue and Sin-Ei. Takahasi, On characterizations of the image of the Gelfand transform of commutative banach algebras, *Math. Nachr.*, **280** no. 1–2 (2007) 105–126.
- [15] E. Kaniuth, *A course in commutative Banach algebras*, Springer, New York, 2009.
- [16] S.-E. Takahasi and O. Hatori, Commutative Banach algebras which satisfy a Bochner-Schoenberg-Eberlein-type theorem, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **110** (1990) 149–158.
- [17] S. E. Takahasi, Y. Takahashi, O. Hatori and K. Tanahashi, Commutative Banach algebras and BSE-norm, *Math. Japonica*, **46** no. 2 (1997) 273–277.

فاطمه ابطحي

گروه ریاضی محض، دانشکده ریاضی و آمار، دانشگاه اصفهان، اصفهان، ایران

f.abtahi@sci.ui.ac.ir

abtahif2002@yahoo.com

فاطمه ابطحي دانش آموخته رشته ریاضی محض در مقطع کارشناسی و کارشناسی ارشد از دانشگاه صنعتی اصفهان است. وی دکتری آنالیز هامونیک را در دانشگاه اصفهان گذراند و در حال حاضر دانشیار گروه ریاضی محض دانشگاه اصفهان است.

