

SOME ASYMPTOTICALLY EUCLIDEAN TANGENT BUNDLES AND THEIR ADM MASSES

SAJJAD LAKZIAN[✉]

ABSTRACT. Geometric relativity is mostly referred to the study of spatial manifolds in space-time manifolds as main objects in general relativity. Our goal in this paper, is to study spatial models of the universe that are themselves tangent bundles. In Arnowitt, Deser and Misner's formulation of general relativity as a Hamiltonian system, the main quantities that are studied are total energy and mass of a system and in this paper, we will look at the ADM mass for some asymptotically Euclidean tangent bundles. First, we will completely characterize asymptotically Euclidean interpolation metrics on tangent bundles of simple manifolds. We will then consider a family of interpolation metrics that we will call admissible metrics. We will define the notion of lower ADM mass (that is weaker than ADM mass) and estimate the lower ADM mass of admissible metrics. From the said estimate, we show that a stronger version of Schoen and Yau's positive mass and rigidity of positive mass holds for admissible metrics.

1. Introduction

Asymptotically Euclidean Riemannian manifolds are models of isolated universes in general relativity. Indeed the spatial sections of the space-time solving Einstein equations assuming that there is little to no mass at infinity are given by asymptotically Euclidean manifolds.

Keywords: Tangent Bundle, Asymptotically Euclidean Manifold, Arnowitt-Deser-Misner Mass, Geometric Relativity.

Article Type: Research Paper.

Communicated by Mohamad Reza Pouryayevali.

Received: 03-12-2024, Accepted: 15-01-2025, Published Online: 03-09-2025.

Cite this article: S. Lakzian, Some asymptotically Euclidean tangent bundles and their ADM masses, *Journal of Mathematics and Society*, **10** no. 4 (2025) 85–104.

<http://dx.doi.org/10.22108/msci.2025.143588.1713> .

Studying such manifolds and their relativistic mass that is defined by Arnowitt-Deser-Misner [1] (motivated by the notion of mass in Hamiltonian mechanics) are the main topics of study in geometric relativity. Below, we provide an overview of the required materials.

1.1. Asymptotically Euclidean metrics. Suppose M is a smooth manifold with dimension $n \geq 3$. A Riemannian structure (M, g) is called asymptotically Euclidean if there exists a bounded set $K \subset M$ such that the complement $M \setminus K$ is the disjoint union of finite number of ends $M_1, \dots, M_\ell$ such that each end M_k admits coordinates x_i that are given by a diffeomorphism $\Phi_k : M_k \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \bar{B}_1(0)$; furthermore, in these end coordinates, the decay asymptotics

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} + O_2(|x|^{-\tau}), \quad \text{as } |x| \rightarrow \infty$$

hold. Here, by $f \in O_2(|x|^{-\tau})$, we mean

$$|f(x)| + |x| \cdot |\partial f(x)| + |x|^2 |\partial^2 f(x)| < C|x|^{-\tau}, \quad \text{when } |x| \rightarrow \infty.$$

Schwarzschild Metric as the fundamental example. Perhaps the first and most important example is the Schwarzschild metric. This example is important from the view point of symmetry. In other words, it is the most symmetric solution of the Einstein field equations so we can actually call it a fundamental solution. It is indeed an analog of the “fundamental solution” for the constant scalar curvature equation.

Let us start with a spherically symmetric metric g meaning g is of the warped product form with base $\mathbb{R}$ and fiber $\mathbb{S}^{n-1}$ i.e.

$$g = ds^2 + r(s)^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}}$$

for some positive function $r(s)$. Note that the loci where the symmetric spheres are minimal (and indeed totally geodesic) correspond to $r'(s) = 0$.

The Schwarzschild solution of mass m is a rotationally symmetric metric of the form

$$g_{\text{Sch}} := \left(1 - \frac{2m}{r^{n-2}}\right)^{-1} dr^2 + r^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}}$$

It is easy to see that the Schwarzschild metric is asymptotically Euclidean with one end and with asymptotic decay rate $\tau = n - 2$.

1.2. The ADM and lower ADM masses. Suppose (M^n, g) is an asymptotically Euclidean manifold with ends $M_1, \dots, M_\ell$. The ADM mass (standing for its originators Arnowitt, Deser and Misner) for each end M_k is given by the formula

$$m_{\text{ADM}}(M_k, g) := \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_{S_r} (\text{div}_0 g - d(\text{tr}_0 g))(\nu) d\mathbb{S}^r$$

in which, ν is the Euclidean outward normal vector to $\mathbb{S}_r$ and ω_{n-1} denote the volume of standard unit $(n-1)$ -sphere. In the end coordinates, this takes the form

$$m_{ADM}(M_k, g) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \int_{S_r} (g_{ij,i} - g_{ii,j}) \left(\frac{x}{|x|} \right) dS^r$$

It is well-known that if $\tau > \frac{n}{2} - 1$, then the ADM mass is a geometric invariant (independent of the chosen end coordinates). For less than this decay rate, multiple masses can arise. The decay rates larger than $n-2$ force the mass to be zero. It is easy to see that the mass of the Schwarzschild metric given above is exactly the parameter m that shows up in its definition.

If the scalar curvature $scal_g$ is integrable, then one can show the limit in the ADM mass exists and is finite.

Here we introduce a relaxed notion of ADM mass and we call it the lower ADM mass. Given a set of coordinates x^i at the infinity of a manifold, it is defined as

$$\underline{m}_{ADM}(M) := \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{M \cap S_r} (g_{ij,i} - g_{ii,j}) \nu^j dS_r.$$

with values in extended real numbers, so the lower ADM masses $\pm\infty$ are allowed. The benefit of this relaxed notion of mass is that it can be applied to more general manifolds and only requires a set of coordinates at infinity.

Positive Mass Theorem. So it is natural to expect the right definition of mass yields a positive mass in non-trivial universes and if the mass vanishes the space must be vacuum. This was known as the positive mass conjecture in general relativity.

Perhaps the most important result in this direction is the Schoen and Yau's proof of this conjecture in the case which is most relevant from the point of view of classical physics i.e. in three dimensions; this can be found in [8, 10]. This proof soon after was generalized by Schoen and Yau to dimensions less than 8 in [9]. Their proof essentially relies on the regularity of minimal submanifolds which holds in dimensions less than 8.

Theorem 1.1 (Positive Mass Theorem). *Let (M, g) be a complete asymptotically Euclidean manifold with decay rate $\tau < \frac{n}{2} - 1$ and with integrable scalar curvature. Then the ADM mass of each end of M is a nonnegative quantity.*

Theorem 1.2 (Positive Mass Rigidity). *Let (M, g) be a complete asymptotically Euclidean manifold with decay rate $\tau < \frac{n}{2} - 1$ and with integrable scalar curvature. Then vanishing of the ADM mass of any of the ends of M implies (M, g) is isometric to the Euclidean space $\mathbb{R}^n$.*

Following the proof of Schoen and Yau, Witten in [12] presented a proof that works in all dimensions however it requires the existence of a spin structure.

In recent years, there have been other attempts at proving the positive mass theorem and its rigidity in all dimensions as presented in [6, 7] and in [11].

In a totally different directions and using different techniques, Hein and Le Brun [3] have related the ADM mass of an asymptotically Euclidean Kählerian manifold to its topological invariants and have succeeded in proving a positive mass theorem in this setting as well.

1.3. Mass of tangent bundles of asymptotically Euclidean manifolds. As was mentioned there are studies in the literature on the ADM mas of asymptotically flat Kählerian manifolds. So it is also natural to consider the much harder case of ones with only an almost complex structures or other weaker than Kählerian cases.

A quintessential example of manifolds admitting almost complex structures are tangent bundles. So this brings us to to question of "what can be said about topology, geometry and the ADM mass of asymptotically Euclidean tangent bundles". In the previous work of the author with collaborators, the topological classification of asymptotically Euclidean tangent bundles is given [2].

From the geometrical and analytical point of view, one can consider tangent bundles and study their masses in relation to the mass of the underlying manifold (when the latter makes sense). In these notes, we wish to pioneer such a study by proving a version of positive mass theorem and rigidity for a special class of asymptotically Euclidean Riemannian metrics on tangent bundles of simple manifolds; metrics that we call admissible.

First we note the following important topological classification result: TM has one asymptotically Euclidean end if and only if M is contractible [2] thus the tangent bundle must be $\mathbb{R}^{2n}$. So to be able to consider more general cases, we will need to allow asymptotically Euclidean manifolds whose tangent bundles are no longer asymptotically Euclidean in the usual sense. However if we assume M is simple (i.e. is an open subset of $\mathbb{R}^n$ or equivalently describable by a single coordinate chart), then TM is also simple (by the parallelizability of open subsets of $\mathbb{R}^n$) and inherits a standard set of coordinates from M .

For the said reason, in these notes, we will only consider simple manifolds M that are asymptotically Euclidean with one end and will look at the lower ADM mass of the tangent bundle TM equipped with a metric $\tilde{g}$ that in the inherited coordinates decays to the Euclidean metric (hence is asymptotically Euclidean in a generalized sense).

2. Main Results

Given a fixed arbitrary Riemannian metric $\hat{h}$ on M with Levi-Civita connection $\hat{\nabla}$, one can express any other Riemannian metric $\tilde{g}$ on TM via

$$(2.1) \quad \begin{cases} \tilde{g}_{(p,u)}(X^h, Y^h) = g_{(p,u)}^h(X, Y) \\ \tilde{g}_{(p,u)}(X^h, Y^v) = a_{(p,u)}^c(X, Y) \\ \tilde{g}_{(p,u)}(X^v, Y^v) = g_{(p,u)}^v(X, Y) \end{cases} \quad ,$$

where X^v and X^h respectively denote the vertical and horizontal lifts of a tangent vector X to TTM at the point $(p, u) \in TM$. Here $g_{(\cdot, u)}^h$ and $g_{(\cdot, u)}^v$ are families of Riemannian metrics and $a_{(\cdot, u)}^c$ a family of symmetric 2-tensors, all parametrized by u ; see [4] for further details.

We define the $\hat{h}$ -interpolating metrics as ones of the following form

$$\begin{cases} \tilde{g}_{(p, u)}(X^h, Y^h) = (\varphi_1(u)g_p + (1 - \varphi_1(u))\delta)(X, Y) \\ \tilde{g}_{(p, u)}(X^h, Y^v) = 0 \\ \tilde{g}_{(p, u)}(X^v, Y^v) = (\varphi_2(u)g_p + (1 - \varphi_2(u))\delta)(X, Y) \end{cases}, \varphi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

with the asymptotics

$$0 \leq \varphi_i \leq 1, \quad \varphi_i \in O_2(|u|^{-\tau_i}), \quad \tau_1 > 0, \quad \tau_2 > 1, \quad \varphi_i(0) = 1, \quad \lim_{|u| \rightarrow \infty} \varphi_i(u) = 0.$$

If $\hat{h}$ is a flat metric, we will call this a δ -interpolating metric; in local coordinates, δ -interpolating metrics take the form

$$(2.2) \quad \begin{cases} \tilde{g}_{ij} = \varphi_1 g_{ij} + (1 - \varphi_1) \delta_{ij} \\ \tilde{g}_{i\bar{j}} = 0 \\ \tilde{g}_{\bar{i}\bar{j}} = \varphi_2 g_{ij} + (1 - \varphi_2) \delta_{ij} \end{cases}.$$

Finally, admissible metrics are defined to be δ -interpolating metrics where we further assume

- g is a complete Riemannian metric and is conformally flat i.e. $g = U^{\frac{4}{n-2}}\delta$ for some smooth $U > 0$;
- φ_1 has compact support;
- $\varphi_{2,s} \leq 0$ (φ_2 is nonincreasing in radial directions);
- $(\text{tr}_0 g)_r \leq 0$ (trace of g with respect to the Euclidean metric is nonincreasing in radial directions).

We will be concerned with simple base manifolds M that means they are described by one coordinate chart (open subsets of $\mathbb{R}^n$). We will also use the following notion of lower ADM mass

$$\underline{m}_{ADM}(M) := \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{M \cap S_r} (g_{ij,i} - g_{ii,j}) \nu^j dS_r.$$

For a rather exhaustive theory of geometric relativity, we refer the reader to [5].

Our first result is the characterization of asymptotically Euclidean $\hat{h}$ -interpolating metrics on the tangent bundle of an asymptotically Euclidean manifold as follows:

Theorem 2.1. *An $\hat{h}$ -interpolating metric $\tilde{g}$ on the tangent bundle of a simple manifold M is asymptotically Euclidean if and only if $\hat{h}$ is a flat metric (i.e. $\tilde{g}$ is a δ -interpolating metric).*

Our second main result is the following version of positive mass theorem and rigidity of positive mass for admissible metrics.

Theorem 2.2. Suppose M is a simple manifold with a single end and suppose $\tilde{g}$ is an admissible metric on TM .

- (1) if $\text{scal}_g \geq 0$, then $(TM, \tilde{g})$ has non-negative (possibly $+\infty$) lower ADM mass;
- (2) If (M, g) is asymptotically Euclidean with decay rate $\tau > \frac{n-2}{2}$, then $\underline{m}_{ADM}(\tilde{g}) = 0$ if and only if g and $\tilde{g}$ are flat metrics and $M \equiv \mathbb{R}^n$ and $TM \equiv \mathbb{R}^{2n}$

3. Summary of Proofs/Conclusions

3.1. Summary of Proof of Theorem 2.1. Recalling

$$\partial_i^h = \partial_i - u^b \hat{\Gamma}_{ib}^k \partial_{\bar{k}} = \partial_i - \lambda_{ik} \partial_{\bar{k}}, \quad \partial_i^v = \partial_{\bar{i}},$$

where $\lambda_{ik} := u^b \hat{\Gamma}_{ib}^k$, one can compute the metric coefficients as

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{ij} &= \tilde{g} \left(\partial_i^h + \lambda_{ik} \partial_{\bar{k}}^v, \partial_j^h + \lambda_{jk} \partial_{\bar{k}}^v \right) \\ &= \varphi_1 g_{ij} + (1 - \varphi_1) \delta_{ij} + \lambda_{ik} \lambda_{jm} (\varphi_2 g_{km} + (1 - \varphi_2) \delta_{km}) \\ &= \varphi_1 g_{ij} + (1 - \varphi_1) \delta_{ij} + \varphi_2 \lambda_{ik} \lambda_{jm} g_{km} + (1 - \varphi_2) \lambda_{ik} \lambda_{jk}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{i\bar{j}} &= \tilde{g} \left(\partial_i^h + \lambda_{ik} \partial_{\bar{k}}^v, \partial_{\bar{j}}^v \right) \\ &= \lambda_{ik} (\varphi_2 g_{kj} + (1 - \varphi_2) \delta_{kj}) \\ &= \varphi_2 \lambda_{ik} g_{kj} + (1 - \varphi_2) \lambda_{ij}, \end{aligned}$$

$$\tilde{g}_{\bar{i}\bar{j}} = \tilde{g} \left(\partial_{\bar{i}}^v, \partial_{\bar{j}}^v \right) = \varphi_2 g_{ij} + (1 - \varphi_2) \delta_{ij}.$$

therefore,

$$\tilde{g}_{ij} - \delta_{ij} = \varphi_1 (g_{ij} - \delta_{ij}) + \varphi_2 \lambda_{ik} \lambda_{jm} g_{km} + (1 - \varphi_2) \lambda_{ik} \lambda_{jk},$$

$$\tilde{g}_{i\bar{j}} - \delta_{i\bar{j}} = \tilde{g}_{i\bar{j}} = \varphi_2 \lambda_{ik} g_{kj} + (1 - \varphi_2) \lambda_{ij},$$

$$\tilde{g}_{\bar{i}\bar{j}} - \delta_{\bar{i}\bar{j}} = \varphi_2 (g_{ij} - \delta_{ij}).$$

in particular one can show

$$(3.1) \quad \tilde{g}_{i\bar{j}} = \varphi_2 \lambda_{ik} (g_{kj} - \delta_{kj}) + \lambda_{ij}.$$

If $\hat{h}$ is flat then it is easy to see the "if" part holds using standard computations. For the "only if" part, the decay assumptions lead to

$$\lim_{|u| \rightarrow \infty} \lambda_{ij}(x, u) = 0, \quad \forall x \in M,$$

where upon substituting $u^b = t\delta_{rb}$ gives us

$$0 = \lim_{|u| \rightarrow \infty} \lambda_{ij} = \lim_{|u| \rightarrow \infty} u^b \hat{\Gamma}_{ib}^j = \lim_{t \rightarrow \infty} t \hat{\Gamma}_{ir}^j(x);$$

and as a result,

$$\hat{\Gamma}_{ir}^j(x) = 0, \quad \forall x \in M.$$

3.2. Summary of Proof of Theorem 2.2. Set

$\rho^2 = r^2 + s^2$ and let ν_x and ν_u denote the outward normal vectors in base and in fibers. As is usual the Greek index α runs over both values i corresponding to space and values $\bar{i}$ that correspond to the coordinates on tangent fibers. Starting from

$$\begin{cases} \tilde{g}_{(p,u)}(X^h, Y^h) = \left(\varphi_1(u) U^{\frac{4}{n-2}} + (1 - \varphi_1(u)) \right) \delta(X, Y) \\ \tilde{g}_{(p,u)}(X^h, Y^v) = 0 \\ \tilde{g}_{(p,u)}(X^v, Y^v) = \left(\varphi_2(u) U^{\frac{4}{n-2}} + (1 - \varphi_2(u)) \right) \delta(X, Y) \end{cases},$$

set

$$\Phi_1 := \left(\varphi_1 U^{\frac{4}{n-2}} + (1 - \varphi_1) \right)^{\frac{n-2}{4}}, \quad \Phi_2 := \left(\varphi_2 U^{\frac{4}{n-2}} + (1 - \varphi_2) \right)^{\frac{n-2}{4}}.$$

For any given metric g , let I_g denote the integrand in the ADM mass formula.

In the conformal case, we have

$$I_g = -\frac{4(n-1)}{n-2} U^{\frac{6-n}{n-2}} U_r.$$

Using

$$\nu^j = \frac{x^j}{\rho} = \frac{r}{\rho} \frac{x^j}{r} = \frac{r}{\rho} \nu_x^j, \quad \nu^{\bar{j}} = \frac{u^j}{\rho} = \frac{s}{\rho} \frac{u^j}{s} = \frac{s}{\rho} \nu_u^j$$

With some detailed computations we get to

$$I_{\tilde{g}} = I + \bar{I}$$

where

$$\begin{aligned} I &:= (\tilde{g}_{\alpha j, \alpha} - \tilde{g}_{\alpha \alpha, j}) \nu^j = -\frac{r}{\rho} \frac{4(n-1)}{n-2} \Phi_1^{\frac{6-n}{n-2}} \Phi_{1,r} + (\tilde{g}_{ij, \bar{i}} - \tilde{g}_{\bar{i}i, j}) \nu^j \\ &= -\frac{r}{\rho} \frac{4(n-1)}{n-2} \Phi_1^{\frac{6-n}{n-2}} \Phi_{1,r} - \varphi_2 g_{ii, j} \nu^j \\ &= -\frac{r}{\rho} \frac{4(n-1)}{n-2} \Phi_1^{\frac{6-n}{n-2}} \Phi_{1,r} - \frac{r}{\rho} \varphi_2 (\text{tr}_0 g)_r \\ &= \frac{r}{\rho} \varphi_1 I_g - \frac{r}{\rho} \varphi_2 (\text{tr}_0 g)_r. \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\bar{I} &:= (\tilde{g}_{\alpha\bar{j},\alpha} - \tilde{g}_{\alpha\alpha,\bar{j}}) \nu^{\bar{j}} = -\frac{s}{\rho} \frac{4(2n-1)}{2n-2} \Phi_2^{\frac{6-n}{n-2}} \Phi_{2,s} - \tilde{g}_{ii,\bar{j}} \nu^{\bar{j}} \\ &= -\frac{s}{\rho} \frac{4(n-1)}{n-2} \Phi_2^{\frac{6-n}{n-2}} \Phi_{2,s} - \varphi_{1\bar{j}} (g_{ii} - \delta_{ii}) \nu^{\bar{j}} \\ &= -\frac{s}{\rho} \frac{4(n-1)}{n-2} \Phi_2^{\frac{6-n}{n-2}} \Phi_{2,s} - \frac{s}{\rho} (\text{tr}_0 g - n) \varphi_{1,s} \\ &= -(n-1) \frac{u}{\rho} \left(U^{\frac{4}{n-2}} - 1 \right) \varphi_{2,s} - \frac{u}{\rho} (\text{tr}_0 g - n) \varphi_{1,s}.\end{aligned}$$

Then admissibility implies

$$I \geq \frac{r}{\rho} \varphi_1 I_g, \quad \bar{I} \geq 0;$$

The last part of the proof consists of using the co-area formula for the function $F : (x, u) \rightarrow \|u\|$ which along with some further analysis leads to the computations

Using the co-area formula we find a lower estimate for the lower ADM mass of $\tilde{g}$.

$$\begin{aligned}\int_{TM \cap S_\rho} I_{\tilde{g}} dS_\rho &\geq \int_0^\rho \int_{A_s^\rho} \frac{\sqrt{\rho^2 - s^2}}{\rho} \int_{S_{\sqrt{\rho^2 - s^2}}} \varphi_1(u) I_g(x) dS_{\sqrt{\rho^2 - s^2}} dS_s ds \\ &= \int_0^R \int_{A_s^\rho} \frac{\sqrt{\rho^2 - s^2}}{\rho} \varphi_1(u) \int_{S_{\sqrt{\rho^2 - s^2}}} I_g(x) dS_{\sqrt{\rho^2 - s^2}} dS_s ds,\end{aligned}$$

where

$$A_s^\rho := \left\{ u \in S_s : \{u\} \times S_{\sqrt{\rho^2 - s^2}} \subset TM \cap S_\rho \right\},$$

and R is chosen so that $\text{supp}(\varphi_1) \subset B_R(0)$.

One can see that for any $s \leq R$ and for $\rho \gg 1$, we have

$$S_{\sqrt{\rho^2 - u^2}} \subset M$$

Also one verifies the asymptotic estimates

$$\left| \varphi_1(u) 2(n-1) \omega_{n-1} m - \varphi_1(u) \int_{S_{\sqrt{\rho^2 - s^2}}} I_g(x) dS_{\sqrt{\rho^2 - s^2}} \right| < \epsilon,$$

and

$$\left| \frac{\sqrt{\rho^2 - s^2}}{\rho} - 1 \right| < \epsilon$$

for $s \leq R$ and ϵ sufficiently small and ρ sufficiently large.

Hence, we have

$$(3.2) \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{S_{\sqrt{\rho^2 - s^2}}} I_g(x) dS_{\sqrt{\rho^2 - s^2}} = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r} I_g(x) dS_r = 2(n-1) \omega_{n-1} m_{ADM}(g).$$

Now using the above equation and using Fatou's lemma twice we can compute as follows

$$\begin{aligned}
 m_{ADM}(\tilde{g}) &= \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_0^R \int_{A_s^\rho} \frac{\sqrt{\rho^2 - s^2}}{\rho} \varphi_1(u) \int_{S_{\sqrt{\rho^2 - s^2}}} I_g(x) dS_{\sqrt{\rho^2 - s^2}} dS_s ds \\
 &\geq \int_0^R \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{A_s^\rho} \frac{\sqrt{\rho^2 - s^2}}{\rho} \varphi_1(u) \int_{S_{\sqrt{\rho^2 - s^2}}} I_g(x) dS_{\sqrt{\rho^2 - s^2}} dS_s ds \\
 &\geq \int_0^R \int_{S_s} \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\rho^2 - s^2}}{\rho} \varphi_1(u) \int_{S_{\sqrt{\rho^2 - s^2}}} I_g(x) dS_{\sqrt{\rho^2 - s^2}} dS_s ds \\
 &= \int_0^R \int_{S_s} \varphi_1(u) \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{S_{\sqrt{\rho^2 - s^2}}} I_g(x) dS_{\sqrt{\rho^2 - s^2}} dS_s ds \\
 &= \int_0^R \int_{S_s} \varphi_1(u) 2(n-1)\omega_{n-1} m_{ADM}(g) dS_s ds \\
 &= 2(n-1)\omega_{n-1} m_{ADM}(g) \int_0^R \int_{S_s} \varphi_1(u) dS_s ds \\
 &= 2(n-1)\omega_{n-1} m_{ADM}(g) \int_{B_R(0)} \varphi_1(u) du.
 \end{aligned}$$

This key inequality in conjunction with the classical positive mass theorem applied to (M, g) gives the conclusion.

Sajjad Lakzian

Department of Mathematical Sciences, Isfahan University of Technology, 8415683111, Isfahan, Iran

Email: `slakzian iut.ac.ir`

برخی کلاف‌های مماس مجانبی اقلیدسی و جرم نسبیتی آن‌ها

سجاد لکزیان^{ID}

چکیده. نسبیت هندسی غالباً به مطالعه خمینه فضا در مدل فضا-زمان در نظریه نسبیت عام اطلاق می‌گردد. هدف از این مقاله، مطالعه مدل‌های جهان (خمینه فضا) در نسبیت هندسی می‌باشد که خود کلاف مماس باشند. در فرمول‌بندی آرنویت، دسر و میسنر از نظریه نسبیت عام به‌عنوان یک سیستم همیلتونی، اساسی‌ترین کمیت‌های مورد بررسی، انرژی و جرم کل هستند و در این مقاله، به مطالعه جرم آرنویت-دسر میسنر برای برخی کلاف‌های مماس مجانبی اقلیدسی می‌پردازیم. ابتدا مترهای درونیاب مجانبی اقلیدسی روی کلاف مماس خمینه‌های ساده را کاملاً مشخص می‌کنیم. در ادامه به بررسی یک خانواده مهم از مترهای مجانبی اقلیدسی درونیاب روی کلاف‌های مماس، که آن‌ها را مترهای مجاز می‌نامیم، می‌پردازیم. سپس مفهوم جرم پایین نسبیتی (که ضعیف‌تر از جرم نسبیتی است) را تعریف کرده و تخمینی برای جرم پایین مترهای یاد شده به‌دست می‌آوریم و با استفاده از آن، نشان می‌دهیم صورت قوی‌تری از قضیه مثبت بودن جرم و صلیب جرم مثبت شون و یاو برای مترهای مجاز برقرار است.

۱. مقدمه

خمینه‌های ریمانی مجانبی اقلیدسی (یا مجانبی تخت) مدل‌هایی از جهان‌های ایزوله در نسبیت عام هستند. بررسی این خمینه‌ها و جرم آن‌ها که توسط آرنویت-دسر-میسنر^۱ و با الهام از مفهوم جرم در مکانیک همیلتونی تعریف شد (به‌طور مثال [۱] را ببینید)، اصلی‌ترین موضوعات در نظریه نسبیت هندسی می‌باشند.

از مهم‌ترین دستاوردهای این شاخه می‌توان به اثبات مثبت بودن و صلیب جرم برای خمینه‌های مجانبی اقلیدسی سه‌بعدی (در فیزیک به مثبت بودن انرژی موسوم است) توسط شون^۲ و یاو^۳ در [۸، ۱۰] اشاره کرد که توسط خود آن‌ها در [۹] به ابعاد کمتر از ۸ تعمیم پیدا کرد. اثبات آن‌ها به‌صورت اساسی وابسته به نظم خمینه‌های مینیمال است که فقط تا بعد ۷ دارای تکنیکی نیستند. سپس ویتن^۴ در [۱۲] اثباتی از این قضیه برای تمام بعدها ارایه داد که نیازمند وجود ساختار اسپینوری می‌باشد. اخیراً در مقالات شون-یاو [۱۱] و لکامپ^۵ [۶، ۷]، قضیه مثبت بودن جرم در ابعاد بالاتر مورد مطالعه قرار گرفته و اثبات‌هایی ارایه شده‌اند.

در راستایی کاملاً متفاوت، برای خمینه‌های مجانبی مسطح کهلری، هاین-لبران^۶ [۳] با مربوط کردن جرم به ناوردهای توپولوژیکی، اثباتی برای این قضیه ارایه کردند.

عبارات و کلمات کلیدی: کلاف مماس، خمینه مجانبی اقلیدسی، جرم آرنویت-دسر-میسنر، نسبیت هندسی.

نوع مقاله: پژوهشی

دبیرتخصصی رابط: محمدرضا پوریایولی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۹/۱۳ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۱۰/۲۶ تاریخ انتشار آنلاین: ۱۴۰۴/۰۶/۱۲

ارجاع به مقاله: س. لکزیان، برخی کلاف‌های مماس مجانبی اقلیدسی و جرم نسبیتی آن‌ها، نشریه ریاضی و جامعه، ۱۰ شماره ۴ (۱۴۰۴) ۸۵-۱۰۴.

<http://dx.doi.org/10.22108/msci.2025.143588.1713>

¹Arnowitt-Deser-Misner ²Schoen ³Yau ⁴Witten ⁵Lohkamp ⁶Hein-LeBrun

هر کلاف مماسی ساختار تقریباً مختلط طبیعی می‌پذیرد ولی لزوماً ساختار کهرلی ندارد. این بدین معنی است که بر خلاف خمینه‌های کهرلی مجانبی اقلیدسی، احتمالاً جرم کلاف مماس قابل بیان با استفاده از ناوردهای توپولوژیک نمی‌باشد و این اثبات مثبت بودن جرم را دشوارتر می‌کند. در این متن، قصد داریم به مقوله مترهای مجانبی سطح و جرم مترها روی کلاف‌های مماس و ارتباط آن با جرم خمینه پایه در حالت خمینه‌های ساده (خمینه‌های قابل بیان با یک نقشه مختصاتی) بپردازیم و صورتی از مثبت بودن جرم وصلیت را برای دسته‌ای خاص از مترها به اثبات برسانیم.

۲. کلاف‌های مماس مجانبی سطح

۱.۲. مقدمات. در سرتاسر این متن، بعد خمینه‌ها بزرگتر یا مساوی ۳ می‌باشند. یک خمینه ساده n بعدی، به یک زیر مجموعه باز از $\mathbb{R}^n$ اطلاق می‌شود یا به‌طور معادل، خمینه‌ای که با یک نقشه مختصاتی قابل بیان باشد. همچنین توابعی که ظاهر می‌شوند، هموار هستند. برای جمع کردن مقادیر اندیس‌دار از قرار داد انیشتین بهره می‌گیریم و همیشه روی اندیس‌های تکراری عمل جمع داریم.

تعریف ۱.۲. گوئیم M یک خمینه ساده با یک انتهای مجانبی است هرگاه زیر مجموعه فشرده $K \subseteq \mathbb{R}^n$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\mathbb{R}^n \setminus K = M \setminus K$.

فرض کنیم که M ، یک خمینه ساده هموار با مختصات سرتاسری متناظر x^i ، $1 \leq i \leq n$ روی آن باشد. برای تابع f روی M ، گوئیم $f \in O_\tau(|x|^{-q})$ هرگاه

$$|f(x)| + |x| \cdot |\partial f(x)| + |x|^2 |\partial^2 f(x)| < C|x|^{-q}, \quad |x| \rightarrow \infty \quad \text{وقتی.}$$

تعریف ۲.۲. متر ریمانی g روی خمینه ساده M ، را مجانبی اقلیدسی با نرخ میرایی مجانبی $\tau > 0$ گوئیم هرگاه

$$(1) \quad g_{ij} - \delta_{ij} \in O_\tau(|x|^{-\tau}).$$

خمینه‌های مجانبی اقلیدسی در حالت کلی نیز با لزوم وجود مختصات مجانبی در هر انتهای آن‌ها تعریف می‌شوند به صورتی‌که متر ریمانی در هر انتها دارای میرایی مجانبی مشابه بالا باشد.

تعریف ۳.۲. فرض کنیم M یک خمینه هموار با بعد $n \geq 3$ است. یک ساختار ریمانی (M, g) را مجانبی اقلیدسی گوئیم، هرگاه یک زیر مجموعه کراندار $K \subset M$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $M \setminus K$ اجتماع مجزای تعدادی متناهی انتهای مجانبی $M_1, \dots, M_\ell$ است به‌طوری‌که هر انتهای مجانبی M_k مجهز به مختصات x_i است که با یک دیفیومورفیسم $\Phi_k : M_k \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus B_1(0)$ تعریف شده است. علاوه بر این، در این انتهاهای مجانبی، میرایی مجانبی (۱) برای یک $\tau > 0$ برقرار است.

در فصول بعدی مفهوم مجانبی اقلیدسی برای کلاف‌های مماس را به مفهوم کلی‌تری به کار خواهیم گرفت که در مختصات استاندارد به ارث رسیده از M ، میرایی‌های مجانبی بالا برقرار باشند و محدودیت توپولوژیک (تجزیه به انتهاهای با توپولوژی مشخص) را در نظر نمی‌گیریم.

فرض کنیم (M^n, g) یک خمینه مجانبی اقلیدسی است. جرم نسبیتی آرنویت-دسر-میسر^۷ برای هر انتهای M_k با فرمول مجانبی

$$m_{ADM}(M_k, g) := \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{S_r} (\text{div}_g g - d(\text{tr}_g g))(\nu) dS_r,$$

⁷ADM relativistic mass

داده می شود؛ که در این جا، ν برداری که نرمال برون‌گرا بر کره‌ی مختصاتی (و نه ژئودزیکی) $\mathbb{S}_r$ می‌باشد و ω_{n-1} حجم کره استاندارد واحد $n-1$ بعدی است. اندیس $\circ$ در عملگرهای tr , div بیانگر این است که نسبت به متر اقلیدسی انجام می‌شوند. در مختصات مربوط به هر انتها، جرم به صورت

$$m_{ADM}(M_k, g) := \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{S}_r} (g_{ij,i} - g_{ii,j}) \left(\frac{x}{|x|} \right) d\mathbb{S}_r,$$

قابل بیان است.

در این مطالعه، همچنین نیاز داریم که یک صورت آزاد شده ^۸ از جرم، تحت عنوان جرم پایینی را معرفی نماییم.

تعریف ۴.۲. برای یک خمینه ساده (نه لزوماً مجانبی اقلیدسی)، جرم پایین آرنویت-دسر-میسر را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(۲) \quad \underline{m}_{ADM}(M) := \frac{1}{2(n-1)\omega_{n-1}} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{M \cap \mathbb{S}_r} (g_{ij,i} - g_{ii,j}) \nu^j d\mathbb{S}_r.$$

اگر M یک خمینه ساده مجانبی اقلیدسی با یک انتها باشد که دارای انحنای عددی انتگرال‌پذیر است و اگر $\tau > \frac{n-2}{4}$ از نظریه نسبیت هندسی داریم

$$\underline{m}_{ADM}(M) = m_{ADM}(M).$$

مثال ۵.۲. خمینه شواتزشیلد ^۹ یک خمینه ساده مجانبی مسطح با یک انتهای مجانبی است و عبارت است از $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ با متر ریمانی

$$g_{\text{Sch}} := \left(1 - \frac{2m}{r^{n-2}} \right)^{-1} dr^2 + r^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}}$$

و دارای جرم m می‌باشد.

قضیه انقلابی مثبت بودن جرم ^{۱۰} و صلبیت جرم مثبت ^{۱۱} در نسبیت عام که توسط شون و یو ثابت شد عبارت است از:

قضیه ۶.۲ (مثبت بودن جرم و صلبیت [۸، ۱۰، ۹]). جرم آرنویت-دسر-میسر یک خمینه مجانبی اقلیدسی (نه لزوماً ساده) کامل از بعد کمتر از هشت، با یک انتهای مجانبی، با نرخ میرایی مجانبی $\tau > \frac{n-2}{4}$ و با انحنای عددی نامنفی انتگرال‌پذیر، همیشه نامنفی است و این جرم صفر است اگر و فقط اگر خمینه هم متر با فضای اقلیدسی باشد.

۲.۲. مترها روی کلاف مماس. در این فصل قصد داریم به مترهای ریمانی روی کلاف مماس بپردازیم. همچنین متر ریمانی $\tilde{g}$ را می‌توان به صورتی که در زیر می‌آید مشخص کرد.

یک متر ریمانی دلخواه $\hat{h}$ روی M با هموستار لوی-چیویتای $\hat{\nabla}$ را در نظر بگیرید. این هموستار (یا هر هموستار آفین دیگر) تجزیه‌ای از کلاف دو-مماس به بخش عمودی و افقی را به صورت $TTM = VTM \oplus HTM$ به دست می‌دهد.

با داشتن چنین تجزیه‌ای، هر بردار مماس $X \in T_p M$ را می‌توان به برداری افقی $X^h \in HTM$ و یا عمودی $X^v \in VTM$ در تار بالای $Z \in T_p M$ ترفیع داد؛ در واقع اگر $X = \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ و $Z = \eta_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ آنگاه

$$(X^v)_Z = \xi_i \frac{\partial}{\partial u_i}, \quad (X^h)_Z = \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \xi_i \eta_k \hat{\Gamma}_{jk}^i \frac{\partial}{\partial u_i}$$

⁸relaxed version ⁹Schwarzschild ¹⁰Positive Mass Theorem ¹¹Rigidity of Positive Mass

برای اطلاعات بیشتر در این زمینه، به [۴] مراجعه نمایید.
اکنون متر ریمانی $\tilde{g}$ روی TM را می‌توان به صورت

$$(3) \quad \begin{cases} \tilde{g}_{(p,u)}(X^h, Y^h) = g_{(p,u)}^h(X, Y) \\ \tilde{g}_{(p,u)}(X^h, Y^v) = a_{(p,u)}^c(X, Y) \\ \tilde{g}_{(p,u)}(X^v, Y^v) = g_{(p,u)}^v(X, Y) \end{cases},$$

نوشت که در این جا X^h, X^v به ترتیب ترفیع‌های افقی و عمودی بردارها (به تار بالای $(p, u) \in T_p M$) با استفاده از هموستار لوی-چیویتای متر ریمانی $\hat{h}$ می‌باشند. در این جا $g_{(\cdot, u)}^h$ و $g_{(\cdot, u)}^v$ خانواده‌هایی از مترهای ریمانی روی M هستند (که با پارامتر u پرمایش می‌شوند) و $a_{(\cdot, u)}^c$ خانواده‌ای از ۲-تانسورهای متقارن می‌باشد.
در واقع با داشتن ضرایب هموستار $\lambda_i^j = u^b \hat{\Gamma}_{ib}^j$ در مختصات موضعی استاندارد $(x^i, u^j = \partial_j)$ روی TM ، $\tilde{g}$ در مختصات موضعی به صورت

$$\tilde{g} = g_{ij}^h(\delta x^i)^b \otimes (\delta x^j)^b + a_{ij}^c(\delta x^i)^b \otimes du^j + a_{ij}^c du^i \otimes (\delta x^j)^b + g_{ij}^v du^i \otimes dy^j,$$

نوشته می‌شود که در این جا $\delta x^i := \frac{\partial}{\partial x^i} - \lambda_i^j \frac{\partial}{\partial u^j}$.

در این متن خانواده‌ای از مترها را روی کلاف مماس در نظر می‌گیریم که به صورت زیر تعریف می‌شوند و آن‌ها را مترهای درونیاب می‌نامیم.

تعریف ۷.۲ (مترهای درونیاب^{۱۲}). فرض کنیم متر ریمانی $\hat{h}$ روی M داده شده است و ترفیع بردارها به واسطه این متر صورت می‌پذیرد. یک متر ریمانی $\hat{h}$ -درونیاب $\tilde{g}$ روی کلاف مماس، متری است هموار که به صورت

$$\begin{cases} \tilde{g}_{(p,u)}(X^h, Y^h) = (\varphi_1(u)g_p + (1 - \varphi_1(u))\delta)(X, Y) \\ \tilde{g}_{(p,u)}(X^h, Y^v) = 0 \\ \tilde{g}_{(p,u)}(X^v, Y^v) = (\varphi_2(u)g_p + (1 - \varphi_2(u))\delta)(X, Y) \end{cases}, \varphi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

داده شده است. به علاوه شرایط زیر را مفروض می‌گیریم:

$$0 \leq \varphi_i \leq 1, \quad \varphi_i \in O_\tau(|u|^{-\tau_i}), \quad \tau_1 > 0, \quad \tau_2 > 1, \quad \varphi_i(0) = 1, \quad \lim_{|u| \rightarrow \infty} \varphi_i(u) = 0.$$

مختصات القا شده روی کلاف مماس TM را با x_i, u_i نمایش می‌دهیم. برای آرایه ساختارمندتر و با توجه به ساختار تقریباً مختلط طبیعی روی هر کلاف مماس، مشابه قراردادهای هندسه مختلط، در زیر اندیس i به مختصات x^i و اندیس $\bar{i}$ به مختصات $u^{\bar{i}}$ نظیر می‌شوند.

طبق توافقی‌پذیری زیر مجموعه‌های باز $\mathbb{R}^n$ ، کلاف مماس TM را می‌توان زیر مجموعه‌ای (باز) از $\mathbb{R}^{2n}$ انگاشت. نکته قابل توجه این است که طبق [۲]، می‌دانیم که TM دارای یک انتهای مجانبی است اگر و فقط اگر M انقباض‌پذیر باشد. بنابراین در حالت کلی TM دارای بیش از یک انتهای توپولوژیکی است.

¹²interpolating

۳.۲. نتایج. نتیجه زیر، تصویری کامل از مترهای درونیاب مجانبی اقلیدسی به دست می‌دهد.

قضیه ۸.۲. متر $\hat{h}$ - درونیاب $\tilde{g}$ روی کلاف مماس خمینه ساده مجانبی اقلیدسی M ، مجانبی اقلیدسی است اگر و فقط اگر $\hat{h}$ متریک ثابت (تخت) باشد و در نتیجه

$$(۴) \quad \begin{cases} \tilde{g}_{ij} = \varphi_1 g_{ij} + (1 - \varphi_1) \delta_{ij} \\ \tilde{g}_{i\bar{j}} = 0 \\ \tilde{g}_{\bar{i}\bar{j}} = \varphi_2 g_{ij} + (1 - \varphi_2) \delta_{ij} \end{cases}.$$

در ادامه، جهت سهولت در نوشتار، از نمادگذاری $r := |x|$ و $s := |u|$ استفاده می‌کنیم. همچنین اندیس صفر نشانگر متر ریمانی اقلیدسی δ می‌باشد. به‌طور مثال $\text{tr}_* g = g_{ii}$. مترهای درونیاب خاص زیر را در نظر می‌گیریم.

تعریف ۹.۲ (مترهای مجاز^{۱۳}). متر درونیاب $\tilde{g}$ به فرم (۴) را مجاز گوئیم هرگاه

(۱) g متری کامل و همدیس مسطح باشد یعنی $g = U^{\frac{n-2}{n-1}} \delta$ برای یک تابع $U > 0$ ؛

(۲) محمل φ_1 فشرده است؛

(۳) $\varphi_{2,s} \leq 0$ در راستای شعاعی ناصعودی است؛

(۴) $(\text{tr}_* g)_r \leq 0$.

توجه کنید که به‌طور خاص برای یک متر مجاز، شرط $(\text{tr}_* g)_r \leq 0$ و مجانبی مسطح بودن g ایجاب می‌کند که $U \geq 1$. قضیه زیر قضیه مثبت بودن جرم و صلیت برای مترهای مجاز می‌باشد. اهمیت این قضیه در این است که نیاز به نامنفی بودن انحنای عددی، انتگرال‌پذیری آن و حتی مجانبی مسطح بودن $(TM, \tilde{g})$ ندارد و فقط نیاز به این فرایض برای (M, g) دارد.

قضیه ۱۰.۲ (مثبت بودن جرم و صلیت برای مترهای مجاز روی کلاف مماس).

(۱) فرض کنیم M یک خمینه ساده با یک انتهای مجانبی باشد. آنگاه $(TM, \tilde{g})$ با متر مجاز $\tilde{g}$ دارای جرم پایین نامنفی است (با امکان $+\infty$) هرگاه انحنای عددی $Scal_g$ نامنفی باشد:

(۲) به‌علاوه اگر (M, g) مجانبی اقلیدسی با نرخ میرایی مجانبی $\frac{n-2}{n-1} > \tau$ باشد، آنگاه $m_{ADM}(\tilde{g}) = 0$ اگر و فقط اگر $g, \tilde{g}$ مترهای تخت باشند و $M \cong \mathbb{R}^n$ و $TM \cong \mathbb{R}^{2n}$.

۳. اثبات نتایج

۱.۳. اثبات قضیه ۸.۲. به یادآورد که ترفیع بردارهای مماس به کلاف دو مماس به‌صورت زیر داده می‌شوند:

$$\partial_i^h = \partial_i - u^b \hat{\Gamma}_{ib}^k \partial_{\bar{k}} = \partial_i - \lambda_{ik} \partial_{\bar{k}}, \quad \partial_i^v = \partial_{\bar{i}},$$

و در این جا $\lambda_{ik} := u^b \hat{\Gamma}_{ib}^k$.

¹³admissible

بنابراین داریم

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{ij} &= \tilde{g} \left(\partial_i^h + \lambda_{ik} \partial_k^v, \partial_j^h + \lambda_{jk} \partial_k^v \right) \\ &= \varphi_1 g_{ij} + (1 - \varphi_1) \delta_{ij} + \lambda_{ik} \lambda_{jm} (\varphi_2 g_{km} + (1 - \varphi_2) \delta_{km}) \\ &= \varphi_1 g_{ij} + (1 - \varphi_1) \delta_{ij} + \varphi_2 \lambda_{ik} \lambda_{jm} g_{km} + (1 - \varphi_2) \lambda_{ik} \lambda_{jk}, \\ \tilde{g}_{i\bar{j}} &= \tilde{g} \left(\partial_i^h + \lambda_{ik} \partial_k^v, \partial_{\bar{j}}^v \right) \\ &= \lambda_{ik} (\varphi_2 g_{kj} + (1 - \varphi_2) \delta_{kj}) \\ &= \varphi_2 \lambda_{ik} g_{kj} + (1 - \varphi_2) \lambda_{ij}, \\ \tilde{g}_{\bar{i}\bar{j}} &= \tilde{g} \left(\partial_{\bar{i}}^v, \partial_{\bar{j}}^v \right) = \varphi_2 g_{ij} + (1 - \varphi_2) \delta_{ij}.\end{aligned}$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{ij} - \delta_{ij} &= \varphi_1 (g_{ij} - \delta_{ij}) + \varphi_2 \lambda_{ik} \lambda_{jm} g_{km} + (1 - \varphi_2) \lambda_{ik} \lambda_{jk}, \\ \tilde{g}_{i\bar{j}} - \delta_{i\bar{j}} &= \tilde{g}_{i\bar{j}} = \varphi_2 \lambda_{ik} g_{kj} + (1 - \varphi_2) \lambda_{ij}, \\ \tilde{g}_{\bar{i}\bar{j}} - \delta_{\bar{i}\bar{j}} &= \varphi_2 (g_{ij} - \delta_{ij}).\end{aligned}$$

به ویژه

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{i\bar{j}} &= \varphi_2 \lambda_{ik} g_{kj} + (1 - \varphi_2) \lambda_{ij} = \varphi_2 \lambda_{ik} (g_{kj} - \delta_{kj}) + \varphi_2 \lambda_{ik} \delta_{kj} + (1 - \varphi_2) \lambda_{ij} \\ (5) \quad &= \varphi_2 \lambda_{ik} (g_{kj} - \delta_{kj}) + \lambda_{ij}.\end{aligned}$$

حال مشاهده می‌کنیم که گزاره ”اگر“ در قضیه به‌وضوح برقرار است یعنی اگر $\hat{h}$ متری تخت باشد، ضرایب هموستار صفر هستند و $\tilde{g}$ متری مجانبی اقلیدسی با نرخ میرایی $\min\{\tau, \tau_1, \tau_2\}$ می‌باشد. برای اینکه نشان دهیم تخت بودن $\hat{h}$ شرط لازم نیز هست. طبق نرخ میرایی $\tau_2 > 1$ روی φ_2 داریم

$$\lim_{|u| \rightarrow \infty} \varphi_2(u) \lambda_{ik}(x, u) (g_{kj} - \delta_{kj})(x) = 0.$$

بنابراین بر اساس (۵)، باید داشته باشیم

$$\lim_{|u| \rightarrow \infty} \lambda_{ij}(x, u) = 0, \quad \forall x \in M.$$

با قرار دادن بردار $u^b = t\delta_{rb}$ باید داشته باشیم

$$0 = \lim_{|u| \rightarrow \infty} \lambda_{ij} = \lim_{|u| \rightarrow \infty} u^b \hat{\Gamma}_{ib}^j = \lim_{t \rightarrow \infty} t \hat{\Gamma}_{ir}^j(x);$$

که نتیجه می‌دهد

$$\hat{\Gamma}_{ir}^j(x) = 0, \quad \forall x \in M,$$

□

و حکم قضیه نتیجه می‌شود.

۲.۳. اثبات قضیه ۱.۰.۲. قرار دهید $\rho^2 = r^2 + s^2$ و بردارهای یکه نرمال بروننگرا بر کره‌های مختصاتی را به ترتیب با ν_u و ν_x نمایش می‌دهیم. در زیر، اندیس α همه مقادیر i و $\bar{i}$ را اختیار می‌کند. همچنین طبق فرض، قرار می‌دهیم $g = U^{\frac{\epsilon}{n-2}} \delta$ بنابراین متر مجاز به صورت زیر است:

$$\begin{cases} \tilde{g}_{(p,u)}(X^h, Y^h) = \left(\varphi_1(u) U^{\frac{\epsilon}{n-2}} + (1 - \varphi_1(u)) \right) \delta(X, Y) \\ \tilde{g}_{(p,u)}(X^h, Y^v) = 0 \\ \tilde{g}_{(p,u)}(X^v, Y^v) = \left(\varphi_2(u) U^{\frac{\epsilon}{n-2}} + (1 - \varphi_2(u)) \right) \delta(X, Y) \end{cases}.$$

قرار می‌دهیم

$$\Phi_1 := \left(\varphi_1 U^{\frac{\epsilon}{n-2}} + (1 - \varphi_1) \right)^{\frac{n-2}{\epsilon}}, \quad \Phi_2 := \left(\varphi_2 U^{\frac{\epsilon}{n-2}} + (1 - \varphi_2) \right)^{\frac{n-2}{\epsilon}}.$$

در ادامه اثبات، عبارت زیر انتگرال در فرمول جرم متناظر به یک متر g را با I_g نمایش می‌دهیم. با محاسبات سراسر در حالت همدیس داریم (به طور مثال [۵] را ببینید)

$$I_g = -\frac{\epsilon(n-1)}{n-2} U^{\frac{\epsilon-n}{n-2}} U_r.$$

حال، $I_{\tilde{g}}$ را محاسبه می‌کنیم. با توجه به روابط

$$\nu^j = \frac{x^j}{\rho} = \frac{r}{\rho} \frac{x^j}{r} = \frac{r}{\rho} \nu_{x^j}^j, \quad \bar{\nu}^j = \frac{u^j}{\rho} = \frac{s}{\rho} \frac{u^j}{s} = \frac{s}{\rho} \nu_u^j$$

و فرم متر در (۴)، عبارات زیر را داریم:

$$\begin{aligned} I &:= (\tilde{g}_{\alpha j, \alpha} - \tilde{g}_{\alpha \alpha, j}) \nu^j = -\frac{r}{\rho} \frac{\epsilon(n-1)}{n-2} \Phi_1^{\frac{\epsilon-n}{n-2}} \Phi_{1,r} + (\tilde{g}_{ij, \bar{i}} - \tilde{g}_{\bar{i}i, j}) \bar{\nu}^j \\ &= -\frac{r}{\rho} \frac{\epsilon(n-1)}{n-2} \Phi_1^{\frac{\epsilon-n}{n-2}} \Phi_{1,r} - \varphi_2 g_{ii, j} \nu^j \\ &= -\frac{r}{\rho} \frac{\epsilon(n-1)}{n-2} \Phi_1^{\frac{\epsilon-n}{n-2}} \Phi_{1,r} - \frac{r}{\rho} \varphi_2 (\text{tr}_\circ g)_r, \end{aligned}$$

و همچنین

$$\begin{aligned} \bar{I} &:= (\tilde{g}_{\alpha \bar{j}, \alpha} - \tilde{g}_{\alpha \alpha, \bar{j}}) \bar{\nu}^j = -\frac{s}{\rho} \frac{\epsilon(2n-1)}{2n-2} \Phi_2^{\frac{\epsilon-n}{n-2}} \Phi_{2,s} - \tilde{g}_{ii, \bar{j}} \bar{\nu}^j \\ &= -\frac{s}{\rho} \frac{\epsilon(n-1)}{n-2} \Phi_2^{\frac{\epsilon-n}{n-2}} \Phi_{2,s} - \varphi_1 \bar{j} (g_{ii} - \delta_{ii}) \bar{\nu}^j \\ &= -\frac{s}{\rho} \frac{\epsilon(n-1)}{n-2} \Phi_2^{\frac{\epsilon-n}{n-2}} \Phi_{2,s} - \frac{s}{\rho} (\text{tr}_\circ g - n) \varphi_{1,s}. \end{aligned}$$

به علاوه با محاسبه مستقیم داریم

$$\begin{aligned} \Phi_{1,r} &= \frac{n-2}{\epsilon} \left(\varphi_1 U^{\frac{\epsilon}{n-2}} + (1 - \varphi_1) \right)^{\frac{n-2}{\epsilon}} \left(\frac{\epsilon}{n-2} \varphi_1 U^{\frac{\epsilon-n}{n-2}} U_r \right) \\ &= \frac{n-2}{\epsilon} \Phi_1^{\frac{n-2}{\epsilon}} \left(\frac{\epsilon}{n-2} \varphi_1 U^{\frac{\epsilon-n}{n-2}} U_r \right), \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathfrak{r},s} &= \frac{n-\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}} \left(\varphi_{\mathfrak{r}} U^{\frac{\mathfrak{r}}{n-\mathfrak{r}}} + (1-\varphi_{\mathfrak{r}}) \right)^{\frac{n-\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}}} \left(U^{\frac{\mathfrak{r}}{n-\mathfrak{r}}} - 1 \right) \varphi_{\mathfrak{r},s} \\ &= \frac{n-\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}} \Phi_{\mathfrak{r}}^{\frac{n-\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}}} \left(U^{\frac{\mathfrak{r}}{n-\mathfrak{r}}} - 1 \right) \varphi_{\mathfrak{r},s}.\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}-\frac{r}{\rho} \frac{\mathfrak{r}(n-1)}{n-\mathfrak{r}} \Phi_{\mathfrak{r}}^{\frac{\mathfrak{r}-n}{n-\mathfrak{r}}} \Phi_{\mathfrak{r},r} &= -(n-1) \frac{r}{\rho} \frac{\mathfrak{r}}{n-\mathfrak{r}} \varphi_{\mathfrak{r}} U^{\frac{\mathfrak{r}-n}{n-\mathfrak{r}}} U_r \\ &= \frac{r}{\rho} \varphi_{\mathfrak{r}} I_g,\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}-\frac{u}{\rho} \frac{\mathfrak{r}(n-1)}{n-\mathfrak{r}} \Phi_{\mathfrak{r}}^{\frac{\mathfrak{r}-n}{n-\mathfrak{r}}} \Phi_{\mathfrak{r},s} &= -\frac{u}{\rho} \frac{\mathfrak{r}(n-1)}{n-\mathfrak{r}} \Phi_{\mathfrak{r}}^{\frac{\mathfrak{r}-n}{n-\mathfrak{r}}} \frac{n-\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}} \Phi_{\mathfrak{r}}^{\frac{n-\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}}} \left(U^{\frac{\mathfrak{r}}{n-\mathfrak{r}}} - 1 \right) \varphi_{\mathfrak{r},s} \\ &= -(n-1) \frac{u}{\rho} \left(U^{\frac{\mathfrak{r}}{n-\mathfrak{r}}} - 1 \right) \varphi_{\mathfrak{r},s},\end{aligned}$$

برقرار هستند. به‌طور خلاصه داریم

$$\begin{aligned}I &= \frac{r}{\rho} \varphi_{\mathfrak{r}} I_g - \frac{r}{\rho} \varphi_{\mathfrak{r}} (\text{tr} \circ g)_r, \\ \bar{I} &= -(n-1) \frac{u}{\rho} \left(U^{\frac{\mathfrak{r}}{n-\mathfrak{r}}} - 1 \right) \varphi_{\mathfrak{r},s} - \frac{u}{\rho} (\text{tr} \circ g - n) \varphi_{\mathfrak{r},s}.\end{aligned}$$

طبق فرض مجاز بودن، $(\text{tr} \circ g)_r \leq 0$ و $\varphi_{\mathfrak{r},s} \leq 0$ ، با توجه به مجانبی‌اقلیدسی بودن g ایجاب می‌کنند $\text{tr} \circ g \geq 0$. بنابراین

$$I \geq \frac{r}{\rho} \varphi_{\mathfrak{r}} I_g, \quad \bar{I} \geq 0;$$

در مجموع به

$$(6) \quad I_{\tilde{g}} = I + \bar{I} \geq \frac{r}{\rho} \varphi_{\mathfrak{r}} I_g(x).$$

می‌رسیم.

در ادامه، ابتدا با استفاده از فرمول هم‌مساحت^{۱۴} برای نگاشت $\|u\| : (x, u) \rightarrow F$ ، و نامساوی (۶)، تخمینی برای انتگرال در تعریف جرم پایین $\tilde{g}$ می‌یابیم:

$$\begin{aligned}\int_{TM \cap \mathbb{S}_{\rho}} I_{\tilde{g}} d\mathbb{S}_{\rho} &\geq \int_0^{\rho} \int_{A_s^{\rho}} \frac{\sqrt{\rho^{\mathfrak{r}} - s^{\mathfrak{r}}}}{\rho} \int_{\mathbb{S}_{\sqrt{\rho^{\mathfrak{r}} - s^{\mathfrak{r}}}}} \varphi_{\mathfrak{r}}(u) I_g(x) d\mathbb{S}_{\sqrt{\rho^{\mathfrak{r}} - s^{\mathfrak{r}}}} d\mathbb{S}_s ds \\ &= \int_0^R \int_{A_s^{\rho}} \frac{\sqrt{\rho^{\mathfrak{r}} - s^{\mathfrak{r}}}}{\rho} \varphi_{\mathfrak{r}}(u) \int_{\mathbb{S}_{\sqrt{\rho^{\mathfrak{r}} - s^{\mathfrak{r}}}}} I_g(x) d\mathbb{S}_{\sqrt{\rho^{\mathfrak{r}} - s^{\mathfrak{r}}}} d\mathbb{S}_s ds,\end{aligned}$$

که در این جا

$$A_s^{\rho} := \left\{ u \in \mathbb{S}_s : \{u\} \times \mathbb{S}_{\sqrt{\rho^{\mathfrak{r}} - s^{\mathfrak{r}}}} \subset TM \cap \mathbb{S}_{\rho} \right\},$$

و R طوری انتخاب شده است که $\text{supp}(\varphi_{\mathfrak{r}}) \subset B_R(0)$.

¹⁴co-area formula

برای ρ به اندازه کافی بزرگ و هر $u \in B_R(\circ)$ ، و با توجه به اینکه M دارای یک انتهای مجانبی است، داریم

$$\mathbb{S}_{\sqrt{\rho^2 - u^2}} \subset M,$$

و در نتیجه برای هر $s \leq R$ و برای $\rho \gg 1$ داریم $A_s^\rho = \mathbb{S}_s$. همچنین برای $\epsilon > 0$ به قدر کافی کوچک ثابت، برای هر ρ به قدر کافی بزرگ، و برای $s \leq R$ تقریب‌های مجانبی

$$\left| \varphi_1(u) \mathfrak{Y}(n-1) \omega_{n-1} m - \varphi_1(u) \int_{\mathbb{S}_{\sqrt{\rho^2 - s^2}}} I_g(x) d\mathbb{S}_{\sqrt{\rho^2 - s^2}} \right| < \epsilon,$$

و

$$\left| \frac{\sqrt{\rho^2 - s^2}}{\rho} - 1 \right| < \epsilon$$

برقرار هستند.

بنابراین طبق (۲) برای هر $0 \leq s \leq R$ داریم

$$(Y) \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{S}_{\sqrt{\rho^2 - s^2}}} I_g(x) d\mathbb{S}_{\sqrt{\rho^2 - s^2}} = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{S}_r} I_g(x) d\mathbb{S}_r = \mathfrak{Y}(n-1) \omega_{n-1} m_{ADM}(g).$$

حال جرم پایین متر $\tilde{g}$ ، را با دو مرتبه استفاده از لم فاتو^{۱۵} و با توجه به (۷)، می‌توان به صورت زیر از پایین تخمین زد:

$$\begin{aligned} \underline{m}_{ADM}(\tilde{g}) &= \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_0^R \int_{A_s^\rho} \frac{\sqrt{\rho^2 - s^2}}{\rho} \varphi_1(u) \int_{\mathbb{S}_{\sqrt{\rho^2 - s^2}}} I_g(x) d\mathbb{S}_{\sqrt{\rho^2 - s^2}} d\mathbb{S}_s ds \\ &\geq \int_0^R \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{A_s^\rho} \frac{\sqrt{\rho^2 - s^2}}{\rho} \varphi_1(u) \int_{\mathbb{S}_{\sqrt{\rho^2 - s^2}}} I_g(x) d\mathbb{S}_{\sqrt{\rho^2 - s^2}} d\mathbb{S}_s ds \\ &\geq \int_0^R \int_{\mathbb{S}_s} \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\rho^2 - s^2}}{\rho} \varphi_1(u) \int_{\mathbb{S}_{\sqrt{\rho^2 - s^2}}} I_g(x) d\mathbb{S}_{\sqrt{\rho^2 - s^2}} d\mathbb{S}_s ds \\ &= \int_0^R \int_{\mathbb{S}_s} \varphi_1(u) \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{S}_{\sqrt{\rho^2 - s^2}}} I_g(x) d\mathbb{S}_{\sqrt{\rho^2 - s^2}} d\mathbb{S}_s ds \\ &= \int_0^R \int_{\mathbb{S}_s} \varphi_1(u) \mathfrak{Y}(n-1) \omega_{n-1} m_{ADM}(g) d\mathbb{S}_s ds \\ &= \mathfrak{Y}(n-1) \omega_{n-1} m_{ADM}(g) \int_0^R \int_{\mathbb{S}_s} \varphi_1(u) d\mathbb{S}_s ds \\ &= \mathfrak{Y}(n-1) \omega_{n-1} m_{ADM}(g) \int_{B_R(\circ)} \varphi_1(u) du. \end{aligned}$$

¹⁵Fatou's Lemma

که در این‌جا، تساوی آخر مجدداً با استفاده از فرمول هم‌مساحت می‌باشد. بنابراین طبق قضیه کلاسیک نامنفی بودن جرم داریم $m_{ADM}(g) \geq 0$ و در نتیجه

$$\begin{aligned} \underline{m}_{ADM}(\tilde{g}) &= \frac{1}{2(2n-1)\omega_{2n-1}} \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{TM \cap \mathbb{S}_\rho} (\tilde{g}_{ij,i} - \tilde{g}_{ii,j}) \nu^j d\mathbb{S}_\rho \\ &\geq \frac{(n-1)\omega_{n-1}}{(2n-1)\omega_{2n-1}} m_{ADM}(g) \int_{B_R(0)} \varphi_1(u) du \geq 0. \end{aligned} \quad (A)$$

و ادعای نامنفی بودن جرم اثبات شد.
برای اثبات گزاره صلیت، از آنجا که

$$\int_{B_R(0)} \varphi_1(u) du > 0$$

طبق (A) داریم

$$\underline{m}_{ADM}(\tilde{g}) = 0 \implies m_{ADM}(g) = 0$$

و با استفاده از بند صلیت در قضیه کلاسیک شون-یاو، داریم $M = \mathbb{R}^n$ (دیفئومورف) و g متر اقلیدسی است. در نتیجه $TM = \mathbb{R}^{2n}$ و همچنین $\tilde{g}$ متر اقلیدسی در $\mathbb{R}^{2n}$ است.

مراجع

- [1] R. Arnowitt, S. Deser and C. W. Misner, The dynamics of general relativity, *Gravitation: An introduction to current research*, Wiley, New York-London, (1962) 227–265.
- [2] F. Asadi, Z. Fathi and S. Lakzian, On rigidity of ALE vector bundles, *Topology Appl.*, **362** (2025) 22 pp.
- [3] H.-J. Hein and C. LeBrun, Mass in Kähler geometry, *Comm. Math. Phys.*, **347** no. 1 (2016) 183–221.
- [4] S. Gudmundsson and E. Kappos, On the geometry of tangent bundles, *Expo. Math.*, **20** no. 1 (2002) 1–41.
- [5] D. Lee, *Geometric relativity*, Graduate Studies in Mathematics, 201, American Mathematical Society, Providence, RI, 2019.
- [6] J. Lohkamp, The higher dimensional positive mass theorem I, *arXiv:math/0608795*, (2006). <https://doi.org/10.48550/arXiv.math/0608795>
- [7] J. Lohkamp, The higher dimensional positive mass theorem II, *arXiv:1612.07505* (2016). <https://doi.org/10.48550/arXiv.1612.07505>
- [8] R. Schoen and S. T. Yau, On the proof of the positive mass conjecture in general relativity, *Comm. Math. Phys.*, **65** no. 1 (1979) 45–76.
- [9] R. M. Schoen and S. T. Yau, Complete manifolds with nonnegative scalar curvature and the positive action conjecture in general relativity, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **76** no. 3 (1979) 1024–1025.
- [10] R. Schoen and S. T. Yau, The energy and the linear momentum of space-times in general relativity, *Comm. Math. Phys.*, **79** no. 1 (1981) 47–51.
- [11] R. Schoen and S. T. Yau, Positive scalar curvature and minimal hypersurface singularities, *arXiv:1704.05490* (2017). <https://doi.org/10.48550/arXiv.1704.05490>

- [12] E. Witten, A new proof of the positive energy theorem, *Comm. Math. Phys.*, **80** no. 3 (1981) 381–402.

سجاد لکزیان

دانشکده علوم ریاضی و آمار، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ایران

slakzian@iut.ac.ir

سجاد لکزیان متولد آبان ماه ۱۳۶۱ در شهر نیشابور است. وی در سال ۱۳۸۰ وارد رشته دکتری پیوسته ریاضی دانشگاه صنعتی امیرکبیر شد. تحصیلات خود را در مرکز تحصیلات تکمیلی، دانشگاه شهری نیویورک ادامه داد و در سال ۱۳۹۲، مدرک دکتری خود را از آن مؤسسه اخذ نمود. پس از گذراندن دوره‌های پسادکتری، وی از سال ۱۳۹۹ تاکنون، عضو هیأت علمی دانشکده علوم ریاضی و آمار دانشگاه صنعتی اصفهان می‌باشد.

