http://math-sci.ui.ac.ir

Journal of Mathematics and Society
ISSN (print): 2345-6493, ISSN (on-line): 2345-6507
Vol. 10 No. 3 (2025), pp. 1-22.

http://www.ui.ac.ir

A SURVEY ON BASIC POLYGROUPS AND THEIR AUTOMORPHISMS

ALI MOSAYEBI DORCHEH

Abstract. Polygroups have been applied in many areas, such as geometry, lattices, combinatorics and color scheme. In this paper, we study a special type of polygroups; basic polygroups and present some of their properties. First, we determine the finite basic polygroup. We define the concept of characteristic by using the automorphism of a polygroup and prove that the basic set is a characteristic subpolygroup. A connection between basic polygroups associated with basic set is also investigated. The article provides valuable examples and results for researchers who study polygroups.

1. Introduction

The hyperstructure theory was firstly introduced by F. Marty at the 8th congress of Scandinavian Mathematicians in 1934. Marty introduced the concept of hypergroups as a generalization of groups and used it in different contexts like algebraic functions, rational fractions and non-commutative groups. In calssical algebraic structures, the synthetic result of two elements is an element, while in the hyper algebraic system, the synthetic result of two elements is a set of elements, therefore it can be said that the notion of hyperstructures is a generalization of classical algebraic structures, from this point of view. Hyperstructures have many applications to several sectors of both pure and applied sciences as geometry, graphs and hypergraphs, fuzzy sets and rough sets, automata, cryptography,

Keywords: Basic polygroup, Automorphism, Characteristic subpolygroup, Strongly regular.

Article Type: Research Paper.

Communicated by Alireza Abdoollahi.

Received: 07-02-2024, Accepted: 26-11-2024, Published Online: 08-07-2025.

Cite this article: A. Mosayebi Dorcheh, A survey on Basic polygroups and their automorphisms, *Journal of Mathematics and Society*, **10** no. 3 (2025) 1–22.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140662.1642 .

codes, relation algebras, C-algebras, artificial intelligence, probabilities, chemistry, physics, especially in atomic physics and in harmonic analysis.

After the emergence of algebraic hyperstructures, many scientists around the world studied and researched in this field. In Iran, scientists such as Borzoei, Zahedi, Davvaz, Ameri, etc , have studied and investigated algebraic and logical hyperstructures and have written valuable articles, books and treatises about them. Some researchers have also written many articles about their application in physics, chemistry and other sciences.

Th polygroups theory is a natural generalization of the group theory. Polygroups have been applied in many areas, such as geometry, lattice theory, combinatorics and color schemes. There exists a rich bibliography: publications appeared within 2012 can be found in [1]. This book contains the principal definitions endowed with examples and the basic results of the theory. Applications of hypergroups appear in special subclasses like polygroups that they were studied by Comer [1], also see [3, 4].

In this paper, we introduce the basic polygroup using the concept of polygroups and study relationship between polygroup and basic polygroups.

2. **Main Results**

In this section, we recall some definitions which we will need in the next sections.

Let H be a non-empty set and $P^*(H)$ be the set of all non-empty subsets of H. Let $\cdot$ be a hyperoperation on H, that is, $\cdot$ is a map from $H \times H$ into $P^*(H)$, and the structure $(H, \cdot)$ is called a hypergroupoid. For any two non-empty subsets A and B of H and $x \in H$, we define $A \cdot B = \bigcup_{\substack{a\in A\\ b\in B}} a \cdot b$, $A \cdot x = A \cdot \{x\}$, $x \cdot B = \{x\} \cdot B$, a hypergroupoid $(H, \cdot)$ is called a hypergroup if $\forall\ a, b, c \in H$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ and $a \cdot H = H \cdot a = H$. The map $f : H \to K$ is called a homomorphism of hypergroups if for all $a, b \in H$, we have $f(a \cdot b) = f(a) * f(b)$.

A homomorphism f is called an isomorphism if f is a one to one and onto map. If H is a hypergroup, an automorphism of H is an isomorphism from H to H. The set of automorphisms of H denoted by $\mathrm{Aut}(H)$.

A hypergroupoid $(P, \cdot)$ is called a polygroup, provided that (i) P be associative, (ii) it has a scaler identity e, (iii) $x \in y \cdot z$ implies $y \in x \cdot z^{-1}$ and $z \in y^{-1} \cdot x$, where $^{-1}$ is an unitary operation on H.

A non-empty subset K of P is said to be a subpolygroup of P, if for any $x, y \in K$, $x \cdot y^{-1} \subseteq K$, and is denoted by $K \leq P$. A subpolygroup K of P is said to be characteristic in P if $\alpha(K) \subseteq K$, for all $\alpha \in \mathrm{Aut}(P)$, and we denote it by $K \leq_c P$. Notice, that if K is characteristic in P and $\alpha \in \mathrm{Aut}(P)$, then $\alpha(K) = K$.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140662.1642

Suppost that P_1 and P_2 are two polygroups and $P_1 \cap P_2 = \{e\}$. Then $(P_1[P_2], *)$ is a polygroup (see [2]) as follows: $x * e = e * x = \{x\}$, for all $x \in P_1 \cup P_2$, and for all $x, y \in P_1 \cup P_2 - \{e\}$,

$$x * y = \begin{cases} xy & if\ x, y \in P_1 \\ x & if\ x \in P_2, y \in P_1 \\ y & if\ x \in P_1, y \in P_2 \\ xy & if\ x, y \in P_2, y \neq x^{-1} \\ xy \cup P_1 & if\ x^{-1} = y \in P_2 \end{cases}$$

Let $\mathcal{U}$ denote the set of all finite product of elements of P. Then $\omega_P = \{x \in P \mid \exists u \in \mathcal{U}\ s.t\ e, x \in u\}$ is called heart of P. In [2] it was rewrote $\beta = \{(x, y) \mid \exists u \in \mathcal{U}\ s.t\ x, y \in u\}$, in addition it was proved that P/β is a group. By using a certain type of equivalence relations, we can connect hypergroups to groups. These equivalence relations are called strong regular relations. More exactly, by a given hypergroup and by using a strong regular relation on it, we can construct a group structure on the quotient set, regular relations provide us new hypergroup structures on the quotient sets.

A Mosayebi Dorcheh introduced R_K on H and it was proved that H/R_K is a k-nilpotent group [5]. Also in [6], Mosayebi, introduced the notion of autonilpotent and autosolvable and investigated some properties of them.

3. Summary of Proofs/Conclusions

In this part of the article, we introduce the basic polygroups and at the end we classify the basic polygroups of order less than 7.

Lemma 3.1. [6] *If P is a polygroup and $\alpha \in Aut(P)$. Then*

(i) $\alpha(e) = e$,
(ii) $\alpha(x^{-1}) = \alpha(x)^{-1}$.

Lemma 3.2. [6] *Let P be a polygroup and let for any $x \in P$, $xx^{-1} = \{e\}$, then P is a group.*

Definition 3.3. *Let (P, e) be a polygroup and $A \subseteq P$, then P is called basic polygroup, if for every two elements $x, y \in P$, such that $|xy| \neq 1$, we have $xy = A$. The set A is called basic set of P. The set of basic polygroups denoted by $P_{m,n}$. Where $m = |A|$ and $n = |P| - |A|$. It is obvious that $m \geq 2$.*

Theorem 3.4. *Let (P, e) be a basic polygroup with basic set A. Then*

(i) $\exists\ x \in P\ s.t\ xx^{-1} = A$,
(ii) *If* $a \in A$, *then* $a^{-1} \in A$,
(iii) *If* $a \in A$ *and* $aa^{-1} = A$ *then* $bb^{-1} = e$, *for all* $b \in A \setminus \{a, a^{-1}\}$,
(iv) $A = \omega_P$,

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140662.1642

(v) $\forall\ p \in P \setminus A,\ pp^{-1} = A$.

Proof. (i) By Lemma (3.2), there exists $x \in P$ such that $|xx^{-1}| \neq 1$ and by definition, $e \in xx^{-1} = A$.

(ii) Let $xx^{-1} = A$ for some $x \in P$, then $a \in xx^{-1}$ implies $a^{-1} \in xx^{-1} = A$.

(iii) Let $b \in A \setminus \{a, a^{-1}\}$ such that $aa^{-1} = bb^{-1} = A$. Then $a, b \in ab$ so, we have $ab = A$, which is a contradiction.

(iv) By (i) and definition, the proof is obtained.

(v) Suppose, for a contradiction, that there is element $x \in P \setminus A$ such that $xx^{-1} = e$. Then we have $Px \neq P$, a contradiction.

□

4. Classification of basic polygroups

In this section, we classify finite basic polygroups in the general state. We also examine their automorphisms. We start with some preliminary theorems, but before that it should be noted that in the definition of $P_1[P_2]$, if $P_2 = \{e\}$, we contract that $P_1[P_2] = P_1$. In this section, we denote a group of order n with G_n.

Lemma 4.1. *Let $P \in P_{m,n}$ and let A be the basic set of P and $a_1, a_2 \in A$, then $a_1a_2 \subseteq A$.*

Proof. Suppose, for a contradiction, that $a_1a_2 = x$ and $x \in P \setminus A$. This redues to two cases:

(i) $\exists a \in A\ s.t\ aa^{-1} = A$. Thus $ab = ba = a$, for all $b \in A \setminus \{a, a^{-1}\}$ and so $xa = (a_1a_2)a = a$, a contradiction.

(ii) $\forall b \in A,\ bb^{-1} = e \Rightarrow \exists y \in P \setminus A\ s.t\ yy^{-1} = A \Rightarrow \forall a \in A, ay = y \Rightarrow xy = (a_1a_2)y = y \Rightarrow x \in yy^{-1} = A$, a contradiction. Thus we have $A \leqslant P$.

□

Lemma 4.2. *Let $P \in P_{m,n}$ and let A be the basic set of P and $B = \{x \in P \mid xx^{-1} = A\}$, then $\alpha(A) = A$, $\alpha(B) = B$, for all $\alpha \in \mathrm{Aut}(P)$.*

Proof. Let $A = \{e, a_1, \ldots, a_m\}$. Then $\alpha(A) = \{e, \alpha(a_1), \ldots, \alpha(a_m)\} = A$. Now let $x \in B$. Then $xx^{-1} = A$. Therefore $A = \alpha(A) = \alpha(xx^{-1}) = \alpha(x)\alpha(x)^{-1} \Rightarrow \alpha(x) \in B$. □

Theorem 4.3. *Let $P \in P_{m,0}$, then either $P \cong G_{m-1}[P_{II}]$ or $P \cong G_{m-2}[P_{III}]$.*

Proof. Let $P = A = \{e, a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}\}$. We consider two cases:

case 1. $a_1a_1 = A$, in this case the table P is as follows:

Now, if we delete the row and column related to a_1, the rest of the table is a group of order $m-1$. Thus with the definition of $G_{m-1}[P_{II}]$, the result is obtained.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140662.1642

Table 1.

$\cdot$	e	a_1	a_2	a_3	$\cdots$	a_{m-1}
e	e	a_1	a_2	a_3	$\cdots$	a_{m-1}
a_1	a_1	A	a_1	a_1	$\cdots$	a_1
a_2	a_2	a_1			$\cdots$	
a_3	a_3	a_1			$\cdots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			$\cdots$	$\vdots$
a_{m-1}	a_{m-1}	a_1			$\cdots$	

case 2. $a_1a_2 = A$. Since $a_1a_i = a_ia_1 = a_1$, $i = 1, 3, 4, \ldots, m-1$ and $a_2a_i = a_ia_2 = a_2$, $i = 2, 3, 4, \ldots, m-1$, so if we delete rows and column related to a_1 and a_2, the rest of the table is a group of ordet $m-2$. Now, if $P_{III} = \{e, a_1, a_2\}$, $P \cong G_{m-2}[P_{III}]$.

□

Corollary 4.4. *Let $P \in P_{m,0}$.*

(i) *If $|P \cap B| = 1$, then $P \cong G_{m-1}[P_{II}]$,*

(ii) *If $|P \cap B| \neq 1$, then $P \cong G_{m-2}[P_{III}]$.*

where $B = \{x \in P \mid xx^{-1} = P\}$.

Theorem 4.5. *Let $P \in P_{m,1}$, then either $P \cong G_m[\mathbb{Z}_2]$ or $P \cong P'[\mathbb{Z}_2]$. Where $P' \in P_{m,0}$, also we have* Aut $(P) \cong$ Aut A*.*

Proof. Suppose that $x \in P \setminus A$. Then $xa = ax = x$, for all $a \in A$. Now, if there exists $a \in A$ such that $aa^{-1} = A = xx$, then there exists $P' \in P_{m,0}$ and $P \cong P'[\mathbb{Z}_2]$, where $\mathbb{Z}_2 = \{e, x\}$. On the other hand, if $aa^{-1} = e$, for every $a \in A$, we have $P \cong G_m[\mathbb{Z}_2]$. □

Corollary 4.6. *Let $P \in P_{m,1}$.*

(i) *If $|A \cap B| = 0$, then $P \cong G_m[\mathbb{Z}_2]$,*

(ii) *If $|A \cap B| = 1$, then $P \cong (G_{m-1}[P_{II}])[\mathbb{Z}_2]$.*

(iii) *If $|A \cap B| \neq 0, 1$, then $P \cong (G_{m-2}[P_{III}])[\mathbb{Z}_2]$.*

where $B = \{x \in P \mid xx^{-1} = A\}$.

Theorem 4.7. *Let $P \in P_{m,2}$, then either $P \cong G_m[\mathbb{Z}_3]$ or $P \cong P'[\mathbb{Z}_3]$. Where $P' \in P_{m,0}$.*

Proof. Suppose that $P \setminus A = \{x, y\}$, then $xy = yx = A$ (other modes are not possible). Thus $xx = ay = ya = y$ and $yy = ax = xa = y$, for all $a \in A$. But the table P becomes the following table by removing the elements of the set $A \setminus \{e\}$.

Therefore $\{e, x, y\} \cong \mathbb{Z}_3$. Now, by the definition of $A[\mathbb{Z}_3]$, the proof is complete. □

TABLE 2.

$\cdot$	e	x	y
e	e	x	y
x	x	y	e
y	y	e	x

Corollary 4.8. *Let $P \in P_{m,2}$. Then we have*

$$P \cong \begin{cases} G_m[\mathbb{Z}_3] & if|A \cap B| = 0 \\ (G_{m-1}[P_{II}])[\mathbb{Z}_3] & if|A \cap B| = 1 \\ (G_{m-2}[P_{III}])[\mathbb{Z}_3] & if|A \cap B| \neq 0,1 \end{cases}$$

Corollary 4.9. *Let $P \in P_{m,n}$.*

(i) *If $|A \cap B| = 0$, then $P \cong G_m[P/\beta]$,*
(ii) *If $|A \cap B| = 1$, then $P \cong (G_{m-1}[P_{II}])[P/\beta]$,*
(iii) *If $|A \cap B| \neq 0, 1$, then $P \cong (G_{m-2}[P_{III}])[P/\beta]$.*

Proof. (i) We have $aa^{-1} = e$, $ab = ba = b$, for all $a \in A$ and $b \in P \setminus A$. But the set A is a group of order m. Therefore by definition $G_m[P/\beta]$, we get our claim.

(ii) If $A \cap B = \{a\}$, then $aa = A$ and $bb^{-1} = e$, for all $b \in A$. Thus $A \cong G_{m-1}[P_{II}]$ and so $P \cong (G_{m-1}[P_{II}])[P/\beta]$.

(iii) If $|A \cap B| \neq 0, 1$, then there exists $x \in A \cap B$ such that $x \neq x^{-1}$, $xx^{-1} = A$. Now, by definition P_{III} the proof is complete.

□

5. CONCLUSION

In this article, the concept of expression basic polygroup and some practical examples of it were given. The following items have been obtained from them:

(i) Basic polygroups of order less than 7 were classified.
(ii) The isomorphism of the basic polygroups was investigated.
(iii) The finite basic polygroup was fully described.

REFERENCES

[1] S. D. Comer, Polygroups derived from cogroups, *J. Algebra*, **89** no. 2 (1984) 397–405.

[2] B. Davvaz, *Polygroup theory and related systems*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2013.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140662.1642

[3] B. Davvaz, Applications of the γ^*-relation to polygroups, *Comm. Algebra*, **35** no. 9 (2007) 2698–2706.

[4] B. Davvaz, A survey on polygroups and their properties, *Proceedings of the International Conference on Algebra 2010*, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, (2012) 148–156.

[5] A. Mosayebi Dorcheh, k-nilpotent groups based on hypergroups, *J. Algebr. Hyperstruct. Log. Algebras*, **2** no. 2 (2021) 61–72.

[6] A. Mosayebi Dorcheh, On autosolvable and autonilpotent polygroups, *J. Algebr. Hyperstruct. Log. Algebras*, **2** no. 4 (2021) 39–49

Ali Mosayebi Dorcheh

Department of Mathematies, National University of Skills (NUS), Tehran, Iran.

Email: amosayebi@nus.ac.ir

http://math-sci.ui.ac.ir

ریاضی و جامعه
شاپا (چاپی): ۶۴۹۳-۲۳۴۵، شاپا(الکترونیکی): ۶۵۰۷-۲۳۴۵
جلد ۱۰، شماره ۳ (۱۴۰۴)، صص. ۱-۲۲

http://www.ui.ac.ir

پلی‌گروه‌های پایه‌ای و خودریختی آن‌ها

علی مسیبی درچه

چکیده. پلی‌گروه در بسیاری از زمینه‌ها مانند هندسه، شبکه، ترکیبیات و طرح رنگ کاربرد دارد. در این مقاله، نوع خاصی از پلی‌گروه به نام پلی‌گروه پایه‌ای را مطالعه و خواص و نتایج مهمی از آن‌ها را بیان می‌کنیم . در ابتدا، ما چند گروه پایه‌ای متناهی را رده‌بندی می‌کنیم. مفهوم زیر پلی‌گروه مشخصه را با استفاده از خودریختی پلی‌گروه معرفی می کنیم و ثابت می کنیم که مجموعه پایه یک زیر پلی‌گروه مشخصه است. همچنین ارتباط بین پلی‌گروه پایه‌ای با مجموعه پایه‌اش نیز بررسی شده است. مقاله، نمونه‌ها و نتایج ارزشمندی را در اختیار محققانی که در ابرگروه مطالعه می‌کنند، قرار می‌دهد.

۱. مقدمه

ننظریه ابرساختارهای جبری اولین‌بار توسط مارتی در هشتمین سمینار ریاضی اسکاندیناوی در سال ۱۹۳۴ مطرح شد. مارتی مفهوم ابرگروه‌ها را به‌عنوان تعمیم گروه‌ها معرفی کرد و از آن در زمینه‌های مختلف مانند توابع جبری و گروه‌های غیرآبلی استفاده کرد. در ساختارهای جبری کلاسیک، نتیجه ترکیب دو عنصر، یک عنصر است در حالی‌که در سیستم ابرساختارهای جبری، نتیجه ترکیبی دو عنصر، مجموعه‌ای از عناصر است. بنابراین از این دیدگاه مفهوم ابرساختارهای جبری تعمیم مفهوم ساختارهای جبری کلاسیک است.

ابرساختارهای جبری کاربردهای زیادی در علوم کاربردی مختلف دارد، مانند هندسه، گراف‌ها و ابرگراف‌ها، مجموعه‌های فازی و اتومات، رمزنگاری، کدها، C-جبرها، هوش مصنوعی، احتمالات، شیمی، فیزیک به‌ویژه در فیزیک اتمی و در تجزیه و تحلیل هارمونیک. پس از پیدایش ابرساختارهای جبری، دانشمندان بسیاری در سراسر جهان به مطالعه و تحقیق در این زمینه پرداخته‌اند.

در ایران اندیشمندانی مانند برزویی، زاهدی، دواز، عامری و ... به مطالعه و بررسی ابرساختارهای جبری و منطقی پرداخته و مقالات و کتاب‌ها و رساله‌های ارزشمندی نوشته‌اند. هم‌چنین در مورد کاربردهای آن‌ها در فیزیک، شیمی و سایر علوم مقالات زیادی نوشته شد. نظریه پلی‌گروه‌ها یک تعمیم طبیعی از نظریه گروه‌هاست. پلی‌گروه‌ها در بسیاری از زمینه‌ها مانند هندسه، نظریه مشبکه، ترکیبات و طرح‌های رنگی کاربرد دارد. در این مقاله با استفاده از مفهوم پلی‌گروه به معرفی پلی‌گروه پایه‌ای پرداخته و رابطه بین پلی‌گروه‌ها و پلی‌گروه‌های پایه‌ای را مورد بررسی قرار داده‌ایم.

عبارات و کلمات کلیدی: پلی‌گروه پایه‌ای، خودریختی، زیرپلی‌گروه مشخصه، قلب پلی‌گروه.
نوع مقاله: پژوهشی
دبیرتخصصی رابط: علیرضا عبدالهی
تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۱۱/۱۸ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۹/۰۶ تاریخ انتشار آنلاین: ۱۴۰۴/۰۴/۱۷
ارجاع به مقاله: ع. مسیبی درچه، پلی‌گروه‌های پایه‌ای و خودریختی آن‌ها، نشریه ریاضی و جامعه، ۱۰ شماره ۳ (۱۴۰۴) ۱-۲۲.
. http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140662.1642

۲. تعریف‌های مقدماتی

در این بخش، تعریف‌ها و قضایای مقدماتی که در بخش‌های بعدی کاربرد دارند، را می‌آوریم.
فرض کنیم H یک مجموعه ناتهی و $P^*(H)$ مجموعه همه مجموعه‌های ناتهی از H باشد و $\cdot$ یک ابرعمل روی H باشد. یعنی $\cdot$ یک نگاشت از $H \times H$ به $P^*(H)$ باشد. در این‌صورت ساختار $(H, \cdot)$ را یک ابرگروه‌وار گوییم و برای هر دو زیرمجموعه غیرتهی A و B از H و $x \in H$ تعریف میکنیم $A \cdot B = \bigcup\limits_{\substack{a\in A\\ b\in B}} a \cdot b$، $A \cdot x = A \cdot \{x\}$ و $x \cdot B = \{x\} \cdot B$.
ابرگروه‌وار $(H, \cdot)$ را یک ابرگروه گوییم اگر برای هر a، b و c از H داشته باشیم $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$ و $a\cdot H = H\cdot a = H$.
فرض کنیم $(H, \cdot)$ و $(K, *)$ دو ابرگروه باشند، نگاشت $f : H \to K$ را یک همریختی ابرگروه‌ها نامیم اگر برای هر a و b از H داشته باشیم $f(a \cdot b) = f(a) * f(b)$. همریختی f را یک یکریختی نامیم اگر f یک نگاشت یک‌به‌یک و پوشا باشد. یکریختی از H به H را یک خودریختی از H می‌نامیم و مجموعه همه خودریختی‌های H را با نماد $Aut(H)$ نمایش می‌دهیم.
یک ابرگروه‌وار $(P, \cdot)$ را یک پلی‌گروه نامیم اگر (۱) P شرکت‌پذیر باشد (۲) دارای عضو همانی e باشد (۳) $x \in y \cdot z$ نتیجه دهد که $y \in x \cdot z^{-1}$ و $z \in y^{-1} \cdot x$، جایی‌که $^{-1}$ یک عمل یکانی روی H است.
زیرمجموعه ناتهی K از P را یک زیرپلی‌گروه P گوییم اگر برای هر $x, y \in K$ داشته باشیم $x \cdot y^{-1} \subseteq K$ و با نماد $K \le P$ نشان می‌دهیم. زیرپلی‌گروه K از P را مشخصه در P گوییم اگر برای هر $\alpha \in Aut(P)$ داشته باشیم $\alpha(K) \subseteq K$ و با نماد $K \le_c P$ نشان می‌دهیم.
فرض کنیم P_1 و P_2 دو پلی‌گروه باشند و $P_1 \cap P_2 = \{e\}$. در این‌صورت $(P_1[P_2], *)$ یک پلی‌گروه است [۲]. در جایی‌که برای هر $x \in P_1 \cup P_2$، $x * e = e * x = \{x\}$ و برای هر $x, y \in P_1 \cup P_2 - \{e\}$ تعریف می‌کنیم:

$$x * y = \begin{cases} xy & if\ x, y \in P_1 \\ x & if\ x \in P_2, y \in P_1 \\ y & if\ x \in P_1, y \in P_2 \\ xy & if\ x, y \in P_2, y \neq x^{-1} \\ xy \cup P_1 & if\ x^{-1} = y \in P_2 \end{cases}$$

حال، فرض کنیم $\mathcal{U}$ مجموعه همه حاصل‌ضرب‌های متناهی عناصر P باشد. در این‌صورت

$$\omega_P = \{x \in P \mid \exists u \in \mathcal{U}\ s.t\ e, x \in u\},$$

را قلب پلی‌گروه P می‌نامیم. در [۲] رابطه $\beta = \{(x, y) \mid \exists u \in \mathcal{U}\ s.t\ x, y \in u\}$ بیان شده و ثابت شده که P/β یک گروه است. با کاربرد رابطه‌های هم‌ارزی می‌توان ابرگروه‌ها را با گروه‌ها مربوط ساخت، در منابع [۵] و [۶] برخی از این رابطه‌ها بیان شده‌اند.

۳. پلی‌گروه‌های پایه‌ای

در این بخش از مقاله، پلی‌گروه‌های پایه‌ای را معرفی کرده و در پایان نیز آن‌ها را رده‌بندی می‌کنیم.

لم ۱.۳. [۶] اگر P یک پلی‌گروه و $\alpha \in Aut(P)$ باشد، آن‌گاه
(۱) $\alpha(e) = e$،
(۲) $\alpha(x^{-1}) = \alpha(x)^{-1}$.

لم ۲.۳. [۶] فرض کنید P یک پلی‌گروه و برای هر $x \in P$ داشته باشیم $xx^{-1} = \{e\}$. در این‌صورت P یک گروه است.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140662.1642

تعریف ۳.۳. فرض کنید P یک پلی‌گروه و $A \subseteq P$ باشد. در این‌صورت P را پلی‌گروه پایه‌ای گوییم اگر برای هر دو عنصر x و y از P طوری‌که $|xy| \neq 1$، داشته باشیم $xy = A$. مجموعه A را مجموعه پایه P گوییم اگر $|A| = m$ و $|P| - |A| = n$، آن‌گاه مجموعه پلی‌گروه‌های پایه‌ای با مجموعه پایه A را با $P_{m,n}$ نشان می‌دهیم. بدیهی است که $m \geq 2$.

قضیه ۴.۳. فرض کنیم P یک پلی‌گروه پایه‌ای با مجموعه پایه A باشد. در این‌صورت
(۱) عنصر $x \in P$ وجود دارد به‌طوری‌که $xx^{-1} = A$،
(۲) اگر $a \in A$، آن‌گاه $a^{-1} \in A$،
(۳) اگر $a \in A$ و $aa^{-1} = A$، آن‌گاه برای هر $b \in A \setminus \{a, a^{-1}\}$، داریم $bb^{-1} = e$،
(۴) $A = \omega_P$،
(۵) برای هر $p \in P \setminus A$ داریم $pp^{-1} = A$.

اثبات. (۱) بنابر لم (۲.۳)، عنصر $x \in P$ وجود دارد به‌طوری‌که $|xx^{-1}| \neq 1$ و بنابر تعریف $e \in xx^{-1} = A$.
(۲) بنابر (۱)، عنصر $x \in P$ وجود دارد به‌طوری‌که $xx^{-1} = A$. بنابراین $a \in xx^{-1}$ نتیجه می‌دهد $a^{-1} \in xx^{-1} = A$.
(۳) فرض کنیم $b \in A \setminus \{a, a^{-1}\}$ به‌طوری‌که $aa^{-1} = bb^{-1} = A$. در این‌صورت $a, b \in ab$ و بنابراین $ab = A$ که تناقض است.
(۴) بنابر (۱) و تعریف به‌دست می‌آید.
(۵) فرض کنیم برای یک تناقض عنصر $x \in P \setminus A$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $xx^{-1} = e$. در این‌صورت $Px \neq P$ که یک تناقض است.

□

این بخش را با رده‌بندی پلی‌گروه‌های پایه‌ای از مرتبه کمتر از ۷ به پایان می‌بریم. بدیهی است که یک پلی‌گروه از مرتبه ۱ گروه بدیهی $\{e\}$ است. بنابراین پلی‌گروه پایه‌ای از مرتبه ۱ وجود ندارد.

پلی‌گروه پایه‌ای از مرتبه ۲

قضیه ۵.۳. تنها یک پلی‌گروه پایه‌ای از مرتبه ۲ وجود دارد که آن‌را با نماد P_{II} نشان می‌دهیم. اگر $P = \{p_0, p_1\}$، آن‌گاه جدول این پلی‌گروه به‌صورت زیر است:

جدول ۱. P_{II}

$\cdot$	p_0	p_1
p_0	p_0	p_1
p_1	p_1	p_0, p_1

پلی‌گروه پایه‌ای از مرتبه ۳

قضیه ۶.۳. فرض کنیم $P = \{p_0, p_1, p_2\}$ یک پلی‌گروه پایه‌ای با مجموعه پایه A باشد. در این‌صورت:
(۱) اگر $A = \{p_0, p_1\}$، آن‌گاه تنها دو پلی‌گروه پایه‌ای (تا حد یکریختی) وجود دارد:

جدول ۲. $P_{2,1,1}$

$\cdot$	p_0	p_1	p_2
p_0	p_0	p_1	p_2
p_1	p_1	p_0	p_2
p_2	p_2	p_2	p_0, p_1

جدول ۳. $P_{2,1,2}$

$\cdot$	p_0	p_1	p_2
p_0	p_0	p_1	p_2
p_1	p_1	p_0, p_1	p_2
p_2	p_2	p_2	p_0, p_1

(۲) اگر $A = P$، آن‌گاه تنها دو پلی‌گروه پایه‌ای غیریکریخت وجود دارد:

جدول ۴. $P_{3,0,1}$

$\cdot$	p_0	p_1	p_2
p_0	p_0	p_1	p_2
p_1	p_1	A	p_1
p_2	p_2	p_1	p_0

جدول ۵. P_{III}

$\cdot$	p_0	p_1	p_2
p_0	p_0	p_1	p_2
p_1	p_1	p_1	A
p_2	p_2	A	p_2

نتیجه ۷.۳. فرض کنیم $P = \{p_0, p_1, p_2\}$ یک پلی‌گروه پایه‌ای باشد. در این‌صورت:

(۱) اگر $A = \{p_0, p_1\}$، آن‌گاه $P_{2,1,1} \cong \mathbb{Z}_2[\mathbb{Z}_2]$ و $P_{2,1,2} \cong P_{II}[\mathbb{Z}_2]$،

(۲) اگر $A = P$، آن‌گاه $P_{3,0,1} \cong \mathbb{Z}_2[P_{II}]$.

اثبات. با استفاده از تعریف، نتیجه حاصل می‌شود. $\square$

پلی‌گروه پایه‌ای از مرتبه ۴

قضیه ۸.۳. فرض کنیم $P = \{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ یک پلی‌گروه پایه‌ای با مجموعه پایه A باشد. در این‌صورت

(۱) اگر $A = \{p_0, p_1\}$، آن‌گاه تنها دو پلی‌گروه پایه‌ای غیریکریخت وجود دارد:

جدول ۶. $P_{2,2,1}$

$\cdot$	p_0	p_1	p_2	p_3
p_0	p_0	p_1	p_2	p_3
p_1	p_1	p_0, p_1	p_2	p_3
p_2	p_2	p_2	p_3	p_0, p_1
p_3	p_3	p_3	p_0, p_1	p_2

جدول ۷. $P_{2,2,2}$

$\cdot$	p_0	p_1	p_2	p_3
p_0	p_0	p_1	p_2	p_3
p_1	p_1	p_0	p_2	p_3
p_2	p_2	p_2	p_3	p_0, p_1
p_3	p_3	p_3	p_0, p_1	p_2

(۲) اگر $A = \{p_0, p_1, p_2\}$، آن‌گاه تنها سه پلی‌گروه پایه‌ای غیریکریخت وجود دارد:

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140662.1642

جدول ۸. $P_{3,1,1}$

$\cdot$	p_0	p_1	p_2	p_3
p_0	p_0	p_1	p_2	p_3
p_1	p_1	A	p_1	p_3
p_2	p_2	p_1	p_0	p_3
p_3	p_3	p_3	p_3	A

جدول ۹. $P_{3,1,2}$

$\cdot$	p_0	p_1	p_2	p_3
p_0	p_0	p_1	p_2	p_3
p_1	p_1	p_1	A	p_3
p_2	p_2	A	p_2	p_3
p_3	p_3	p_3	p_3	A

جدول ۱۰. $P_{3,1,3}$

$\cdot$	p_0	p_1	p_2	p_3
p_0	p_0	p_1	p_2	p_3
p_1	p_1	p_2	p_0	p_3
p_2	p_2	p_0	p_1	p_3
p_3	p_3	p_3	p_3	A

(۳) اگر $A = P$، آن‌گاه تنها دو پلی‌گروه پایه‌ای غیریکریخت وجود دارد:

جدول ۱۱. $P_{4,0,1}$

$\cdot$	p_0	p_1	p_2	p_3
p_0	p_0	p_1	p_2	p_3
p_1	p_1	A	p_1	p_1
p_2	p_2	p_1	p_3	p_0
p_3	p_3	p_1	p_0	p_2

جدول ۱۲. $P_{4,0,2}$

$\cdot$	p_0	p_1	p_2	p_3
p_0	p_0	p_1	p_2	p_3
p_1	p_1	p_0	p_2	p_3
p_2	p_2	p_2	p_2	A
p_3	p_3	p_3	A	p_3

نتیجه ۹.۳. فرض کنیم $P = \{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ یک پلی‌گروه پایه‌ای با مجموعه پایه A باشد. در این‌صورت

(۱) اگر $A = \{p_0, p_1\}$، آن‌گاه $P_{2,2,1} \cong P_{II}[\mathbb{Z}_3]$ و $P_{2,2,2} \cong \mathbb{Z}_2[\mathbb{Z}_3]$،

(۲) اگر $A = \{p_0, p_1, p_2\}$، آن‌گاه $P_{3,1,1} \cong P_{3,0,1}[\mathbb{Z}_2]$، $P_{3,1,2} \cong P_{III}[\mathbb{Z}_2]$ و $P_{3,1,3} \cong \mathbb{Z}_3[\mathbb{Z}_2]$،

(۳) اگر $A = P$، آن‌گاه $P_{4,0,1} \cong \mathbb{Z}_3[P_{II}]$ و $P_{4,0,2} \cong \mathbb{Z}_2[P_{III}]$.

پلی‌گروه پایه‌ای از مرتبه ۵

قضیه ۱۰.۳. تنها چهار $P_{2,3}$–پلی‌گروه غیریکریخت وجود دارد. اگر $P = \{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4\}$ و $A = \{p_0, p_1\}$، آن‌گاه

جدول ۱۳. $P_{2,3,1}$

$\cdot$	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4
p_0	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4
p_1	p_1	p_0, p_1	p_2	p_3	p_4
p_2	p_2	p_2	p_0, p_1	p_4	p_3
p_3	p_3	p_3	p_4	p_0, p_1	p_2
p_4	p_4	p_4	p_3	p_2	p_0, p_1

جدول ۱۴. $P_{2,3,2}$

$\cdot$	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4
p_0	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4
p_1	p_1	p_0	p_2	p_3	p_4
p_2	p_2	p_2	p_0, p_1	p_4	p_3
p_3	p_3	p_3	p_4	p_0, p_1	p_2
p_4	p_4	p_4	p_3	p_2	p_0, p_1

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140662.1642

جدول ۱۵. $P_{2,3,3}$

$\cdot$	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4
p_0	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4
p_1	p_1	p_0,p_1	p_2	p_3	p_4
p_2	p_2	p_2	p_0,p_1	p_4	p_3
p_3	p_3	p_3	p_4	p_2	p_0,p_1
p_4	p_4	p_4	p_3	p_0,p_1	p_2

جدول ۱۶. $P_{2,3,4}$

$\cdot$	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4
p_0	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4
p_1	p_1	p_0	p_2	p_3	p_4
p_2	p_2	p_2	p_0,p_1	p_4	p_3
p_3	p_3	p_3	p_4	p_2	p_0,p_1
p_4	p_4	p_4	p_3	p_0,p_1	p_2

قضیه ۱۱.۳. دقیقاً سه پلی‌گروه پایه‌ای غیریکریخت در $P_{3,2}$ وجود دارد. اگر $P=\{p_0,p_1,p_2,p_3,p_4\}$ و $A=\{p_0,p_1,p_2\}$، آن‌گاه این سه پلی‌گروه به‌صورت زیر است:

جدول ۱۷. $P_{3,2,1}$

$\cdot$	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4
p_0	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4
p_1	p_1	A	p_1	p_3	p_4
p_2	p_2	p_1	p_0	p_3	p_4
p_3	p_3	p_3	p_3	p_4	A
p_4	p_4	p_4	p_4	A	p_3

جدول ۱۸. $P_{3,2,2}$

$\cdot$	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4
p_0	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4
p_1	p_1	p_1	A	p_3	p_4
p_2	p_2	A	p_2	p_3	p_4
p_3	p_3	p_3	p_3	p_4	A
p_4	p_4	p_4	p_4	A	p_3

جدول ۱۹. $P_{3,2,3}$

$\cdot$	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4
p_0	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4
p_1	p_1	p_2	p_0	p_3	p_4
p_2	p_2	p_0	p_1	p_3	p_4
p_3	p_3	p_3	p_3	p_4	A
p_4	p_4	p_4	p_4	A	p_3

قضیه ۱۲.۳. فقط چهار $P_{4,1}$–پلی‌گروه غیریکریخت وجود دارد. اگر $P=\{p_0,p_1,p_2,p_3,p_4\}$ و $A=\{p_0,p_1,p_2,p_3\}$، آن‌گاه این چهار پلی‌گروه به‌صورت زیر است:

جدول ۲۰. $P_{4,1,1}$

$\cdot$	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4
p_0	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4
p_1	p_1	p_0	p_2	p_3	p_4
p_2	p_2	p_2	p_2	A	p_4
p_3	p_3	p_3	A	p_3	p_4
p_4	p_4	p_4	p_4	p_4	A

جدول ۲۱. $P_{4,1,2}$

$\cdot$	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4
p_0	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4
p_1	p_1	p_0	p_3	p_2	p_4
p_2	p_2	p_3	p_1	p_0	p_4
p_3	p_3	p_2	p_0	p_1	p_4
p_4	p_4	p_4	p_4	p_4	A

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140662.1642

جدول ۲۲. $P_{۴,۱,۳}$

$\cdot$	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4
p_0	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4
p_1	p_1	A	p_1	p_1	p_4
p_2	p_2	p_1	p_3	p_0	p_4
p_3	p_3	p_1	p_0	p_2	p_4
p_4	p_4	p_4	p_4	p_4	A

جدول ۲۳. $P_{۴,۱,۴}$

$\cdot$	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4
p_0	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4
p_1	p_1	p_0	p_3	p_2	p_4
p_2	p_2	p_3	p_0	p_1	p_4
p_3	p_3	p_2	p_1	p_0	p_4
p_4	p_4	p_4	p_4	p_4	A

قضیه ۱۳.۳. دقیقاً سه $P_{۵,۰}$–پلی‌گروه غیربدیهی وجود دارد. اگر $P = A = \{p_۰, p_۱, p_۲, p_۳, p_۴\}$، آن‌گاه جداول مربوط به این سه پلی‌گروه به‌صورت زیر است:

جدول ۲۴. $P_{۵,۰,۱}$

$\cdot$	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4
p_0	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4
p_1	p_1	A	p_1	p_1	p_1
p_2	p_2	p_1	p_0	p_4	p_3
p_3	p_3	p_1	p_4	p_0	p_2
p_4	p_4	p_1	p_3	p_2	p_0

جدول ۲۵. $P_{۵,۰,۲}$

$\cdot$	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4
p_0	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4
p_1	p_1	A	p_1	p_1	p_1
p_2	p_2	p_1	p_0	p_4	p_3
p_3	p_3	p_1	p_4	p_2	p_0
p_4	p_4	p_1	p_3	p_0	p_2

جدول ۲۶. $P_{۵,۰,۳}$

$\cdot$	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4
p_0	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4
p_1	p_1	p_1	A	p_1	p_1
p_2	p_2	A	p_2	p_2	p_2
p_3	p_3	p_1	p_2	p_4	p_0
p_4	p_4	p_1	p_2	p_0	p_3

نتیجه ۱۴.۳. فرض کنیم $P = \{p_۰, p_۱, p_۲, p_۳, p_۴\}$ یک پلی‌گروه پایه‌ای با مجموعه پایه A باشد. در این‌صورت

(۱) اگر $A = \{p_۰, p_۱\}$، آن‌گاه $P_{۲,۳,۱} \cong P_{II}[K_۴]$، $P_{۲,۳,۲} \cong \mathbb{Z}_۲[K_۴]$، $P_{۲,۳,۳} \cong P_{II}[\mathbb{Z}_۴]$ و $P_{۲,۲,۴} \cong \mathbb{Z}_۲[\mathbb{Z}_۴]$. که در آن $K_۴ = \mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۲$.

(۲) اگر $A = \{p_۰, p_۱, p_۲\}$، آن‌گاه $P_{۳,۲,۱} \cong \mathbb{Z}_۲[P_{II}[\mathbb{Z}_۳]]$، $P_{۳,۲,۲} \cong P_{III}[\mathbb{Z}_۳]$ و $P_{۳,۲,۳} \cong \mathbb{Z}_۳[\mathbb{Z}_۳]$.

(۳) اگر $A = \{p_۰, p_۱, p_۲, p_۳\}$، آن‌گاه $P_{۴,۱,۱} \cong (\mathbb{Z}_۲[P_{III}])[\mathbb{Z}_۲]$، $P_{۴,۱,۲} \cong \mathbb{Z}_۴[\mathbb{Z}_۲]$ ، $P_{۴,۱,۳} \cong (\mathbb{Z}_۳[P_{II}])[\mathbb{Z}_۲]$ و $P_{۴,۱,۴} \cong K_۴[\mathbb{Z}_۲]$.

(۴) اگر $A = P = \{p_۰, p_۱, p_۲, p_۳, p_۴\}$، آن‌گاه $P_{۵,۰,۱} \cong K_۴[P_{II}]$، $P_{۵,۰,۲} \cong \mathbb{Z}_۴[P_{II}]$ و $P_{۵,۰,۳} \cong \mathbb{Z}_۳[P_{III}]$.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140662.1642

پلی‌گروه پایه‌ای از مرتبه ۶

قضیه ۱۵.۳. دقیقاً دو $P_{۲,۴}$–پلی‌گروه غیریکریخت وجود دارد. اگر $P=\{p_۰,p_۱,p_۲,p_۳,p_۴,p_۵\}$ و $A=\{p_۰,p_۱\}$، آن‌گاه جدول ضرب آن‌ها به‌صورت زیر است:

جدول ۲۷. $P_{۲,۴,۱}$

$\cdot$	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
p_0	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
p_1	p_1	p_0	p_2	p_3	p_4	p_5
p_2	p_2	p_2	p_4	A	p_5	p_3
p_3	p_3	p_3	A	p_5	p_2	p_4
p_4	p_4	p_4	p_5	p_2	p_3	A
p_5	p_5	p_5	p_3	p_4	A	p_2

جدول ۲۸. $P_{۲,۴,۲}$

$\cdot$	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
p_0	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
p_1	p_1	A	p_2	p_3	p_4	p_5
p_2	p_2	p_2	p_4	A	p_5	p_3
p_3	p_3	p_3	A	p_5	p_2	p_4
p_4	p_4	p_4	p_5	p_2	p_3	A
p_5	p_5	p_5	p_3	p_4	A	p_2

نتیجه ۱۶.۳. یکریختی‌های زیر را داریم:

$$P_{۲,۴,۱}\cong \mathbb{Z}_۲[\mathbb{Z}_۵],\qquad P_{۲,۴,۲}\cong P_{II}[\mathbb{Z}_۵].$$

قضیه ۱۷.۳. دقیقاً شش $P_{۳,۳}$–پلی‌گروه غیریکریخت وجود دارد. اگر $P=\{p_۰,p_۱,p_۲,p_۳,p_۴,p_۵\}$ و $A=\{p_۰,p_۱,p_۲\}$، آن‌گاه جدول ضرب آن‌ها به‌صورت زیر است:

جدول ۲۹. $P_{۳,۳,۱}$

$\cdot$	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
p_0	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
p_1	p_1	A	p_1	p_3	p_4	p_5
p_2	p_2	p_1	p_0	p_3	p_4	p_5
p_3	p_3	p_3	p_3	A	p_5	p_4
p_4	p_4	p_4	p_4	p_5	A	p_3
p_5	p_5	p_5	p_5	p_4	p_3	A

جدول ۳۰. $P_{۳,۳,۲}$

$\cdot$	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
p_0	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
p_1	p_1	A	p_1	p_3	p_4	p_5
p_2	p_2	p_1	p_0	p_3	p_4	p_5
p_3	p_3	p_3	p_3	A	p_5	p_4
p_4	p_4	p_4	p_4	p_5	p_3	A
p_5	p_5	p_5	p_5	p_4	A	p_3

جدول ۳۱. $P_{۳,۳,۳}$

$\cdot$	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
p_0	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
p_1	p_1	p_2	p_0	p_3	p_4	p_5
p_2	p_2	p_0	p_1	p_3	p_4	p_5
p_3	p_3	p_3	p_3	A	p_5	p_4
p_4	p_4	p_4	p_4	p_5	A	p_3
p_5	p_5	p_5	p_5	p_4	p_3	A

جدول ۳۲. $P_{۳,۳,۴}$

$\cdot$	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
p_0	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
p_1	p_1	p_2	p_0	p_3	p_4	p_5
p_2	p_2	p_0	p_1	p_3	p_4	p_5
p_3	p_3	p_3	p_3	A	p_5	p_4
p_4	p_4	p_4	p_4	p_5	p_3	A
p_5	p_5	p_5	p_5	p_4	A	p_3

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140662.1642

جدول ۳۳. $P_{3,3,5}$

$\cdot$	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
p_0	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
p_1	p_1	p_1	A	p_3	p_4	p_5
p_2	p_2	A	p_2	p_3	p_4	p_5
p_3	p_3	p_3	p_3	A	p_5	p_4
p_4	p_4	p_4	p_4	p_5	A	p_3
p_5	p_5	p_5	p_5	p_4	p_3	A

جدول ۳۴. $P_{3,3,6}$

$\cdot$	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
p_0	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
p_1	p_1	p_1	A	p_3	p_4	p_5
p_2	p_2	A	p_2	p_3	p_4	p_5
p_3	p_3	p_3	p_3	A	p_5	p_4
p_4	p_4	p_4	p_4	p_5	p_3	A
p_5	p_5	p_5	p_5	p_4	A	p_3

نتیجه ۱۸.۳. یکریختی‌های زیر را داریم:

$$P_{3,3,1} \cong (\mathbb{Z}_2[P_{II}])[K_4], \quad P_{3,3,2} \cong (\mathbb{Z}_2[P_{II}])[\mathbb{Z}_4], \quad P_{3,3,3} \cong \mathbb{Z}_3[K_4],$$
$$P_{3,3,4} \cong \mathbb{Z}_3[\mathbb{Z}_4], \quad P_{3,3,5} \cong P_{III}[K_4], \quad P_{3,3,6} \cong P_{III}[\mathbb{Z}_4].$$

اثبات. داریم

$$P_{3,3,1} = P_{3,0,1}[\{p_0, p_3, p_4, p_5\}] \cong (\mathbb{Z}_2[P_{II}])[K_4],$$

که در آن $\{p_0, p_3, p_4, p_5\} = K_4 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. $P_{3,3,2} = P_{3,0,1}[\{p_0, p_3, p_4, p_5\}] \cong P_{3,0,1}[\mathbb{Z}_4] \cong (\mathbb{Z}_2[P_{II}])[\mathbb{Z}_4]$، که در آن $\{p_0, p_3, p_4, p_5\} = \mathbb{Z}_4$، $P_{3,3,3} = \{p_0, p_1, p_2\}[\{p_0, p_3, p_4, p_5\}] \cong \mathbb{Z}_3[K_4]$. به‌طور مشابه می‌توان نشان داد که $P_{3,3,4} \cong \mathbb{Z}_3[\mathbb{Z}_4]$. حال، اگر $P_{III} = \{p_0, p_1, p_2\}$ و $\{p_0, p_3, p_4, p_5\} = K_4$، آن‌گاه $P_{3,3,5} = \{p_0, p_1, p_2\}[\{p_0, p_3, p_4, p_5\}] \cong P_{III}[K_4]$. در نتیجه $P_{3,3,6} = P_{III}[\{p_0, p_3, p_4, p_5\}]$. □

قضیه ۱۹.۳. تنها چهار پلی‌گروه پایه‌ای غیریکریخت در $P_{4,2}$ وجود دارد. اگر $A = \{p_0, p_1, p_2, p_3\}$، آن‌گاه جدول ضرب آن‌ها به‌صورت زیر است:

جدول ۳۵. $P_{4,2,1}$

$\cdot$	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
p_0	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
p_1	p_1	A	p_1	p_1	p_4	p_5
p_2	p_2	p_1	p_3	p_0	p_4	p_5
p_3	p_3	p_1	p_0	p_2	p_4	p_5
p_4	p_4	p_4	p_4	p_4	p_5	A
p_5	p_5	p_5	p_5	p_5	A	p_4

جدول ۳۶. $P_{4,2,2}$

$\cdot$	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
p_0	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
p_1	p_1	p_0	p_3	p_2	p_4	p_5
p_2	p_2	p_3	p_0	p_1	p_4	p_5
p_3	p_3	p_2	p_1	p_0	p_4	p_5
p_4	p_4	p_4	p_4	p_4	p_5	p_1
p_5	p_5	p_5	p_5	p_5	A	p_4

جدول ۳۷. $P_{۴,۲,۳}$

$\cdot$	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
p_0	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
p_1	p_1	p_0	p_3	p_2	p_4	p_5
p_2	p_2	p_3	p_1	p_0	p_4	p_5
p_3	p_3	p_2	p_0	p_1	p_4	p_5
p_4	p_4	p_4	p_4	p_4	p_5	A
p_5	p_5	p_5	p_5	p_5	A	p_4

جدول ۳۸. $P_{۴,۲,۴}$

$\cdot$	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
p_0	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
p_1	p_1	p_0	p_2	p_3	p_4	p_5
p_2	p_2	p_2	p_2	A	p_4	p_5
p_3	p_3	p_3	A	p_3	p_4	p_5
p_4	p_4	p_4	p_4	p_4	p_5	A
p_5	p_5	p_5	p_5	p_5	A	p_4

نتیجه ۲۰.۳. یکریختی‌های زیر را داریم:

$$P_{۴,۲,۱} \cong (\mathbb{Z}_۳[P_{II}])[\mathbb{Z}_۳], \quad P_{۴,۲,۲} \cong K_۴[\mathbb{Z}_۳], \quad P_{۴,۲,۳} \cong \mathbb{Z}_۴[\mathbb{Z}_۳], \quad P_{۴,۲,۴} \cong (\mathbb{Z}_۲[P_{III}])[\mathbb{Z}_۳].$$

اثبات. فرض کنیم $\{p_۰, p_۴, p_۵\} \cong \mathbb{Z}_۳$. در این‌صورت با حذف سطر و ستون مربوط به عناصر $p_۴$ و $p_۵$ در چهار جدول قضیه قبل، جدول‌های زیر به‌دست می‌آید:

جدول ۳۹. $P_{۴,۰,۱}$

$\cdot$	p_0	p_1	p_2	p_3
p_0	p_0	p_1	p_2	p_3
p_1	p_1	A	p_1	p_1
p_2	p_2	p_1	p_3	p_0
p_3	p_3	p_1	p_0	p_2

جدول ۴۰. $K_۴$

$\cdot$	p_0	p_1	p_2	p_3
p_0	p_0	p_1	p_2	p_3
p_1	p_1	p_0	p_3	p_2
p_2	p_2	p_3	p_0	p_1
p_3	p_3	p_2	p_1	p_0

جدول ۴۱. $\mathbb{Z}_۴$

$\cdot$	p_0	p_1	p_2	p_3
p_0	p_0	p_1	p_2	p_3
p_1	p_1	p_0	p_3	p_2
p_2	p_2	p_3	p_1	p_0
p_3	p_3	p_2	p_0	p_1

جدول ۴۲. $P_{۴,۰,۲}$

$\cdot$	p_0	p_1	p_2	p_3
p_0	p_0	p_1	p_2	p_3
p_1	p_1	p_0	p_2	p_3
p_2	p_2	p_2	p_2	A
p_3	p_3	p_3	A	p_3

اما $P_{۴,۰,۱} \cong \mathbb{Z}_۳[P_{II}]$، $P_{۴,۰,۲} \cong \mathbb{Z}_۲[P_{III}]$. این برهان را کامل می‌کند. $\square$

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140662.1642

قضیه ۲۱.۳. دقیقاً چهار پلی‌گروه پایه‌ای غیریکریخت در $P_{۵,۱}$ وجود دارد که جدول ضرب آن‌ها به‌صورت زیر داده شده است:

جدول ۴۳. $P_{۵,۱,۱}$

$\cdot$	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
p_0	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
p_1	p_1	A	p_1	p_1	p_1	p_5
p_2	p_2	p_1	p_0	p_4	p_3	p_5
p_3	p_3	p_1	p_4	p_0	p_2	p_5
p_4	p_4	p_1	p_3	p_2	p_0	p_5
p_5	p_5	p_5	p_5	p_5	p_5	A

جدول ۴۴. $P_{۵,۱,۲}$

$\cdot$	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
p_0	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
p_1	p_1	A	p_1	p_1	p_1	p_5
p_2	p_2	p_1	p_0	p_4	p_3	p_5
p_3	p_3	p_1	p_4	p_2	p_0	p_5
p_4	p_4	p_1	p_3	p_0	p_2	p_5
p_5	p_5	p_5	p_5	p_5	p_5	A

جدول ۴۵. $P_{۵,۱,۳}$

$\cdot$	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
p_0	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
p_1	p_1	p_1	A	p_1	p_1	p_5
p_2	p_2	A	p_2	p_2	p_2	p_5
p_3	p_3	p_1	p_2	p_4	p_0	p_5
p_4	p_4	p_1	p_2	p_0	p_3	p_5
p_5	p_5	p_5	p_5	p_5	p_5	A

جدول ۴۶. $P_{۵,۱,۴}$

$\cdot$	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
p_0	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
p_1	p_1	p_4	p_0	p_2	p_3	p_5
p_2	p_2	p_0	p_3	p_4	p_1	p_5
p_3	p_3	p_2	p_4	p_1	p_0	p_5
p_4	p_4	p_3	p_1	p_0	p_2	p_5
p_5	p_5	p_5	p_5	p_5	p_5	A

نتیجه ۲۲.۳. یکریختی‌های زیر برقرار است:

$$P_{۵,۱,۱} \cong (K_۴[P_{II}])[\mathbb{Z}_۲], \quad P_{۵,۱,۲} \cong (\mathbb{Z}_۴[P_{II}])[\mathbb{Z}_۲], \quad P_{۵,۱,۳} \cong (\mathbb{Z}_۳[P_{III}])[\mathbb{Z}_۲], \quad P_{۵,۱,۴} \cong \mathbb{Z}_۵[\mathbb{Z}_۲].$$

اثبات. فرض کنیم $\{p_۰, p_۵\} \cong \mathbb{Z}_۲$. در این‌صورت با استفاده از قضیه قبل و مشابه نتیجه قبل برهان کامل است. □

قضیه ۲۳.۳. تعداد پلی‌گروه‌های غیریکریخت در $P_{۶,۰}$، دقیقاً برابر ۳ است. اگر $P = \{p_۰, p_۱, p_۲, p_۳, p_۴, p_۵\}$، آن‌گاه جدول ضرب این سه پلی‌گروه به‌صورت زیر آمده است:

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140662.1642

جدول ۴۷. $P_{۶,۰,۱}$

$\cdot$	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
p_0	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
p_1	p_1	A	p_1	p_1	p_1	p_1
p_2	p_2	p_1	p_4	p_0	p_5	p_3
p_3	p_3	p_1	p_0	p_5	p_2	p_4
p_4	p_4	p_1	p_5	p_2	p_3	p_0
p_5	p_5	p_1	p_3	p_4	p_0	p_2

جدول ۴۸. $P_{۶,۰,۲}$

$\cdot$	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
p_0	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
p_1	p_1	p_0	p_3	p_2	p_4	p_5
p_2	p_2	p_3	p_0	p_1	p_4	p_5
p_3	p_3	p_2	p_1	p_0	p_4	p_5
p_4	p_4	p_4	p_4	p_4	p_4	A
p_5	p_5	p_5	p_5	p_5	A	p_5

جدول ۴۹. $P_{۶,۰,۳}$

$\cdot$	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
p_0	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
p_1	p_1	p_0	p_2	p_3	p_5	p_4
p_2	p_2	p_2	p_2	A	p_2	p_2
p_3	p_3	p_3	A	p_3	p_3	p_3
p_4	p_4	p_5	p_2	p_3	p_1	p_0
p_5	p_5	p_4	p_2	p_3	p_0	p_1

نتیجه ۲۴.۳. یکریختی‌های زیر برقرار است:

$$P_{۶,۰,۱} \cong \mathbb{Z}_{۵}[P_{II}], \quad P_{۶,۰,۲} \cong K_{۴}[P_{III}], \quad P_{۶,۰,۳} \cong \mathbb{Z}_{۴}[P_{III}].$$

اثبات. فرض کنیم $P_{II} = \{p_۰, p_۱\}$ و $\{p_۰, p_۲, p_۳, p_۴, p_۵\} \cong \mathbb{Z}_۵$. در این‌صورت جدول $P_{۶,۰,۱}$ به دو جدول زیر شکسته می‌شود:

جدول ۵۰. P_{II}

$\cdot$	p_0	p_1
p_0	p_0	p_1
p_1	p_1	p_0, p_1

جدول ۵۱. $\mathbb{Z}_۵$

$\cdot$	p_0	p_2	p_3	p_4	p_5
p_0	p_0	p_2	p_3	p_4	p_5
p_2	p_2	p_4	p_0	p_5	p_3
p_3	p_3	p_0	p_5	p_2	p_4
p_4	p_4	p_5	p_2	p_3	p_0
p_5	p_5	p_3	p_4	p_0	p_2

و بنابراین $P_{۶,۰,۱} \cong \mathbb{Z}_۵[P_{II}]$. به‌طور مشابه، یکریختی دیگر هم به‌دست می‌آید. □

مثال ۲۵.۳. فرض کنیم G یک گروه نامتناهی باشد. در این‌صورت $\mathbb{Z}_۲[G]$ یک پلی‌گروه پایه‌ای نامتناهی است.

۴. رده‌بندی پلی‌گروه‌های پایه‌ای

در این بخش، پلی‌گروه‌های متناهی را در حالت کلی رده‌بندی و خودریختی‌های آن‌ها را نیز معین می‌کنیم. ابتدا برخی قضیه‌های مورد نیاز را بیان و اثبات می‌کنیم. قبل از شروع قرارداد می‌کنیم که در تعریف $P_۱[P_۲]$، چنان‌چه $P_۲ = \{e\}$ قرار می‌دهیم $P_۱[P_۲] = P_۱$. در این بخش، یک گروه از مرتبه n را با G_n نشان می‌دهیم.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140662.1642

لم ۱.۴. فرض کنیم $P \in P_{m,n}$ با مجموعه پایه A باشد و $a_1, a_2 \in A$. در این‌صورت $a_1a_2 \subseteq A$.

اثبات. فرض کنیم برای یک تناقض که $x = a_1a_2$ و $x \in P \setminus A$ (با استفاده از خاصیت پلی‌گروه‌های پایه‌ای). دو حالت زیر را داریم:

الف) عنصر $a \in A$ وجود دارد به‌طوری‌که $aa^{-1} = A$. بنابراین $ab = ba = a$، برای هر $b \in A \setminus \{a, a^{-1}\}$ و در نتیجه $xa = (a_1a_2)a = a$، که یک تناقض است.

ب) برای هر $b \in A$ داشته باشیم $bb^{-1} = e$. از آن‌جا نتیجه می‌شود که $y \in P \setminus A$ وجود دارد به‌طوری‌که $yy^{-1} = A$. بنابراین برای هر $a \in A$ داریم $ay = y$. در نتیجه $xy = (a_1a_2)y = y$ و این یک تناقض است. بنابراین داریم $a_1a_2 \subseteq A \leqslant P$.

□

لم ۲.۴. فرض کنیم $P \in P_{m,n}$ و A مجموعه پایه P باشد و $B = \{x \in P \mid xx^{-1} = A\}$. در این‌صورت برای هر $\alpha \in Aut(P)$ داریم $\alpha(A) = A$ و $\alpha(B) = B$.

اثبات. فرض کنیم $A = \{e, a_1, \ldots, a_m\}$. در این‌صورت $\alpha(A) = \{e, \alpha(a_1), \ldots, \alpha(a_m)\} = A$. حال فرض کنیم $x \in B$. در این‌صورت $xx^{-1} = A$ (طبق قضیه (۴.۳)). بنابراین $A = \alpha(A) = \alpha(xx^{-1}) = \alpha(x)\alpha(x)^{-1}$. در نتیجه $\alpha(x) \in B$. □

قضیه ۳.۴. فرض کنیم $P \in P_{m,0}$. در این‌صورت یا $P \cong G_{m-1}[P_{II}]$ یا $P \cong G_{m-2}[P_{III}]$.

اثبات. فرض کنیم $P = A = \{e, a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}\}$. در این‌صورت دو حالت زیر را داریم:

حالت اول. $a_1a_1 = A$. در این حالت جدول P به‌صورت زیر است:

جدول ۵۲

$\cdot$	e	a_1	a_2	a_3	$\cdots$	a_{m-1}
e	e	a_1	a_2	a_3	$\cdots$	a_{m-1}
a_1	a_1	A	a_1	a_1	$\cdots$	a_1
a_2	a_2	a_1			$\cdots$	
a_3	a_3	a_1			$\cdots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			$\cdots$	$\vdots$
a_{m-1}	a_{m-1}	a_1			$\cdots$	

حال اگر سطر و ستون مربوط به a_1 را حذف کنیم، جدول باقی‌مانده یک گروه از مرتبه $m-1$ است و بنابراین با تعریف $G_{m-1}[P_{II}]$ نتیجه حاصل می‌شود.

حالت دوم. $a_1a_2 = A$. در این حالت برای $i = 1, 3, 4, \ldots, m-1$، داریم $a_1a_i = a_ia_1 = a_1$ و برای $i = 2, 3, 4, \ldots, m-1$ داریم $a_2a_i = a_ia_2 = a_2$. حال اگر در جدول مربوطه، سطرها و ستون‌های مربوط به a_1 و a_2 را حذف کنیم، جدول باقی‌مانده یک گروه از مرتبه $m-2$ است و با تعریف $G_{m-2}[P_{III}]$ برای $P_{III} = \{e, a_1, a_2\}$ حکم بدیهی است.

□

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140662.1642

نتیجه ۴.۴. فرض کنید $P \in P_{m,0}$.

(۱) اگر $|P \cap B| = 1$، آنگاه $P \cong G_{m-1}[P_{II}]$،

(۲) اگر $|P \cap B| \neq 1$، آنگاه $P \cong G_{m-2}[P_{III}]$.

که در آن $B = \{x \in P \mid xx^{-1} = P\}$.

قضیه ۵.۴. فرض کنیم $P \in P_{m,1}$. در این‌صورت یا $P \cong G_m[\mathbb{Z}_2]$ یا $P \cong P'[\mathbb{Z}_2]$. که در آن $P' \in P_{m,0}$. هم‌چنین داریم $Aut(P) \cong AutA$.

اثبات. فرض کنیم $x \in P \setminus A$. در این‌صورت برای هر $a \in A$، داریم $xa = ax = x$. حال اگر $a \in A$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $aa^{-1} = A = xx$، آنگاه $P' \in P_{m,0}$ وجود دارد که $P \cong P'[\mathbb{Z}_2]$ جایی‌که $\{e, x\} = \mathbb{Z}_2$. از طرف دیگر، اگر برای هر $a \in A$، $aa^{-1} = e$. داریم $P \cong G_m[\mathbb{Z}_2]$. □

نتیجه ۶.۴. فرض کنیم $P \in P_{m,1}$. در این‌صورت:

(۱) اگر $|A \cap B| = 0$، آنگاه $P \cong G_m[\mathbb{Z}_2]$،

(۲) اگر $|A \cap B| = 1$، آنگاه $P \cong (G_{m-1}[P_{II}])[\mathbb{Z}_2]$.

(۳) اگر $|A \cap B| \neq 0, 1$، آنگاه $P \cong (G_{m-2}[P_{III}])[\mathbb{Z}_2]$.

که در آن $B = \{x \in P \mid xx^{-1} = A\}$.

قضیه ۷.۴. فرض کنیم $P \in P_{m,2}$. در این‌صورت یا $P \cong G_m[\mathbb{Z}_3]$ یا $P \cong P'[\mathbb{Z}_3]$. که در آن $P' \in P_{m,0}$.

اثبات. فرض کنیم $P \setminus A = \{x, y\}$. در این‌صورت داریم $xy = yx = A$ (حالت‌های دیگر رخ نمی‌دهند). بنابراین برای هر $a \in A$ داریم $xx = ay = ya = y$ و $yy = ax = xa = x$. حال اگر عناصر $A \setminus \{e\}$ را از جدول P حذف کنیم، جدول حاصل به‌صورت زیر خواهد بود.

جدول ۵۳

$\cdot$	e	x	y
e	e	x	y
x	x	y	e
y	y	e	x

بنابراین داریم $\{e, x, y\} \cong \mathbb{Z}_3$. حال با تعریف $A[\mathbb{Z}_3]$، حکم ثابت می‌شود. □

نتیجه ۸.۴. فرض کنیم $P \in P_{m,2}$. در این‌صورت

$$P \cong \begin{cases} G_m[\mathbb{Z}_3] & if|A \cap B| = 0 \\ (G_{m-1}[P_{II}])[\mathbb{Z}_3] & if|A \cap B| = 1 \\ (G_{m-2}[P_{III}])[\mathbb{Z}_3] & if|A \cap B| \neq 0, 1 \end{cases}$$

نتیجه ۹.۴. فرض کنیم $P \in P_{m,n}$ و $B = \{x \mid xx^{-1} = A\}$. در این‌صورت

(۱) اگر $|A \cap B| = 0$، آنگاه $P \cong G_m[P/\beta]$،

(۲) اگر $|A \cap B| = 1$، آنگاه $P \cong (G_{m-1}[P_{II}])[P/\beta]$،

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140662.1642

(۳) اگر $|A \cap B| \neq ۰, ۱$، آن‌گاه $P \cong (G_{m-۲}[P_{III}])[P/\beta]$.

اثبات. (۱) چون $A \cap B = \emptyset$. بنابراین برای هر $a \in A$ و $b \in P \setminus A$ داریم $aa^{-۱} = e$ و $ab = ba = b$. اما مجموعه A یک گروه از مرتبه m است و در نتیجه با تعریف $G_m[P/\beta]$ حکم ثابت می‌شود.

(۲) فرض کنیم $A \cap B = \{a\}$. در این‌صورت برای هر $b \in A$ داریم $bb^{-۱} = e$ و $aa = A$. بنابراین $A \cong G_{m-۱}[P_{II}]$ و در نتیجه $P \cong (G_{m-۱}[P_{II}])[P/\beta]$.

(۳) فرض کنیم $|A \cap B| \neq ۰, ۱$. در این‌صورت $x \in A \cap B$ وجود دارد به‌طوری‌که $x \neq x^{-۱}$ و $xx^{-۱} = A$. حال با تعریف P_{III} حکم بدیهی است.

□

۵. نتیجه گیری

در این مقاله، مفهوم پلی‌گروه پایه‌ای مطرح و برخی از خواص مهم آن مورد بررسی قرار گرفت.

(۱) پلی‌گروه‌های پایه‌ای از مرتبه کمتر از ۷ رده‌بندی شد.
(۲) یکریختی پلی‌گروه‌های پایه‌ای مورد مطالعه قرار گرفت.
(۳) پلی‌گروه‌های پایه‌ای متناهی کاملاً رده‌بندی شدند.

مراجع

[1] S. D. Comer, Polygroups derived from cogroups, *J. Algebra*, **89** no. 2 (1984) 397–405.

[2] B. Davvaz, *Polygroup theory and related systems*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2013.

[3] B. Davvaz, Applications of the γ^*-relation to polygroups, *Comm. Algebra*, **35** no. 9 (2007) 2698–2706.

[4] B. Davvaz, A survey on polygroups and their properties, *Proceedings of the International Conference on Algebra 2010*, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, (2012) 148–156.

[5] A. Mosayebi Dorcheh, k-nilpotent groups based on hypergroups, *J. Algebr. Hyperstruct. Log. Algebras*, **2** no. 2 (2021) 61–72.

[6] A. Mosayebi Dorcheh, On autosolvable and autonilpotent polygroups, *J. Algebr. Hyperstruct. Log. Algebras*, **2** no. 4 (2021) 39–49

علی مسیبی درچه
گروه ریاضی، دانشگاه ملی مهارت، تهران، ایران.
amosayebi@nus.ac.ir

علی مسیبی درچه متولد اردیبهشت ۱۳۵۲ در شهر درچه اصفهان است. وی در سال ۱۳۷۴ وارد مقطع کارشناسی رشته ریاضی محض دانشگاه اصفهان شد و در سال ۱۳۷۹ وارد مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی گرایش جبر این دانشگاه شد.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140662.1642