

CALABI FLOW ON RIEMANN SURFACES

REZA SEYYEDALI 

ABSTRACT. An important theorem in complex analysis is the uniformization theorem. As a result of uniformization theorem, any compact Riemann surface admits a metric of constant Gaussian curvature. A modern way to prove the uniformization theorem is to use geometric flows. Since seminal work of Perelman, many authors prove it using curvature flows. In an important work, Tian used Ricci flow to prove the uniformization theorem. Later Chen used the Calabi flow to give another proof of the Theorem. In contrast to Ricci flow, Calabi flow is a fourth order parabolic PDE. It is quite difficult to deal with fourth order PDEs partially due to lack of any maximum principle. Even proving the long time existence of Calabi flow is hard and it is still open in complex dimension $n \geq 2$. In a breakthrough, Chen-Cheng provide a strong tool in order to deal with certain fourth order nonlinear PDEs. In this article, appealing to the results of Chen-Cheng, we give a different proof for the long time existence of the Calabi flow on compact Riemann surfaces of positive genus.

1. Introduction

A classical theorem in complex analysis is the Uniformization theorem. A consequence of the uniformization theorem, any compact Riemann surface admits a metric of constant Gaussian curvature. From PDE point of view, one needs to solve some elliptic semi linear equations. It is not hard to do so since there has been an extensive literature on the subject.

Since the celebrated work of Perelman on Ricci flow, there have been several proofs of uniformization theorem using geometric flows. Tian proved the uniformization using Ricci flow. Chen proved it using Calabi flow.

Keywords: Calabi flow, Riemann Surfaces, Uniformization Theorem.

Article Type: Research Paper.

Communicated by Mohamad Reza Pouryayevali.

Received: 31-08-2024, **Accepted:** 05-11-2024, **Published Online:** 29-06-2025.

Cite this article: R. Seyyedali, Calabi flow on Riemann surfaces, *Journal of Mathematics and Society*, **10** no. 4 (2025) 53–60.

<http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.142651.1687> .

In this note, we introduce the Calabi flow and show the long time existence of it on compact Riemann surfaces of positive genus.

2. Main Results

Let M be a compact Riemann surface and $\tilde{h}$ be a fixed Riemannian metric on M . For simplicity, we assume that $\text{Vol}(M, \tilde{h}) = 1$.

Let $h_t = e^{u_t} \tilde{h}$ be a smooth family of Riemannian metrics on M . We say, h_t is a Calabi flow with initial condition $h_0 = e^{u_0} \tilde{h}$ if

$$\frac{du_t}{dt} = \Delta_{h_t} K_{h_t}.$$

Equivalently,

$$\frac{dh_t}{dt} = \left(\Delta_{h_t} K_{h_t} \right) h_t.$$

It is a standard result in parabolic PDEs that for any given initial data h_0 , Calabi flow starting from h_0 exists for short time. More precisely, For any given h_0 , there exists a positive number t_0 and Riemannian metrics $h_t = e^{u_t} \tilde{h}$ for $t \in [0, t_0)$ such that h_t is a Calabi flow with initial condition $h_0 = e^{u_0} \tilde{h}$. The long time existence is more involved. The main result of this paper is the following:

Let M be a Riemann surface of positive genus. For any given h_0 , there exist Riemannian metrics $h_t = e^{u_t} \tilde{h}$ for $t \in [0, \infty)$ such that h_t is a Calabi flow with initial condition $h_0 = e^{u_0} \tilde{h}$.

The above theorem was first proved by Chruściel for any genus. Later Chen and Struwe gave alternative proof using Mabuchi and Calabi functionals respectively. The goal of this note is to give a different proof in the positive genus case based on the recent work of Chen-Cheng.

3. Summary of Proofs

An essential tool to study geometric flows are quantities that are monotone along the flow. In the case of Calabi flow, the Calabi functional plays a crucial role.

For any metric $h = e^u \tilde{h}$ on M , we can define the Calabi energy and entropy as follows:

$$\text{Ca}(h) = \int_M K_h^2 d\mu_h,$$

$$\text{Ent}(h) = \int_M u e^u d\mu_{\tilde{h}} = \int_M u d\mu_h.$$

One can prove that if h_t satisfies the Calabi flow. Then,

$$\frac{d}{dt} \text{Ca}(h_t) \leq 0,$$

$$\frac{d}{dt} \text{Ent}(h_t) \leq 0.$$

In particular, Calabi energy and the entropy are decreasing along the flow. In order to prove the second lemma, we need to assume that there exists a metric of non positive constant Gaussian curvature on M .

Hence, the entropy and Calabi energy are uniformly bounded along the flow

Therefore, we can apply the following modification of Chen-Cheng theorem to prove that in finite time, the flow is uniformly bounded in $W^{2,2}$.

Theorem 3.1. *Let $h_n = e^{u_n} \tilde{h}$ be a sequence of metrics with volume 1. Assume that there exists a constant A such that*

$$Ca(h_n) \leq A,$$

$$Ent(h_n) \leq A.$$

Then, there exists a constant $C = C(\tilde{h}, A)$ such that

$$\|u_n\|_{W^{2,2}} \leq C.$$

All this in place, we can sketch the proof as follows.

As mentioned before, the short time existence is standard. Suppose there exists $T < \infty$ is the maximum number such that the flow h_t exists for $t \in [0, T)$.

Since Calabi energy and the entropy are uniformly bounded along the flow, there exists a constant $C = C(\tilde{h}, h_0, T)$ such that

$$\|u_t\|_{W^{2,2}} \leq C, \text{ for any } t \in [0, T).$$

In particular, there exists $t_n \rightarrow T^-$ such that

$$u_{t_n} \rightarrow u_\infty \text{ in } W^{1,2}.$$

By the short time existence, there exists a positive ϵ such that Calabi flow $g_t = e^{v_t} \tilde{h}$ starting with $v_0 = u_\infty$ exists for $t \in [0, \epsilon)$. Therefore, for $t \in [T, T + \epsilon)$, we can define $h_t = g_{T+t}$. It is standard that h_t satisfies the Calabi flow for $t \in [0, T + \epsilon)$ which is a contradiction with the maximality of T .

REFERENCES

- [1] E. Calabi, Extremal Kähler metrics, Seminar on Differential Geometry, *Ann. of Math. Stud.*, No. 102, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1982 259–290.
- [2] P. T. Chruściel, Semi-global existence and convergence of solutions of the Robinson-Trautman (2-dimensional Calabi) equation, *Commun. Math. Phys.*, **137** no. 2 (1991) 289–313.
- [3] X. Chen and J. Cheng, On the constant scalar curvature Kähler metrics (I)—A priori estimates, *J. Amer. Math. Soc.*, **34** no. 4 (2021) 909–936.
- [4] X. Chen and J. Cheng, On the constant scalar curvature Kähler metrics (II)—Existence results, *J. Amer. Math. Soc.*, **34** no. 4 (2021) 937–1009.
- [5] Z. Lu and R. Seyyedali, Remarks on a result of Chen-Cheng, *Complex Manifolds*, **11** no. 1 (2024) 12 pp.

Reza Seyyedali

School of Mathematics, Institute for research in fundamental sciences, P.O. Box 19395-5746 Tehran, Iran

Email: rseyyedali@ipm.ir

شار کالابی روی رویه‌های ریمانی

رضا سیدعلی^{id}

چکیده. قضیه یکنواخت‌سازی یکی از قضایای مهم در آنالیز مختلط است. از جمله نتایج این قضیه آن است که هر رویه ی ریمانی فشرده متریکی با انحنا ی گاوسی ثابت می‌پذیرد. یکی از راه‌های مدرن اثبات قضیه ی یکنواخت‌سازی استفاده از شارهای هندسی است. پس از کار درخشان پرلمان برای اثبات حدس پوانکاره، برخی نویسندگان اثبات‌هایی برای این قضیه بر اساس شارهای انحنا ارائه کردند. در یکی از کارهای مهم این حوزه، تیان با استفاده از شار ریچی قضیه ی یکنواخت‌سازی را ثابت کرد. بعدتر، چن با استفاده از شار کالابی اثبات دیگری از این قضیه را ارائه نمود. برعکس شار ریچی، شار کالابی معادله دیفرانسیلی سهموی از مرتبه چهار است، و کار کردن با چنین معادله‌های دیفرانسیلی به خاطر برقرار نبودن اصل ماکزیم دشوار است. حتی اثبات وجود جواب در زمانهای طولانی برای شار کالابی ساده نیست و برای بعدهای بیشتر یا مساوی ۲، مساله‌ای باز است. در یکی از کارهای بسیار مهم سالهای اخیر، چن و چنگ ابزاری بسیار قدرتمند برای کار بر روی معادلات دیفرانسیل غیرخطی مرتبه ۴ ساخته‌اند. در این مقاله، با استفاده از نتیجه ی یاد شده، اثبات جدیدی برای وجود جواب در زمان طولانی برای شار کالابی روی رویه‌های فشرده ی ریمانی از گونای مثبت ارائه می‌کنیم.

۱. مقدمه

یکی از قضایای کلاسیک در آنالیز مختلط، قضیه یکنواخت‌سازی^۱ است. یکی از مهم‌ترین نتایج این قضیه آن است که هر رویه ی ریمان فشرده متریکی با انحنا ی گاوسی ثابت^۲ می‌پذیرد. از منظر معادلات دیفرانسیل پاره‌ای، برای این نتیجه لازم است که یک معادله بیضوی نیمه‌خطی حل شوند. از آنجاکه مطالعات گسترده‌ای در این حوزه انجام شده است، حل معادلات یاد شده دشوار نیست.

از زمانی که پرلمان^۳ کار ارزنده ی خود در خصوص شار ریچی را عرضه کرد، چندین اثبات از قضیه ی یکنواخت‌سازی با استفاده از شارهای هندسی ارائه شده است. از جمله، تیان^۴ اثباتی از قضیه ی یاد شده را با استفاده از شار ریچی ارائه کرد. همچنین، چن^۵ اثبات دیگری ارائه داد که در آن از شار کالابی استفاده می‌کرد. در این نوشته ی کوتاه، ابتدا شار کالابی را معرفی می‌کنیم و در ادامه به اثبات وجود جواب در زمان طولانی برای آن بر روی رویه‌های ریمانی فشرده با گونای مثبت می‌پردازیم.

عبارات و کلمات کلیدی: شار کالابی، خمینه‌های ریمانی، قضیه یکنواخت‌سازی.

نوع مقاله: ترویجی

دبیرتخصصی رابط: محمدرضا پوریایی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۶/۱۰ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۸/۱۵ تاریخ انتشار آنلاین: ۱۴۰۴/۰۴/۰۸

ارجاع به مقاله: ر. سیدعلی، شار کالابی روی رویه‌های ریمانی، نشریه ریاضی و جامعه، ۱۰ شماره ۴ (۱۴۰۴) ۵۳-۶۰.

<http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.142651.1687>

¹uniformization theorem ²Constant Gaussian curvature ³Perelman ⁴Tian ⁵Chen

۲. شار کالابی

فرض کنیم که M یک رویه‌ی ریمان فشرده باشد. به عبارت دیگر M خمینه‌ای فشرده و دوبعدی است که به یک ساختار مختلط مجهز شده است. متریک ریمانی و دلخواه $\tilde{h}$ را هم روی رویه‌ی ریمان فشرده‌ی M تثبیت می‌کنیم. برای سادگی فرض می‌کنیم که حجم رویه‌ی ریمان فشرده‌ی M که با استفاده از متریک $\tilde{h}$ قابل محاسبه است و آن را با $\text{Vol}(M, \tilde{h})$ نشان می‌دهیم، مقدار استاندارد ۱ را دارد. بدیهی است که این فرض با بازپرمایش متریک $\tilde{h}$ که با ضرب کردن یک عدد ثابت مثبت حاصل می‌شود، قابل تحقق است.

فرض کنیم که h متریکی ریمانی روی M است که با $\tilde{h}$ هم‌دیس^۶ است. این فرض بدان معناست که تابع هموار $u: M \rightarrow \mathbb{R}$ وجود دارد به طوری که $h = e^u \tilde{h}$. فرض کنیم که فرم حجم وابسته به h را با $d\mu_h$ ، انحنای گاوسی وابسته به h را با K_h و لاپلاسی^۷ وابسته به h را با Δ_h نشان دهیم. محاسبه‌ای ساده نشان می‌دهد که

$$\begin{aligned} d\mu_h &= e^u d\mu_{\tilde{h}}, \\ \Delta_h &= e^{-u} \Delta_{\tilde{h}} \quad \text{و} \\ K_h &= -\Delta_h u + e^{-u} K_{\tilde{h}} = e^{-u} (-\Delta_{\tilde{h}} u + K_{\tilde{h}}). \end{aligned}$$

تعریف ۱.۲. فرض کنیم $h_t = e^{u_t} \tilde{h}$ خانواده‌ای هموار از متریک‌های ریمانی روی رویه‌ی ریمان فشرده‌ی M باشد. می‌گوییم $\{h_t\}_t$ یک شار کالابی با شرط اولیه‌ی $h_0 = e^{u_0} \tilde{h}$ است اگر شرط

$$\frac{du_t}{dt} = \Delta_{h_t} K_{h_t}$$

برقرار باشد. به طور معادل، شرط اخیر را می‌توان به صورت

$$\frac{dh_t}{dt} = (\Delta_{h_t} K_{h_t}) h_t$$

بیان کرد.

نتیجه‌ای کاملاً استاندارد در معادلات دیفرانسیل سهموی بیان می‌کند که برای هر شرط اولیه‌ی h_0 شار کالابی با آغاز از h_0 در زمان کوتاه وجود دارد. به عبارت دقیق‌تر، برای هر متریک داده شده‌ی h_0 ، عدد مثبت و حقیقی t_0 و خانواده‌ی هموار $h_t = e^{u_t} \tilde{h}$ از متریک‌های ریمانی روی M برای مقادیر $t \in [0, t_0)$ وجود دارد به طوری که $\{h_t\}_t$ یک شار کالابی با مقدار اولیه‌ی $h_0 = e^{u_0} \tilde{h}$ است. وجود جواب در زمان طولانی به مراتب دشوارتر است.

قضیه ۲.۲. [۲] برای هر متریک داده شده‌ی h_0 ، خانواده‌ی هموار $h_t = e^{u_t} \tilde{h}$ از متریک‌های ریمانی روی M برای مقادیر $t \in [0, \infty)$ وجود دارد به طوری که $\{h_t\}_t$ یک شار کالابی با مقدار اولیه‌ی $h_0 = e^{u_0} \tilde{h}$ است.

قضیه‌ی یاد شده ابتدا توسط کروشیل^۸ [۲] به اثبات رسید. بعدتر، چن و استرو^۹ اثبات‌های دیگری از این قضیه را به ترتیب با استفاده از تابع‌های مابوچی^{۱۰} و کالابی^{۱۱} ارائه کردند. هدف ما در این نوشته آن است که اثبات متفاوتی از این قضیه را با استفاده از کار اخیر چن و چنگ^{۱۲} ارائه کنیم.

یکی از ابزارهای اساسی که در مطالعه‌ی شارهای هندسی استفاده‌ای گسترده دارد، استفاده از کمیت‌هایی است که رفتاری یکنوا در طول شار از خود نشان می‌دهند. در خصوص شار کالابی، تابع کالابی نقشی محوری ایفا می‌کند.

^۶conformal ^۷Laplacian ^۸Chruściel ^۹Struwe ^{۱۰}Mabouchi ^{۱۱}Calabi ^{۱۲}Cheng

تعریف ۳.۲. برای هر متریک به شکل $h = e^u \tilde{h}$ روی رویه‌ی ریمان فشرده‌ی M تابع انرژی کالابی و تابع آنترپپی کالابی به‌ترتیب با عبارت‌های

$$\begin{aligned} \text{Ca}(h) &= \int_M K_h^\vee d\mu_h \quad \text{و} \\ \text{Ent}(h) &= \int_M u e^u d\mu_{\tilde{h}} = \int_M u d\mu_h \end{aligned}$$

تعریف می‌شوند.

با این تعاریف، اثبات لم زیر سراسر است:

لم ۴.۲. فرض کنید که $\{h_t\}_t$ یک شار کالابی روی رویه‌ی ریمان فشرده‌ی M باشد. در این صورت

$$\frac{d}{dt} \text{Ca}(h_t) \leq 0.$$

به‌طور خاص، انرژی کالابی در طول شار کاهش می‌یابد.

لم دیگری که از آن استفاده خواهیم کرد، به این شکل قابل بیان است.

لم ۵.۲. فرض کنیم که $\{h_t\}_t$ یک شار کالابی روی رویه‌ی ریمان فشرده‌ی M باشد و $\tilde{h}$ متریکی با انحنا ثابت نامثبت باشد. در این صورت

$$\frac{d}{dt} \text{Ent}(h_t) \leq 0.$$

اثبات. توجه کنید که خانواده‌ی متریک‌های داده شده به شکل $h_t = e^{u_t} \tilde{h}$ هستند. در این اثبات، عملگر لاپلاسی وابسته به h_t و $\tilde{h}$ را به‌ترتیب با Δ_t و Δ نشان می‌دهیم. در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \text{Ent}(h_t) &= \int \left(\frac{du}{dt} + u \frac{du}{dt} \right) d\mu_{h_t} \\ &= \int (\Delta_t K + u \Delta_t K) d\mu_{h_t} = \int K \Delta_t u d\mu_{h_t}. \end{aligned}$$

برقراری تساوی دوم در رابطه‌ی بالا از قضیه‌ی استوکس^{۱۳} نتیجه می‌شود. از سوی دیگر، توجه کنید که

$$K = e^{-u} K_{\tilde{h}} - e^{-u} \Delta u.$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \text{Ent}(h_t) &= \int K \Delta_t u d\mu_{h_t} \\ &= K_{\tilde{h}} \int e^{-u} \Delta u d\mu_{\tilde{h}} - \int e^{-u} (\Delta u)^\vee d\mu_{\tilde{h}} \\ &= K_{\tilde{h}} \int e^{-u} |\nabla u|^\vee d\mu_{\tilde{h}} - \int e^{-u} (\Delta u)^\vee d\mu_{\tilde{h}} \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

□

چرا که $K_{\tilde{h}}$ نامثبت است. این مشاهده اثبات را کامل می‌کند.

¹³Stokes theorem

۳. اثبات قضیه ۲.۲

در این بخش، به اثبات قضیه اصلی مقاله با استفاده از ایده‌هایی می‌پردازیم که توسط چن و چنگ در [۴] به کار برده شده‌اند و در [۵] تعمیم داده شده‌اند.

قضیه ۱.۳. [۴]، [۵] فرض کنید که $h_n = e^{u_n} \tilde{h}$ دنباله‌ای از متریک‌های ریمانی روی رویه‌ی ریمان فشرده‌ی M باشد که حجم آنها برابر با ۱ است. فرض کنیم که ثابت A وجود دارد به‌طوری‌که شرط‌های

$$\text{Ca}(h_n) \leq A \quad \text{و}$$

$$\text{Ent}(h_n) \leq A$$

برقرار هستند. در این صورت ثابت $C = C(\tilde{h}, A)$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\|u_n\|_{W^{1,2}} \leq C.$$

به‌عنوان نتیجه‌ای از قضیه‌ی بالا داریم:

نتیجه ۲.۳. تحت شرایطی که در قضیه‌ی بالا به آنها اشاره شد، همه‌ی متریک‌های h_n به‌طور یکنواخت معادل هستند. به‌علاوه، پس از گذر به یک زیردنباله می‌توانیم فرض کنیم که دنباله‌ی $\{u_n\}$ از توابع به تابع u_∞ در $W^{1,2}$ همگرا می‌شود.

اثبات قضیه ۲.۲. همان‌گونه که پیشتر هم به آن اشاره شد، اثبات وجود جواب‌ها در زمان کوتاه سراسر است. فرض کنید که $T < \infty$ بزرگترین مقداری باشد که برای آن شارکالایی $\{h_t\}_t$ در بازه‌ی $t \in [0, T)$ وجود دارد. در این صورت بنا بر **لم ۵.۲** نتیجه می‌گیریم

$$\text{Ent}(h_t) \leq A = A(\tilde{h}, h_0, T).$$

از سوی دیگر، واضح است که

$$\text{Cal}(h_t) \leq \text{Cal}(h_0),$$

چرا که انرژی کالابی در طول شارکالایی کاهش می‌یابد. بنابراین، مقدار ثابت $C = C(\tilde{h}, h_0, T)$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\|u_t\|_{W^{1,2}} \leq C, \quad \forall t \in [0, T).$$

از این مشاهده بالاخص نتیجه می‌شود که دنباله‌ای از زمان‌ها مانند $\{t_n\}_n$ وجود دارد که از پایین به زمان T میل می‌کنند و برای آنها داریم

$$u_{t_n} \rightarrow u_\infty \quad (\text{در } W^{1,2}).$$

با توجه به اینکه جواب شارکالایی در زمان کوتاه وجود دارد، عدد حقیقی مثبت ϵ وجود دارد به‌طوری‌که شارکالایی $\{g_t = e^{v_t} \tilde{h}\}_t$ با شروع از $u_\infty = v_0$ برای مقادیر $t \in [0, \epsilon)$ موجود است. بنابراین، برای $t \in [T, T+\epsilon)$ می‌توانیم تعریف کنیم $h_t = g_{T+t}$. در این صورت، به سادگی و با روش‌های استاندارد می‌توان نشان داد که $\{h_t\}_t$ برای مقادیر $t \in [0, T+\epsilon)$ یک شارکالایی را تشکیل می‌دهد. این نتیجه با فرض اولیه‌ی ما مبنی بر بیشینه بودن مقدار T در تناقض است و این تناقض، ادعای قضیه را ثابت می‌کند. $\square$

مراجع

- [1] E. Calabi, Extremal Kähler metrics, Seminar on Differential Geometry, *Ann. of Math. Stud.*, No. 102, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1982 259–290.
- [2] P. T. Chruściel, Semi-global existence and convergence of solutions of the Robinson-Trautman (2-dimensional Calabi) equation, *Commun. Math. Phys.*, **137** no. 2 (1991) 289–313.
- [3] X. Chen and J. Cheng, On the constant scalar curvature Kähler metrics (I)—A priori estimates, *J. Amer. Math. Soc.*, **34** no. 4 (2021) 909–936.
- [4] X. Chen and J. Cheng, On the constant scalar curvature Kähler metrics (II)—Existence results, *J. Amer. Math. Soc.*, **34** no. 4 (2021) 937–1009.
- [5] Z. Lu and R. Seyyedali, Remarks on a result of Chen-Cheng, *Complex Manifolds*, **11** no. 1 (2024) 12 pp.

رضا سیدعلی

پژوهشکده ریاضیات، پژوهشگاه دانش‌های بنیادی، تهران، ایران

rezaseyyedali@gmail.com

رضا سیدعلی متولد شهریورماه ۱۳۵۵ در شهر تهران است. وی در سال ۱۳۷۸ از دوره کارشناسی ریاضی دانشگاه صنعتی شریف فارغ‌التحصیل شد و در سال ۱۳۸۸ دکتری خود را در هندسه مختلط از دانشگاه جانز هاپکینز آمریکا دریافت کرد. از سال ۱۳۹۷ تاکنون، او عضو هیئت علمی پژوهشکده ریاضیات پژوهشگاه دانش‌های بنیادی است.

