http://math-sci.ui.ac.ir

Journal of Mathematics and Society
ISSN (print): 2345-6493, ISSN (on-line): 2345-6507
Vol. 10 No. 2 (2025), pp. 1-26.

http://www.ui.ac.ir

RESULTS ABOUT CROSSED POLYSQUARES

MOHAMMAD ALI DEHGHNIZADEH

Abstract. Crossed polysquares are defined by Dehghanizadeh, Davvaz and Alp. Their properties and the generalization of results from intersecting squares to intersecting polysquares have been expressed and proved by them with the help of fundamental relations. In the following, the concept of intersected polymodules and Γ-equivalent, intersected polymodules of polygroups are introduced and some properties are obtained from it. In addition, the concept of hypermultiplying fiber and crossed polysquares in the homotopy form of kernels has been studied. These results have extended the results related to intersecting squares to intersecting polysquares. In this article, homotopy crossed polysquares are studied as homotopies of cokernel, then the image of a crossed polymodule is considered and some results are proved that show the correspondence between crossed polymodules and crossed polysquares. In the continuation of the studies, we can check the results about the crossed 2-squares and then the crossed 2-polysquares. In addition, concepts about intersecting n-squares and intersecting n-polysquares can be expanded and studied.

1. Introduction

Crossed modules and their applications play an important role in group theory, homotopy theory, homology and cohomology of groups, algebra, and k-theory, etc. Crossed modules were originally defined by Whitehead [24] as a model for 2-types. Loday in [21] proposed a sequence equivalent to the crossed module sequence called the 1-group sequence. Norrie in [22] provided a good example of

Keywords: Group, Polygroup, Crossed square, Polysquare, Fundamental relations.

Article Type: Research Paper.

Communicated by Alireza Abdoollahi.

Received: 07-05-2024, Accepted: 02-10-2024, Published Online: 06-04-2025.

Cite this article: M. A. Dehghnizadeh, Results about crossed polysquares, *Journal of Mathematics and Society*, **10** no. 2 (2025) 1–26.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.141402.1656 .

crossed modules in the form of a crossed module action. Conduché [11] defined a 2-crossed module as a model for 3-types. In his unpublished work, he established that there is an equivalence between the category of square modules of groups and the crossed 2-modules of groups.

In [6] Arvasi and Porter showed how to get from a simplicity algebra to a 2-crossed module of algebras and vice versa, and they clarified the relationship between simplicity algebras and intersecting squares. As an algebraic model of three types, the concept of crossed 2-modules was introduced by Conduché in [11] and these crossed 2-modules are equivalent to simplicity groups with a Moore twist. Moore complex is of length two. Crossed squares and quadratic modules are other connected algebraic modules of the third type, defined by Loday, Guin-Walery, and Baues [8], are defined respectively. In [7], Arvasi and Ulualan studied the relations between crossed 2-modules, quadratic modules, crossed squares, and simplicity groups and homotopy equivalence between these superstructures. For more tips on cross modules, you can refer to [1, 2, 3, 5, 9, 18]. In [17] Loday and Guin-Walery presented the idea of treating a crossed square as an algebraic model of connected 3. Crossed polysquares studied by Dehghanizadeh, Davvaz, and Alp in [14, 15].

2. Main Results

Definition 2.1. *A crossed polysquares is a commutative diagram of polygroups*

$$\begin{tikzcd} P_1 \arrow[r, "\bar{p}_1"] \arrow[d, "\partial"'] & \Gamma_1 \arrow[d, "\partial'"] \\ P_0 \arrow[r, "\bar{p}_0"'] & \Gamma_0 \end{tikzcd}$$

diagram (1)

together with polyactions of the polygroup Γ_0 on P_1, Γ_1 and P_0 (and hence polyactions of Γ_1 on P_1 and P_0 via ∂' and of P_0 on P_1 and Γ_1 via $\bar{p}_0$) and a function $h : \Gamma_1 \times P_0 \longrightarrow \mathcal{P}^*(P_1)$, such that the following axioms are satiesfied:

1. *the maps $\bar{p}_1, \partial$ preserve the polyactions of Γ_0. Furthermore, with the given polyactions the maps ∂', $\bar{p}_0$ and $\partial'\bar{p}_1 = \bar{p}_0\partial$ are crossed polymodules;*
2. $\bar{p}_1 h(\beta, p) = \beta^p \beta^{-1}$, $\partial h(\beta, p) = {}^{\beta}p p^{-1}$;
3. $h(\bar{p}_1(\alpha), p) = \alpha\, {}^{p}\alpha^{-1}$, $h(\beta, \partial(\alpha)) = {}^{\beta}\alpha\alpha^{-1}$;
4. $h(\beta_1\beta_2, p) = {}^{\beta_1}h(\beta_2, p)h(\beta_1, p)$, $h(\beta, p_1p_2) = h(\beta, p_1)\, {}^{p_1}h(\beta, p_2)$;
5. $h({}^{\sigma}\beta, {}^{\sigma}p) = {}^{\sigma}h(\beta, p)$;

for all $\alpha \in P_1$, $\beta, \beta_1, \beta_2 \in \Gamma_1$, $p, p_1, p_2 \in P_0$ and $\sigma \in \Gamma_0$.

Theorem 2.2. *Let diagram (1) be a crossed polysquare, then outer diagram*

 http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.141402.1656

$$\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[r, equal, "id_{P_1}"] \arrow[rrr, bend left, "\tilde{p_1}"] \arrow[d, "\bar{\partial}"'] & P_1 \arrow[r, "\bar{p_1}"] \arrow[d, "\partial"] & \Gamma_1 \arrow[r, "\partial''"] \arrow[d, "\partial'"] & P_0 \times^{P_1} \Gamma_1 \arrow[d, "d"] \\
P_0 \times_{\Gamma_0} \Gamma_1 \arrow[r, "p_{P_0}"] \arrow[rr, bend right, "\bar{\bar{p_0}}"] \arrow[rrr, bend right=50, "\tilde{p_0}"'] & P_0 \arrow[r, "\tilde{p_0}"] & \Gamma_0 \arrow[r, equal, "id_{\Gamma_0}"] & \Gamma_0
\end{tikzcd}$$

diagram (2)

gives rise to a crossed polysquare with actions, polygroup homomorphism ∂'' and function $\bar{\bar{h}} : (P_0 \ltimes {}^{P_1}\Gamma_1) \times (P_0 \times {}_{\Gamma_0}\Gamma_1) \longrightarrow \mathcal{P}^*(P_1)$ defined as following:

(i) *the polyacrion of Γ_0 on P_1 is induced by the polyaction of crossed polymodule of $\partial' : \Gamma_1 \longrightarrow \Gamma_0$ on $\partial : P_1 \longrightarrow P_0$;*

(ii) *the polyaction of Γ_0 on $P_0 \ltimes {}^{P_1}\Gamma_1$ is the polyaction of a crossed polymodule $d : P_0 \ltimes {}^{P_1}\Gamma_1 \longrightarrow \Gamma_0$;*

(iii) *the polyaction of Γ_0 on $P_0 \times_{\Gamma_0} \Gamma_1$ is defined by ${}^{\sigma}(p_2, \beta_2) = \{(x, y) \mid x \in {}^{\sigma}p_2,\ y \in {}^{\sigma}\beta_2\}$ (the same polyaction seen in the crossed polysquare diagram (2);*

(iv) *$\partial'' : \Gamma_1 \longrightarrow P_0 \ltimes {}^{P_1}\Gamma_1$ is the canonical inclusion map of Γ_1 in $P_0 \ltimes {}^{P_1}\Gamma_1$;*

(v) *$\bar{\bar{h}}\,((p_1, \beta_1), (p_2, \beta_2)) := \left\{h(\beta_1, p_1 p_2 p_1^{-1}) h(\beta_2, p_1)^{-1}\right\}$ where the function h is given by the crossed polysquare structure of diagram(1).*

Theorem 2.3. *If diagram (1) is a crossed polysquare, then the outer diagram is a crossed square with actions and function,*

$$\bar{h} : \frac{P_0 \ltimes^{P_1} \Gamma_1}{\beta^*_{P_0 \ltimes^{P_1}\Gamma_1}} \times \frac{P_0 \times_{\Gamma_0} \Gamma_1}{\beta^*_{P_0 \times_{\Gamma_0}\Gamma_1}} \longrightarrow \frac{P_1}{\beta^*_{P_1}}$$

defined as following

(a) *the action of $\frac{\Gamma_0}{\beta^*_{\Gamma_0}}$ on $\frac{P_1}{\beta^*_{P_1}}$ is induced by the polyaction of Γ_0 on P_1;*

(b) *the action of $\frac{\Gamma_0}{\beta^*_{\Gamma_0}}$ on $\frac{P_0 \ltimes^{P_1}\Gamma_1}{\beta^*_{P_0 \ltimes^{P_1}\Gamma_1}} \ltimes^{P_1} \Gamma_1$ by the polyaction of Γ_0 on $P_0 \ltimes^{P_1} \Gamma_1$;*

(c) *the action of $\frac{\Gamma_0}{\beta^*_{\Gamma_0}}$ on $\frac{P_0 \times_{\Gamma_0}\Gamma_1}{\beta^*_{P_0 \times_{\Gamma_0}\Gamma_1}}$ is induced by the polyaction of Γ_0 on $P_0 \times_{\Gamma_0} \Gamma_1$;*

(d) *the map $\bar{h} : \frac{P_0 \ltimes^{P_1}\Gamma_1}{\beta^*_{P_0 \ltimes^{P_1}\Gamma_1}} \times \frac{P_0 \times_{\Gamma_0}\Gamma_1}{\beta^*_{P_0 \times_{\Gamma_0}\Gamma_1}} \longrightarrow \frac{P_1}{\beta^*_{P_1}}$ is*

$$\bar{h}((\beta^*_{P_0}(p_0), \beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1), (\beta^*_{P_0}(p'_0), \beta^*_{\Gamma_1}(\gamma'_1)) = \beta^*_{P_1}(h((p_0, \gamma_1), (p'_0, \gamma'_1))).$$

$$
\begin{tikzcd}
\frac{P_1}{\beta^*_{P_1}} \arrow[rrrrr, "\psi"] \arrow[ddd, "\mathcal{D}"'] & & & & & \frac{P_0 \times^{P_1} \Gamma_1}{\beta^*_{P_0 \times^{P_1} \Gamma_1}} \arrow[ddd, "\mathcal{D}'"] \\
& P_1 \arrow[ul, "\Phi_{P_1}"] \arrow[r, equal, "id_{P_1}"] \arrow[rrr, bend left, "\tilde{p_1}"] \arrow[d, "\bar{\partial}"'] & P_1 \arrow[r, "\bar{p_1}"] \arrow[d, "\partial"] & \Gamma_1 \arrow[r, "\bar{p_1}"] \arrow[d, "\partial'"] & P_0 \times^{P_1} \Gamma_1 \arrow[ur, "\Phi_{P_0 \times^{P_1} \Gamma_1}"] \arrow[d, "d"] & \\
& P_0 \times_{\Gamma_0} \Gamma_1 \arrow[r, "p_{P_0}"] \arrow[dl, "\Phi_{P_0 \times_{\Gamma_0} \Gamma_1}"'] \arrow[rr, bend right, "\bar{\bar{p_0}}"'] \arrow[rrr, bend right=50, "\tilde{p_0}"'] & P_0 \arrow[r, "\tilde{p_0}"] & \Gamma_0 \arrow[r, equal, "id_{\Gamma_0}"] & \Gamma_0 \arrow[dr, "\Phi_{\Gamma_0}"] & \\
\frac{P_0 \times_{\Gamma_0} \Gamma_1}{\beta^*_{P_0 \times_{\Gamma_0} \Gamma_1}} \arrow[rrrrr, "\psi'"] & & & & & \frac{\Gamma_0}{\beta^*_{\Gamma_0}}
\end{tikzcd}
$$

diagram (3)

3. Summary of Proofs

(Summary of Proof 2-2). $\tilde{p}_0 = \bar{\bar{p}}_0$ is a strong homomorphism, where $\bar{\bar{p}}_0$ is defined in diagram. $\bar{p}_1$ is a strong homomorphism, so $\tilde{p}_1(\alpha) = (1, \bar{p}_1(\alpha))$ is a strong homomorphism. The diagram is commutes and the last map is a crossed polymodule, because it is easy to check that $d\tilde{p}_1 = \partial'\bar{p}_1 = \bar{p}_0\partial = \tilde{p}_0\bar{\partial}$. But $\bar{\bar{h}}$ is well defined, in fact we have:

$$
\begin{aligned}
&\bar{\bar{\bar{h}}}\left\{((x,y),(p_2,\beta_2)) \mid x \in \partial(\alpha)p_1,\, y \in \beta_1\bar{p}_1(\alpha)^{-1}\right\} \\
&\quad = h\left\{(x,y) \mid x \in \beta_1\bar{p}_1(\alpha)^{-1},\, y \in \partial(\alpha)p_1p_2p_1^{-1}\partial(\alpha)\right\}\, h\left\{(\beta_2,z)^{-1} \mid z \in \partial(\alpha)p_1\right\} \\
&\quad = h\left\{(x,y) \mid x \in \beta_1\bar{p}_1(\alpha)^{-1},\, y \in {}^{\bar{p}_0\partial(\alpha)}(p_1p_2p_1^{-1})\right\}\, {}^{\partial(\alpha)}h(\beta_2,p_1)^{-1}h\left\{(\beta_2,z)^{-1} \mid z \in \partial(\alpha)\right\} \\
&\quad = {}^{\bar{p}_0\partial(\alpha)}h\left\{(x,y) \mid x \in {}^{\bar{p}_0\partial(\alpha)^{-1}}(\beta_1\bar{p}_1(\alpha)^{-1},\, y \in p_1p_2p_1^{-1})\right\}\, \alpha h\left\{(\beta_2,p_1)^{-1}\,\alpha^{-1}\alpha^{\beta_2}\alpha^{-1}\right\} \\
&\quad = \alpha h\left\{(x,y)\ \ x \in {}^{\partial'\bar{p}_1(\alpha)^{-1}}(\beta_1\bar{p}_1(\alpha)^{-1},\, y \in p_1p_2p_1^{-1}\right\}\alpha^{-1}\alpha h(\beta_2,p_1)^{-1\,\beta_2}\alpha^{-1} \\
&\quad = \alpha^{\partial'\bar{p}_1(\alpha)^{-1}}h\left\{(\beta_1,y) \mid y \in p_1p_2p_1^{-1}\right\} h\left\{(\bar{p}_1(\alpha)^{-1},y) \mid y \in p_1p_2p_1^{-1}\right\} h(\beta_2,p_1)^{-1\,\beta_2}\alpha^{-1} \\
&\quad = \alpha^{\partial'\bar{p}_1(\alpha)^{-1}}h\left\{(\beta_1,y) \mid y \in p_1p_2p_1^{-1}\right\} h\left\{(\bar{p}_1(\alpha)^{-1},y) \mid y \in p_1p_2p_1^{-1}\right\} h(\beta_2,p_1)^{-1\,\beta_2}\alpha^{-1} \\
&\quad = \alpha\alpha^{-1}h\left\{(\beta_1,y) \mid y \in p_1p_2p_1^{-1}\right\}\alpha\alpha^{-1\,p_1p_2p_1^{-1}}\alpha h(\beta,p_1)^{-1\,\beta_2}\alpha^{-1} \\
&\quad = h\left\{(\beta_1,y) \mid y \in p_1p_2p_1^{-1}\right\}{}^{p_1\beta_2}({}^{p_1^{-1}}\alpha)h(\beta_2,p_1)^{-1\,\beta_2}\alpha^{-1}
\end{aligned}
$$

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.141402.1656

$$= h\left\{(\beta_1, y) \mid y \in p_1p_2p_1^{-1}\right\} h(\beta_2, p_1)^{-1}\, {}^{\beta_2 p_1}({}^{p_1^{-1}}\alpha)\, {}^{\beta_2}\alpha^{-1}$$
$$= h\left\{(\beta_1, y) \mid y \in p_1p_2p_1^{-1}\right\} h(\beta_2, p_1)^{-1}\, {}^{\beta_2}\alpha\, {}^{\beta_2}\alpha^{-1}$$
$$= h\left\{(\beta_1, y) \mid y \in p_1p_2p_1^{-1}\right\} h(\beta_2, p_1)^{-1}.$$

Outer diagram is crossed polysquare and so the equalities above consequences of the axioms of the crossed polysquare.

Now we want to check the five properties making the diagram a crossed polysquare.

(i) the map $\tilde{p}_1$ preserves the polyactions of Γ_0; in fact

$$\tilde{p}_1({}^{\sigma}\alpha) = \{(1, x) \mid x \in \bar{p}_1({}^{\sigma}\alpha)\} = \{(1, x) \mid x \in {}^{\sigma}\bar{p}_1(\alpha)\} = {}^{\sigma}(1, \bar{p}_1(\alpha)) = {}^{\sigma}\tilde{p}_1(\alpha).$$

The map $\bar{\partial}$ preserves the polyactions of Γ_0. Also d is a crossed polymodule and $\tilde{p}_0$ is a crossed polymodule because $\bar{\bar{p}}_0$ is.

(ii) we want to prove that

$$\tilde{p}_1\left(\bar{\bar{h}}((p_1, \beta_1), (p_2, \beta_2))\right) = (p_1, \beta_1)^{(p_2, \beta_2)}(p_1, \beta_1)^{-1}$$

and we develop the two members separately:

$$\begin{aligned}
\tilde{p}_1\left(\bar{\bar{h}}((p_1, \beta_1), (p_2, \beta_2))\right) &= \tilde{p}_1\left(h\{(\beta_1, y) \mid y \in p_1p_2p_1^{-1}\}\, h(\beta_2, p_1)^{-1}\right)\\
&= \left(1, \bar{p}_1(h\{(\beta_1, y) \mid y \in p_1p_2p_1^{-1}\}\, h(\beta_2, p_1)^{-1}\right)\\
&= \{(1, y) \mid y \in \beta_1\, {}^{p_1p_2p_1^{-1}}\beta_1^{-1}\, {}^{p_1}\beta_2\beta_2^{-1}\};
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
&(p_1, \beta_1)^{(p_2, \beta_2)}(p_1, \beta_1)^{-1}\\
&= (p_1, \beta_1)^{\tilde{p}_0(p_2, \beta_2)}(p_1, \beta_1)^{-1}\\
&= (p_1, \beta_1)^{\tilde{p}_0(p_2)}(p_1^{-1}, {}^{p_1^{-1}}\beta_1^{-1})\\
&= (p_1, \beta_1)\{(x, y) \mid x \in p_2p_1^{-1}p_2^{-1},\, y \in {}^{p_2p_1^{-1}}\beta_1^{-1}\}\\
&= \{(u, v) \mid u \in p_1p_2p_1^{-1}p_2^{-1},\, v \in \beta_1\, {}^{p_1p_2p_1^{-1}}\beta_1^{-1}\}\\
&= \{(r, s) \mid r \in \partial h(\beta_2, p_1)^{-1}1,\, s \in \beta_1\, {}^{p_1p_2p_1^{-1}}\beta_1^{-1}\, {}^{p_1}\beta_2\beta_2^{-1}\bar{p}_1 h(\beta_2, p_1)\}.
\end{aligned}$$

Now we want to prove that

$$\bar{\partial}\bar{\bar{h}}((p_1, \beta_1), (p_2, \beta_2)) = {}^{(p_1, \beta_1)}(p_2, \beta_2)(p_2, \beta_2)^{-1};$$

and we develop the two members separately:

$$\bar{\partial}\bar{\bar{h}}((p_1,\beta_1),(p_2,\beta_2))$$

$$\begin{aligned}
&= \bar{\partial}(h\{(\beta_1,y)\mid y\in p_1p_2p_1^{-1}\}h(\beta_2,p_1)^{-1})\\
&= \{(\partial h(\beta_1,y)\,\partial h(\beta_2,p_1)^{-1},\bar{p}_1h(\beta_1,y)\bar{p}_1h(\beta_2,p_1)^{-1})\mid y\in p_1p_2p_1^{-1}\}\\
&= \{(u,v)\mid u\in {}^{\beta_1}(p_1p_2p_1)^{-1}p_1p_2^{-1}p_1^{-1}p_1\,{}^{\beta_2}p_1^{-1},\ v\in \beta_1\,{}^{p_1p_2p_1^{-1}}\beta_1^{-1}\,{}^{p_1}\beta_2\beta_2^{-1}\}\\
&= \{(u,v)\mid u\in {}^{\beta_1}(p_1p_2p_1^{-1})p_1p_2^{-1}\,{}^{\bar{p}_0(p_2)}p_1^{-1},\ v\in \beta_1\,{}^{p_1}({}^{\partial'(\beta_2)}({}^{p_1^{-1}}\beta_1^{-1}))\,{}^{p_1}\beta_2\beta_2^{-1}\}\\
&= \{(u,v)\mid u\in {}^{\beta_1}(p_1p_2p_1^{-1})p_1p_2^{-1}p_2p_1^{-1}p_2^{-1},\ v\in \beta_1\,{}^{p_1}\beta_2\beta_1^{-1}\,{}^{p_1}\beta_2^{-1}\,{}^{p_1}\beta_2\beta_2^{-1}\}\\
&= \{(u,v)\mid u\in {}^{\beta_1}(p_1p_2p_1^{-1})p_2^{-1},\ v\in \beta_1\,{}^{p_1}\beta_2\beta_1^{-1}\beta_2^{-1}\};
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
{}^{(p_1,\beta_1)}(p_2,\beta_2)(p_2,\beta_2)^{-1} &= {}^{\partial'(\beta_1)\bar{p}_0(p_1)}(p_2,\beta_2)(p_2^{-1},\beta_2^{-1})\\
&= \{(u,v)\mid u\in {}^{\beta_1}(p_1p_2p_1^{-1}),\ v\in \beta_1\,{}^{g_1}\beta_2\beta_1^{-1}\}(p_2^{-1},\beta_2^{-1})\\
&= \{(u,v)\mid u\in {}^{\beta_1}(p_1p_2p_1^{-1})p_2^{-1},\ v\in \beta_1\,{}^{p_1}\beta_2\beta_1^{-1}\beta_2^{-1}\}.
\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
\bar{\bar{h}}(\tilde{p}_1(\alpha),(p_2,\beta_2)) &= \bar{\bar{h}}((1,\bar{p}_1(\alpha)),(p_2,\beta_2))\\
&= h(\bar{p}_1(\alpha),p_2)h(\beta_2,1)^{-1} = \alpha\,{}^{p_2}\alpha^{-1} = \alpha\,{}^{\bar{p}_0(p_2)}\alpha^{-1}\\
&= \alpha^{\bar{p}_0(p_2,\beta_2)}\alpha^{-1} = \alpha\,{}^{(p_2,\beta_2)}\alpha^{-1};
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
\bar{\bar{h}}((p_1,\beta_1),\bar{\partial}(\alpha)) &= \bar{\bar{h}}((p_1,\beta_1),(\partial(\alpha),\bar{p}_1(\alpha)))\\
&= h\{(\beta_1,y)\mid y\in p_1\partial(\alpha)p_1^{-1}\}\,h(\bar{p}_1(\alpha),p_1)^{-1}\\
&= h\{(\beta_1,y)\mid y\in \partial({}^{p_1}\alpha)\}\,h(\bar{p}_1(\alpha),p_1)^{-1}\\
&= {}^{\beta_1}({}^{p_1}\alpha)\,{}^{p_1}\alpha^{-1}\,{}^{p_1}\alpha\alpha^{-1} = {}^{\beta_1}({}^{p_1}\alpha)\alpha^{-1}\\
&= {}^{\partial'(\beta_1)\bar{p}_0(p_1)}\alpha\alpha^{-1} = {}^{d(p_1,\beta_1)}\alpha\alpha^{-1} = {}^{(p_1,\beta_1)}\alpha\alpha^{-1}.
\end{aligned}$$

(iv) we want to prove that:

$$\bar{\bar{h}}((p_1,\beta_1)(p_1',\beta_1'),(p_2,\beta_2)) = {}^{(p_1,\beta_1)}\bar{\bar{h}}((p_1',\beta_1'),(p_2,\beta_2))\,\bar{\bar{h}}((p_1,\beta_1),(p_2,\beta_2))$$

and we develop the two members separately:

$$\bar{\bar{h}}((p_1,\beta_1)(p_1',\beta_1'),(p_2,\beta_2))$$

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.141402.1656

$$
\begin{aligned}
&= \bar{\bar{h}}\{((x,y),(p_2,\beta_2)) \mid x \in p_1p_1',\ y \in \beta_1{}^{p_1}\beta_1'\}\\
&= h\{(y,z) \mid y \in \beta_1{}^{p_1}\beta_1',\ z \in p_1p_1'p_2{p_2'}^{-1}p_1^{-1}\}\, h\{(\beta_2,r)^{-1} \mid r \in p_1p_1'\}\\
&= {}^{\beta_1}h\{(s,z) \mid s \in {}^{p_1}\beta_1',\ z \in p_1p_1'p_2{p_1'}^{-1}p_1^{-1}\}\, h\{(\beta_1,z) \mid z \in p_1p_1'p_2{p_1'}^{-1}p_1^{-1}\}\\
&= {}^{\beta_1}h(\beta_2,p_1')^{-1}h(\beta_2,p_1)^{-1}\\
&= {}^{\beta_1p_1}h\{(\beta_1',t) \mid t \in p_1'p_2{p_1'}^{-1}\}\, h\{(\beta_1,u) \mid u \in p_1{p_1'}^{\bar{p}_0(p_2)}(p_1p_1')^{-1}p_2\}\\
&= {}^{p_1}h(\beta_2,p_1')^{-1}h(\beta_2,p_1)^{-1}\\
&= {}^{\beta_1p_1}h\{(\beta_1',t) \mid t \in p_1'p_2{p_1'}^{-1}\}\, h\{(\beta_1,\partial h(\beta_2,r)^{-1}p_2 \mid r \in p_1p_1^{-1}\}\\
&\qquad {}^{p_1}h(\beta_2,p_1')^{-1}h(\beta_2,p_1)^{-1}\\
&= {}^{\beta_1p_1}h\{(\beta_1',t) \mid t \in p_1'p_2{p_1'}^{-1}\}\, {}^{\beta_1}h\{(\beta_2,r)^{-1} \mid r \in p_1p_1'\}\\
&\qquad h(\beta_1,p_2)h\{(\beta_2,r) \mid r \in p_1p_1^{-1}\}\, {}^{p_1}h(\beta_2,p_1')^{-1}h(\beta_2,p_1)^{-1}\\
&= {}^{\beta_1p_1}h\{(\beta_1',t) \mid t \in p_1'p_2{p_1'}^{-1}\}\, {}^{\beta_1}h\{(\beta_2,r)^{-1} \mid r \in p_1p_1^{-1}\}\\
&\qquad h(\beta_1,p_2)h(\beta_2,p_1)\, {}^{p_1}h(\beta_2,p_1')^{-1}h(\beta_2,p_1)^{-1}\\
&= {}^{\beta_1p_1}h\{(\beta_1',t) \mid t \in p_1'p_2{p_1'}^{-1}\}\, {}^{\beta_1}h\{(\beta_2,r)^{-1} \mid r \in p_1p_1^{-1}\}\, h(\beta_1,p_2);
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
&{}^{(p_1,\beta_1)}\bar{\bar{h}}((p_1',\beta_1'),(p_2,\beta_2))\, \bar{\bar{h}}((p_1,\beta_1),(p_2,\beta_2))\\
&\quad = {}^{\beta_1p_1}\,[h\{(\beta_1',t) \mid t \in p_1'p_2{p_1'}^{-1}\}\, h(\beta_2,p_1')^{-1}] h\{(\beta_1,y) \mid y \in p_1p_2p_1^{-1}\}\, h(\beta_2,p_1)^{-1}\\
&\quad = {}^{\beta_1p_1}\ h\{(\beta_1',t) \mid t \in p_1'p_2{p_1'}^{-1}\}\, {}^{\beta_1p_1}h(\beta_2,p_1')^{-1}h\{(\beta_1,w) \mid w \in p_1{}^{\bar{p}_0(p_2)}p_1^{-1}p_2\}\\
&\qquad h(\beta_2,p_1)^{-1}\\
&\quad = {}^{\beta_1p_1}\ h\{(\beta_1',t) \mid t \in p_1'p_2{p_1'}^{-1}\}\, {}^{\beta_1p_1}h(\beta_2,p_1')^{-1}h\{(\beta_1,w_1) \mid w_1 \in p_1{}^{\partial'(\beta_2)}p_1^{-1}p_2\}\\
&\qquad h(\beta_2,p_1)^{-1}\\
&\quad = {}^{\beta_1p_1}\ h\{(\beta_1',t) \mid t \in p_1'p_2{p_1'}^{-1}\}\, {}^{\beta_1p_1}h(\beta_2,p_1')^{-1}h\{(\beta_1,w_2) \mid w_2 \in \partial h(\beta_2,p_1)^{-1}p_2\}\\
&\qquad h(\beta_2,p_1)^{-1}\\
&\quad = {}^{\beta_1p_1}\ h\{(\beta_1',t) \mid t \in p_1'p_2{p_1'}^{-1}\}\, {}^{\beta_1p_1}h(\beta_2,p_1')^{-1}\, {}^{\beta_1}h(\beta_2,p_1)^{-1}h(\beta_2,p_1)^{-1}h(\beta_1,p_2)\\
&\qquad h(\beta_2,p_1)\, h(\beta_2,p_1)^{-1}\\
&\quad = {}^{\beta_1p_1}\ h\{(\beta_1',t) \mid t \in p_1'p_2{p_1'}^{-1}\}\, {}^{\beta_1}[{}^{p_1}h(\beta_2,p_1')^{-1}h(\beta_2,p_1)^{-1}]h(\beta_1,p_2)\\
&\quad = {}^{\beta_1p_1}\ h\{(\beta_1',t) \mid t \in p_1'p_2{p_1'}^{-1}\}\, {}^{\beta_1}h\{(\beta_2,r)^{-1} \mid r \in p_1p_1'\}\, h(\beta_1,p_2).
\end{aligned}
$$

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.141402.1656

(v)

$$\begin{aligned}
\bar{\bar{h}}({}^{\sigma}(p_1,\beta_1),{}^{\sigma}(p_2,\beta_2)) &= \bar{\bar{h}}(({}^{\sigma}p_1,{}^{\sigma}\beta_1),({}^{\sigma}p_2,{}^{\sigma}\beta_2)) \\
&= h\{({}^{\sigma}\beta_1,x)\mid x\in {}^{\sigma}p_1\,{}^{\sigma}p_2\,{}^{\sigma}p_1^{-1}\}\,h({}^{\sigma}\beta_2,{}^{\sigma}p_1)^{-1} \\
&= h\{({}^{\sigma}\beta_1,x)\mid x\in {}^{\sigma}(p_1p_2p_1^{-1})\}\,h({}^{\sigma}\beta_2,{}^{\sigma}p_1)^{-1} \\
&= {}^{\sigma}h\{(\beta_1,y)\mid y\in p_1p_2p_1^{-1}\}\,{}^{\sigma}h(\beta_2,p_1)^{-1} \\
&= {}^{\sigma}[h\{(\beta_1,y)\mid y\in p_1p_2p_1^{-1}\}\,h(\beta_2,p_1)^{-1}] \\
&= {}^{\sigma}\bar{\bar{h}}((p_1,\beta_1),(p_2,\beta_2).
\end{aligned}$$

□

Remark 3.1. *The proof of the rest of the theorems is straightforward but lengthy.*

Mohammad Ali Dehghanizadeh
Department of Mathematics, National University of Skills (NUS), Tehran, Iran
Mdehghanizadeh@nus.ac.ir

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.141402.1656

ریاضی و جامعه
شاپا (چاپی): ۲۳۴۵-۶۴۹۳، شاپا(الکترونیکی): ۲۳۴۵-۶۵۰۷
جلد ۱۰، شماره ۲ (۱۴۰۴)، صص. ۱-۲۶

http://math-sci.ui.ac.ir
http://www.ui.ac.ir

نتایجی درباره پلی‌مربع‌های متقاطع

محمدعلی دهقانی‌زاده

چکیده. پلی‌مربع‌های متقاطع، توسط دهقانی‌زاده، دواز و آلپ تعریف شده است. خاصیت‌های آن‌ها و تعمیم نتایجی از مربع‌های متقاطع به پلی‌مربع‌های متقاطع به کمک روابط اساسی توسط آن‌ها بیان و اثبات گردیده است. در ادامه، مفهوم پلی‌مدول‌های متقاطع بریده شده و Γ−هم‌ارز، پلی‌مدول‌های متقاطع از پلی‌گروه‌ها، معرفی شده و چند خاصیت از آن به‌دست آمده است. به‌علاوه مفهوم فیبر ابر ضرب بیان و پلی مربع‌های متقاطع به‌صورت هموتوپی هسته‌ها مطالعه شده است. این نتایج، نتایج مربوط به مربع‌های متقاطع را به پلی‌مربع‌های متقاطع گسترش داده است. دراین مقاله پلی‌مربع‌های متقاطع هموتوپی به‌صورت هموتوپی هم‌هسته‌ها مطالعه می‌شوند، سپس تصویر یک پلی‌مدول متقاطع را در نظر گرفته و چند نتیجه ثابت می‌شود که تطابق بین پلی‌مدول‌های متقاطع و پلی‌مربع‌های متقاطع را نشان می‌دهد. در ادامه مطالعات، می‌توان نتایج را درباره ۲−مربع‌های متقاطع و سپس ۲−پلی مربع‌های متقاطع بررسی کرد. به‌علاوه مفاهیم در باره n−مربع‌های متقاطع و n−پلی‌مربع‌های متقاطع قابل گسترش و مطالعه است.

۱. مقدمه

مدول‌های متقاطع و کاربردهای آن نقش مهمی در نظریه‌گروه‌ها، نظریه هموتوپی، همولوژی و کوهمولوژی از گروه‌ها، جبر و k−تئوری و ...، دارد. مدول‌های متقاطع در ابتدا توسط وایتهد[1] [۲۴] به‌عنوان یک مدل برای ۲−نوع‌ها، تعریف شد. لادی[2] [۲۱] یک رسته هم‌ارز با رسته مدول‌های متقاطع به‌نام رسته ۱−گروه ارائه کرد. نوریه[3] در [۲۲] یک مثال خوب از مدول‌های متقاطع به‌صورت کنشگر مدول متقاطع ارائه کرد. کُندوشه[4] [۱۱] یک ۲−مدول متقاطع را به‌صورت یک مدل برای۳−نوع‌ها تعریف کرد. در کارهای منتشرنشده‌اش مشخص کرد که یک هم‌ارزی بین رسته مدول‌های مربعی از گروه‌ها و ۲−مدول‌های متقاطع از گروه‌ها وجود دارد.

در [۶] اروسی[5] و پرتر[6] نشان دادند که چگونه می‌توان از یک جبر سادگی به یک ۲−مدول متقاطع از جبرها رسید و برعکس، و رابطه بین جبرهای سادگی و مربع‌های متقاطع را روشن نمودند.

عبارات و کلمات کلیدی: گروه، پلی گروه، مربع‌های متقاطع، پلی‌مربع‌های متقاطع، روابط اساسی.
نوع مقاله: پژوهشی
دبیرتخصصی رابط: علیرضا عبدالهی
تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۲/۱۸ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۷/۱۱ تاریخ انتشار آنلاین: ۱۴۰۴/۰۱/۱۷
ارجاع به مقاله: م. ع. دهقانی‌زاده، نتایجی درباره پلی‌مربع‌های متقاطع، نشریه ریاضی و جامعه، ۱۰ شماره ۲ (۱۴۰۴) ۱−۲۶.
http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.141402.1656 .

[1]Whitehead [2]Loday [3]Norrie [4]Conduché [5]Arvasi [6]Porter

به عنوان یک مدل جبری از سه نوع‌ها، مفهوم ۲-مدول متقاطع توسط کُندوشه در [۱۱] معرفی شده است و این ۲-مدول‌های متقاطع، هم‌ارز با گروه‌های سادگی با پیچ مور[۷] از طول دو است. مربع‌های متقاطع و مدول‌های درجه دو، از دیگر مدول‌های جبری همبند از نوع سه هستند که توسط لادی و کویین-والاری [۸][۱۷] و بائوس[۹] [۸]، به‌ترتیب تعریف شده‌اند. اروسی و اوللان[۱۰] در [۷] روابط بین ۲-مدول‌های متقاطع، مدول‌های درجه دو، مربع‌های متقاطع و گروه‌های سادگی و هم ارزی هموتوپی بین این ابرساختارها را مطالعه کردند.

برای مطالعه نکات بیشتری درباره مدول‌های متقاطع می‌توانید به [۱، ۲، ۳، ۵، ۹، ۱۸] مراجعه نمایید. پلی مربع‌های متقاطع توسط دهقانی‌زاده[۱۱]، دواز[۱۲] و آلپ [۱۳][۱۴، ۱۵] تعریف و مطالعه شده است.

۲. پلی‌مربع‌های متقاطع

در این بخش، تعریف پلی‌مربع‌های متقاطع و مفاهیم مورد نیاز در بخش بعد را یادآوری می‌نماییم [۱۴، ۱۵].

تعریف ۱.۲. سیستم چندگانه $< P, \cdot, e, ^{-1} >$ که در آن $e \in P$ و $^{-1} : P \longrightarrow P$ و $\cdot : P \times P \longrightarrow \mathcal{P}^*(P)$ است، یک پلی‌گروه نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $x, y, z \in P$ شرایط زیر برقرار باشند:

(الف) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

(ب) $e \cdot x = x \cdot e = x$

(ج) اگر $x \in y \cdot z$ آن‌گاه $y \in x \cdot z^{-1}$ و $z \in y^{-1} \cdot x$.

اگر $A \subseteq P$ باشد، آن‌گاه A^{-1} را به‌صورت زیر تعریف می‌کنند:

$$A^{-1} = \{a^{-1} \mid a \in A\}$$

لم ۲.۲. اگر $< P, \cdot, e, ^{-1} >$ یک پلی‌گروه باشد، آن‌گاه برای هر $x, y \in P$ روابط زیر برقرار هستند:

(الف) $e \in x \cdot x^{-1} \cap x^{-1} \cdot x$؛

(ب) $e^{-1} = e$؛

(ج) $(x^{-1})^{-1} = x$؛

(د) $(x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1}$.

مثال ۳.۲. [۱۰] فرض کنیم G یک گروه و H زیرگروه آن است. اگر $G//H$ به‌صورت زیر باشد:

$$G//H =< \{HgH \mid g \in G\}, \cdot, H, ^{-1} >$$

به‌طوری‌که $(HgH)^{-1} = Hg^{-1}H$ و $(HgH) \cdot (Hg'H) = \{Hghg'H \mid h \in H\}$، آن‌گاه $G//H$ یک پلی‌گروه است.

تعریف ۴.۲. فرض کنیم G یک گروه و Ω یک مجموعه ناتهی باشند. یک عمل دوتایی، نگاشت $\tau : G \times \Omega \longrightarrow \Omega$ است که در شرایط زیر صدق می‌کند:

(الف) $\tau(gh, \omega) = \tau(g, \tau(h, \omega))$، برای هر $g, h \in G$ و $\omega \in \Omega$،

(ب) $\tau(e, \omega) = \omega$، برای هر $\omega \in \Omega$.

---
[7] Moore complex [8] Guin-Walery [9] Baues [10] Ulualan [11] Dehghanizadeh [12] Davvaz [13] Alp

برای $\omega \in \Omega$ و $g \in G$، می‌نویسیم $^g\omega := \tau(g,\omega)$.

تعریف ۵.۲. فرض کنیم $< P, \cdot, e, ^{-1} >$ یک پلی‌گروه است. در این‌صورت زیرمجموعه ناتهی K از P، یک زیر پلی‌گروه از P نامیده می‌شود، هرگاه $e \in K$ و $< K, \cdot, e, ^{-1} >$ پلی‌گروه باشد. زیرپلی‌گروه N از P، نرمال نامیده می‌شود هرگاه

$$a^{-1} \cdot N \cdot a \subseteq N, \quad \text{برای هر } a \in P$$

اگر N یک زیرپلی‌گروه نرمال از P باشد، آن‌گاه نتایج بدیهی زیر برقرارخواهند بود:

(الف) برای هر $a \in P$، $N \cdot a = a \cdot N$،

(ب) برای هر $b \in N \cdot a$، $N \cdot a = N \cdot b$.

فرض کنیم P یک پلی گروه است. رابطه β_P^* کوچک‌ترین رابطه هم‌ارزی روی P است به‌طوری‌که خارج قسمت $\frac{P}{\beta_P^*}$، مجموعه تمام کلاس‌های هم‌ارزی رابطه، یک گروه باشد. در این‌حالت β_P^*، هم‌ارزی اساسی[۱۴] روی P نامیده می‌شود و $\frac{P}{\beta_P^*}$، گروه اساسی[۱۵] متناظر با P نامیده می‌شود. ضرب $\odot$ در $\frac{P}{\beta_P^*}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\beta_P^*(x) \odot \beta_P^*(y) = \beta_P^*(z), \quad \text{برای هر } z \in \beta_P^*(x) \circ \beta_P^*(y)$$

این رابطه توسط کورکاس[۱۶] [۱۹] معرفی شده است و به‌طور عمده توسط کورسینی[۱۷] [۱۲]، لورینوفوتیا[۱۸][۲۰] فرنی[۱۹] [۱۶] در مورد ابرگروه‌ها و توسط وجیوکلیس[۲۰] [۲۳] در مورد H_ν–گروه‌ها مطالعه شده است.

همچنین این رابطه مهم توسط دواز[۲۱] در مورد پلی‌گروه‌ها معرفی شده است [۱۳].

فرض کنیم P یک پلی‌گروه است و رابطه β_P را روی P به‌صورت زیر در نظر بگیرید:

$$x\beta_P y \Longleftrightarrow \{x,y\} \subseteq \circ\prod_{i=1}^{n} z_i \text{ به‌طوری که } z_1,\ldots,z_n \text{ وجود دارد}$$

فرنی در [۱۶] ثابت کرد که برای هر ابرگروهP، تساوی $\beta = \beta^*$ برقرار است. چون پلی‌گروه‌ها، زیرکلاسی از ابرگروه‌ها هستند، پس رابطه $\beta_P^* = \beta_P$ برقرار است.

تعریف ۶.۲. یک پلی‌مربع متقاطع، یک دیاگرام جابه‌جایی از پلی‌گروه‌هاست:

$$\begin{tikzcd} P_1 \arrow[r, "\bar{p}_1"] \arrow[d, "\partial"'] & \Gamma_1 \arrow[d, "\partial'"] \\ P_0 \arrow[r, "\bar{p}_0"'] & \Gamma_0 \end{tikzcd}$$

دیاگرام (۱)

به‌همراه پلی‌عمل‌هایی از پلی‌گروه Γ_0 روی P_1 و Γ_1 و به‌علاوه P_0 (و بنابراین پلی‌عمل‌هایی از Γ_1 روی P_1 و P_0 توسط ∂' و P_0 روی P_1 و Γ_1 توسط $\bar{p}_0$) و یک نگاشت $h : \Gamma_1 \times P_0 \longrightarrow \mathcal{P}^*(P_1)$، به‌طوری‌که در شرایط زیر صادق باشند:

[۱۴] fundamental equivalence [۱۵] fundamental group [۱۶] Korkes [۱۷] Corsini [۱۸] Learcanufotea [۱۹] Freni [۲۰] Vougiouklis [۲۱] Davvaz

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.141402.1656

(الف) نگاشت‌های $\bar{p}_1, \partial$ حافظ پلی‌عمل‌های Γ_0 باشند. به‌علاوه، با پلی‌عمل‌های داده شده، نگاشت‌های $\partial', \bar{p}_0$ و $\partial'\bar{p}_1 = \bar{p}_0\partial$ ، پلی‌مدول‌های متقاطع باشند.

(ب) $\bar{p}_1 h(\beta, p) = \beta^p\beta^{-1}$ ،$\partial h(\beta, p) = {}^{\beta}pp^{-1}$؛

(ج) $h(\bar{p}_1(\alpha), p) = \alpha\,{}^{p}\alpha^{-1}$ ،$h(\beta, \partial(\alpha)) = {}^{\beta}\alpha\alpha^{-1}$؛

(د) $h(\beta_1\beta_2, p) = {}^{\beta_1}h(\beta_2, p)h(\beta_1, p)$ ،$h(\beta, p_1p_2) = h(\beta, p_1)\,{}^{p_1}h(\beta, p_2)$؛

(ه) $h({}^{\sigma}\beta, {}^{\sigma}p) = {}^{\sigma}h(\beta, p)$؛

برای هر $\alpha \in P_1$ ،$\beta, \beta_1, \beta_2 \in \Gamma_1$ ،$p, p_1, p_2 \in P_0$ و $\sigma \in \Gamma_0$.

یک نتیجه از (الف) این است که $\partial, \bar{p}_1$ یک پلی‌مدول متقاطع است. به‌علاوه با (د)، h نرمال‌ساز شده است و با (ج)، P_0، بدیهی روی $\mathrm{Ker}\ \bar{p}_1$ عمل می‌کند و Γ_1 روی $\mathrm{Ker}\ \partial$ بدیهی عمل می‌کند. چند نتیجه مفید و بدیهی به‌صورت زیر هستند:

(۱) ${}^{\beta}({}^{p}\alpha)h(\beta, p) = h(\beta, p)\,{}^{p}({}^{\beta}\alpha)$؛

(۲) ${}^{\beta_1}({}^{p_1}h(\beta_2, p_2))h(\beta_1, p_1) = h(\beta_1, p_1)\,{}^{p_1}({}^{\beta_1}h(\beta_2, p_2))$؛

(۳) $h(\bar{p}_1 h(\beta, p_1), p_2) = h(\beta, p_1)\,{}^{p_2}h(\beta, p_1)^{-1}$؛

(۴) $h(\beta_2, \partial h(\beta_1, p)) = {}^{\beta_2}h(\beta_1, p)h(\beta_1, p)^{-1}$؛

(۵) $h(\bar{p}_1(\alpha_1), \partial(\alpha_2)) = \alpha_1\alpha_2\alpha_1^{-1}\alpha_2^{-1}$؛

(۶) $h(\beta_1\,{}^{p_1}\beta_1^{-1}, {}^{\beta_2}p_2p_2^{-1}) = h(\beta_1, p_1)h(\beta_2, p_2)h(\beta_1, p_1)^{-1}h(\beta_2, p_2)^{-1}$؛

(۷) ${}^{\beta}h(\beta^{-1}, p) = h(\beta, p)^{-1} = {}^{p}h(\beta, p^{-1})$؛

(۸) ${}^{\beta}({}^{p}h(\beta, p)) = h(\beta, p)$؛

(۹) $h(\bar{p}_1(\alpha_1)\beta_1, \partial(\alpha_2)p_2)\alpha_2\,{}^{p_2}\alpha_1 = \alpha_1\,{}^{\beta_1}\alpha_2 h(\beta_1, p_2)$؛

برای هر $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in P_1$ و $p, p_1, p_2 \in P_0$.

مثال ۷.۲. یک زوج از زیرپلی‌گروه‌های نرمال N_1 و N_2 از پلی‌گروه P را در نظر بگیرید، می‌توانی پلی‌مربع زیر را تشکیل داد:

$$\begin{tikzcd} N_1 \cap N_2 \arrow[r] \arrow[d] & N_1 \arrow[d] \\ N_2 \arrow[r, "\bar{p}_0"'] & P \end{tikzcd}$$

که هر ریخت، یک پلی‌مدول متقاطع شمولی است و نگاشت جابه‌جایی زیر وجود دارد:

$$\begin{aligned} h : N_1 \times N_2 &\longrightarrow \mathcal{P}^*(N_1 \cap N_2) \\ (n_1, n_2) &\longrightarrow [n_1, n_2]; \end{aligned}$$

که در آن $[x, y]$، به‌صورت $\{z \mid z \in xyx^{-1}y^{-1}\}$ است. این یک پلی‌مربع متقاطع از پلی‌گروه‌ها است.

مثال ۸.۲. اگر دیاگرام (۱) یک پلی‌مربع متقاطع با نگاشت $h : \Gamma_1 \times P_0 \longrightarrow \mathcal{P}^*(P_1)$، باشد، آن‌گاه $< \bar{p}_1, \bar{p}_0 >$، یک ریخت از پلی‌مدول‌های متقاطع است و $\partial' : \Gamma_1 \longrightarrow \Gamma_0$ روی $\partial : P_1 \longrightarrow P_0$، عمل می‌کند.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.141402.1656

مثال ۹.۲. فرض کنیم نمودار (۱) یک پلی‌مربع متقاطع با نگاشت $h:\Gamma_1\times P_0\longrightarrow \mathcal{P}^*(P_1)$ است، آن‌گاه $<\bar{p}_1,\bar{p}_0>$ یک ریخت از پلی‌مدول‌های متقاطع است و $\partial':\Gamma_1\longleftrightarrow\Gamma_0$ روی $\partial:P_1\longleftrightarrow P_0$ عمل می‌کند.

مثال ۱۰.۲. فرض کنیم نمودار (۱) یک پلی‌مربع متقاطع با نگاشت $h:\Gamma_1\times P_0\longrightarrow \mathcal{P}^*(P_1)$ است. آن‌گاه می‌توان حاصل‌ضرب نیم‌مستقیم پلی‌مدول متقاطع را ساخت. به‌عبارت دیگر با:

$$<\bar{p}_1,\bar{p}_0>: P_1\rtimes P_0\longrightarrow \Gamma_1\rtimes\Gamma_0.$$

پلی‌عمل P_0 روی P_1 و Γ_0 روی Γ_1، پلی‌عمل‌های طبیعی هستند و پلی‌عمل $\Gamma_1\rtimes\Gamma_0$ روی $P_1\rtimes P_0$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$^{(\beta,\sigma)}(\alpha,p)=\{(x,y)\mid\ x\in^{\partial'(\beta)\sigma}\alpha h(\beta,^{\sigma}p),\, y\in^{\sigma}p\}.$$

۳. پلی‌مربع‌های متقاطع به‌صورت هموتوپی هم‌هسته‌ها و مربع‌های متقاطع به‌دست آمده از آن‌ها

دو صورت از هسته ریخت پلی‌مدول متقاطع وجود دارد و در صورت هموتوپی، پلی‌مدول‌های متقاطع به‌صورت یک ۲–رسته، تجزیه و تحلیل شده است. هسته توسط هموتوپی فیبر روی تک تک اشیاء ریخت رسته پلی‌گروه‌های $P(\partial)\longrightarrow P(\partial')$ مطالعه شده است. در این‌حالت اشیاء هسته، از رسته پس پلی‌گروه $P_0\times_{P_1'}P_1'$ هستند.

حال مفهوم تعمیم ابرضرب نیم‌مستقیم از پلی‌گروه‌ها تعریف می‌شود و از آن برای معرفی ساختار پیش پلی‌مدول‌های متقاطع استفاده می‌گردد. فرض کنید P_1 و Γ_1 و P_0 پلی‌گروه هستند، که هرکدام مجهز به یک پلی‌عمل راست از P_0 و یکی روی P_0 خودش با عمل مزدوجی هستند. همه پلی‌عمل‌ها را با نماد $^{-k}$ نشان می‌دهند. فرض کنید یک نمودار P_0– هم‌ارز داده شده است:

$$\begin{tikzcd} P_1 \arrow[r, "p"] \arrow[d, "d"'] & \Gamma_1 \\ P_0 & \end{tikzcd}$$

که در آن شرایط سازگاری[۲۲] $\gamma_1^{d(p_1)}=\gamma_1^{p(p_1)}$ برای هر $p_1\in P_1$ و $\gamma_1\in\Gamma_1$ درست است.

تعریف ۱.۳. ابرضرب نیم‌مستقیم $P_0\ltimes{}^{P_1}\Gamma_1$ از P_0 و Γ_1 در امتداد P_1 به‌صورت $P_0\ltimes\frac{\Gamma_1}{N}$ تعریف می‌شود، که در آن

$$N=\{(d(p_1)^{-1},p(p_1))\mid p_1\in P_1\}.$$

همریختی‌های طبیعی پلی‌گروه‌های $p':P_0\longrightarrow P_0\ltimes{}^{P_1}\Gamma_1$ و $d':\Gamma_1\longrightarrow P_0\ltimes{}^{P_1}\Gamma_1$ وجود دارند که نمودار زیر را جابجایی می‌سازند:

$$\begin{tikzcd} P_1 \arrow[r, "p"] \arrow[d, "d"'] & \Gamma_1 \arrow[d, "d'"] \\ P_0 \arrow[r, "p'"'] & P_0\ltimes{}^{P_1}\Gamma_1 \end{tikzcd}$$

هم‌چنین یک پلی‌عمل از $P_0\ltimes^{P_1}\Gamma_1$ روی Γ_1 وجود دارد که نمودار بالا را هم‌ارز می‌سازد.

---
[22] compatibility condition

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.141402.1656

یک عنصر $(p_0, \gamma_1) \in P_0 \ltimes^{P_1} \Gamma_1$ روی $\gamma_1' \in \Gamma_1$ با فرستادن آن به $\{x \mid x \in \gamma_1^{-1}\gamma_1'^{\,p_0}\gamma_1\}$ خواهد بود. در واقع $d' : \Gamma_1 \longrightarrow P_0 \ltimes^{P_1} \Gamma_1$ یک پلی مدول متقاطع است.

قضیه ۲.۳. اگر نمودار(۱)، یک پلی‌مربع متقاطع باشد، آن‌گاه نمودار بیرونی

$$\begin{tikzcd}
P_1 \arrow[r, equal, "\mathrm{id}_{P_1}"] \arrow[rrr, bend left, "\tilde{p}_1"] \arrow[d, "\bar{\partial}"'] & P_1 \arrow[r, "\bar{p}_1"] \arrow[d, "\partial"'] & \Gamma_1 \arrow[r, "\partial''"] \arrow[d, "\partial'"] & P_0 \times^{P_1} \Gamma_1 \arrow[d, "d"] \\
P_0 \times_{\Gamma_0} \Gamma_1 \arrow[r, "p_{P_0}"] \arrow[rr, bend right, "\bar{\bar{p}}_0"] \arrow[rrr, bend right=40, "\tilde{p}_0"'] & P_0 \arrow[r, "\tilde{p}_0"] & \Gamma_0 \arrow[r, equal, "\mathrm{id}_{\Gamma_0}"] & \Gamma_0
\end{tikzcd}$$

دیاگرام (۲)

یک پلی‌مربع متقاطع با عمل‌ها و همریختی پلی‌گروه ∂'' و نگاشت تعریف شده به‌صورت زیر است:

$$\bar{\bar{h}} : (P_0 \ltimes {}^{P_1}\Gamma_1) \times (P_0 \times {}_{\Gamma_0}\Gamma_1) \longrightarrow \mathcal{P}^*(P_1)$$

به‌علاوه

(الف) پلی‌عمل Γ_0 روی P_1 به‌وسیله پلی‌عمل پلی‌مدول متقاطع $\partial' : \Gamma_1 \longrightarrow \Gamma_0$ روی $\partial : P_1 \longrightarrow P_0$ القا شده است.
(ب) پلی‌عمل Γ_0 روی $P_0 \ltimes {}^{P_1}\Gamma_1$، پلی‌عمل از یک پلی‌مدول متقاطع $d : P_0 \ltimes {}^{P_1}\Gamma_1 \longrightarrow \Gamma_0$ است،
(ج) پلی‌عمل Γ_0 روی $P_0 \times_{\Gamma_0} \Gamma_1$ با $^{\sigma}(p_2, \beta_2) = \{(x, y) \mid x \in {}^{\sigma}p_2,\ y \in {}^{\sigma}\beta_2\}$ تعریف شده است. (همان پلی‌عملی که در پلی‌مربع متقاطع نمودار (۱) دیده می‌شود.)
(د) $\partial'' : \Gamma_1 \longrightarrow P_0 \ltimes {}^{P_1}\Gamma_1$ نگاشت کانونی شمولی Γ_1 در $P_0 \ltimes {}^{P_1}\Gamma_1$ است.
(ه) $\bar{\bar{h}}\,((p_1, \beta_1), (p_2, \beta_2)) := \{h(\beta_1, p_1 p_2 p_1^{-1}) h(\beta_2, p_1)^{-1}\}$ که در آن تابع h به‌وسیله ساختار پلی‌مربع متقاطع در نمودار (۱) داده شده است، می‌باشد.

اثبات. $\tilde{p}_0 = \bar{\bar{p}}_0$ یک همریختی قوی است، که در آن $\bar{\bar{p}}_0$ تعریف شده در نمودار (۲) است. $\bar{p}_1$ یک همریختی قوی است، بنابراین $\tilde{p}_1(\alpha) = (1, \bar{p}_1(\alpha))$ یک همریختی قوی است. نمودار (۲) جابجایی است و تابع آخر یک پلی‌مدول متقاطع است، زیرا به‌سادگی بررسی می‌شود که $d\tilde{p}_1 = \partial'\bar{p}_1 = \bar{p}_0\partial = \tilde{p}_0\bar{\partial}$.
اما $\bar{\bar{h}}$ خوش‌تعریف است، درحقیقت:

$$\begin{aligned}
&\bar{\bar{h}}\left\{((x,y),(p_2,\beta_2)) \mid x\in\partial(\alpha)p_1,\ y\in\beta_1\bar{p}_1(\alpha)^{-1}\right\}\\
&\quad= h\left\{(x,y)\mid x\in\beta_1\bar{p}_1(\alpha)^{-1},\ y\in\partial(\alpha)p_1p_2p_1^{-1}\partial(\alpha)\right\}\ h\left\{(\beta_2,z)^{-1}\mid z\in\partial(\alpha)p_1\right\}\\
&\quad= h\left\{(x,y)\mid x\in\beta_1\bar{p}_1(\alpha)^{-1},\ y\in {}^{\bar{p}_0\partial(\alpha)}(p_1p_2p_1^{-1})\right\}\\
&\qquad\qquad {}^{\partial(\alpha)}h(\beta_2,p_1)^{-1}h\left\{(\beta_2,z)^{-1}\mid z\in\partial(\alpha)\right\}\\
&\quad= {}^{\bar{p}_0\partial(\alpha)}h\left\{(x,y)\mid x\in {}^{\bar{p}_0\partial(\alpha)^{-1}}(\beta_1\bar{p}_1(\alpha)^{-1},\ y\in p_1p_2p_1^{-1})\right\}\\
&\qquad\qquad \alpha h\left\{(\beta_2,p_1)^{-1}\,\alpha^{-1}\alpha^{\beta_2}\alpha^{-1}\right\}\\
&\quad= \alpha h\left\{(x,y)\ \ x\in {}^{\partial'\bar{p}_1(\alpha)^{-1}}(\beta_1\bar{p}_1(\alpha)^{-1},\ y\in p_1p_2p_1^{-1}\right\}\alpha^{-1}\alpha h(\beta_2,p_1)^{-1\,\beta_2}\alpha^{-1}\\
&\quad= \alpha^{\partial'\bar{p}_1(\alpha)^{-1}}h\left\{(\beta_1,y)\mid y\in p_1p_2p_1^{-1}\right\}\\
&\qquad\qquad h\left\{(\bar{p}_1(\alpha)^{-1},y)\mid y\in p_1p_2p_1^{-1}\right\}h(\beta_2,p_1)^{-1\,\beta_2}\alpha^{-1}\\
&\quad= \alpha^{\partial'\bar{p}_1(\alpha)^{-1}}h\left\{(\beta_1,y)\mid y\in p_1p_2p_1^{-1}\right\}\\
&\qquad\qquad h\left\{(\bar{p}_1(\alpha)^{-1},y)\mid y\in p_1p_2p_1^{-1}\right\}h(\beta_2,p_1)^{-1\,\beta_2}\alpha^{-1}\\
&\quad= \alpha\alpha^{-1}h\left\{(\beta_1,y)\mid y\in p_1p_2p_1^{-1}\right\}\alpha\alpha^{-1\,p_1p_2p_1^{-1}}\alpha h(\beta,p_1)^{-1\,\beta_2}\alpha^{-1}\\
&\quad= h\left\{(\beta_1,y)\mid y\in p_1p_2p_1^{-1}\right\}{}^{p_1\beta_2}({}^{p_1^{-1}}\alpha)h(\beta_2,p_1)^{-1\,\beta_2}\alpha^{-1}\\
&\quad= h\left\{(\beta_1,y)\mid y\in p_1p_2p_1^{-1}\right\}h(\beta_2,p_1)^{-1\,\beta_2p_1}({}^{p_1^{-1}}\alpha)^{\beta_2}\alpha^{-1}\\
&\quad= h\left\{(\beta_1,y)\mid y\in p_1p_2p_1^{-1}\right\}h(\beta_2,p_1)^{-1\,\beta_2}\alpha^{\beta_2}\alpha^{-1}\\
&\quad= h\left\{(\beta_1,y)\mid y\in p_1p_2p_1^{-1}\right\}h(\beta_2,p_1)^{-1}.
\end{aligned}$$

نمودار بیرونی (۲) پلی‌مربع متقاطع است و بنابراین تساوی‌های بالا از نتایج پلی‌مربع متقاطع است.

حال پنج شرطی که نمودار (۲) را پلی‌مربع متقاطع می‌سازد، بررسی می‌شوند:

(۱) نگاشت $\tilde{p}_1$ حافظ پلی‌عمل Γ_0 است، در حقیقت

$$\tilde{p}_1({}^{\sigma}\alpha)=\{(1,x)\mid x\in\bar{p}_1({}^{\sigma}\alpha)\}=\{(1,x)\mid x\in{}^{\sigma}\bar{p}_1(\alpha)\}={}^{\sigma}(1,\bar{p}_1(\alpha))={}^{\sigma}\tilde{p}_1(\alpha).$$

نگاشت $\bar{\partial}$ حافظ پلی‌عمل Γ_0 است. همچنین d، یک پلی‌مدول متقاطع است و $\tilde{p}_0$، پلی‌مدول متقاطع است، زیرا $\bar{\bar{p}}_0$ پلی‌مدول متقاطع است.

(۲) ثابت می‌شود که:

$$\tilde{p}_1\left(\bar{\bar{h}}((p_1,\beta_1),(p_2,\beta_2))\right)=(p_1,\beta_1)^{(p_2,\beta_2)}(p_1,\beta_1)^{-1}$$

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.141402.1656

دو عنصر دلخواه در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
\tilde{p}_1\left(\bar{\bar{h}}((p_1,\beta_1),(p_2,\beta_2))\right) &= \tilde{p}_1\left(h\{(\beta_1,y)\mid y\in p_1p_2p_1^{-1}\}\,h(\beta_2,p_1)^{-1}\right)\\
&= \left(1,\bar{p}_1(h\{(\beta_1,y)\mid y\in p_1p_2p_1^{-1}\}\,h(\beta_2,p_1)^{-1}\right)\\
&= \{(1,y)\mid y\in \beta_1\,{}^{p_1p_2p_1^{-1}}\beta_1^{-1}\,{}^{p_1}\beta_2\beta_2^{-1}\};
\end{aligned}$$

و به‌علاوه

$$\begin{aligned}
&(p_1,\beta_1)\,{}^{(p_2,\beta_2)}(p_1,\beta_1)^{-1}\\
&\quad= (p_1,\beta_1)\,{}^{\tilde{p}_0(p_2,\beta_2)}(p_1,\beta_1)^{-1}\\
&\quad= (p_1,\beta_1)\,{}^{\tilde{p}_0(p_2)}(p_1^{-1},\,{}^{p_1^{-1}}\beta_1^{-1})\\
&\quad= (p_1,\beta_1)\{(x,y)\mid x\in p_2p_1^{-1}p_2^{-1},\ y\in {}^{p_2p_1^{-1}}\beta_1^{-1}\}\\
&\quad= \{(u,v)\mid u\in p_1p_2p_1^{-1}p_2^{-1},\ v\in \beta_1\,{}^{p_1p_2p_1^{-1}}\beta_1^{-1}\}\\
&\quad= \{(r,s)\mid r\in \partial h(\beta_2,p_1)^{-1}1,\ s\in \beta_1\,{}^{p_1p_2p_1^{-1}}\beta_1^{-1}\,{}^{p_1}\beta_2\beta_2^{-1}\bar{p}_1h(\beta_2,p_1)\}.
\end{aligned}$$

حال ثابت می‌شود که:

$$\bar{\partial}\bar{\bar{h}}((p_1,\beta_1),(p_2,\beta_2)) = {}^{(p_1,\beta_1)}(p_2,\beta_2)(p_2,\beta_2)^{-1};$$

دو عنصر دلخواه انتخاب کنید:

$$\begin{aligned}
&\bar{\partial}\bar{\bar{h}}((p_1,\beta_1),(p_2,\beta_2))\\
&= \bar{\partial}(h\{(\beta_1,y)\mid y\in p_1p_2p_1^{-1}\}h(\beta_2,p_1)^{-1})\\
&= \{(\partial h(\beta_1,y)\,\partial h(\beta_2,p_1)^{-1},\bar{p}_1h(\beta_1,y)\bar{p}_1h(\beta_2,p_1)^{-1})\mid y\in p_1p_2p_1^{-1}\}\\
&= \{(u,v)\mid u\in {}^{\beta_1}(p_1p_2p_1)^{-1}p_1p_2^{-1}p_1^{-1}p_1\,{}^{\beta_2}p_1^{-1},\ v\in \beta_1\,{}^{p_1p_2p_1^{-1}}\beta_1^{-1}\,{}^{p_1}\beta_2\beta_2^{-1}\}\\
&= \{(u,v)\mid u\in {}^{\beta_1}(p_1p_2p_1^{-1})p_1p_2^{-1}\,{}^{\bar{p}_0(p_2)}p_1^{-1},\ v\in \beta_1\,{}^{p_1}({}^{\partial'(\beta_2)}({}^{p_1^{-1}}\beta_1^{-1}))\,{}^{p_1}\beta_2\beta_2^{-1}\}\\
&= \{(u,v)\mid u\in {}^{\beta_1}(p_1p_2p_1^{-1})p_1p_2^{-1}p_2p_1^{-1}p_2^{-1},\ v\in \beta_1\,{}^{p_1}\beta_2\beta_1^{-1}\,{}^{p_1}\beta_2^{-1}\,{}^{p_1}\beta_2\beta_2^{-1}\}\\
&= \{(u,v)\mid u\in {}^{\beta_1}(p_1p_2p_1^{-1})p_2^{-1},\ v\in \beta_1\,{}^{p_1}\beta_2\beta_1^{-1}\beta_2^{-1}\};
\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}
{}^{(p_1,\beta_1)}(p_2,\beta_2)(p_2,\beta_2)^{-1} &= {}^{\partial'(\beta_1)\bar{p}_0(p_1)}(p_2,\beta_2)(p_2^{-1},\beta_2^{-1})\\
&= \{(u,v)\mid u\in {}^{\beta_1}(p_1p_2p_1^{-1}),\ v\in \beta_1\,{}^{g_1}\beta_2\beta_1^{-1}\}(p_2^{-1},\beta_2^{-1})\\
&= \{(u,v)\mid u\in {}^{\beta_1}(p_1p_2p_1^{-1})p_2^{-1},\ v\in \beta_1\,{}^{p_1}\beta_2\beta_1^{-1}\beta_2^{-1}\}.
\end{aligned}$$

(۳)

$$\begin{aligned}\bar{\bar{h}}(\tilde{p}_1(\alpha),(p_2,\beta_2)) &= \bar{\bar{h}}((1,\bar{p}_1(\alpha)),(p_2,\beta_2))\\ &= h(\bar{p}_1(\alpha),p_2)h(\beta_2,1)^{-1} = \alpha^{p_2}\alpha^{-1} = \alpha^{\bar{p}_0(p_2)}\alpha^{-1}\\ &= \alpha^{\bar{p}_0(p_2,\beta_2)}\alpha^{-1} = \alpha^{(p_2,\beta_2)}\alpha^{-1};\end{aligned}$$

و به‌علاوه

$$\begin{aligned}\bar{\bar{h}}((p_1,\beta_1),\bar{\partial}(\alpha)) &= \bar{\bar{h}}((p_1,\beta_1),(\partial(\alpha),\bar{p}_1(\alpha)))\\ &= h\{(\beta_1,y)\mid y\in p_1\partial(\alpha)p_1^{-1}\}\,h(\bar{p}_1(\alpha),p_1)^{-1}\\ &= h\{(\beta_1,y)\mid y\in \partial({}^{p_1}\alpha)\}\,h(\bar{p}_1(\alpha),p_1)^{-1}\\ &= {}^{\beta_1}({}^{p_1}\alpha)\,{}^{p_1}\alpha^{-1}\,{}^{p_1}\alpha\alpha^{-1} = {}^{\beta_1}({}^{p_1}\alpha)\alpha^{-1}\\ &= {}^{\partial'(\beta_1)\bar{p}_0(p_1)}\alpha\alpha^{-1} = {}^{d(p_1,\beta_1)}\alpha\alpha^{-1} = {}^{(p_1,\beta_1)}\alpha\alpha^{-1}.\end{aligned}$$

(۴) ثابت می‌شود که:

$$\bar{\bar{h}}((p_1,\beta_1)(p_1',\beta_1'),(p_2,\beta_2)) = {}^{(p_1,\beta_1)}\bar{\bar{h}}((p_1',\beta_1'),(p_2,\beta_2))\,\bar{\bar{h}}((p_1,\beta_1),(p_2,\beta_2))$$

دو عنصر دلخواه انتخاب کنید:

$$\begin{aligned}&\bar{\bar{h}}((p_1,\beta_1)(p_1',\beta_1'),(p_2,\beta_2))\\ =\;& \bar{\bar{h}}\{((x,y),(p_2,\beta_2))\mid x\in p_1p_1',\ y\in\beta_1\,{}^{p_1}\beta_1'\}\\ =\;& h\{(y,z)\mid y\in\beta_1\,{}^{p_1}\beta_1',\ z\in p_1p_1'p_2p_2'^{-1}p_1^{-1}\}\,h\{(\beta_2,r)^{-1}\mid r\in p_1p_1'\}\\ =\;& {}^{\beta_1}h\{(s,z)\mid s\in {}^{p_1}\beta_1',\ z\in p_1p_1'p_2p_1'^{-1}p_1^{-1}\}\,h\{(\beta_1,z)\mid z\in p_1p_1'p_2p_1'^{-1}p_1^{-1}\}\\ =\;& {}^{\beta_1}h(\beta_2,p_1')^{-1}h(\beta_2,p_1)^{-1}\\ =\;& {}^{\beta_1p_1}h\{(\beta_1',t)\mid t\in p_1'p_2p_1'^{-1}\}\,h\{(\beta_1,u)\mid u\in p_1p_1'^{\,\bar{p}_0(p_2)}(p_1p_1')^{-1}p_2\}\\ =\;& {}^{p_1}h(\beta_2,p_1')^{-1}h(\beta_2,p_1)^{-1}\\ =\;& {}^{\beta_1p_1}h\{(\beta_1',t)\mid t\in p_1'p_2p_1'^{-1}\}\,h\{(\beta_1,\partial h(\beta_2,r)^{-1}p_2\mid r\in p_1p_1^{-1}\}\\ &\quad {}^{p_1}h(\beta_2,p_1')^{-1}h(\beta_2,p_1)^{-1}\\ =\;& {}^{\beta_1p_1}h\{(\beta_1',t)\mid t\in p_1'p_2p_1'^{-1}\}\,{}^{\beta_1}h\{(\beta_2,r)^{-1}\mid r\in p_1p_1'\}\\ &\quad h(\beta_1,p_2)h\{(\beta_2,r)\mid r\in p_1p_1^{-1}\}\,{}^{p_1}h(\beta_2,p_1')^{-1}h(\beta_2,p_1)^{-1}\\ =\;& {}^{\beta_1p_1}h\{(\beta_1',t)\mid t\in p_1'p_2p_1'^{-1}\}\,{}^{\beta_1}h\{(\beta_2,r)^{-1}\mid r\in p_1p_1^{-1}\}\\ &\quad h(\beta_1,p_2)h(\beta_2,p_1)\,{}^{p_1}h(\beta_2,p_1')^{-1}h(\beta_2,p_1)^{-1}\\ =\;& {}^{\beta_1p_1}h\{(\beta_1',t)\mid t\in p_1'p_2p_1'^{-1}\}\,{}^{\beta_1}h\{(\beta_2,r)^{-1}\mid r\in p_1p_1^{-1}\}\,h(\beta_1,p_2);\end{aligned}$$

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.141402.1656

و به‌علاوه

$$\begin{aligned}
&{}^{(p_1,\beta_1)}\bar{\bar{h}}((p'_1,\beta'_1),(p_2,\beta_2))\,\bar{\bar{h}}((p_1,\beta_1),(p_2,\beta_2))\\
=\;&{}^{\beta_1p_1}[h\{(\beta'_1,t)\mid t\in p'_1p_2{p'_1}^{-1}\}\,h(\beta_2,p'_1)^{-1}]h\{(\beta_1,y)\mid y\in p_1p_2p_1^{-1}\}\,h(\beta_2,p_1)^{-1}\\
=\;&{}^{\beta_1p_1}h\{(\beta'_1,t)\mid t\in p'_1p_2{p'_1}^{-1}\}\,{}^{\beta_1p_1}h(\beta_2,p'_1)^{-1}h\{(\beta_1,w)\mid w\in p_1{}^{\bar{p}_0(p_2)}p_1^{-1}p_2\}\\
&h(\beta_2,p_1)^{-1}\\
=\;&{}^{\beta_1p_1}h\{(\beta'_1,t)\mid t\in p'_1p_2{p'_1}^{-1}\}\,{}^{\beta_1p_1}h(\beta_2,p'_1)^{-1}h\{(\beta_1,w_1)\mid w_1\in p_1{}^{\partial'(\beta_2)}p_1^{-1}p_2\}\\
&h(\beta_2,p_1)^{-1}\\
=\;&{}^{\beta_1p_1}h\{(\beta'_1,t)\mid t\in p'_1p_2{p'_1}^{-1}\}\,{}^{\beta_1p_1}h(\beta_2,p'_1)^{-1}h\{(\beta_1,w_2)\mid w_2\in \partial h(\beta_2,p_1)^{-1}p_2\}\\
&h(\beta_2,p_1)^{-1}\\
=\;&{}^{\beta_1p_1}h\{(\beta'_1,t)\mid t\in p'_1p_2{p'_1}^{-1}\}\,{}^{\beta_1p_1}h(\beta_2,p'_1)^{-1}\,{}^{\beta_1}h(\beta_2,p_1)^{-1}h(\beta_2,p_1)^{-1}h(\beta_1,p_2)\\
&h(\beta_2,p_1)\,h(\beta_2,p_1)^{-1}\\
=\;&{}^{\beta_1p_1}h\{(\beta'_1,t)\mid t\in p'_1p_2{p'_1}^{-1}\}\,{}^{\beta_1}[{}^{p_1}h(\beta_2,p'_1)^{-1}h(\beta_2,p_1)^{-1}]h(\beta_1,p_2)\\
=\;&{}^{\beta_1p_1}h\{(\beta'_1,t)\mid t\in p'_1p_2{p'_1}^{-1}\}\,{}^{\beta_1}h\{(\beta_2,r)^{-1}\mid r\in p_1p'_1\}\,h(\beta_1,p_2).
\end{aligned}$$

(۵)

$$\begin{aligned}
\bar{\bar{h}}({}^{\sigma}(p_1,\beta_1),{}^{\sigma}(p_2,\beta_2)) &= \bar{\bar{h}}(({}^{\sigma}p_1,{}^{\sigma}\beta_1),({}^{\sigma}p_2,{}^{\sigma}\beta_2))\\
&= h\{({}^{\sigma}\beta_1,x)\mid x\in {}^{\sigma}p_1\,{}^{\sigma}p_2\,{}^{\sigma}p_1^{-1}\}\,h({}^{\sigma}\beta_2,{}^{\sigma}p_1)^{-1}\\
&= h\{({}^{\sigma}\beta_1,x)\mid x\in {}^{\sigma}(p_1p_2p_1^{-1})\}\,h({}^{\sigma}\beta_2,{}^{\sigma}p_1)^{-1}\\
&= {}^{\sigma}h\{(\beta_1,y)\mid y\in p_1p_2p_1^{-1}\}\,{}^{\sigma}h(\beta_2,p_1)^{-1}\\
&= {}^{\sigma}[h\{(\beta_1,y)\mid y\in p_1p_2p_1^{-1}\}\,h(\beta_2,p_1)^{-1}]\\
&= {}^{\sigma}\bar{\bar{h}}((p_1,\beta_1),(p_2,\beta_2).
\end{aligned}$$

$\square$

قضیه ۳.۳. اگر نمودار (۱)، یک پلی‌مربع متقاطع باشد، آن‌گاه نمودار بیرونی

$$\begin{tikzcd}
\frac{P_1}{\beta^*_{P_1}} \arrow[rrrrr, "\psi"] \arrow[ddd, "\mathcal{D}"'] & & & & & \frac{P_0\times^{P_1}\Gamma_1}{\beta^*_{P_0\times^{P_1}\Gamma_1}} \arrow[ddd, "\mathcal{D}'"] \\
& P_1 \arrow[ul, "\Phi_{P_1}"] \arrow[r, equal, "\mathrm{id}_{P_1}"] \arrow[d, "\bar{\partial}"'] \arrow[rrr, bend left, "\tilde{p}_1"] & P_1 \arrow[r, "\bar{p}_1"] \arrow[d, "\partial"'] & \Gamma_1 \arrow[r, "\partial''"] \arrow[d, "\partial'"] & P_0\times^{P_1}\Gamma_1 \arrow[ur, "\Phi_{P_0\times^{P_1}\Gamma_1}"] \arrow[d, "d"] & \\
& P_0\times_{\Gamma_0}\Gamma_1 \arrow[dl, "\Phi_{P_0\times_{\Gamma_0}\Gamma_1}"] \arrow[r, "p_{P_0}"] \arrow[rr, bend right, "\bar{\bar{p}}_0"'] \arrow[rrr, bend right, "\tilde{p}_0"'] & P_0 \arrow[r, "\tilde{p}_0"] & \Gamma_0 \arrow[r, equal, "\mathrm{id}_{\Gamma_0}"] & \Gamma_0 \arrow[dr, "\Phi_{\Gamma_0}"] & \\
\frac{P_0\times_{\Gamma_0}\Gamma_1}{\beta^*_{P_0\times_{\Gamma_0}\Gamma_1}} \arrow[rrrrr, "\psi'"] & & & & & \frac{\Gamma_0}{\beta^*_{\Gamma_0}}
\end{tikzcd}$$

دیاگرام (۳)

یک مربع متقاطع است با عمل‌ها و نگاشت

$$\bar{h} : \frac{P_0 \ltimes^{P_1} \Gamma_1}{\beta^*_{P_0\ltimes^{P_1}\Gamma_1}} \times \frac{P_0 \times_{\Gamma_0} \Gamma_1}{\beta^*_{P_0\times_{\Gamma_0}\Gamma_1}} \longrightarrow \frac{P_1}{\beta^*_{P_1}}$$

تعریف شده به‌صورت زیر است:

(الف) عمل $\frac{\Gamma_0}{\beta^*_{\Gamma_0}}$ روی $\frac{P_1}{\beta^*_{P_1}}$ با پلی‌عمل Γ_0 روی P_1 القا شده است.

(ب) عمل $\frac{\Gamma_0}{\beta^*_{\Gamma_0}}$ روی $\frac{P_0\ltimes^{P_1}\Gamma_1}{\beta^*_{P_0\ltimes^{P_1}\Gamma_1}} \ltimes^{P_1}\Gamma_1$ با پلی‌عمل Γ_0 روی $P_0 \ltimes^{P_1} \Gamma_1$ است.

(ج) عمل $\frac{\Gamma_0}{\beta^*_{\Gamma_0}}$ روی $\frac{P_0\times_{\Gamma_0}\Gamma_1}{\beta^*_{P_0\times_{\Gamma_0}\Gamma_1}}$ با پلی‌عمل Γ_0 روی $P_0 \times_{\Gamma_0} \Gamma_1$ القا شده است.

(د) نگاشت $\frac{P_1}{\beta^*_{P_1}} \longrightarrow \frac{P_0\times_{\Gamma_0}\Gamma_1}{\beta^*_{P_0\times_{\Gamma_0}\Gamma_1}} \times \frac{P_0\ltimes^{P_1}\Gamma_1}{\beta^*_{P_0\ltimes^{P_1}\Gamma_1}} : \bar{h}$ به‌صورت

$$\bar{h}((\beta^*_{P_0}(p_0), \beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1)), (\beta^*_{P_0}(p'_0), \beta^*_{\Gamma_1}(\gamma'_1)) = \beta^*_{P_1}(h((p_0, \gamma_1), (p'_0, \gamma'_1)))$$

است.

اثبات. عمل $\frac{\Gamma_0}{\beta^*_{\Gamma_0}}$ روی $\frac{P_0\times_{\Gamma_0}\Gamma_1}{\beta^*_{P_0\times_{\Gamma_0}\Gamma_1}}$ و $\frac{P_0\ltimes^{P_1}\Gamma_1}{\beta^*_{P_0\ltimes^{P_1}\Gamma_1}}$ و $\frac{P_1}{\beta^*_{P_1}}$ خوش‌تعریف است.

ψ' یک همریختی گروهی است. حال پنج شرطی که نمودار را مربع متقاطع می‌سازد، بررسی می‌شوند:

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.141402.1656

(۱) نگاشت ψ عمل $\frac{\Gamma_0}{\beta^*_{\Gamma_0}}$ را حفظ می‌کند، زیرا نمودار (۱) یک پلی‌مربع متقاطع است. نگاشت $\mathcal{D}$ عمل $\frac{\Gamma_0}{\beta^*_{\Gamma_0}}$ را حفظ می‌کند:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}({}^{\sigma}\beta^*_{P_1}(p_1)) &= \left(\mathcal{D}({}^{\sigma}\beta^*_{P_1}(p_1)), \psi({}^{\sigma}\beta^*_{P_1}(p_1))\right)\\
&= \left({}^{\sigma}\mathcal{D}(\beta^*_{P_1}(p_1)), {}^{\sigma}\psi(\beta^*_{P_1}(p_1))\right)\\
&= {}^{\sigma}\left(\mathcal{D}(\beta^*_{P_1}(p_1)), \psi(\beta^*_{P_1}(p_1))\right)\\
&= {}^{\sigma}\mathcal{D}(\beta^*_{P_1}(p_1)).
\end{aligned}$$

$\mathcal{D}'$ مدول متقاطع است. حال ثابت می‌شود که ψ' مدول متقاطع است. شرط پیش‌مدول متقاطع درست است، زیرا $\bar{p}_0$ در شرط پیش پلی‌مدول متقاطع صدق می‌کند. هم‌چنین شرط پیف‌فر درست است:

$$\begin{aligned}
&{}^{\psi'(\beta^*_{P_0}(p_0),\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1))}(\beta^{*\prime}_{P_0}(p_0), \beta^{*\prime}_{\Gamma_1}(\gamma_1))\\
&= {}^{\psi'|_{P_0}(\beta^*_{P_0}(p_0))}(\beta^{*\prime}_{P_0}(p_0), \beta^{*\prime}_{\Gamma_1}(\gamma_1))\\
&= \left({}^{\psi'|_{P_0}(\beta^*_{P_0}(p_0))}\beta^{*\prime}_{P_0}(p_0), {}^{\psi'|_{P_0}(\beta^*_{P_0}(p_0))}\beta^{*\prime}_{\Gamma_1}(\gamma_1)\right)\\
&= \left(\beta^*_{P_0}(p_0)\beta^{*\prime}_{P_0}(p_0)\beta^*_{P_0}(p_0)^{-1}, {}^{\mathcal{D}'(\beta^*_{P_0}(p_0),\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1))}\beta^{*\prime}_{\Gamma_1}(\gamma_1)\right)\\
&= \left(\beta^*_{P_0}(p_0)\beta^{*\prime}_{P_0}(p_0)\beta^*_{P_0}(p_0)^{-1}, \beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1)\beta^{*\prime}_{\Gamma_1}(\gamma_1)\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1)^{-1}\right);
\end{aligned}$$

هم‌چنین

$$\begin{aligned}
&(\beta^*_{P_0}(p_0), \beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1))(\beta^{*\prime}_{P_0}(p_0), \beta^{*\prime}_{\Gamma_1}(\gamma_1))(\beta^*_{P_0}(p_0), \beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1))^{-1}\\
&= (\beta^*_{P_0}(p_0), \beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1))(\beta^{*\prime}_{P_0}(p_0), \beta^{*\prime}_{\Gamma_1}(\gamma_1))(\beta^*_{P_0}(p_0)^{-1}, \beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1)^{-1})\\
&= (\beta^*_{P_0}(p_0)\beta^{*\prime}_{P_0}(p_0)\beta^*_{P_0}(p_0)^{-1}, \beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1)\beta^{*\prime}_{\Gamma_1}(\gamma_1)\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1)^{-1}).
\end{aligned}$$

$\psi'\mathcal{D} = \mathcal{D}'\psi$ مدول متقاطع است.

(۲) ثابت می‌شود که:

$$\begin{aligned}
&\psi(\bar{h}((\beta^*_{P_0}(p_0), \beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1)), (\beta^*_{P_0}(p'_0), \beta^*_{\Gamma_1}(\gamma'_1))))\\
&\qquad = (\beta^*_{P_0}(p_0), \beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1))^{(\beta^*_{P_0}(p'_0),\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma'_1))}(\beta^*_{P_0}(p_0), \beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1))^{-1}.
\end{aligned}$$

دو عنصر دلخواه انتخاب کنید:

$$\begin{aligned}
&\psi(\bar{h}((\beta^*_{P_0}(p_0), \beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1)), (\beta^*_{P_0}(p'_0), \beta^*_{\Gamma_1}(\gamma'_1))))\\
&= \psi(h(\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1), \beta^*_{P_0}(p_0)\beta^*_{P_0}(p'_0)\beta^*_{P_0}(p_0)^{-1})h(\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma'_1), \beta^*_{P_0}(p_0))^{-1})\\
&= (1, \psi(h(\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1), \beta^*_{P_0}(p_0)\beta^*_{P_0}(p'_0)\beta^*_{P_0}(p_0)^{-1})h(\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma'_1), \beta^*_{P_0}(p_0))^{-1}))\\
&= (1, \beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1)^{\beta^*_{P_0}(p_0)\beta^*_{P_0}(p'_0)\beta^*_{P_0}(p_0)^{-1}}\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1)^{-1}\,{}^{\beta^*_{P_0}(p_0)}\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma'_1)\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma'_1)^{-1}).
\end{aligned}$$

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.141402.1656

هم‌چنین

$$\begin{aligned}
&(\beta^*_{P_1}(p_1),\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1))^{(\beta^*_{P_0}(p'_0),\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma'_1))}(\beta^*_{P_0}(p_0),\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1))^{-1}\\
&=\ (\beta^*_{P_0}(p_0),\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1))^{\psi'(\beta^*_{P_0}(p'_0),\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma'_1))}(\beta^*_{P_0}(p_0),\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1))^{-1}\\
&=\ (\beta^*_{P_0}(p_0),\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1))(\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma'_1)\beta^*_{P_0}(p_0)^{-1}\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma'_1)^{-1},\ {}^{\beta^*_{P_0}(p'_0)\beta^*_{P_0}(p_0)^{-1}}\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1)^{-1})\\
&=\ (\beta^*_{P_0}(p_0)\beta^*_{P_0}(p'_0)\beta^*_{P_0}(p_0)^{-1}\beta^*_{P_0}(p'_0)^{-1},\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1)^{\beta^*_{P_0}(p_0)\beta^*_{P_0}(p'_0)\beta^*_{P_0}(p_0)^{-1}}\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1)^{-1}).
\end{aligned}$$

حال ثابت می‌شود که:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}(\bar{h}((\beta^*_{P_0}(p_0),\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1)),(\beta^*_{P_0}(p'_0),\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma'_1))))\\
&\qquad=\ {}^{(\beta^*_{P_0}(p_0),\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1))}(\beta^*_{P_0}(p'_0),\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma'_1))(\beta^*_{P_0}(p'_0),\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma'_1))^{-1}.
\end{aligned}$$

دو عنصر دلخواه انتخاب کنید:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}(\bar{h}((\beta^*_{P_0}(p_0),\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1)),(\beta^*_{P_0}(p'_0),\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma'_1))))\\
&=\mathcal{D}(h(\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1),\beta^*_{P_0}(p_0)\beta^*_{P_0}(p'_0)\beta^*_{P_0}(p_0)^{-1})h(\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma'_1),\beta^*_{P_0}(p_0))^{-1})\\
&=(\psi|_{P_1}h(\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1),\beta^*_{P_0}(p_0)\beta^*_{P_0}(p'_0)\beta^*_{P_0}(p_0)^{-1})\psi|_{P_1}h(\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma'_1),\beta^*_{P_0}(p_0))^{-1},\\
&\quad\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1)^{\beta^*_{P_0}(p_0)\beta^*_{P_0}(p'_0)\beta^*_{P_0}(p_0)^{-1}}\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1)^{-1}\ {}^{\beta^*_{P_0}(p_0)}\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma'_1)\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1)^{-1}\Big)\\
&=\Big({}^{\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1)}(\beta^*_{P_0}(p_0)\beta^*_{P_0}(p'_0)\beta^*_{P_0}(p_0)^{-1})\beta^*_{P_0}(p_0)\beta^*_{P_0}(p'_0)^{-1}\beta^*_{P_0}(p_0)^{-1}\beta^*_{P_0}(p_0)\\
&\quad{}^{\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma'_1)}\beta^*_{P_0}(p_0)^{-1},\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1)^{\beta^*_{P_0}(p_0)\beta^*_{P_0}(p'_0)\beta^*_{P_0}(p_0)^{-1}}\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1)^{-1}\ {}^{\beta^*_{P_0}(p_0)}\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma'_1)\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1)^{-1}\Big)\\
&=\Big({}^{\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1)}(\beta^*_{P_0}(p_0)\beta^*_{P_0}(p'_0)\beta^*_{P_0}(p_0)^{-1})\beta^*_{P_0}(p_0)\beta^*_{P_0}(p'_0)^{-1}\beta^*_{P_0}(p'_0)\beta^*_{P_0}(p_0)^{-1}\beta^*_{P_0}(p'_0)^{-1},\\
&\quad\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1)\ {}^{\beta^*_{P_0}(p_0)}\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma'_1)\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1)^{-1}\ {}^{\beta^*_{P_0}(p_0)}\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma'_1)^{-1}\ {}^{\beta^*_{P_0}(p_0)}\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma'_1)\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma'_1)^{-1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&=\Big({}^{\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1)}(\beta^*_{P_0}(p_0)\beta^*_{P_0}(p'_0)\beta^*_{P_0}(p_0)^{-1})\beta^*_{P_0}(p'_0)^{-1},\\
&\quad\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1)\ {}^{\beta^*_{P_0}(p_0)}\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma'_1)\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1)^{-1}\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma'_1)^{-1}\Big).
\end{aligned}$$

هم‌چنین

$$\begin{aligned}
&{}^{(\beta^*_{P_0}(p_0),\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1))}(\beta^*_{P_0}(p'_0),\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma'_1))(\beta^*_{P_0}(p'_0),\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma'_1))^{-1}\\
&=\ \Big({}^{\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1)}(\beta^*_{P_0}(p_0)\beta^*_{P_0}(p'_0)\beta^*_{P_0}(p_0)^{-1}),\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1)\ {}^{\beta^*_{P_0}(p_0)}\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma'_1)\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1)^{-1}\Big)\\
&\qquad(\beta^*_{P_0}(p'_0)^{-1},\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma'_1)^{-1})\\
&=\ \Big({}^{\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1)}(\beta^*_{P_0}(p_0)\beta^*_{P_0}(p'_0)\beta^*_{P_0}(p_0)^{-1})\beta^*_{P_0}(p'_0)^{-1},\\
&\quad\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1)\ {}^{\beta^*_{P_0}(p_0)}\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma'_1)\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1)^{-1}\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma'_1)^{-1}\Big).
\end{aligned}$$

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.141402.1656

(۳)

$$\begin{aligned}\bar{h}(\psi(\beta^*_{P_1}(p_1)),(\beta^*_{P_0}(p'_0),\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma'_1)) &= \beta^*_{P_1}(p_1)^{\,\beta^*_{P_0}(p'_0)}\beta^*_{P_1}(p_1)^{-1}\\ &= \beta^*_{P_1}(p_1)^{\,(\beta^*_{P_0}(p'_0),\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma'_1))}\beta^*_{P_1}(p_1)^{-1};\end{aligned}$$

هم‌چنین

$$\begin{aligned}&\bar{h}((\beta^*_{P_0}(p_0),\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1)),\mathcal{D}(\beta^*_{P_1}(p_1)))\\ &\quad= {}^{\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1)}\big({}^{\beta^*_{P_0}(p_0)}\beta^*_{P_1}(p_1)\big)^{\beta^*_{P_0}(p_0)}\beta^*_{P_1}(p_1)^{-1\,\beta^*_{P_0}(p_0)}\beta^*_{P_1}(p_1)\beta^*_{P_1}(p_1)^{-1}\\ &\quad= {}^{\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1)}\big({}^{\beta^*_{P_0}(p_0)}\beta^*_{P_1}(p_1)\big)\beta^*_{P_1}(p_1)^{-1}\\ &\quad= {}^{(\beta^*_{P_0}(p_0),\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1))}\beta^*_{P_1}(p_1)\beta^*_{P_1}(p_1)^{-1}.\end{aligned}$$

(۴) ثابت می‌شود که:

$$\begin{aligned}&\bar{h}((\beta^*_{P_0}(p_0),\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1))(\beta^*_{P_0}(p''_0),\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma''_1)),(\beta^*_{P_0}(p'_0),\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma'_1)))\\ &\qquad= {}^{(\beta^*_{P_0}(p_0),\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1))}\bar{h}((\beta^*_{P_0}(p''_0),\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma''_1)),(\beta^*_{P_0}(p'_0),\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma'_1)))\\ &\qquad\qquad \bar{h}((\beta^*_{P_0}(p_0),\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1)),(\beta^*_{P_0}(p'_0),\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma'_1))).\end{aligned}$$

دو عنصر دلخواه انتخاب کنید:

$$\begin{aligned}
&\bar{h}((\beta^*_{P_0}(p_0),\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1))(\beta^*_{P_0}(p''_0),\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma''_1)),(\beta^*_{P_0}(p'_0),\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma'_1)))\\
&\quad=\bar{h}((\beta^*_{P_0}(p_0)\beta^*_{P_0}(p''_0),\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1)\,{}^{\beta^*_{P_0}(p_0)}\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma''_1)),(\beta^*_{P_0}(p'_0),\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma'_1)))\\
&\quad=h(\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1)\,{}^{\beta^*_{P_0}(p_0)}\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma''_1),\beta^*_{P_0}(p_0)\beta^*_{P_0}(p''_0)\beta^*_{P_0}(p'_0)\beta^*_{P_0}(p''_0)^{-1}\beta^*_{P_0}(p_0)^{-1})\\
&\qquad h(\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma'_1),\beta^*_{P_0}(p_0)\beta^*_{P_0}(p''_0))^{-1}\\
&\quad={}^{\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1)}h({}^{\beta^*_{P_0}(p_0)}\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma''_1),\beta^*_{P_0}(p_0)\beta^*_{P_0}(p''_0)\beta^*_{P_0}(p'_0)\beta^*_{P_0}(p''_0)^{-1}\beta^*_{P_0}(p_0)^{-1})\\
&\qquad h(\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1),\beta^*_{P_0}(p_0)\beta^*_{P_0}(p_0)^{-1}\beta^*_{P_0}(p'_0)\beta^*_{P_0}(p''_0)^{-1}\beta^*_{P_0}(p_0)^{-1})\\
&\qquad {}^{\beta^*_{P_0}(p_0)}h(\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma'_1),\beta^*_{P_0}(p''_0))^{-1}h(\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma'_1),\beta^*_{P_0}(p_0))^{-1}\\
&\quad={}^{\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1)\beta^*_{P_0}(p_0)}h(\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma''_1)^{-1},\beta^*_{P_0}(p''_0)\beta^*_{P_0}(p'_0)\beta^*_{P_0}(p''_0)^{-1})\\
&\qquad {}^{\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1)}h(\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma'_1),\beta^*_{P_0}(p_0)\beta^*_{P_0}(p''_0))^{-1}h(\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1),\beta^*_{P_0}(p'_0))\\
&\qquad h(\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma'_1),\beta^*_{P_0}(p_0)\beta^*_{P_0}(p''_0))\,{}^{\beta^*_{P_0}(p_0)}h(\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma'_1),\beta^*_{P_0}(p''_0))^{-1}h(\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma'_1),\beta^*_{P_0}(p_0))^{-1}\\
&\quad={}^{\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1)\beta^*_{P_0}(p_0)}h(\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma''_1),\beta^*_{P_0}(p''_0)\beta^*_{P_0}(p'_0)\beta^*_{P_0}(p''_0)^{-1})\\
&\qquad {}^{\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1)}h(\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma'_1),\beta^*_{P_0}(p_0)\beta^*_{P_0}(p''_0))^{-1}h(\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1),\beta^*_{P_0}(p'_0))h(\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma'_1),\beta^*_{P_0}(p_0))\\
&\qquad {}^{\beta^*_{P_0}(p_0)}h(\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma'_1),\beta^*_{P_0}(p''_0))\,{}^{\beta^*_{P_0}(p_0)}h(\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma'_1),\beta^*_{P_0}(p''_0))^{-1}h(\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma'_1),\beta^*_{P_0}(p_0))^{-1}\\
&\quad={}^{\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1)\beta^*_{P_0}(p_0)}h(\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma''_1),\beta^*_{P_0}(p''_0)\beta^*_{P_0}(p'_0)\beta^*_{P_0}(p''_0)^{-1})\\
&\qquad {}^{\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1)}h(\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma'_1),\beta^*_{P_0}(p_0)\beta^*_{P_0}(p''_0))^{-1}h(\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1),\beta^*_{P_0}(p'_0));
\end{aligned}$$

همچنین

$$\begin{aligned}
&{}^{(\beta^*_{P_0}(p_0),\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1))}\bar{h}((\beta^*_{P_0}(p''_0),\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma''_1)),(\beta^*_{P_0}(p'_0),\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma'_1)))\\
&\qquad \bar{h}((\beta^*_{P_0}(p_0),\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1)),(\beta^*_{P_0}(p'_0),\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma'_1)))\\
&\quad={}^{\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1)\beta^*_{P_0}(p_0)}\left[h(\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma''_1),\beta^*_{P_0}(p''_0)\beta^*_{P_0}(p'_0)\beta^*_{P_0}(p''_0)^{-1})h(\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma'_1),\beta^*_{P_0}(p''_0))^{-1}\right]\\
&\qquad h(\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1),\beta^*_{P_0}(p_0)\beta^*_{P_0}(p'_0)\beta^*_{P_0}(p_0)^{-1})h(\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma'_1),\beta^*_{P_0}(p_0))^{-1}\\
&\quad={}^{\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1)\beta^*_{P_0}(p_0)}h(\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma''_1),\beta^*_{P_0}(p''_0)\beta^*_{P_0}(p'_0)\beta^*_{P_0}(p''_0)^{-1})\\
&\qquad {}^{\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1)\beta^*_{P_0}(p_0)}h(\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma'_1),\beta^*_{P_0}(p''_0))^{-1}\,{}^{\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1)}h(\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma'_1),\beta^*_{P_0}(p_0))^{-1}\\
&\qquad h(\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1),\beta^*_{P_0}(p'_0))h(\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma'_1),\beta^*_{P_0}(p_0))h(\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma'_1),\beta^*_{P_0}(p_0))^{-1}\\
&\quad={}^{\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1)\beta^*_{P_0}(p_0)}h(\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma''_1),\beta^*_{P_0}(p''_0)\beta^*_{P_0}(p'_0)\beta^*_{P_0}(p''_0)^{-1})\\
&\qquad {}^{\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1)}\left[{}^{\beta^*_{P_0}(p_0)}h(\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma'_1),\beta^*_{P_0}(p''_0))^{-1}h(\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma'_1),\beta^*_{P_0}(p_0))^{-1}\right]\\
&\qquad h(\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1),\beta^*_{P_0}(p'_0))\\
&\quad={}^{\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1)\beta^*_{P_0}(p_0)}h(\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma''_1),\beta^*_{P_0}(p''_0)\beta^*_{P_0}(p'_0)\beta^*_{P_0}(p''_0)^{-1})\\
&\qquad {}^{\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1)}h(\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma'_1),\beta^*_{P_0}(p_0)\beta^*_{P_0}(p''_0))^{-1}h(\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1),\beta^*_{P_0}(p'_0)).
\end{aligned}$$

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.141402.1656

(۵)

$$\begin{aligned}
&\bar{h}({}^{\sigma}(\beta^*_{P_\circ}(p_\circ), \beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1)), {}^{\sigma}(\beta^*_{P_\circ}(p'_\circ), \beta^*_{\Gamma_1}(\gamma'_1))\\
&\quad = \bar{h}(({}^{\sigma}\beta^*_{P_\circ}(p_\circ), {}^{\sigma}\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1)), ({}^{\sigma}\beta^*_{P_\circ}(p'_\circ), {}^{\sigma}\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma'_1)))\\
&\quad = h({}^{\sigma}\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1), {}^{\sigma}\beta^*_{P_\circ}(p_\circ){}^{\sigma}\beta^*_{P_\circ}(p'_\circ){}^{\sigma}\beta^*_{P_\circ}(p_\circ)^{-1})h({}^{\sigma}\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma'_1), {}^{\sigma}\beta^*_{P_\circ}(p_\circ))^{-1}\\
&\quad = h({}^{\sigma}\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1), {}^{\sigma}(\beta^*_{P_\circ}(p_\circ)\beta^*_{P_\circ}(p'_\circ)\beta^*_{P_\circ}(p_\circ)^{-1}))h({}^{\sigma}\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma'_1), {}^{\sigma}\beta^*_{P_\circ}(p_\circ))^{-1}\\
&\quad = {}^{\sigma}h(\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1), \beta^*_{P_\circ}(p_\circ)\beta^*_{P_\circ}(p'_\circ)\beta^*_{P_\circ}(p_\circ)^{-1}){}^{\sigma}h(\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma'_1), \beta^*_{P_\circ}(p_\circ))^{-1}\\
&\quad = {}^{\sigma}\left(h(\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1), \beta^*_{P_\circ}(p_\circ)\beta^*_{P_\circ}(p'_\circ)\beta^*_{P_\circ}(p_\circ)^{-1})h(\beta^*_{\Gamma_1}(\gamma'_1), \beta^*_{P_\circ}(p_\circ))^{-1}\right)\\
&\quad = {}^{\sigma}\bar{h}((\beta^*_{P_\circ}(p_\circ), \beta^*_{\Gamma_1}(\gamma_1)), (\beta^*_{P_\circ}(p'_\circ), \beta^*_{\Gamma_1}(\gamma'_1))).
\end{aligned}$$

□

۴. تصویرهای پلی‌مدول‌های متقاطع

در این بخش، تصویر یک پلی‌مدول متقاطع [۴] را در نظر گرفته و با نتایج ثابت شده، تطابق بین پلی‌مدول‌های متقاطع و پلی‌مربع‌های متقاطع تبیین می‌شود.

گزاره ۱.۴. [۴] فرض کنیم $\chi = (C, P, \partial, \alpha)$ یک پلی‌مدول متقاطع است. در این‌صورت $\partial(C)$ یک زیرپلی‌گروه نرمال P است.

اثبات. واضح است که $\partial(C) = \{\partial(c) | c \in C\}$ زیرپلی‌گروه از P است. فرض کنیم که $x \in \partial(C)$ و $p \in P$ است، در این‌صورت $x = \partial(c)$ برای $c \in C$ است و $p \circ \partial(c) \circ p^{-1} = \partial({}^{p}c)$. حال $p_c \subseteq C$ و بنابراین $p \circ \partial(c) \circ p^{-1} \subseteq \partial(C)$ و این یعنی این‌که $\partial(C)$ در P نرمال است. □

گزاره ۲.۴. فرض کنیم نمودار (۱) یک پلی‌مربع متقاطع است، در این‌صورت زیر پلی‌مدول متقاطع $\partial'|_{\mathrm{Im}\,\bar{p}_1} : \mathrm{Im}\,\bar{p}_1 \longrightarrow \mathrm{Im}\,\bar{p}_\circ$ از $\partial' : \Gamma_1 \longrightarrow \Gamma_\circ$ نرمال است.

اثبات. (الف) $\mathrm{Im}\,\bar{p}_\circ$ زیرپلی‌گروه نرمال از $\Gamma_\circ$ است، زیرا $\bar{p}_\circ : P_\circ \longrightarrow \Gamma_\circ$ یک پلی‌مدول متقاطع است.

(ب) برای هر $\sigma \in \Gamma_\circ$ و $\bar{\beta} \in \mathrm{Im}\,\bar{p}_1$ وجود دارد $\bar{\alpha} \in P_1$ به‌طوری‌که $\bar{p}_1(\bar{\alpha}) = \bar{\beta}$، و به‌علاوه:

$${}^{\sigma}\bar{\beta} = {}^{\sigma}\bar{p}_1(\bar{\alpha}) = \bar{p}_1({}^{\sigma}\bar{\alpha}),$$

بنابراین ${}^{\sigma}\bar{\beta} \subseteq \mathrm{Im}\,\bar{p}_1$.

(ج) برای هر $\bar{\sigma} \in \mathrm{Im}\,\bar{p}_\circ$ وجود دارد $p'_\circ \in P_\circ$ به‌طوری‌که $\bar{p}_\circ(p'_\circ) = \bar{\sigma}$ و $\beta \in \Gamma_1$، و هم‌چنین:

$${}^{\bar{\sigma}}\beta\beta^{-1} = {}^{\bar{p}_\circ(p'_\circ)}\beta\beta^{-1} = {}^{\bar{p}_\circ}\beta\beta^{-1} = \bar{p}_1 h(\beta, p'_\circ),$$

بنابراین ${}^{\sigma}\beta\beta^{-1} \subseteq \mathrm{Im}\,\bar{p}_1$.

□

مراجع

[1] M. Alp, Actor of crossed modules of algebroids, *Proceedings of the 16th Int. Conf. Jangjeon Math. soc.*, **16** (2005) 6–15.

[2] M. Alp, Pullback crossed modules of algebroids, *Iran. J. Sci. Technol. Trans. A Sci.*, **32** no. 1 (2008) 1–5.

[3] M. Alp, Pullbacks of profinite crossed modules and CAT^1-profinite groups, *Algebras Groups Geom.*, **25** no. 2 (2008) 215–221.

[4] M. Alp and B. Davvaz, Crossed polymodules and fundamental relations, *Politehn. Univ. Bucharest Sci. Bull. Ser. A Appl. Math. Phys.*, **77** no. 2 (2015) 129–140.

[5] M. Alp and Ö. Gürmen, Pushouts of profinite crossed modules and cat 1-profinite groups, *Turkish J. Math.*, **27** (2003) 539–548.

[6] Z. Arvasi and T. porter, Freeness conditions for 2-crossed modules of commutative algebras, *Appl. Categ. Structures*, **6** (1998) 455–471.

[7] Z. Arvasi and E. Ulualan, On algebraic models for homotopy 3-types, *J. Homotopy Relat. Struct.*,**1** no. 1 (2006) 1–27.

[8] H. J. Baues, *Combinatorial homotopy and* 4*-dimensional compexes*, Walter de Gruyter, Berlin, De Gruyter expositions in Mathematics, 1991.

[9] R. Brown and G. H. Mosa, Double categories, *R*-categories and crossed modules, *U. C. N. W. maths. preprint*, **88** no. 11 (1988) 1–18.

[10] S. D. Comer, Extension of polygroups by polygroups and their representations using colour schemes, *Lecture notes in Meth.* **1004** (1982) 91–103.

[11] D. Conduché, Modules croisés généralisés de longueur 2, *J. pure Applied Algebra*, **34** (1984) 155–178.

[12] P. Corsini, *Prolegomena of hypergroup theory*, Supplement to Riv. Mat. Pura Appl., Aviani Editore, Tricesimo, 1993 215 pp.

[13] B. Davvaz, Isomorphism theorems of polygroups, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2)*, **33** no. 3 (2010) 385-392.

[14] M. A. Dehghanizadeh, B. Davvaz and M. Alp, On crossed polysquares and fundamental relations, 13th Algebraic Hyperstructures and its Applications (AHA2017) 24-27 july, Istanbul-Turkey, (2017) and appeared in: *Sigma J. Eng. & Nat. Sci.*, **9** no. 1 (2018) 1–16.

[15] M. A. Dehghanizadeh, B. Davvaz and M. Alp, On crossed polysquare version of homotopy kernels, *Journal of Mathematical Extension*, **16** no. 3 (2022) 1–37.

[16] D. Freni, Une note sur le cœur d'un hypergroupe et sur la clôture transitive β^* de β, *Riv. Math. Pura Appl.*, **8** (1991) 153–156.

[17] D. Guin-Walery and J. L. Loday, Obstruction á 1'excision en k-théories algébrique, In E. M. Friedlander, M. R. Stein (eds.), *Evanston conf. On Algebraic k-Theory (1980)*, (Lect. Notes Math. 854) Springer, Berlin, Heidelberg, New York, (1981) 179–216.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.141402.1656

[18] F. J. Korkes and J. Porter, Profinite crossed modules, *U. C. N. W pure mathematics preprint*, **86** no. 11 (1986).

[19] M. Koskas, Groupoids, demi-groups et hypergroups, *J. Math. Pures Appl.*, **49** (1970) 155–192.

[20] V. Leoreanu-Fotea, The heart of some important classes of hypergroups, *Pure math. Appl.*, **9** (1998) 351–360.

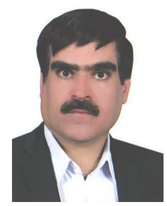
[21] J. L. Loday, Spaces with finitely many non-trivial homotopy groups, *J. Appl. Algebra*, **24** (1982) 179–202.

[22] K. Norrie, Actions and automorphisms of crossed modules, *Bull. Soc. Math. France*, **118** (1990) 129–146.

[23] T. Vougiouklis, *Hyperstructures and their representations*, Hadronic Press, Inc, 115, palm Harber, USA, 1994.

[24] J. H. C. Whitehead, Combinatorial homotopy II, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **55** (1949) 453–496.

محمدعلی دهقانی‌زاده
گروه ریاضی، دانشگاه ملی مهارت، تهران، ایران
Mdehghanizadeh@nus.ac.ir



محمدعلی دهقانی‌زاده متولد شهر یزد است. وی در سال ۱۳۷۲ از مقطع کارشناسی در رشته ریاضی از دانشگاه اصفهان فارغ‌التحصیل و در سال ۱۳۷۵ از مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش جبر با راهنمایی آقای پروفسور علی‌اکبر محمدی از دانشگاه اصفهان فارغ‌التحصیل شد. وی دوره دکتری ریاضی محض با گرایش جبر را از دانشگاه یزد، با راهنمایی آقای پروفسور بیژن دواز به پایان رساند و هم‌اکنون استادیار گروه ریاضی دانشگاه ملی مهارت می‌باشد.