http://math-sci.ui.ac.ir

Journal of Mathematics and Society
ISSN (print): 2345-6493, ISSN (on-line): 2345-6507
Vol. 10 No. 1 (2025), pp. 79-103.

http://www.ui.ac.ir

GRAPH THEORY; HISTORY, APPLICATIONS AND VISION

MEYSAM TAHERI-DEHKORDI

Abstract. Graph theory is a leading theory in mathematics, which is used in many sciences. In this article, by stating the history of this, its expansion and development, we have mentioned the course of famous problems in graph theory. Also, a practical application of this theory is stated.

1. Introduction

Perhaps when Leonard Euler, (1707-1783) was thinking about the Konigsberg Bridge Problem for the first time, he did not imagine that later this problem would lead to the creation of a very important, extensive and practical branch of mathematics. Graph theory, has been growing and expanding as an active and dynamic branch. In addition to the growth of this theory as a science, its many applications in other sciences have caused this branch of mathematics to be highly regarded by other scientists in addition to mathematicians. In fact, graphs are efficient mathematical models for analyzing real world problems. Many different problems of real-world are directly related to graph theory, and this theory has come to the aid of other sciences as a powerful tool to solve various problems. From solving the sudoku square to the complex issues of medical science, transportation, network, genetics, etc., all of them can be solved with graph theory or help a lot to get closer to their solution. In this article, we will have an overview of the background of this branch of mathematics, its evolution and applications,

Keywords: Graph theory, Four Color Problem, Kuratowski's Theorem, Turán's Theorem.

Article Type: Promotional Paper.

Communicated by Alireza Abdollahi.

Received: 15-11-2023, Accepted: 19-08-2024, Published Online: 06-04-2025.

Cite this article: M. Taheri-Dehkordi, Graph theory; history, applications and vision, *Journal of Mathematics and Society*, **10** no. 10 (2025) 79–103.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.139804.1623 .

and finally, we will examine the future prospects for this theory. References [3, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 16, 19] have been used to express the basic concepts of graph theory.

2. The Beginning and Expansion of Graph Theory

The birth of graph theory goes back directly to the 18th century and 1736 [10]. At that time, Leonard Euler, a Swiss scientist, was known as a well-known scientist in the world of mathematics. The beautiful city of Konigsberg, (now Kaliningrad), is one of the cities of Russia. Pregel river passes through this city. This river divided the city into four areas, which were connected by seven bridges. The question that arose in the minds of the people of this city while walking on these bridges was whether it is possible to cross these bridges in a way that not only passes all the bridges, but also passes each bridge exactly once? What the people of the city used to do was to try this task throughout the day by trial and error and they never succeeded in doing this task. But Euler's approach as a mathematician was different towards this problem and he tried to look at the subject with a mathematical point of view. He realized that this topic could belong to a new area of mathematics. In Euler's initial solution for this problem, there is no reference to the concepts known today such as graph, vertex and edge, although these concepts are actually used. Euler considered the land points with the names A, B, C and D and called the seven bridges a, b, c, d, e, f and g. In Figure 1, the image created by Euler can be seen.

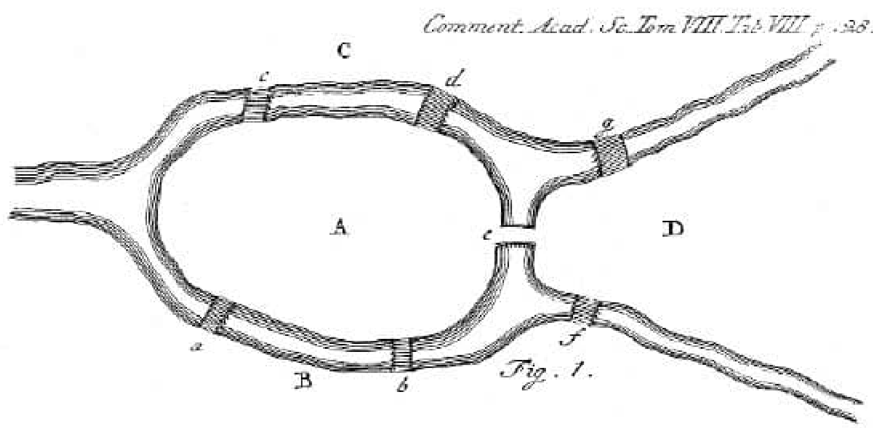


FIGURE 1. The image created by Euler regarding the Konigsberg bridges problem

Euler has presented similar results for a number of other bridges and regions. These results, together with the Konigsberg bridge problem, have been published in his article [10].

If we look at the Konigsberg bridges problem with today's graph theory literature, we will have a graph with four vertices and seven edges, which represent the number of regions and the number of bridges, respectively.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.139804.1623

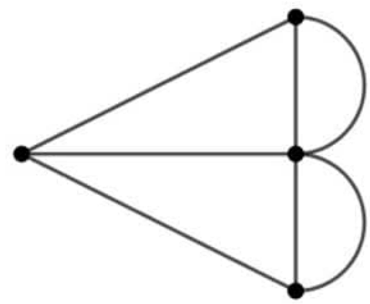


FIGURE 2. Graph of Konigsberg bridges problem

Based on Euler's argument in solving the bridge problem, new definitions were created in graph theory.

After Euler's initial actions, there was no special development in graph theory for a century, and gradually in the 19th century, this issue attracted the attention of more mathematicians. The term graph was first used in 1878 by British mathematician James Sylvester. In the 19th century, the famous British mathematician, Arthor Kayley, conducted studies in the field of graph theory, which is still recognized as part of the most important results in graph theory. Kayley's work was actually the foundation of graph counting theory and he expressed a complete formula for counting the number of trees on a certain number of vertices, which was named Kayley's formula [12]. In the 20th century, graph theory was recognized as one of the most important branches of mathematics, which created the most applications in other sciences.

3. State Some Important and Historical Problems in Graph Theory

Throughout the history of graph theory, various and interesting problems have arisen. Counting spanning trees, four-color conjecture, Kuratowski's Theorem, traveling salesman problem and Turán's Theorem are examples of these topics. In this section, we will try to briefly address each of the above famous problems.

3.1. **Four-color conjecture.** One of the most important topics in graph theory in the 19th century is the four-color conjecture. This topic examines the coloring of points on a page. We consider a geography map that includes different countries and regions. If we consider each country as a point (vertex) and connect the countries that have a common border (edge), then we will have a graph. Is it enough to have four colors to color a map with the condition that no two borders have the same color? This conjecture was first proposed in 1852 by Francis Gutherie, a mathematician from South Africa, and later it was carefully examined by many mathematicians. Francis was the first to realize that a map can be colored with only four colors. Of course, he did not know the proof of this , and through his brother, he asked De Morgan, who was his professor at University College London, for the solution [15]. De Morgan, discussed the matter with Sir William Rowan Hamilton, who immediately replied that he could not think about it any time soon. Little by little, with the efforts of De Morgan, many mathematicians started to study and investigate this issue. One of the most famous of them was Kayley. He even wrote an article about coloring maps in 1879 [15].

In 1879, one of kayley's students claimed to have a proof of this conjecture, which was published in cooperation with kayley. However, it was violated in 1890 by John Heywood. Haywood showed that this proof is true for 5 colors and not for 4 colors. Efforts to prove the four color conjecture continued and in 1976 the proof of this conjecture was presented [15]. This proof was actually presented by Kenneth Appel and Wolfgang Hicken with the progress of science and the presence of computers in scientific subjects [1, 14]. This was actually the beginning of the presence of computers in mathematical proofs, although so far no purely mathematical proof has been obtained for this problem.

Theorem 3.1 (four colors)**.** *Every planar graph is four colorable.*

3.2. **Kuratowski's Theorem.** At the beginning of the 18th century, the great mathematician Leonard Euler again laid the foundation for the emergence of another important concept in graph theory, planar graphs. Euler obtained an important formula about the relationship between the number of vertices, the number of edges and the number of faces in a polyhedron. After that time and with a long break, many results have been obtained regarding planar graphs. The first of them was when the Polish mathematician, Kuratowski, determined an important criterion for the flatness of a graph. A graph is called planar if we can draw it on a surface in such a way that the edges do not intersect each other except at the vertices. In fact, Euler's formula was the basis of graph topological theory. In 1930, Kuratowski stated and proved an important theorem about planar graphs, which was later known by his name [14, 17].

Theorem 3.2 (Kuratowski)**.** *Every finite graph is planar, if and only if, it does not contain a subgraph isomorphic with a subdivided graph of K_5 or $K_{3,3}$.*

3.3. **Traveling salesman.** Consider a set of cities (regions) and the distances between them. A traveling salesman wants to pass through all cities exactly once and return to the starting point. What is the shortest route that he can take? Note that the problem is not only passing through all the cities and returning to the starting point, but it is also important that this journey has the shortest route. The special case of this problem, in which it was only to find such a path, was proposed by Hamilton. Therefore, there is a difference between finding the Hamiltonian cycle in the graph and the traveling salesman problem. If the graph is complete (there is a path between all the cities), then since there is a Hamiltonian cycle, it will only be a matter of finding a cycle with the shortest

 http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.139804.1623

path. This problem has been studied as a multifaceted issue in computer science, graph theory and optimization for several decades and solutions have been proposed for it. The easiest solution is to try all the ways! But this solution is time-consuming and costly. One of the better solutions is the Monte Carlo algorithm. Although the first academic solution for this problem was expressed in the 1930s, but in the 1950s and 1960s and with the appearanceof computers, this problem was pursued as a famous problem. A lot of work has been done on this problem in optimization theory.

3.4. **Turán's graph Theorem.** Undoubtedly, one of the most important theorems of graph theory is Turán's theorem, which was presented in 1941 by the Hungarian mathematician Paul Turń [4]. This Theorem can be considered as the beginning of Frinal graph theory. First, we consider the definition of cluster and then state Turán's Theorem.

Let G be a graph. A complete subgraph of G is called a cluster. A p-cluster in G is a complete p-vertex subgraph of G denoted by K_p.

Theorem 3.3 (Turń's Theorem)**.** *If $G = (V, E)$ is a graph that contains no copy of K_p and $|V| = n$. Then*

$$|E| \leq \frac{n^2}{2}\left(1 - \frac{1}{p-1}\right)$$

4. **An Application of Graph Theory**

Graph theory has many applications in different sciences. For example, there are many applications of graph theory in computer science, communication science, networks, physics, chemistry, and nanoscience, which in addition to helping these sciences, has also caused the growth and development of this theory. In this section, we discuss one of the applications of this theory.

Football, as one of the most popular and famous sports in the world, has always attracted the attention of fans. The applications of graph theory in football can be classified in the following cases:

Network analysis of intra-team performance, training pattern modeling, tactical decisions, analysis of competitors' situation, prediction of player performance, team behavior, etc.

Each of the above cases can be analyzed by graphical modeling. If we consider a directed graph and consider each player as a graph vertex and their movement direction as an edge, and even give weight to the edges and consider a measure for each player that shows its performance, We can use this model to optimize training and team performance. Also, one of the attractive applications of graph theory can be found in the ranking of players in various sports fields. Every year, world sports federations publish the rankings of athletes or sports teams according to their performance. This classification cannot be based on the number of wins and losses of athletes and sports teams, because in this case, the rank of each athlete based on his merit and ability is not determined correctly. For example, let's say two players A and B both have two wins, but player A won his two wins against two strong players , but player B won against two weak players . Therefore, the two wins of player A are more valuable than the two wins of player B. Also, the direct performance of players against each other can also be considered as a criterion for ranking (if those players have competed against each other). On the other hand, considering all these situations, two players may have equal points, which should be thought about. All these cases will lead to the necessity of using a mathematical model to determine the correct ranking of athletes. In designing this model, graph theory is used.

5. Vision

Today, graph theory has become a complex world of interdisciplinary concepts and principles that are effectively used in solving problems and making decisions in various areas of human life. This theory is used for cases such as social networks, resource allocation, routing problems, optimization, transportation and computer science. Considering the practical nature of graph theory and the increasing development of science in the world, the increasing growth of artificial intelligence, data science, medicine, chemistry, etc. and the role of graph theory in these fields, it can be predicted that this the theory of the future will play a much stronger role in the development of many sciences. Let's go back to the last century. Hilbert's 1900 speech to the International Congress of Mathematicians in Paris is perhaps the most influential speech ever given by a mathematician on mathematics. In that speech, Hilbert stated 23 main mathematical problems that are to be studied in the next century [6, 13]. These issues deeply influenced mathematics in the last century. Perhaps, if this speech was given in the current century, one of its important topics would be graph theory and its perspective. One of the greatest strengths of graph theory is its abundance of "beautiful problems" and "waiting to be solved". New guesses and claims regarding open and new issues are still being created in this theory. Many problems in graph theory do not require complex tools and premises and rely more on ingenuity and creative thinking. Although the role of mastery in various mathematical concepts such as combinations, probability theory and many other subjects in the progress of this theory is undeniable. Undoubtedly, the application of graph theory in other sciences and the use of this powerful tool in solving various problems, especially in computer science, will be the most important reason for the existence of a brilliant perspective for this theory in the future. However, one should not neglect the inherent beauty of this theory and the wonderful world of graphs as a reason for its development.

Meysam Taheri-Dehkordi
Department of Mathematics, University of Applied Science and Technology (UAST), Tehran, IRAN
m.taheri@uast.ac.ir

 http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.139804.1623

ریاضی و جامعه
شاپا (چاپی): ۲۳۴۵-۶۴۹۳، شاپا(الکترونیکی): ۲۳۴۵-۶۵۰۷
جلد ۱۰، شماره ۱ (۱۴۰۴)، صص. ۷۹-۱۰۳

http://math-sci.ui.ac.ir
http://www.ui.ac.ir

سیری در نظریه‌گراف؛ پیشینه، کاربردها و چشم‌انداز

میثم طاهری دهکردی

چکیده. امروزه نظریه گراف به‌عنوان یک نظریه پیشرو در ریاضیات مطرح است که در بسیاری از علوم، کاربرد دارد. در این مقاله با بیان تاریخچه این نظریه و سیر گسترش و تکامل آن، به تعدادی از مسائل معروف در نظریه گراف اشاره کرده‌ایم. هم‌چنین کاربردهایی عملی از این نظریه بیان شده است.

۱. مقدمه

شاید زمانی که لئونارد اویلر[۱]، دانشمند سوئیسی (۱۷۸۳-۱۷۰۷)، برای اولین‌بار در حال فکر کردن به مسأله پل کونیگسبرگ بود تصور نمی‌کرد که بعدها این مسأله موجب ایجاد یک شاخه بسیار مهم، گسترده و کاربردی در ریاضیات خواهد شد. نظریه گراف از آغاز پیدایش تا کنون به‌عنوان یک شاخه فعال و پویا همواره در حال رشد و گسترش بوده است. علاوه بر رشد این نظریه به‌عنوان یک علم، کاربردهای فراوان آن در سایر علوم موجب شده است که این شاخه از ریاضیات علاوه بر ریاضیدانان، به شدت مورد توجه سایر دانشمندان نیز قرار گیرد. در واقع گراف‌ها مدل‌های ریاضی کارآمدی برای تحلیل مسائل دنیای واقعی هستند. بسیاری از مسائل مختلف دنیای واقعی به‌طور مستقیم با نظریه گراف در ارتباط هستند و این نظریه به‌عنوان یک ابزار قدرتمند برای حل مسائل مختلف به کمک سایر علوم آمده است. از حل مربع سودوکو تا موضوعات پیچیده علم پزشکی، حمل و نقل، شبکه، ژنتیک و ... همه و همه، مواردی هستند که با نظریه گراف قابل حل است و یا کمک زیادی به نزدیک شدن به راه‌حل آن‌ها می‌کند.

در این مقاله مروری خواهیم داشت به پیشینه این شاخه از ریاضی، سیر تکامل و کاربردهای آن و در نهایت چشم‌اندازی که برای این نظریه در پیش‌رو است را بررسی خواهیم کرد. برای بیان مفاهیم بنیادی نظریه‌گراف از مراجع [۳، ۵، ۷، ۸، ۹، ۱۱، ۱۲، ۱۶، ۱۹] استفاده شده است.

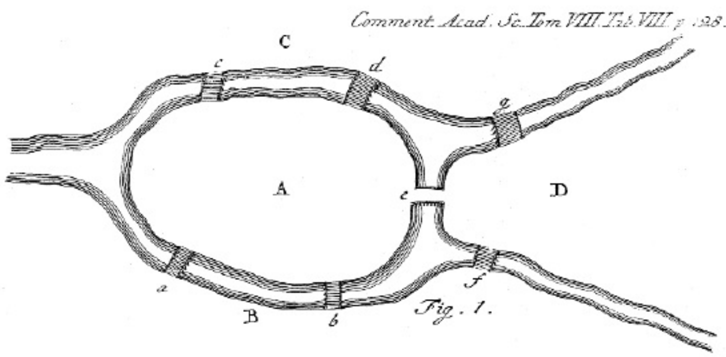
۲. آغاز و گسترش نظریه گراف

پیدایش نظریه گراف مستقیماً به قرن هجدهم میلادی و سال ۱۷۳۶ بر می‌گردد [۱۰]. در آن زمان لئونارد اویلر، دانشمند سوئیسی، به‌عنوان یک دانشمند شناخته شده در دنیای ریاضیات شهرت یافته بود. بگذارید کمی به عقب برگردیم و از اویلر

عبارات و کلمات کلیدی: نظریه‌گراف، حدس چهار رنگ، قضیه کوراتوفسکی، قضیه توران، کاربردهای نظریه‌گراف.
نوع مقاله: ترویجی
دبیرتخصصی رابط: علیرضا عبدالهی
تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۸/۲۴ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۵/۲۹ تاریخ انتشار آنلاین: ۱۴۰۴/۰۱/۱۷
ارجاع به مقاله: م. طاهری دهکردی، سیری در نظریه‌گراف؛ پیشینه، کاربردها و چشم‌انداز، نشریه ریاضی و جامعه، ۱۰ شماره ۱ (۱۴۰۴) ۷۹-۱۰۳.
http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.139804.1623 .

[1] Leonhard Euler

بیشتر بنویسیم. اویلر در سال ۱۷۰۷ میلادی در شهر بازل کشور سوئیس به دنیا آمد. فعالیت‌های او در بسیاری از شاخه‌های ریاضیات هم‌چون هندسه، حساب دیفرانسیل و انتگرال، توپولوژی و نظریه اعداد، او را به یکی از مهم‌ترین دانشمندان ریاضیات تبدیل کرده است. اما اولین قدم اویلر برای رسیدن به چنین جایگاهی حل مسأله بازل[۲] بود [۱۸]. مسأله‌ای که اولین‌بار در سال ۱۶۴۴ مطرح شد و به‌مدت نود سال به‌عنوان یک مسأله باز، باقی ماند تا اینکه اویلر برای اولین‌بار در زمانی که ۲۷ سال داشت آن‌را حل کرد. حل مسأله بازل را می‌توان به‌عنوان آغاز پادشاهی اویلر در ریاضیات در نظر گرفت. حال به موضوع اصلی این مقاله یعنی نظریه‌گراف بر می‌گردیم. شهر زیبای کونیگسبرگ که امروزه با نام لنینگراد شناخته می‌شود یکی از شهرهای روسیه است. از میان این شهر رودخانه پرِگل (پرِگلیا)[۳] عبور می‌کند. این رودخانه شهر را به چهار منطقه تقسیم می‌کرد که توسط هفت پل به یکدیگر متصل می‌شدند. سؤالی که در ذهن مردم این شهر هنگام قدم زدن روی این پل‌ها ایجاد شد این بود که آیا می‌توان طوری از روی این پل‌ها عبور کرد که نه تنها از همه پل‌ها گذر کرد بلکه از هر پل دقیقاً یک بار عبور کرد؟ کاری که مردم شهر انجام می‌دادند این بود که در طول روز با روش کوشش و خطا این‌کار را امتحان می‌کردند و هرگز موفق به انجام این‌کار نمی‌شدند. اما رویکرد اویلر به‌عنوان یک ریاضیدان نسبت به این مسأله متفاوت بود و تلاش کرد که با نگاه ریاضی به موضوع نگاه کند. او متوجه شد که این موضوع می‌تواند متعلق به یک حوزه جدید ریاضی باشد. در راه حل اولیه اویلر برای این مسأله اشاره‌ای به مفاهیم شناخته شده امروزی مانند گراف، رأس و یال نشده هر چند که در واقع این مفاهیم به‌کار رفته است. اکنون این راه حل را مرور می‌کنیم. اویلر نقاط خشکی را با نام‌های A، B، C و D در نظر گرفت و هفت پل را a، b، c، d، e، f و g نامید. در شکل ۱، تصویر ایجاد شده توسط اویلر مشاهده می‌گردد.



شکل ۱. تصویر ایجاد شده توسط اویلر در خصوص مسأله پل‌های کونیگسبرگ

Figure 1: The image created by Euler regarding the Konigsberg bridges problem

با این تصویر می‌توان یک مسیر حرکت روی پل‌ها را به‌طور ساده و خلاصه با حروف نشان داد. به‌طور مثال اگر بنویسیم $BaAdC$ به این مفهوم است که شخصی از منطقه B توسط پل a به منطقه A آمده و سپس از طریق پل d در منطقه C حاضر شده است. اویلر با این نمادگذاری استدلال خود را آغاز کرد. ابتدا فرض کنید یک خشکی (منطقه) وجود داشته باشد که تعداد n پل به آن متصل است. اگر n یک عدد فرد باشد آن‌گاه برای آن‌که بتوانیم از هر پل فقط یک‌بار عبور کنیم در مسیر نهایی باید تعداد $\frac{n+1}{2}$ بار از آن منطقه عبور کنیم. دلیل این‌که اویلر بر روی تعداد فرد پل متمرکز شد این است که در مسأله پل کونیگسبرگ به هر منطقه تعداد فرد پل متصل است. با استدلال فوق می‌توان تعداد حالاتی را شمرد که در یک پیاده‌روی با شرایط موجود در مسأله، از هر منطقه باید عبور کرد. این تعداد برای هر یک از مناطق به‌صورت زیر شمرده می‌شود.

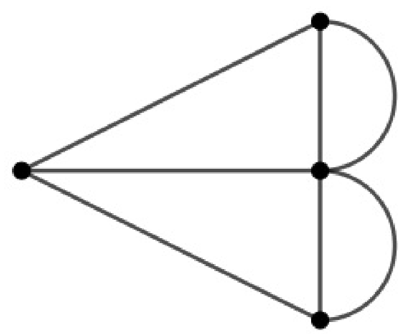
[2]Basel problem [3]Pregel (Pregelya)

منطقه A: $\frac{۵+۱}{۲} = ۳$
منطقه B: $\frac{۳+۱}{۲} = ۲$
منطقه C: $\frac{۳+۱}{۲} = ۲$
منطقه D: $\frac{۳+۱}{۲} = ۲$

بنابراین در یک پیاده‌روی با شرط عبور فقط یک‌بار از هر پل، تعداد ۹ بار باید از مناطق چهارگانه عبور کرد. فرض کنیم تعداد عبور از این مناطق را با اعداد ۱ تا ۹ نشان دهیم. به این‌ترتیب که از یکی از مناطق شروع می‌کنیم، به وسیله پل‌ها به منطقه دیگر می‌رویم و همین‌طور ادامه می‌دهیم.

اما در این‌صورت بایستی از حداقل یکی از پل‌ها دو بار عبور کنیم که متناقض با فرض مسأله است و بنابراین این‌کار امکان‌پذیر نیست. البته اویلر نتایج مشابهی برای تعداد دیگری پل و منطقه نیز ارائه کرده است. این نتایج به انضمام مسأله پل‌های کونیگسبرگ در مقاله او به چاپ رسیده است [۱۰].

اگر با ادبیات امروزی نظریه‌گراف به مسأله پل‌های کونیگسبرگ نگاه کنیم گرافی با چهار رأس و هفت یال خواهیم داشت که به‌ترتیب بیانگر تعداد مناطق و تعداد پل‌ها هستند.



شکل ۲. گراف مسأله پل‌های کونیگسبرگ

Figure 2: Graph of Konigsberg bridges problem

بر اساس استدلال اویلر در حل مسأله پل‌ها، تعاریفی جدید در نظریه‌گراف ایجاد گردید.

تعریف ۱.۲. فرض کنیم G یک گراف است. یک گشت[۴] در G از رأس v به رأس w، عبارت است از دنباله‌ای مانند $v=v_۰e_۱v_۱, e_۲v_۲, \ldots, e_nv_n=w$، به‌طوری‌که یال e_i بر رأس‌های $v_{i-۱}$ و v_i واقع است. عدد صحیح n را طول گشت می‌نامیم. اگر رأس‌های $v_۰, v_۱, \ldots, v_n$ مجزا باشند آن‌گاه گشت را مسیر[۵] و چنانچه در مسیر، رأس ابتدا و انتها یکی باشد، آن‌را دور[۶] می‌نامیم. هم‌چنین اگر یال‌های $e_۱, e_۲, \ldots, e_n$ در یک گشت متفاوت باشند آن گشت را گذر می‌نامیم. گشتِ بسته‌ای که از هر یال یک‌بار عبور کند را مدار[۷] می‌نامیم.

تعریف ۲.۲. مدار اویلری، مداری است که تمام یال‌های گراف G را در خود دارد. و گراف G را اویلری می‌نامیم هرگاه شامل مدار اویلری باشد.

با استفاده از تعریف فوق می‌توان گفت گراف همبند G را اویلری گویند هرگاه بتوان از یک رأس آن شروع کرد و با تنها یک‌بار عبور از همه یال‌ها، مجدداً به همان رأس رسید. این یعنی همان کاری که در مسأله پل‌های کونیگسبرگ باید انجام

[4]walk [5]path [6]cycle [7]circuit

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.139804.1623

می‌شد. اویلر ثابت کرد که شرط کافی برای وجود مدار اویلری در یک گراف، زوج بودن درجات همه رئوس است. او هم‌چنین بدون اثبات، بیان کرد که در یک گراف همبند با درجه رئوس زوج، حتماً یک دور اویلری وجود دارد. در سال ۱۸۷۳، کارل هایرهولزر [۸] این گزاره را اثبات کرد.

با ادبیات امروزی نظریه‌گراف نتایج اویلر در این مسأله را می‌توان به‌صورت زیر خلاصه کرد:

- اگر یک گراف دارای بیش از دو رأس با درجه فرد باشد، اویلری نیست.
- اگر یک گراف دقیقاً شامل دو رأس با درجه فرد باشد، یک مسیر اویلری وجود دارد و این مسیر باید دقیقاً از هر یک از این رأس‌ها آغاز شود.
- اگر یک گراف فاقد رأس درجه فرد باشد، مسیر اویلری می‌تواند از هر یک از رئوس دلخواه آغاز شود.

با گزاره‌های فوق به‌راحتی می‌توان دریافت که گراف شکل ۲ به‌دلیل آن‌که دارای چهار رأس درجه فرد است اویلری نیست.

تا این‌جا به اندازه کافی به موضوع پیدایش نظریه‌گراف و نقش اویلر در این پیدایش اشاره کردیم. پس از اقدامات اولیه اویلر، تا یک قرن گسترش خاصی در نظریه‌گراف به وجود نیامد و به تدریج در قرن نوزدهم این موضوع توجه ریاضیدانان بیشتری را به خود جلب نمود. اصطلاح گراف[۹] اولین‌بار در سال ۱۸۷۸ توسط ریاضیدان بریتانیایی جیمز سیلوستر[۱۰] به‌کار گرفته شد. در قرن نوزدهم، ریاضیدان معروف بریتانیایی، آرتور کیلی[۱۱]، مطالعاتی در زمینه نظریه‌گراف انجام داد که هم‌اکنون نیز به‌عنوان جزئی از مهمترین نتایج در نظریه‌گراف شناخته می‌شود. کارهای کیلی در واقع پایه‌گذار نظریه‌شمارشی گراف بود و فرمول کاملی برای شمارش تعداد درختان بر روی تعداد معینی از رئوس بیان کرد که به نام فرمول کیلی نام‌گذاری گردید [۱۲]. فرض کنیم تعداد درخت‌های فراگیر گراف G را با $\tau(G)$ نشان دهیم. در حالتی‌که G گراف کامل است کیلی فرمول ساده‌ای برای آن کشف کرد که بیان می‌کند $\tau(G) = n^{n-2}$، $n \geq 2$.

در قرن بیستم نظریه گراف به‌عنوان یکی از شاخه‌های مهم ریاضی شناخته شد که بیشترین کاربرد را در سایر علوم به وجود آورد.

۳. بیان چند موضوع مهم و تاریخی در نظریه‌گراف

همان‌طور که خواستگاه نظریه گراف هم‌چون بسیاری از موضوعات ریاضی تلاش برای حل یک مسأله بوده است، در طول تاریخ نظریه‌گراف، مسائل متنوع و جذابی به وجود آمده است. شمارش درختان فراگیر، حدس چهار رنگ، قضیه کوراتوفسکی، مسأله فروشنده دوره‌گرد و قضیه توران نمونه‌هایی از این موضوعات هستند. در این بخش سعی خواهیم کرد به‌طور خلاصه به هریک از مسائل معروف فوق بپردازیم.

۱.۳. حدس چهار رنگ. بدون شک یکی از مهم‌ترین موضوعات نظریه‌گراف در قرن نوزدهم حدس چهار رنگ است. این موضوع به بررسی رنگ‌آمیزی نقاط یک صفحه می‌پردازد. یک نقشه جغرافیا را در نظر می‌گیریم که شامل کشورها و مناطق مختلف است. اگر هر کشور را به‌عنوان یک نقطه (رأس) در نظر بگیریم و کشورهایی که دارای مرز مشترک هستند را به هم متصل کنیم (یال)، در این‌صورت یک گراف خواهیم داشت. اکنون می‌توانیم حدس چهار رنگ را به نظریه‌گراف نسبت دهیم به این‌ترتیب که آیا برای رنگ‌آمیزی یک نقشه با این شرط که هیچ دو مرزی دارای رنگ یکسان نباشند وجود چهار رنگ کافی است؟، این حدس اولین‌بار در سال ۱۸۵۲ توسط فرانسیس گاتری [۱۲]، ریاضیدان اهل آفریقای جنوبی مطرح گردید و بعدها توسط بسیاری از ریاضیدانان مورد بررسی دقیق قرار گرفت. فرانسیس نخستین‌بار متوجه شد که می‌توان یک نقشه را فقط با چهار رنگ، رنگ آمیزی کرد. البته او اثبات این موضوع را نمی‌دانست و به واسطه برادرش راه حل را از دمورگان[۱۳] که استاد او در دانشگاه کالج لندن بود جویا شد [۱۵]. دمورگان موضوع را با نابغه ریاضی ایرلندی هم عصر خود یعنی ویلیام

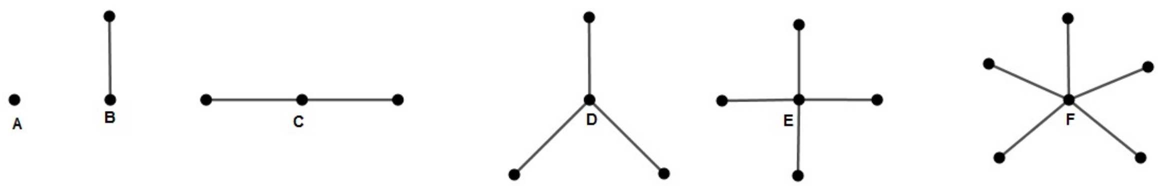
[8]Carl Hierholzer [9]graph [10]James Sylvester [11]Arthur Cayley [12]Francis Guthrie [13]De Morgan

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.139804.1623

همیلتون[۱۴]، در میان گذاشت و بلافاصله پاسخ داد که نمی‌تواند در زمان نزدیک به این موضوع فکر کند. کم‌کم با تلاش‌های دمورگان، بسیاری از ریاضیدانان در این موضوع مشغول به مطالعه و بررسی شدند. یکی از مشهورترین آن‌ها کیلی[۱۵] بود. او حتی در سال ۱۸۷۹ مقاله‌ای در خصوص رنگ‌آمیزی نقشه‌ها نوشت [۱۵]. در سال ۱۸۷۹ یکی از شاگردان کیلی ادعا کرد که اثباتی برای این حدس دارد که با همکاری کیلی این اثبات چاپ شد. هر چند در سال ۱۸۹۰ توسط جان هیوود[۱۶] مورد نقض قرار گرفت. هیوود نشان داد که این اثبات برای ۵ رنگ صادق است و در مورد چهار رنگ صدق نمی‌کند. تلاش‌ها برای اثبات حدس چهار رنگ ادامه داشت و در سال ۱۹۷۶ اثبات این حدس ارائه شد [۱۵]. این اثبات در حقیقت با پیشرفت علم و حضور رایانه‌ها در موضوعات علمی توسط کنت اپل[۱۷] و فولفگانگ هیکن[۱۸] ارائه گردید [۱، ۱۴]. این در واقع شروع حضور رایانه‌ها در اثبات‌های ریاضی بود، هر چند تا کنون اثبات صرفاً ریاضی برای این مسأله به‌دست نیامده است. در انتهای این بخش به‌طور خلاصه به این اثبات می‌پردازیم.

قضیه ۱.۳ (چهار رنگ). هر گراف مسطح چهار رنگ‌پذیر است.

در ابتدا برای روشن‌تر شدن استدلال مقدمه‌ای بیان می‌کنیم. فرض کنید کشور A کشوری باشد که هیچ همسایه‌ای ندارد. کشور B کشوری باشد که دارای یک همسایه است. به‌همین ترتیب C، D، E و F به‌ترتیب کشورهایی باشند که دارای ۲، ۳، ۴ و ۵ همسایه هستند (شکل ۳). همه این‌ها امکان‌پذیر است.



شکل ۳. همسایگی کشورها

Figure 3: Neighboring countries

در هر نقشه‌ای حداقل یک کشور وجود دارد که مانند یکی از کشورهای بالا باشد. چیزی که امکان‌پذیر نیست این است که همه کشورها به شش یا بیشتر کشور متصل باشند. به‌عبارت دیگر حداقل یک کشور در نقشه وجود دارد که به یک، دو، سه، چهار یا پنج کشور دیگر متصل است. در واقع اگر نقشه‌ای داشته باشیم که در آن همه کشورها به شش یا هفت کشور متصل باشند آن‌گاه یک گراف بدون نقشه خواهیم داشت. بنابراین همه نقشه‌ها این ویژگی را دارند که حداقل یک کشور در آن‌ها در لیست گراف‌های شکل ۳ باشد. برای اثبات حدس چهار رنگ ابتدا سعی بر آن شد که نسخه‌های ساده‌تر از قضیه چهار رنگ اثبات گردد. قضیه چهار رنگ بیان می‌کند که هیچ نقشه‌ای وجود ندارد که برای رنگ‌آمیزی به پنج رنگ نیاز داشته باشد. اجازه دهید از نسخه‌های ساده‌تر استفاده کنیم. ثابت کنیم که هیچ نقشه‌ای وجود ندارد که به هفت رنگ برای رنگ‌آمیزی نیاز داشته باشد. فرض کنیم نقشه‌هایی وجود دارد که به هفت رنگ نیاز دارند. کوچک‌ترین آن‌ها را انتخاب می‌کنیم. این نقشه، نقشه‌ای است که حداقل یک کشور مانند کشورهای شکل ۳ در آن وجود دارد. این کشور را از نقشه جدا می‌کنیم. اکنون یک نقشه کوچک‌تر داریم. چون یک کشور کم کرده‌ایم در واقع نقشه‌ای کوچک‌تر داریم که توانسته‌ایم آن‌را با شش رنگ، رنگ‌آمیزی کنیم. نقشه ابتدایی کوچک‌ترین نقشه‌ای بود که می‌بایستی هفت رنگ در آن استفاده می‌شد. اگر آن کشور را به‌جای خود برگردانیم

[14] William Hamilton [15] Cayley [16] John Heawood [17] Kenneth Appel [18] Wolfgang Haken

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.139804.1623

در واقع یک رنگ اضافه داریم که می‌توانیم آن را با شش رنگ موجود رنگ‌آمیزی کنیم. برای اثبات قضیه پنج رنگ نیز از همین استدلال با پیچیدگی‌های بیشتر می‌توان استفاده کرد. اما در اثبات حدس چهار رنگ نیز اپل و هیکن لیستی از گراف‌ها را ارائه دادند و نشان دادند که هر نقشه باید حداقل یکی از این گراف‌ها را در درون خود داشته باشد. از طرفی هریک از این گراف‌ها را می‌توان به وسیله چهار رنگ، رنگ‌آمیزی نمود و در نهایت به این نتیجه رسیدند که هر نقشه را با چهار رنگ می‌توان رنگ‌آمیزی کرد. بخشی از دشواری این استدلال آن بود که لیست گراف‌هایی که تهیه شده بود طولانی بود، ۱۹۳۶ گراف. آن‌ها با استفاده از رایانه به این نتیجه رسیدند که این مجموعه ۱۹۳۶تایی از گراف‌ها هیچکدام نمی‌توانند یکی از کوچک‌ترین گراف‌ها برای مثال نقض در حدس چهار رنگ باشند. اپل و هیکن نتیجه گرفتند که اگر بخواهد کوچک‌ترین مثال نقضی وجود داشته باشد باید شامل یکی از آن ۱۹۳۶ نقشه باشد.

به‌عبارت دیگر اگر حدس چهار رنگ درست نباشد یعنی اگر نتوان یک نقشه را با شرایط گفته شده تنها با چهار رنگ، رنگ‌آمیزی نمود، کوچک‌ترین نقشه‌ای وجود دارد که برای رنگ‌آمیزی به پنج رنگ نیاز دارد. دلایل اپل و هیکن و محاسبات رایانه‌ای آن‌ها نشان داد که چنین ساختاری مینیمال نیست. با استفاده از قوانین و روش‌های ریاضی بر پایه خواص پیکربندی‌های کاهش‌پذیر، اپل و هیکن یک مجموعه اجتناب‌ناپذیر از پیکربندی‌های کاهش‌پذیر یافتند که نشان می‌دهد هیچ مثال نقض کمینه‌ای وجود ندارد. اثبات آن‌ها تعداد بی‌نهایت نقشه ممکن را به ۱۹۳۶ پیکربندی کاهش‌پذیر (که بعداً به ۱۴۷۶ رسید) کاهش داد. پروسه چک کردن این تعداد حالت با کامپیوتر بیشتر از هزار ساعت به‌طول انجامید.

۳.۲. قضیه کوراتوفسکی. در اوایل قرن هجدهم ریاضیدان بزرگ لئونارد اویلر باز هم زمینه‌ساز پدیدار شدن مفهوم مهم دیگری در نظریه‌گراف بود، گراف‌های مسطح. اویلر فرمول مهمی در مورد رابطه تعداد رأس‌ها، تعداد یال‌ها و تعداد وجه‌ها در یک چندوجهی به‌دست آورد. پس از آن زمان و با یک وقفه طولانی نتایج بسیاری در خصوص گراف‌های مسطح به‌دست آمده است. اولین آن‌ها زمانی بود که ریاضیدان لهستانی، کوراتوفسکی[۱۹]، معیار مهمی برای مسطح بودن یک گراف تعیین کرد. یک گراف، مسطح نامیده می‌شود هرگاه بتوانیم آن‌را روی یک سطح طوری رسم کنیم که یال‌ها به جز در رئوس همدیگر را قطع نکنند. در واقع فرمول اویلر پایه و اساس نظریه توپولوژیک گراف بود. در سال ۱۹۳۰ کوراتوفسکی قضیه‌ای مهم در خصوص گراف‌های مسطح بیان و اثبات کرد که بعدها به نام خودش شناخته شد [۱۴، ۱۷].

قضیه ۳.۲ (کوراتوفسکی). هر گراف متناهی مسطح است اگر و تنها اگر شامل زیرگرافی یکریخت با گراف تقسیمی از K_5 یا $K_{3,3}$ نباشد.

این قضیه در نوع خود یک نتیجه شگفت‌انگیز است! در ادامه به اثبات این قضیه مهم می‌پردازیم اما پیش از آن به مقدماتی نیاز داریم.

لم ۳.۳. هر گراف دوبخشی هیچ دوری به طول فرد ندارد.

اثبات. فرض کنیم $G=(V,E)$ یک گراف دوبخشی باشد. بنابراین دو زیرمجموعه V_1 و V_2 از رئوس G وجود دارد که برای هر یال $e=v_1v_2\in E$ داریم $v_1\in V_1$ و $v_2\in V_2$. حال فرض کنیم G حداقل یک دور به طول فرد مانند C داشته باشد:

$$C = w_1, w_2, \dots, w_n, w_1,$$

که n یک عدد فرد است. بدون کم شدن از کلیت موضوع فرض کنیم $w_1\in V_1$. بنابراین اگر k عددی فرد باشد آنگاه $w_k\in V_1$ و اگر عددی زوج باشد آنگاه $w_k\in V_2$. چون n یک عدد فرد است بنابراین داریم $w_1\in V_1$ و $w_n\in V_1$. از طرفی w_1w_n یالی از C است و این با دوبخشی بودن G در تناقض است. بنابراین G نمی‌تواند دوری به طول فرد داشته باشد. □

[19] Kuratowski

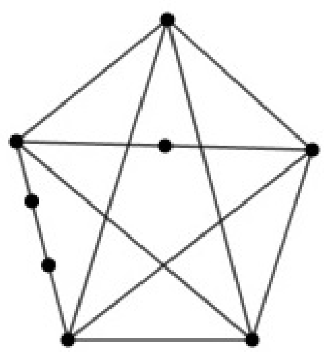
توجه داریم که با استفاده از قضیه اویلر به‌راحتی می‌توان ثابت کرد که K_5 و $K_{3,3}$ مسطح نیستند. گراف K_5 را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم K_5 مسطح باشد، بنابر فرمول اویلر اگر f بیانگر تعداد وجه‌های گراف باشد آن‌گاه $f = 2 - 5 + 10 = 7$. چون هر وجه توسط حداقل سه یال محصور شده است و هر یال بین دو وجه مشترک است، بنابراین حداکثر تعداد وجه‌ها برابر با $\frac{2}{3}|E|$ یعنی $7 \neq \frac{20}{3} = 10 \times \frac{2}{3}$ است.

هم‌چنین فرض کنیم گراف $K_{3,3}$ مسطح باشد. بنابراین طبق فرمول اویلر برای این گراف $|V| - |E| + f = 2$؛ که در این گراف، $|V| = 6$ و $|E| = 9$. از طرف دیگر چون $K_{3,3}$ دوبخشی است بنابراین هیچ دوری به طول ۳ ندارد. پس هر وجه آن با حداقل چهار یال محصور شده است. هم‌چنین هر یال بین دو وجه مشترک است، پس باید داشته باشیم $f \leq \frac{2|E|}{4} = \frac{|E|}{2} = 4.5$ و بنابراین $2 \leq 6 - 9 + 4.5 = 1.5$ و این به وضوح غلط است. بنابراین $K_{3,3}$ هم مسطح نیست.

حال فرض کنیم در یک یال از گراف نامسطح K_5 یک رأس اضافه کنیم. به‌عبارت دیگر یک یال دلخواه از این گراف انتخاب می‌کنیم و آن‌را با یک مسیر به طول دو جایگزین می‌کنیم. سؤالی که پیش می‌آید این است که آیا گراف جدید باز هم نامسطح است؟، جواب سؤال مثبت است. در واقع افزودن یک رأس به وسط یک یال تغییری در ساختار اصلی گراف ایجاد نمی‌کند که بخواهد آن‌را به یک گراف مسطح تبدیل کند. اکنون به تعریف گراف تقسیم می‌پردازیم.

تعریف ۴.۳. فرض کنیم G یک گراف باشد. یک گراف‌تقسیم از گراف G که آن‌را با $S(G)$ نشان می‌دهیم، عبارت است از گرافی که از قرار دادن یک رأس جدید روی یال‌های G به‌دست می‌آید.

در شکل ۴ نمونه‌ای از گراف تقسیم K_5 مشاهده می‌شود که با سه تقسیم به‌دست آمده است.



شکل ۴. گراف‌تقسیم K_5

Figure 4: Subdivided graph of K_5

همان‌طور که پیش‌تر اشاره شد، ایجاد گراف‌تقسیم از یک گراف، تأثیری بر مسطح بودن یا نبودن گراف ندارد. این حکم در لم زیر آمده است.

لم ۵.۳. فرض کنید G یک گراف باشد، در این‌صورت G مسطح است اگر و تنها اگر هر گراف‌تقسیم G مسطح باشد.

هم‌چنین اگر یک گراف، مسطح باشد، هر زیرگراف از آن نیز مسطح است. این حکم به نظر ساده می‌رسد. زیرا اگر یک گراف‌مسطح داشته باشیم، و آن‌را روی یک صفحه رسم کنیم آن‌گاه هر بخشی از آن‌را در نظر بگیریم باز هم روی صفحه رسم شده است بدون آن‌که یال‌ها تقاطعی با یکدیگر داشته باشند. این نتیجه ساده نقشی اساسی در اثبات قضیه کوراتوفسکی بازی می‌کند.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.139804.1623

حال به ادامه بحث برای اثبات قضیه اصلی خودمان می‌پردازیم. ابتدا شرط کافی قضیه را بررسی می‌کنیم. با توجه به مقدمات فوق شرط کافی قضیه دقیقاً اثبات شده است. اگر گراف G شامل یک زیرگراف غیرمسطح باشد آن‌گاه G خود نیز مسطح نیست. از طرفی $K_۵$ و $K_{۳,۳}$ مسطح نیستند بنابراین اگر G شامل یکی از این‌ها و یا زیرتقسیمی یکریخت با این دو گراف باشد مسطح نیست. برای ادامه اثبات مجدداً چند مفهوم ساده را یادآوری می‌کنیم.

تعریف ۶.۳. رأس $v \in V(G)$ را رأس‌برشی می‌نامیم هر گاه تعداد مؤلفه‌های $G - v$ بیشتر از G باشد.

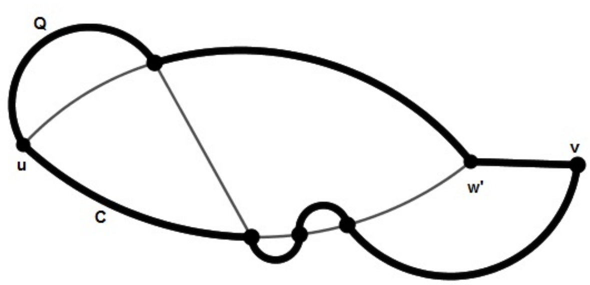
تعریف ۷.۳. گراف غیربدیهی و همبند G را جدایی‌ناپذیر می‌نامیم اگر رأس‌برشی نداشته باشد. یک زیرگراف ماکسیمال جدایی‌ناپذیر از G را بلوک می‌نامیم. واضح است که اگر G رأس‌برشی نداشته باشد خود یک بلوک است.

تعریف ۸.۳. گراف G، ۲−همبند نامیده می‌شود اگر همبند باشد و رأس‌برشی نداشته باشد.

پس از تعاریف فوق لم زیر را بیان می‌کنیم.

لم ۹.۳. اگر G یک گراف ۲−همبند باشد، آن‌گاه هر دو رأس G مانند u و vبه یک دور مشترک تعلق دارند.

اثبات. حکم را با استقراء روی فاصله بین u و v ثابت می‌کنیم. چون G، ۲−همبند است پس رأس‌برشی ندارد. اگر $d(u,v) = ۱$ آن‌گاه $e = uv$ یالی از G است. توجه داریم که G حداقل دارای سه رأس است زیرا در غیر این‌صورت دارای رأس‌برشی خواهد بود. هم‌چنین e نیز یال‌برشی نیست (اگر e یال‌برشی باشد آن‌گاه حداقل یکی از u و v باید رأس‌برشی باشد.) توجه کنید که درجه u نمی‌تواند برابر یک باشد. فرض کنید w همسایه u است. پس e یال‌برشی نیست و G حداقل سه رأس مانند v, u و w دارد. چون u رأس‌برشی نیست، $G - u$ همبند است پس یک مسیر بین v و w در $G - u$ وجود دارد. با افزودن u به این مسیر یک دور در G شامل هر دو u و v داریم. حال فرض کنید برای هر دو رأس u و v از G که $d(u,v) \leq d$ حکم صحیح باشد و فرض کنیم $d(u,v) = d$. اگر P مسیری به طول d بین u و v باشد و w' رأسی در P باشد که مجاور با v است، آن‌گاه $d(u,w') = d - ۱$ و در نتیجه طبق فرض دوری مانند C شامل هر دو u و w' وجود دارد. اگر v نیز به این دور متعلق باشد آن‌گاه حکم ثابت است در غیر این‌صورت فرض کنید چنین نباشد. چون $G - w'$ همبند است (G رأس‌برشی ندارد) پس مسیری مانند Q در G از u به v وجود دارد که شامل رأس w' نیست. به‌عبارت دیگر Q یک مسیر از u به v در $G - w'$ است. (شکل ۵)



شکل ۵. مسیر Q و دور C

Figure 5: The path Q and cycle C

این مسیر می‌تواند شامل رأس‌هایی از دور C (به‌جز w') باشد و بنابراین دوری شامل هر دو u و v خواهیم داشت. این دور در شکل بالا با خطوط ضخیم مشخص شده است. □

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.139804.1623

همان‌طور که قبلاً بیان شد با استفاده از مطالب و لم‌های بیان شده در بالا یک طرف قضیه ثابت شده است. حال فرض گراف G مسطح نباشد. نشان می‌دهیم که شامل زیرگرافی یکریخت با گراف تقسیمی از $K_{۵}$ یا $K_{۳,۳}$ است. فرض کنیم چنین نباشد یعنی گراف غیرمسطحی وجود دارد که شامل هیچ زیرگراف یکریخت با گراف‌تقسیمی از $K_{۵}$ یا $K_{۳,۳}$ نیست. اگر G گراف‌مینیمال دارای چنین شرایطی باشد ادعاهای زیر را مطرح می‌کنیم.

(۱) G گرافی ۲ـهمبند است.
(۲) G هیچ رأسی با درجه ۲ ندارد.
(۳) G یالی دارای یالی است مانند e که $G-e$ هم‌چنان ۲ـهمبند خواهد بود.

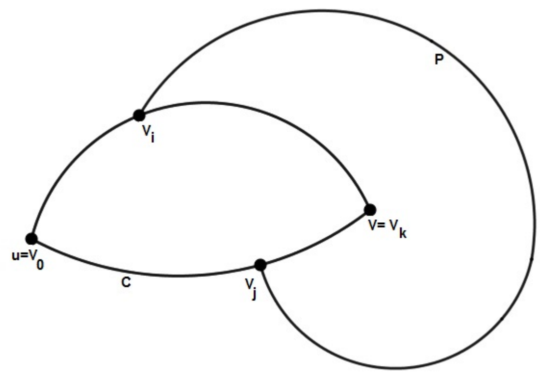
اثبات این ادعاها کار سختی نیست. فرض کنیم u و v دو رأس از G هستند حال گراف $H{=}G{-}\{e=uv\}$ را در نظر می‌گیریم. (H با حذف یال e بدون حذف کردن رأس‌های u و vبه‌دست می‌آید). با توجه به مینیمال بودن G، گراف H مسطح است. از طرف دیگر H گرافی ۲ـهمبند است لذا طبق لم ۳، u و v حداقل در یک دور مشترک قرار دارند. اکنون چون گراف H مسطح است یک شکل مسطح شده از آن‌را در نظر می‌گیریم که دارای شرایط زیر باشد:

- دور C شامل هر دو u و vباشد.
- تعداد وجه‌های درون C در این شکل ماکسیمال باشد.
- اگر C' دور دیگری در یک شکل مسطح شده H باشد که شامل u و vاست، آن‌گاه تعداد وجه‌های درون C' کوچک‌تر یا مساوی تعداد وجه‌های درون C باشد.

حال فرض کنیم دور C به‌صورت زیر باشد

$$u=v_{۰},v_{۱},v_{۲},\dots,v_{k-۱},v_k=v,v_{k+۱},\dots,v_l,v_{۰}$$

توجه داریم که u و v در H مجاور نیستند و بنابراین $k\geq ۲$. هیچ مسیری خارج از دور C وجود ندارد که دو رأس از مجموعه $\{v_{۰},v_{۱},v_{۲},\dots,v_{k-۱},v_k\}$ را به‌هم متصل کند. زیرا فرض کنیم مسیری بین v_i و v_j مانند p موجود باشد. این تناقض با ماکسیمال بودن C است پس چنین مسیری وجود ندارد. هم‌چنین به‌دلیل مشابه، هیچ مسیری خارج از دور C وجود ندارد که دو رأس از مجموعه $\{v_k,v_{k+۱},\dots,v_l,v_{۰}\}$ را به هم متصل کند. از طرف دیگر u و v در H به هم متصل نیستند. هم‌چنین H یک گراف ۲ـهمبند است بنابراین باید مسیری مانند P بین رأس‌های مجموعه $\{v_{۱},v_{۲},\dots,v_{k-۱}\}$ و $\{v_{k+۱},v_{k+۲},\dots,v_l\}$ وجود داشته باشد. این مسیر در شکل ۶ نشان داده شده است.



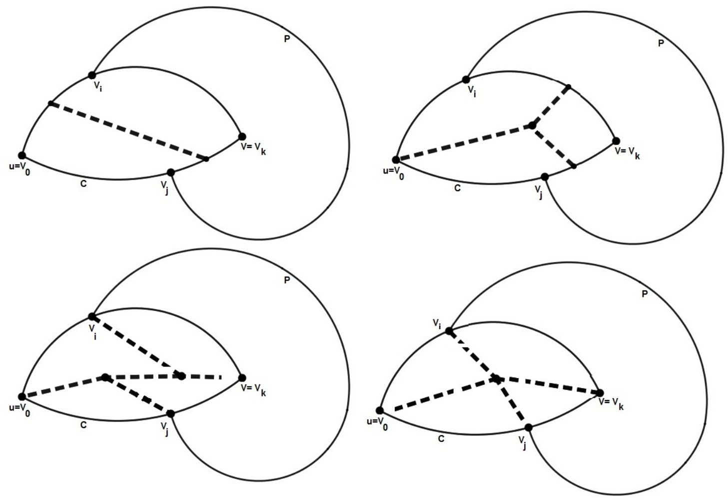
شکل ۶. مسیر P

Figure 6: The path P

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.139804.1623

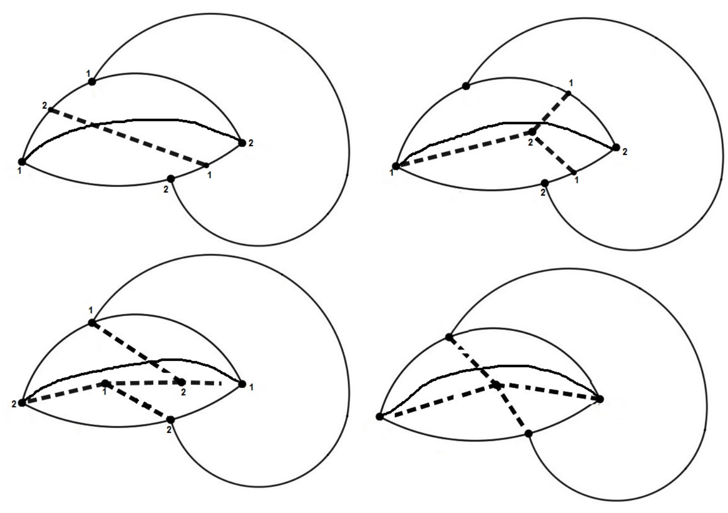
همچنین حالت‌های مختلف وجود مسیرها در درون دور C در گراف H را می‌توان در شکل ۷ مشاهده نمود. توجه کنید که هر حالت دیگری را نیز می‌توان در یکی از این چهار حالت در نظر گرفت. (خطوط خط چین در شکل ۷ نمایانگر مسیرها هستند.)

اگر به گراف‌های شکل ۷ یال uv را اضافه کنیم، آنگاه می‌توان در گراف جدید که همان گراف G خواهد بود گراف‌های تقسیم $K_{۵}$ یا $K_{۳,۳}$ را یافت. این گراف‌ها در شکل ۸ نشان داده شده‌اند.



شکل ۷. حالت‌های مختلف درون دور C

Figure 7: Different states within the cycle C

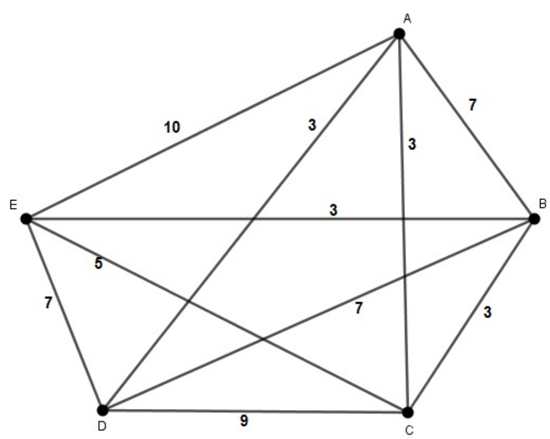


شکل ۸. گراف‌های تقسیم $K_{۵}$ و $K_{۳,۳}$

Figure 8: Subdivided graphs of K_5 and $K_{3,3}$

در شکل ۸ گراف‌های ردیف بالا و گراف سمت راست در ردیف پایین دارای گراف تقسیم $K_{۳,۳}$ هستند. رئوس یک بخش با عدد ۱ و رئوس بخش دیگر با عدد ۲ شماره‌گذاری شده‌اند. گراف سمت راست ردیف پایین دارای گراف تقسیم $K_۵$ است. بنابراین به یک تناقض رسیدیم و حکم ثابت می‌گردد.

۳.۳. فروشنده دوره‌گرد. مجموعه‌ای از شهرها (مناطق) و فواصل بین آن‌ها را در نظر بگیرید. تصور کنید که یک فروشنده دوره‌گرد می‌خواهد از همه شهرها دقیقاً یک‌بار عبور کند و به نقطه آغاز حرکت بازگردد. کوتاه‌ترین مسیری که او می‌تواند طی کند کدام مسیر است؟ توجه کنید که موضوع تنها عبور از همه شهرها و بازگشت به نقطه آغازین نیست بلکه مهم آن است که این سفر دارای کوتاه‌ترین مسیر باشد. حالت‌خاص این مسأله که در آن تنها یافتن چنین مسیری بود توسط همیلتون مطرح گردید. بنابراین بین یافتن دور همیلتونی در گراف و مسأله فروشنده دوره‌گرد تفاوت وجود دارد. اگر گراف کامل باشد (بین همه شهرها مسیر وجود داشته باشد) آن‌گاه چون دور همیلتونی وجود دارد موضوع فقط یافتن دوری با کوتاه‌ترین مسیر خواهد بود. این مسأله به‌عنوان یک موضوع چندوجهی در علوم کامپیوتر، نظریه‌گراف و بهینه‌سازی، چند دهه مورد مطالعه قرار گرفته و راه‌حل‌هایی برای آن بیان شده است. ساده‌ترین راه‌حل این است که همه راه‌ها را امتحان کنیم! اما این راه‌حل زمان‌بر و پرهزینه است. یکی از راه‌حل‌های بهتر الگوریتم مونت کارلو [۲۰] است. هر چند اولین حل آکادمیک برای این مسأله در دهه ۱۹۳۰ بیان شد، اما در دهه‌های ۱۹۵۰ و ۱۹۶۰ و با پدیدار شدن رایانه‌ها این مسأله به‌عنوان یک مسأله مشهور پیگیری شد. در نظریه بهینه‌سازی کارهای زیادی روی این مسأله انجام شده است. ما در این‌جا کمی در خصوص مدل گرافی مسأله صحبت خواهیم کرد. در شکل ۹، گرافی را مشاهده می‌کنیم که شامل رئوس که نشان‌دهنده شهرها هستند، یال‌های وزن‌دار بیانگر مسیر بین شهرها و فاصله آن‌ها هستند. به‌طور مثال، فاصله دو شهر E و D برابر ۷ و فاصله شهرهای B و C برابر ۳ است.



شکل ۹. شهرها و فاصله آن‌ها

Figure 9: Cities and their distances

اگر ماتریس فاصله گراف شکل ۹ را بنویسیم خواهیم داشت:

---
[20] Monte Carlo

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.139804.1623

جدول ۱. ماتریس فاصله گراف شکل ۹

Table 1: Adjacency matrix of graph in figure 9

رأس	A	B	C	D	E
A	۰	۷	۳	۳	۱۰
B	۷	۰	۳	۷	۳
C	۳	۳	۰	۹	۵
D	۳	۷	۹	۰	۷
E	۱۰	۳	۵	۷	۰

کوتاه‌ترین مسیر (نه لزوماً یکتا) عبارت است از $ACBEDA$ که طول آن ۱۹ است. مسأله فروشنده دوره‌گرد از نظر محاسباتی چالش برانگیز بود و در سال ۱۹۷۲ ثابت شد که یک مسأله NP–سخت است.

۴.۳. قضیه گراف توران. بدون شک یکی از مهم‌ترین قضایای نظریه‌گراف، قضیه توران است که در سال ۱۹۴۱ توسط ریاضیدان مجارستانی، پل توران[۲۱]، ارائه گردید [۴]. این قضیه را می‌توان آغاز نظریه فرینال گراف دانست. ابتدا تعریف زیر را در نظر می‌گیریم و سپس قضیه توران را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱۰.۳. فرض کنیم G یک گراف باشد. یک زیر گراف کامل از G را یک خوشه می‌نامیم. یک p–خوشه در G عبارت است از یک زیرگراف کامل p رأسی از G که با K_p نشان داده می‌شود.

قضیه ۱۱.۳ (توران). فرض کنیم $G = (V, E)$ گرافی باشد که شامل p–خوشه نیست و $|V| = n$. در این‌صورت

$$|E| \leq \frac{n^2}{2}\left(1 - \frac{1}{p-1}\right).$$

حالت $p = 2$ بدیهی است. اثبات‌های مختلفی برای این قضیه وجود دارد که معروف‌ترین و اولین آن‌ها اثبات با استقراء روی n است. ما در این‌جا اثباتی که مبتنی بر مفاهیم نظریه احتمال است را بیان می‌کنیم. ابتدا یک تعریف را بیان می‌کنیم سپس یک لم را اثبات می‌نماییم.

تعریف ۱۲.۳. فرض کنیم G یک گراف باشد. تعداد رأس‌ها در بزرگ‌ترین خوشه را عدد خوشه‌ای G می‌نامیم و آن‌را با $\omega(G)$ نشان می‌دهیم.

لم ۱۳.۳. فرض کنیم G یک گراف باشد که $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ و $d_i = \deg(v_i)$. در این‌صورت

$$\omega(G) \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n - d_i}.$$

برای اثبات لم فوق جایگشت تصادفی π را از $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ را با احتمال یکسان برای همه جایگشت‌ها انتخاب می‌کنیم. حال مجموعه $C_\pi \subset V$ را به این‌صورت می‌سازیم: برای هر $1 \leq i \leq n$، $v(\pi_i)$ را در C_π قرار می‌دهیم اگر $v(\pi_i)$ مجاور با $v(\pi_1)$، $v(\pi_2)$، …، $v(\pi_{i-1})$ باشد. بنابراین تعریف C_π یک خوشه در G است. فرض کنیم $X = |C_\pi|$ متغیر

[21] Pál Turán

تصادفی متناظر باشد و X_i متغیر تصادفی نشانگر رأس $v(\pi_i)$ باشد که مقدار آن برابر است با ۱ اگر $v(\pi_i) \in C_\pi$ و برابر است با ۰ اگر $v(\pi_i) \notin C_\pi$. اگر امید ریاضی X_i را با $E[X_i]$ نشان دهیم داریم

$$E\left[X_i\right] = P\left[X_i = ۱\right] = \frac{۱}{n - d_{\pi(i)}},$$

و

$$E\left[X\right] = \sum_{i=۱}^{n} E\left[X_i\right] = \sum_{i=۱}^{n} \frac{۱}{n - d_{\pi(i)}} = \sum_{i=۱}^{n} \frac{۱}{n - d_i}.$$

بنابراین یک جایگشت وجود دارد که منجر به خوشه‌ای با حداقل این اندازه می‌شود. حال برای اثبات قضیه توران از نامساوی کوشی–شوارتز [22] استفاده می‌کنیم:

$$\left(\sum_{i=۱}^{n} a_i b_i\right)^{۲} \leq \left(\sum_{i=۱}^{n} {a_i}^{۲}\right)\left(\sum_{i=۱}^{n} {b_i}^{۲}\right)$$

قرار می‌دهیم $a_i = \sqrt{n - d_i}$، $b_i = \frac{۱}{\sqrt{n-d_i}}$. چون $a_i b_i = ۱$، خواهیم داشت

$$n^{۲} \leq \left(\sum_{i=۱}^{n} {a_i}^{۲}\right)\left(\sum_{i=۱}^{n} {b_i}^{۲}\right) = \left(\sum_{i=۱}^{n} n - d_i\right)\left(\sum_{i=۱}^{n} \frac{۱}{n - d_i}\right).$$

بنابر لم قبل

$$n^{۲} \leq \omega(G)\left(\sum_{i=۱}^{n} n - d_i\right),$$

و با فرض $\omega\left(G\right) \leq p - ۱$ داریم

$$n^{۲} \leq (p - ۱)\left(\sum_{i=۱}^{n} n - d_i\right) = (p - ۱)\left(n^{۲} - ۲\left|E\right|\right),$$

و در نهایت خواهیم داشت

$$\left|E\right| \leq \frac{n^{۲}}{۲}\left(۱ - \frac{۱}{p - ۱}\right).$$

۴. کاربردهایی از نظریه‌گراف

نظریه‌گراف، کاربردهای بسیاری در علوم مختلف دارد. به‌عنوان مثال در علوم کامپیوتر، علوم ارتباطات، شبکه‌ها، فیزیک، شیمی، و علوم نانو کاربردهای بسیاری از نظریه‌گراف وجود دارد که علاوه‌بر کمک به این علوم، باعث رشد و توسعه این نظریه نیز شده است. در این بخش به یکی از کاربردهای این نظریه می‌پردازیم.

فوتبال به‌عنوان یکی از محبوب‌ترین و مشهورترین ورزش‌های جهان، همواره مورد توجه علاقه‌مندان بوده است. کاربردهای نظریه‌گراف در فوتبال را می‌توان در موارد زیر طبقه‌بندی کرد: تحلیل شبکه عملکرد درون تیمی، مدل‌سازی الگوی تمرینات، تصمیمات تاکتیکی، آنالیز وضعیت رقبا، پیش‌بینی عملکرد بازیکنان، رفتار تیم‌ها و ... .

هر یک از موارد فوق را می‌توان با مدل‌سازی گرافی مورد بررسی قرار داد. اگر یک گراف جهت‌دار در نظر بگیریم و هر بازیکن را به‌عنوان یک رأس گراف و جهت حرکت آن‌ها را به‌عنوان یال در نظر بگیریم و حتی به یال‌ها وزن داده و برای هر

[22] Cauchy-Schwarz

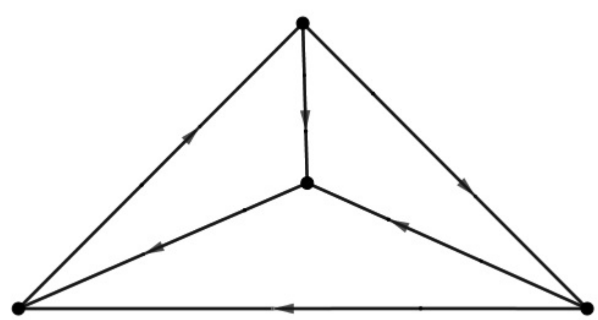
http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.139804.1623

بازیکن معیاری در نظر بگیریم که عملکرد آن‌را نشان دهد، می‌توانیم با این مدل به بهینه‌سازی تمرینات و عملکرد تیم بپردازیم. هم‌چنین یکی از کاربردهای جذاب نظریه‌گراف را می‌توان در رنکینگ بازیکنان رشته‌های مختلف ورزشی جستجو کرد. هر ساله فدراسیون‌های جهانی رشته‌های ورزشی اقدام به انتشار رتبه‌بندی ورزشکاران و یا تیم‌های ورزشی با توجه به عملکرد آن‌ها می‌نمایند. این رده‌بندی صرفاً نمی‌تواند بر حسب تعداد برد و باخت ورزشکاران و تیم‌های ورزشی باشد چرا که در این‌صورت رتبه هر ورزشکار بر مبنای شایستگی و توانایی او به درستی مشخص نشده است. به‌عنوان مثال فرض کنیم دو ورزشکار A و B هر دو دارای تعداد دو برد باشند اما ورزشکار A دو برد خود را در مقابل دو ورزشکار قدرتمند کسب کرده باشد اما ورزشکار B در مقابل دو ورزشکار ضعیف برنده شده باشد. بنابراین دو برد ورزشکار A ارزشمندتر از دو برد ورزشکار B است. هم‌چنین عملکرد مستقیم بازیکنان در برابر یکدیگر نیز می‌تواند به‌عنوان یک ملاک برای رتبه‌بندی مورد توجه قرار گیرد (در صورتی‌که آن بازیکنان با هم مسابقه داده باشند). از طرف دیگر با در نظر گرفتن همه این وضعیت‌ها باز هم ممکن است دو ورزشکار دارای امتیاز مساوی شوند که باید برای این موضوع هم، فکری بشود. همه این موارد منجر به ضرورت استفاده یک مدل ریاضی برای تعیین رتبه صحیح ورزشکاران خواهد شد. در طراحی این مدل، از نظریه‌گراف استفاده می‌شود. در این بخش ما مثالی از نحوه ارائه این مدل بیان می‌کنیم.

در یک مسابقه بین تعدادی از ورزشکاران، اگر هر یک از این ورزشکاران را به‌عنوان رأس‌های یک گراف در نظر بگیریم، دو رأس را زمانی به یکدیگر متصل می‌کنیم (دو رأس زمانی با هم مجاور هستند) که دو ورزشکار با هم مسابقه داده باشند. برای در نظر گرفتن وضعیت برد و باخت‌ها ابتدا تعریف گراف جهتدار و تورنومنت را یادآوری می‌کنیم.

تعریف ۱.۴. یک گراف جهت‌دار D سه تایی مرتبی است مانند $D = (V, A, I_D)$ که در آن مجموعه ناتهی V مجموعه رأس‌ها، A مجموعه کمان‌ها (یال‌ها)، و I_D نگاشت وقوع نامیده می‌شود. نگاشت وقوع به هر کمان D یک زوج مرتب از رأس‌های آن‌را نظیر می‌کند. اگر e یک کمان از D باشد و داشته باشیم $I_D(e) = (u, v)$، این بدان معنی است که کمان e رأس u را به رأس v و در جهت، از u به v متصل می‌کند.

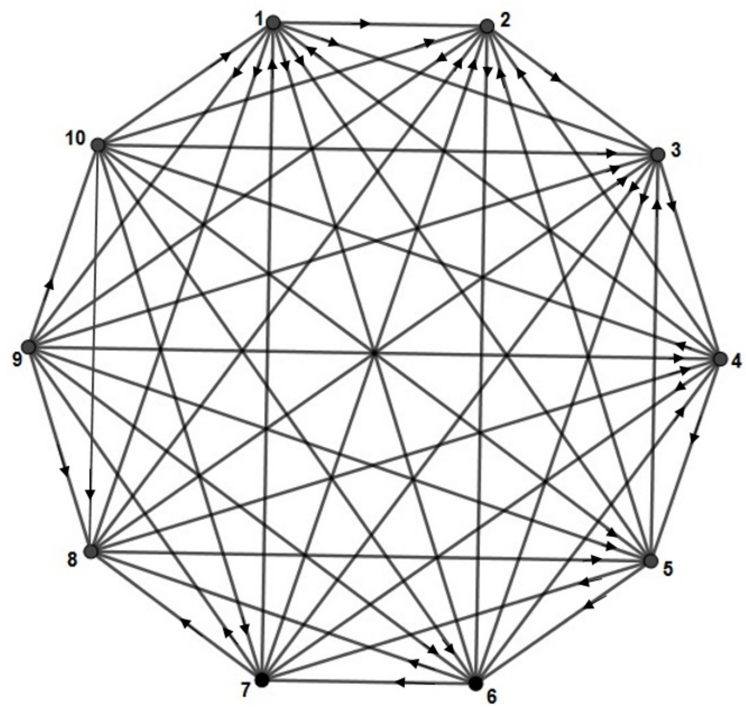
تعریف ۲.۴. گراف جهت‌دار D را تورنومنت گوییم هرگاه گراف زمینه آن کامل باشد. بنابراین در هر تورنومنت برای هر دو رأس u و v، (u, v) یا (v, u) (اما نه هر دو)، کمانی از D هستند. در شکل ۱۰ تورنومنتی روی چهار رأس نشان داده شده است.



شکل ۱۰. تورنومنت با چهار رأس

***Figure** 10: A tournament with 4 vertices*

حال نتیجه مسابقه دو بازیکن را هم می‌توانیم در نظر بگیریم. کمان (u,v) نشان دهنده پیروزی بازیکن u بر بازیکن v است. فرض کنید ۱۰ ورزشکار با نام‌های ۱، ۲، ... و ۱۰ در طول یک بازه زمانی مشخص دو به دو با یکدیگر مسابقه داده‌اند. به‌طور مثال یک یال جهت‌دار (کمان) از بازیکن ۱ به بازیکن ۵ نشان دهنده پیروزی ۱ بر ۵ است. فرض کنیم وضعیت برد و باخت این ۱۰ ورزشکار در گراف جهت‌دار شکل ۱۱ مشخص شده است.



شکل ۱۱. نتایج بازی‌های ۱۰ ورزشکار

Figure 11: Results of the 10 players

با توجه به گراف فوق به‌طور مثال بازیکن ۱ از بازیکنان ۲، ۳، ۵، ۶، ۸ و ۹ برده است و به بازیکنان ۴، ۷ و ۱۰ باخته است. با توجه به پیچیدگی گراف ایجاد شده به‌خصوص زمانی‌که تعداد بازیکنان بیشتر هم باشد، از ماتریس مجاورت گراف جهت‌دار فوق برای نمایش وضعیت برد و باخت بازیکنان استفاده می‌کنیم. ماتریس مجاورت صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۳.۴. فرض کنیم D یک گراف جهت‌دار با n رأس باشد. ماتریس مجاورت D یک ماتریس مربعی A از مرتبه n است که درآیه‌های آن به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$a_{ij} = \begin{cases} ۱ & (i,j) \in E \\ ۰ & (i,j) \notin E \end{cases}$$

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.139804.1623

بنابراین ماتریس مجاورت گراف شکل ۱۱ یک ماتریس مرتبه ده به‌صورت زیر است:

$$A=\begin{bmatrix} 0&1&1&0&1&1&0&1&1&0\\ 0&0&1&0&0&1&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&1&1&0&0&0\\ 1&1&0&0&1&0&1&0&0&1\\ 0&1&1&0&0&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&1&1&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&1&1&0\\ 0&1&1&1&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&1&1&0&1&0&1\\ 1&1&1&0&1&1&1&1&0&0 \end{bmatrix}$$

از طرفی درآیه (i,j)ام ماتریس A^k برابر است با تعداد مسیرهای به طول k از رأس i به رأس j است. (توجه کنید که در این مثال مسیر به طول دو نشان دهنده بردهای غیرمستقیم یک بازیکن است). حال می‌خواهیم براساس عملکرد بازیکنان رتبه آن‌ها را مشخص کنیم. همان‌طور که قبلاً اشاره شد یکی از راه‌های رده‌بندی بازیکنان شمردن تعداد بردهای آن‌ها است. تعداد بردهای هر بازیکن، برابر با مجموع درایه‌های روی سطر نظیر آن بازیکن در ماتریس مجاورت است. اگر قرار دهیم $X=(1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)^t$، آنگاه درایه‌های بردار AX تعداد بردهای بازیکنان را نشان می‌دهد. در این‌جا رده‌بندی زیر حاصل می‌گردد:

$$AX=\begin{bmatrix} 0&1&1&0&1&1&0&1&1&0\\ 0&0&1&0&0&1&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&0&1&1&0&0&0\\ 1&1&0&0&1&0&1&0&0&1\\ 0&1&1&0&0&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&1&1&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&1&1&0\\ 0&1&1&1&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&1&1&1&0&1&0&1\\ 1&1&1&0&1&1&1&1&0&0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\3\\3\\5\\4\\3\\4\\4\\6\\7\end{bmatrix}$$

بر اساس این رده‌بندی که فقط با در نظر گرفتن تعداد بردها انجام شده است بازیکن ۱۰ دارای رده اول است. بازیکنان ۱ و ۹ هر کدام دارای شش برد هستند و یک رتبه را به‌دست آورده‌اند. این رده‌بندی به نظر کامل و دقیق نیست! زیرا فرض کنیم بازیکن ۹ بیان کند که هر چند تعداد بردهای من و بازیکن ۱ برابر است اما من بازیکن ۱۰ را که در رتبه اول هستم شکست داده‌ام و برد بسیار ارزشمندی کسب کرده‌ام و بنابراین باید جایگاه بهتری نسبت به بازیکن ۱ داشته باشم. از طرف دیگر بازیکن ۱ هم می‌تواند ادعا کند که من در بازی مستقیم با بازیکن ۹ برنده شده‌ام و جایگاه بهتری از او دارم. این استدلال‌ها می‌تواند برای سایر بازیکنان هم امتیاز نیز صورت پذیرد. پس در صورت تساوی تعداد بردهای دو بازیکن کدام لایق قرار گرفتن در رده بهتری است؟. حال برای بهتر شدن این رده‌بندی بردهای غیرمستقیم را هم در نظر می‌گیریم که متناظر با مسیرهای به طول دو هستند یعنی درایه‌های ماتریس A^2. به‌طور مثال بازیکن ۱ از بازیکن ۵ برده و بازیکن ۵ بازیکن ۷ را برده است، پس یک برد

غیرمستقیم برای ۱ به وجود می‌آید. مجموع بردهای مستقیم و غیرمستقیم از رابطه $X\,(A+A^2)$ به‌دست می‌آید. بنابراین داریم

$$(A+A^2)X=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & 4 & 3 & 5 & 3 & 3 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 & 3 & 2 & 1 & 1\\ 3 & 5 & 4 & 0 & 3 & 4 & 3 & 3 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 3 & 3 & 2 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 4 & 2 & 3 & 3 & 0 & 3 & 3 & 1\\ 1 & 3 & 3 & 2 & 2 & 3 & 3 & 0 & 1 & 1\\ 2 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 5 & 3 & 0 & 2\\ 2 & 5 & 5 & 3 & 3 & 5 & 4 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}29\\15\\15\\29\\17\\16\\23\\19\\32\\33\end{bmatrix}$$

هرچند که این رده‌بندی از رده‌بندی قبلی بهتر است اما باز هم دقیق نیست و هم‌چنین بازیکنان همرده وجود دارد و امکان دارد باز هم در صورت ادامه این روند به این مشکل برخورد کنیم. بنابراین باید از یک راهبرد بهتر استفاده کنیم. برای این‌منظور به هر یک از این ۱۰ بازیکن یک عدد مثبت متناظر می‌کنیم. به‌عنوان مثال برای بازیکن i ام عدد مثبت k_i را متناظر می‌کنیم و در نهایت اگر $k_i<k_j$، آن‌گاه نتیجه می‌گیریم که بازیکن jام رده بهتری از بازیکن iام دارد. فرض می‌کنیم برای هر $0\leq i\leq 10$ داشته باشیم $0\leq k_i\leq 1$ و $k_1+k_2+\cdots+k_{10}=1$. حال بردار رده‌بندی زیر را در نظر می‌گیریم

$$K=(k_1,k_2,\cdots,k_{10})^t$$

از طرفی برای در نظر گرفتن این موضوع که رده هر بازیکن باید متناسب با رده بازیکنانی باشد که از او شکست خورده‌اند، یک ضریب تناسب مانند α در نظر می‌گیریم (به‌عنوان مثال ارزش شکست دادن یک بازیکن قوی بیشتر از بردن یک بازیکن ضعیف است) و دستگاه معادلات زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{cases} k_1=\alpha\,(k_2+k_3+k_5+k_6+k_8+k_9)\\ k_2=\alpha\,(k_3+k_6+k_9)\\ k_3=\alpha\,(k_4+k_6+k_7)\\ k_4=\alpha\,(k_1+k_2+k_5+k_7+k_{10})\\ k_5=\alpha\,(k_2+k_3+k_6+k_7)\\ k_6=\alpha\,(k_4+k_7+k_8)\\ k_7=\alpha\,(k_1+k_2+k_8+k_9)\\ k_8=\alpha\,(k_2+k_3+k_4+k_5)\\ k_9=\alpha\,(k_3+k_4+k_5+k_6+k_8+k_{10})\\ k_{10}=\alpha(k_1+k_2+k_3+k_5+k_6+k_7+k_8) \end{cases}$$

دستگاه فوق را به‌صورت ماتریسی می‌توان به شکل زیر نوشت

$$K=\alpha AK$$

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.139804.1623

و در نتیجه $AK=\frac{1}{\alpha}K$ و این یعنی K بردار ویژه ماتریس A نظیر مقدار ویژه $\frac{1}{\alpha}$ است. حال با محاسبه مقدار ویژه ماکسیمال، رده‌بندی این ۱۰ بازیکن را می‌توان با به‌دست آوردن بردار K به‌دست آورد.

در انتهای این بخش به یک کاربرد دیگر از نظریه‌گراف به طور مختصر اشاره می‌کنیم. یک پازل سودوکو شبکه ای $n^2 \times n^2$ با بلوک های $n \times n$ است که در آن اعداد ۱ تا n بدون تکرار در یک ردیف، ستون و بلوک قرار دارند. گراف ساده S_n را که دارای تعداد n^4 رأس است (در واقع هر خانه پازل را یک رأس در نظر می‌گیریم.) به این‌صورت تعریف می‌کنیم که دو رأس مجاور هستند اگر و فقط اگر خانه های مربوط به آن ها در پازل سودوکو در یک سطر یا یک ستون یا یک بلوک باشند. در واقع، حل پازل سودوکو معادل است با رنگ‌آمیزی گراف با تعداد n^2 رنگ.

۵. چشم‌انداز

امروزه نظریه‌گراف به دنیای پیچیده‌ای از مفاهیم و اصول میان رشته‌ای تبدیل شده است که به‌طور مؤثر در حل مسائل و اتخاذ تصمیمات در حوزه‌های گوناگونی از زندگی انسان مورد استفاده قرار می‌گیرد. این نظریه برای مواردی از جمله شبکه‌های اجتماعی، تخصیص منابع، مسائل مسیریابی، بهینه‌سازی، حمل و نقل و علوم کامپیوتر استفاده می‌شود. با توجه به ماهیت کاربردی نظریه‌گراف و توسعه روز افزون علم در دنیا، رشد روز افزون هوش‌مصنوعی، علم داده، پزشکی، شیمی و ...، و نقش نظریه‌گراف در این حوزه‌ها، می‌توان پیش‌بینی نمود که این نظریه آینده نقشی به مراتب پررنگ‌تر در توسعه بسیاری از علوم خواهد داشت. اجازه دهید به قرن گذشته برگردیم. سخنرانی هیلبرت[23] در سال ۱۹۰۰ در کنگره بین‌المللی ریاضیدانان در پاریس شاید تأثیرگذارترین سخنرانی باشد که تا به‌سحال توسط یک ریاضیدان در مورد ریاضیات ارائه شده است. هیلبرت در آن سخنرانی ۲۳ مسأله اصلی ریاضی را که قرار است در قرن آینده مورد مطالعه قرار گیرند را بیان کرد [۶، ۱۳]. این مسائل به‌طور عمیق بر ریاضیات در قرن گذشته تأثیر گذاشتند. شاید اگر این سخنرانی در قرن حاضر بیان میشد یکی از موضوعات مهم آن نظریه‌گراف و چشم‌انداز آن بود. یکی از بزرگ‌ترین نقاط قوت نظریه‌گراف فراوانی ”مسائل زیبا“ و ”در انتظار حل“ در آن است. هم‌چنان حدس‌ها و ادعاهای جدید در خصوص مسائل باز و نو در این نظریه در حال ایجاد است. بسیاری از مسائل در نظریه‌گراف به ابزار و مقدمات پیچیده نیاز ندارد و بیشتر متکی بر نبوغ و تفکر خلاقانه است. هر چند که نقش تبحر در مفاهیم مختلف ریاضی از جمله ترکیبیات، نظریه احتمال و بسیاری دیگر از موضوعات در میزان پیشرفت این نظریه غیرقابل انکار است.

بدون شک کاربرد نظریه گراف در سایر علوم و استفاده از این ابزار قدرتمند در حل مسائل مختلف، به‌ویژه در علوم کامپیوتر، مهم‌ترین دلیل برای وجود چشم‌انداز درخشان برای این نظریه در آینده خواهد بود. هر چند نباید از زیبایی‌های ذاتی خود این نظریه و دنیای شگفت‌انگیز گراف‌ها هم به‌عنوان دلیلی برای توسعه آن غافل شد.

مراجع

[1] K. Appel and W. Haken, Every planar map is four colorable, *Illinois Journal of Mathematics*, **21** (1977) 439–597.

[2] M. Behzad and G. Chartrand, *Introduction to the theory of graphs*, Allyn and Bacon: Boston, 1971.

[3] N. Biggs, *Algebraic Graph Theory*, Second edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[4] B. Bollobás, *Extremal Graph Theory*, Academic Press, 1978.

[5] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, *Graph Theory, Graduate: Texts in Mathematics*, Springer, New York, 2008.

[23] Hilbert

[6] F. E. Browder (editor), *Mathematical Developments Arising from Hilbert Problems, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, **28** (Part 1), American Mathematical Society, Providence, 1976.

[7] A. Cayley and M. Philos, 1874, 47, 444–446, as quoted in N. L. Biggs, E. K. Lloyd and R. J. Wilson, *Graph Theory 1736–1936*, Clarendon Press, Oxford, 1976; Oxford, University Press, 1986.

[8] G. Chartrand, L. Lesniak and P. Zhang, *Graphs & digraphs*, (5th ed.), CRC Press, 2012.

[9] R. Diestel, *Graph theory* (5th ed.), Springer, 2017.

[10] L. Euler, Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis, *Comment. Acad. Sci. U Petrop*, **8** (1736) 28–40.

[11] C. Godsil and G. Royle, *Algebraic Graph Theory, Graduate Texts in Mathematics*, Springer–Verlag, New York, 2001.

[12] F. Harary, *Graph theory*, Addison-Wesley, 1969.

[13] D. Hilbert; Mathematical problems, *Bulletin of the American Mathematical Society*, **8** (1902) 437–479.

[14] K. Kuratowski, Sur le probléme des courbes gauches en topologie, *Fund Math*, **15** (1930) 271–283.

[15] j. O'Connor and E. F. Robertson, The Four Colour Theorem, 1996. Web. 2 Apr. 2015. http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Thefour

[16] A. J. Schwenk and R. J. Wilson, On the eigenvalues of a graph, *Selected Topics in Graph Theory*, (1978) 307–336.

[17] C. Thomassen, Kuratowski's theorem, *J. Graph Theory*, **5** (1981) 225–241.

[18] G. Wanner, H. Gerhard and E. Hairer, *Analysis by its history*, (1st ed.), Springer Publishing, 2005.

[19] D. West, *Introduction to graph theory*, Prentice Hall, 2001.

میثم طاهری دهکردی
دانشکده ریاضی، دانشگاه جامع علمی کاربردی، تهران، ایران
m.taheri@uast.ac.ir

میثم طاهری دهکردی متولد مهرماه ۱۳۶۰ در شهرکرد است. وی تحصیلات خود را در مقطع کارشناسی، کارشناسی ارشد و دکتری به ترتیب در دانشگاه شهرکرد، دانشگاه علم و صنعت و دانشگاه کاشان گذرانده است و هم اکنون استادیار دانشگاه جامع علمی کاربردی است.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.139804.1623