Mathematics and Society
University of Isfahan
http://math-sci.ui.ac.ir

Journal of Mathematics and Society
ISSN (print): 2345-6493, ISSN (on-line): 2345-6507
Vol.10 No. 2 (2025), pp. 63-83.
© 2025 The Author(s)
http://www.ui.ac.ir

IDENTIFICATION OF COMMUNITIES IN SOCIAL NETWORKS BASED ON GAME THEORY WITH STABLE COALITIONS

MOHAMMAD VALI HAIRAN, ALI DELAVER KHALAFI*, SAEID ALIKHANI, ZAHRA NIKOOEINEJAD, MAHDIYEH HASHEMINEZHAD

Abstract. Due to the availability of more data and the increase of interactive activities in social media, the identification of overlapping associations has been considered. In this paper, a game theory-based approach to identify overlapping associations is proposed. In this method, association detection is modeled as a coalition formation game. In this game, individuals in a social network are modeled as rational actors whose goal is to improve the group's utility, which is achieved by cooperating with other players and forming coalitions. Each player can join multiple alliances, and alliances with fewer players can merge into a larger alliance as long as the joining operation is conducive to the alliance's goals. Therefore, overlapping associations can be identified simultaneously. In this article, two types of methods based on cooperative and non-cooperative game theory have been discussed. The results report is analyzed based on the comparison of association methods in the form of a diagram. It can be seen that the game group and the COFOGA method perform better association.

Keywords: cooperative game, non-cooperative game, association overlap detection, stable coalition social networks.

Article Type: Promotional Paper.

Communicated by Soghra Nobakhtian.

*Corresponding author.

Received: 21-02-2024, Accepted: 11-08-2024, Published Online: 26-04-2025.

Cite this article: M. V. Hairan, A. Delaver khalafi, S. Alikhani, Z. Nikooeinejad and M. Hasheminezhad, Identification of communities in social networks based on game theory with stable coalitions, *Journal of Mathematics and Society*, **10** no. 2 (2025) 63–83.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140739.1647 .

1. Introduction

Social network websites provide the possibility of communication between people through the Internet. Networks can have different specifications. One of the most important features is the structure of communities. A community in a network is a group of nodes that are densely interconnected and sparsely connected to other parts of the network. In other words, communities are groups of nodes in a network where nodes within each community are more connected to each other than nodes outside the community. Identifying these communities can help to understand the structural features of social networks and improve user-centricity.

Identification of communities in cases has many applications such as online marketing, determining the location of online advertisements and services such as identifying influential users with the ever-increasing growth in online social networks, and targeted marketing. In the environment of social networks, people's behavior is not completely independent and there is cooperation and interaction between people. We know that game theory is the science of studying human behavior and also modeling the relationship of behavior governing strategic environments. In this environment, each person's behavior and decision-making depends not only on his own behavior, but also on the behavior of others. Therefore, social networks can be analyzed based on game theory. Game theory can be divided into two categories: cooperative games and non-cooperative game [4].

In the model of cooperative games, groups of agents who have come as a team or group to make a profit or win the game, by cooperating with binding agreements and existing rules, they increase the probability of their profit or victory. In a cooperative game collaborative behaviors is studied and agents work together to improve group utility. These groups of agents is called the coalition. Methods based on cooperative game theory consider the formation of an community as a result of group interaction and cooperation. In non-cooperative games, the individual behaviors of the agents are studied and each agent chooses his own strategy to improve his utility. Methods based on non-cooperative game theory consider community formation as the result of individual behaviors of selfish agents and society structure as a balance between individual agents.

In this paper, an almost new approach to identify communities which uses the theory of cooperative and non-cooperative games, is studied.

Identifying communities in social networks is a complex issue, and depending on the characteristics of the network and the purpose of the analysis, there are different methods to identify it [9].

In the article [21, 22] two coalition game models were proposed. The first model focused on the network structure and used the Shapley value to measure people's participation. The second model used both network structure and individual characteristics and assessed participation in connection proximity and preference for specific topics. However, these approaches do not identify overlapping communities.

The first result related to community detection in computer science is probably the graph extraction problem that can be designed VLSI [6] and the modeling of roles and positions in the social structure

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140739.1647

should return [18]. While these approaches are relevant to association detection, Newman pointed out several facts that make the approaches unsuitable for association detection. [14]. For example, in a graph extraction problem, the number of nodes to be extracted and the number of groups to be extracted are usually specified in advance, which is very different from our proposed association detection problem. The second serious drawback of these methods based on graph distribution is that they are all basically examples of finding distributions of a graph in such a way that the number of overlapping (interfering) edges between distributions is minimized. However, a small number of overlapping edges may not be a good indication of associations without considering the inherent connections between nodes in the graph.

Newman's concept of modularity is the first successful attempt to fix the bugs mentioned [14]. Modularity is defined on the superposition of nodes in a graph. Suppose G is an undirected graph that models a social network with n nodes and m edges. builds Assume that each node v belongs to the community c_v. We define the indicator function $\delta(c_u, c_v) = 1$ if and only if $c_u = c_v$, that is, two nodes u,v are in the same community, otherwise $\delta(c_u, c_v) = 0$. The modularity of Q is the distribution of this special association as follows, where A is the adjacency matrix of G with $A_{uv} = 1$, when $_{uv\in E}$ and otherwise $A_{uv} = 0$. Also, d_u, d_v are the degrees of nodes u and v, respectively:

$$Q = \frac{1}{2m} \sum_{u,v} \big(A_{uv} - \frac{d_u d_v}{2m}\big)\delta(c_u, c_v).$$

2. Main results

After introducing the detection of associations based on game theory, some methods introduced in the paper, are experimentally evaluate on real networks and benchmark networks. Two types of methods based on cooperative and non-cooperative game theory have been discussed. The results report is analyzed based on the comparison of association methods in the form of a diagram.

3. Conclusions

Social networking websites provide the possibility of communication between people through the Internet. One of the most important features of social networks is the structure of communities in networks. This article has studied a game theory-based approach to identify overlapping communities, which is an important issue in this issue. In the studied method, networks or communities are modeled as a coalition formation game, and individuals in a social network are modeled as rational actors whose goal is to improve the group's utility, which is achieved by cooperating with other players and forming coalitions. Each player can join multiple alliances, and alliances with fewer players can merge into a larger alliance as long as the joining operation improves the alliance's goals. Therefore, overlapping communities can be identified simultaneously. Report the results based on the comparison of association methods and it was examined in the form of a diagram. It was observed that the game group and the COFOGA method are better at finding associations.

M. V. Hairan
Department of Mathematical Sciences, Yazd University, 89195-741, Yazd, Iran
Email: mwalihairan8@gmail.com

A. Delavar Khalafi
Department of Mathematical Sciences, Yazd University, 89195-741, Yazd, Iran
Email: delavrkh@yazd.ac.ir

S. Alikhani
Department of Mathematical Sciences, Yazd University, 89195-741, Yazd, Iran
Email: alikhani@yazd.ac.ir

Z. Nikooeinejad
Department of Mathematical Sciences, Yazd University, 89195-741, Yazd, Iran
Email:z.nikooeinejad@yazd.ac.ir

M. Hasheminezhad
Department of Mathematical Sciences, Yazd University, 89195-741, Yazd, Iran
Email:hasheminezhad@yazd.ac.ir

 http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140739.1647

ریاضی و جامعه
شاپا (چاپی): ۲۳۴۵-۶۴۹۳، شاپا(الکترونیکی): ۲۳۴۵-۶۵۰۷
جلد ۱۰، شماره ۲ (۱۴۰۴)، صص. ۶۳-۸۳
© ۱۴۰۴ دانشگاه اصفهان

http://www.ui.ac.ir
http://math-sci.ui.ac.ir

تشخیص انجمن‌ها در شبکه‌های اجتماعی بر اساس نظریه‌بازی با ائتلاف پایدار

محمدولی حیران، علی دلاور خلفی*، سعید علیخانی، زهرا نیکویی‌نژاد یزدی و مهدیه هاشمی‌نژاد

چکیده. با توجه به در دسترس بودن بیشتر داده‌ها و افزایش فعالیت‌های تعاملی در رسانه‌های اجتماعی، شناسایی همپوشانی انجمن‌ها مورد توجه قرار گرفته است. در این مقاله، یک رویکرد مبتنی بر نظریه بازی برای شناسایی همپوشانی انجمن‌ها بررسی شده است. در این روش، تشخیص انجمن‌ها را به‌عنوان یک بازی تشکیل ائتلاف مدل‌سازی می‌کنند. در این بازی، افراد در یک شبکه اجتماعی به‌عنوان بازیگران منطقی، مدل‌سازی می‌شوند که هدفشان بهبود مطلوبیت گروه است که از طریق همکاری با سایر بازیکنان و تشکیل ائتلاف‌ها دست‌یابی به این هدف را ممکن می‌سازد. هر بازیکن می‌تواند به چندین ائتلاف بپیوندد و ائتلاف‌هایی که بازیکنان کمتری دارند، می‌توانند تا زمانی که عملیات پیوستن برای اهداف ائتلاف بهبود بخش باشد، در یک ائتلاف بزرگتر با یکدیگر ادغام شوند. بنابراین، همپوشانی انجمن‌ها می‌توانند به‌طور همزمان شناسایی شوند. در این مقاله، به دو نوع روش مبتنی بر نظریه‌بازی همکارانه و غیرهمکارانه پرداخته شده است. گزارش نتایج براساس مقایسه روش‌های انجمن‌یابی به‌صورت نمودار مورد بررسی قرار می‌گیرد. مشاهده می‌شود که بازی گروهی و روش COFOGA بهتر انجمن‌یابی می‌کنند.

۱. مقدمه

وب‌سایت‌های شبکه‌های اجتماعی امکان برقراری ارتباط بین مردم از طریق اینترنت را فراهم می‌سازد. شبکه‌ها می‌توانند مشخصات مختلف داشته باشند. یکی از مهم‌ترین این مشخصات، ساختار انجمن‌ها[۱] در شبکه‌ها می‌باشد. انجمن‌ها به گروه‌هایی از گره‌ها در شبکه اشاره دارند که یال‌های بین گره‌ها در داخل گروه تراکم دارد ولی در بین گروه‌ها پراکنده و کم است [۲]. به‌عبارت دیگر انجمن‌ها گروه‌هایی از گره‌ها در یک شبکه هستند که گره‌های درون هر انجمن بیشتر به یکدیگر نسبت به گره‌های خارج از انجمن متصل هستند. شناسایی این انجمن‌ها می‌تواند به درک ویژگی‌های ساختاری شبکه‌های اجتماعی و بهبود کاربر محوری کمک کند.

شناسایی انجمن‌ها در مواردی نظیر بازاریابی آنلاین، تعیین مکان تبلیغات آنلاین و خدماتی مانند شناسایی کاربران بانفوذ با رشد روزافزون در شبکه های اجتماعی آنلاین، و بازاریابی هدفمند کاربردهای فراوانی دارد. در محیط شبکه‌های اجتماعی، رفتار افراد کاملاً مستقل نیست و همکاری و تعامل بین افراد وجود دارد. می‌دانیم که نظریه‌بازی‌ها علم مطالعه رفتار انسان‌ها است و همچنین مدل‌سازی رابطه رفتار حاکم بر محیط‌های راهبردی را برعهده دارد. در این محیط رفتار و تصمیم‌گیری هر فرد نه‌تنها به رفتار خود، بلکه به رفتار دیگران نیز بستگی دارد. بنابراین، می‌توان شبکه‌های اجتماعی را بر اساس نظریه‌بازی‌ها تحلیل کرد. نظریه‌بازی می‌تواند به دو دسته بازی همکارانه [۲] و غیرهمکارانه [۳] تقسیم شود [۴].

عبارات و کلمات کلیدی: بازی همکارانه؛ بازی غیرهمکارانه؛ شناسایی همپوشانی انجمن.
نوع مقاله: ترویجی
دبیرتخصصی رابط: صغری نوبختیان
تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۱۲/۰۲ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۵/۲۱ تاریخ انتشار آنلاین: ۱۴۰۴/۰۲/۰۱
ارجاع به مقاله: م. حیران، علی د. خلفی، س. علیخانی، ز. نیکویی‌نژاد یزدی و م. هاشمی‌نژاد، تشخیص انجمن‌ها در شبکه‌های اجتماعی بر اساس نظریه‌بازی با ائتلاف پایدار، نشریه ریاضی و جامعه، ۱۰ شماره ۲ (۱۴۰۴) ۶۳-۸۳.
http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140739.1647 .

[1]community [2]cooperative game [3]non-cooperative game

در مدل بازی‌های همکارانه، گروه‌های عوامل [۴] که برای سود بردن و یا پیروزی در بازی به‌صورت تیم یا گروه درآمده‌اند با همکاری توافق‌نامه‌های الزام‌آور و قوانین موجودی احتمال سود و یا پیروزی خود را بالا می‌برند. در بازی همکارانه رفتارهای مشارکتی مورد مطالعه قرار می‌گیرد و عوامل برای بهبود مطلوبیت گروه با یکدیگر همکاری می‌کنند. این گروه‌های عوامل را ائتلاف [۵] می‌نامند. به عبارت‌دیگر، روش‌های مبتنی بر نظریه‌بازی همکارانه، تشکیل انجمن را نتیجهٔ تعامل و همکاری گروهی می‌دانند. در مقابل، در بازی‌های غیرهمکارانه، رفتارهای فردی عوامل مورد مطالعه قرار می‌گیرد و هر عامل راهبرد خود را برای بهبود مطلوبیت خود انتخاب می‌کند. روش‌های مبتنی بر نظریه‌بازی غیرهمکارانه، تشکیل انجمن را نتیجهٔ رفتارهای فردی عوامل خودخواه و ساختار جامعه را به‌عنوان تعادل بین عوامل فردی در نظر می‌گیرند.

در این مقاله، یک رویکرد کم و بیش جدید برای شناسایی انجمن‌ها، که از نظریه بازی‌های همکارانه و غیرهمکارانه مطالعه شده است، استفاده می‌کند.

شناسایی انجمن‌ها در شبکه‌های اجتماعی یک مسئله پیچیده است و بسته به ویژگی‌های شبکه و هدف تحلیل، روش‌های متفاوتی برای شناسایی آن وجود دارد [۹]. اجازه دهید که کمی به یاداوری مفاهیم مورد نیاز از نظریه گراف بپردازیم.

گراف G، زوج مرتب $(V(G), E(G))$ است که در آن $V(G)$ یک مجموعه متناهی ناتهی از عناصری به نام رأس‌ها است و $E(G)$ یک مجموعه متناهی از جفت عناصر مجزای $V(G)$ است که مجموعه یال‌ها نامیده می‌شود. رأس‌های u و v از مجموعه $V(G)$ را رئوس مجاور می‌گوییم، هرگاه یالی بین آن‌ها وجود داشته باشد، یعنی $u, v \in E(G)$ در غیر این‌صورت آن دو رأس غیرمجاور گفته می‌شود. درجه رأس v تعداد یال‌های متصل به رأس v است و آن‌را با نمادهای $deg(v)$ و یا $\rho(v)$ نشان می‌دهیم. گشت، دنباله‌ای از رأس‌ها و یال‌ها در گراف است که به دنبال یکدیگر می‌آیند. گشتی که در آن هیچ رأسی بیش از یک‌بار ظاهر نشده باشد، مسیر نامیده می‌شود و تعداد یال‌های مسیر، طول آن مسیر نامیده می‌شود. دور گرافی است که از یک مسیر با مجاور کردن دو رأس انتهایی آن به‌دست می‌آید. دور n رأسی با C_n نشان داده شده و تعداد یال‌های دور، طول دور نامیده می‌شود. دور با طول فرد، دور فرد و با طول زوج، دور زوج نامیده می‌شود. گراف منتظم گراف ساده‌ای است که تمام درجه‌های رئوس آن مساوی باشد. گراف کامل K_n گرافی است که با n رأس که درجه هر رأس آن $n-1$ باشد. به‌عبارت دیگر، در گراف کامل هر دو رأس متمایز، مجاورند. منظور از k–خوشه در گراف G، زیرگراف کامل K_k در G است.

برای شناسایی جوامع همپوشانی، پالا، درنی، فارکِس و ویکسِک [۶] در سال ۲۰۰۵ یک انجمن به نام k–خوشه را معرفی کردند. دراین روش، اندازه خوشه به‌عنوان ورودی مورد نیاز است [۱۶]. آن، بِگرو و لِیمن [۷] در سال ۲۰۱۰ یک انجمن را به‌عنوان مجموعه‌ای از میزان ارتباط دوستی افراد با یکدیگر در نظر گرفتند، اما الگوریتم آن‌ها به‌دلیل تعداد بیشتری از پیوندها نسبت به گره‌ها، هزینه محاسباتی بیشتری نیاز دارد [۱]. بال، کارر و نیومن [۸] در سال ۲۰۱۱ یک مدل احتمالاتی از انجمن‌های پیوندی ارائه کردند، اما معیاری برای تعیین تعداد انجمن‌ها در یک شبکه ارائه ندادند [۳]. چن، لیو، سان، و وانگ [۹] در سال ۲۰۱۰ یک چارچوب مبتنی بر نظریه بازی غیرهمکارانه برای کشف همپوشانی انجمن‌ها پیشنهاد کردند [۵]. الواری، هاشمی و حمزه [۱۰] در سال ۲۰۱۱ تشکیل انجمن‌ها در شبکه‌های اجتماعی را به‌عنوان یک بازی تکراری معرفی و در آن روش جدیدی مبتنی بر نظریه‌بازی پیشنهاد کردند که رفتار کاربران را نیز مدنظر قرار می‌دهد [۲].

مقاله [۱۱] به تشخیص انجمن به‌عنوان یک مسئله نظریه‌بازی غیرهمکارانه می‌پردازد و از یک الگوریتم برای تشخیص تعادل نش استفاده کردند. در مقاله [۸] از یک مدل انتشار اطلاعات و مفهوم ارزش شَپلی [۱۱] برای حل مسئله تشخیص انجمن‌ها استفاده شده است. توجه کنید ارزش شَپلی یک مفهوم راه‌حل در نظریه بازی‌های همکارانه است. این نام به افتخار لوید شَپلی [۱۲] ، که آن‌را در سال ۱۹۵۱ معرفی کرد و در سال ۲۰۱۲ برنده جایزه نوبل در علوم اقتصادی شد، نامگذاری شد [۱۷]. برای هر بازی همکارانه، توزیع منحصر به‌فردی

[4]groups of agents [5]coalition [6]Palla, Derényi, Farkas and Vicsek [7]Ahn, Bagrow and Lehmann [8]Ball, Karrer and Newman [9]Chen, Liu, Sun and Wang [10]Alvari, Hashemi and Hamzeh [11]Shapley value [12]Lloyd Shapley

(در بین بازیکنان) از کل مازاد تولید شده توسط ائتلاف همه بازیکنان را اختصاص می‌دهد. مقدار شَپلی با مجموعه‌ای از ویژگی‌های مطلوب مشخص می‌شود.

در مقاله [۲۱، ۲۲] دو مدل بازی ائتلافی پیشنهاد شد. مدل اول تمرکز خود را بر روی ساختار شبکه قرار داد و از ارزش شَپلی برای اندازه‌گیری مشارکت افراد استفاده کرد. مدل دوم از هر دو ساختار شبکه و ویژگی‌های فردی استفاده کرد و مشارکت در نزدیکی اتصال و ترجیح به موضوع‌های خاص را ارزیابی کرد. با این‌حال، این رویکردها جوامع همپوشانی را شناسایی نمی‌کنند.

اولین نتیجه مربوط به تشخیص انجمن در علوم کامپیوتر احتمالاً مسئله افراز گراف است که می‌تواند به طراحی VLSI [۶] و مدل‌سازی نقش‌ها و موقعیت‌ها در ساختار اجتماعی برگردد [۱۸]. در حالی‌که این رویکردها به تشخیص انجمن مرتبط هستند، نیومن به چند واقعیت اشاره کرد که رویکردها را برای شناسایی انجمن‌ها نامناسب می‌کند [۱۴]. به‌عنوان مثال، در یک مسأله افراز گراف، تعداد گره‌هایی که باید افراز شوند و تعداد گروه‌هایی که باید افراز شوند، معمولاً از قبل مشخص می‌شوند، که تفاوت زیادی با مسأله تشخیص انجمن مورد نظر ما دارد. دومین اشکال جدی این روش‌های مبتنی بر افراز گراف این است که همه آنها اساساً نمونه‌هایی از یافتن افرازهای یک گراف هستند به طوری‌که تعداد یال‌های همپوشانی (تداخلی) بین افرازها به حداقل می‌رسد. بااین‌حال، تعداد کمی از یال‌های همپوشانی ممکن است بدون در نظر گرفتن ارتباطات ذاتی بین گره‌ها در گراف، نشانه خوبی برای انجمن‌ها نباشد.

مفهوم نیومن از مدولار بودن اولین تلاش موفق برای رفع اشکالات ذکر شده است [۱۴]. مدولار بودن بر روی افرازی از گره‌ها در یک گراف تعریف می‌شود. فرض کنیم G یک گراف بدون جهت باشد که یک شبکه اجتماعی با n گره و m یال را مدل‌سازی می‌کند. فرض کنیم هر گره v متعلق به انجمن c_v است. تابع نشانگر $\delta(c_u, c_v) = ۱$ را تعریف می‌کنیم اگر و فقط اگر $c_u = c_v$، یعنی دو گره u, v در یک انجمن هستند و در غیر این‌صورت $\delta(c_u, c_v) = ۰$. مدولاریتی Q این افراز انجمنِ خاص به‌صورت زیر است که در آن A ماتریس مجاورت G با $A_{uv} = ۱$ است، هرگاه $uv \in E$ و در غیر این‌صورت $A_{uv} = ۰$. همچنین d_u, d_v به‌ترتیب درجات گره‌های u و v هستند:

$$Q = \frac{۱}{۲m} \sum_{u,v} (A_{uv} - \frac{d_u d_v}{۲m}) \delta(c_u, c_v).$$

بقیه این مقاله به این شرح سازماندهی شده است. بخش ۲ تشخیص انجمن‌ها را بر اساس نظریه‌بازی معرفی می‌کند. در بخش ۳، چهار روش معرفی شده در بخش ۲، به‌صورت تجربی بر روی شبکه‌های واقعی و شبکه های معیار مورد ارزیابی قرار می گیرد. بخش ۱.۲ بازی گروهی همکارانه، بخش ۲.۲ بازی‌فردی (غیرهمکارانه) و بخش ۳ نتایج ارزیابی الگوریتم‌ها را شامل می‌شوند. بخش آخر ۴ بحث و نتیجه‌گیری این مقاله هست.

۲. تشخیص انجمن‌ها بر اساس نظریه‌بازی

فرض کنیم که $G = (V, E)$ یک گراف بدون وزن و بدون جهت باشد که نماینده یک شبکه اجتماعی است که در آن $n = |V|$ تعداد گره‌ها و $m = |E|$ تعداد یال‌ها در روابط بین اعضای شبکه اجتماعی است. ماتریس مجاورت گراف G را با A نشان می‌دهیم که $A(x, y) = ۱$ برای هر جفت رأس $x, y \in V$ که $(x, y) \in E$.

در این‌صورت، ماتریس مجاورت A یک ماتریس $n \times n$ است و هر درایه a_{ij} ماتریس مجاورت نشان می‌دهد که آیا یالی میان دو گره v_i و v_j وجود دارد یا خیر. در گراف غیرساده، درایه a_{ij} برابر است با تعداد یال‌هایی که دو گره v_i و v_j را به هم پیوند می‌دهد. برای هر گراف، ماتریس مجاورت یکتا دارد. و در غیر این‌صورت ۰ است. فرض کنیم S_i یک زیرمجموعه از V باشد که به‌عنوان یک ائتلاف گروهی از افراد در شبکه اجتماعی عمل می‌کند. همچنین، Γ نشان دهنده یک ساختار ائتلاف (مجموعه ائتلاف‌ها) است، به این معنی‌که $\Gamma = \{S_۱, S_۲, \ldots, S_k\}$.

رویکرد مورد نظر شامل بازی گروهی و بازی انفرادی است. در ابتدا، یک بازی همکارانه را در نظر می‌گیریم که در آن بازیکنان با یکدیگر همکاری می‌کنند تا خدمات شرکت‌های ائتلاف را بهبود بخشند. پس از آن، یک بازی غیرهمکارانه را در نظر می‌گیریم که در آن هر بازیکن راهبرد خود را برای بهبود مطلوبیت خود انتخاب می‌کند. بازیکنان در ابتدا، بازی گروهی را برای دستیابی به تعادل انجام می‌دهند.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140739.1647

به این معنی که هدفشان پیدا کردن ائتلاف‌هایی است که در آن هیچ ائتلافی نتواند مطلوبیت گروهی خود را از طریق مشارکت با دیگران بهبود بخشد. سپس، با توجه به تعادل در بازی انفرادی می‌رسند که هیچ بازیکنی با تغییر راهبرد خود نتواند مطلوبیت خود را بهبود بخشد. تعادل‌های حاصل نشان دهنده ساختار انجمن در یک شبکه است.

۱.۲. بازی‌گروهی همکارانه. در یک بازی‌گروهی افراد در یک شبکه اجتماعی به‌عنوان بازیکنان منطقی مدل‌سازی می‌شوند که همکاری با سایر بازیکنان برای ایجاد ائتلاف سعی در دستیابی به بهبود خدمات گروهی دارند. ائتلاف‌هایی که تعداد کاربران کمتری دارند، می‌توانند در ائتلاف‌های بزرگتر ادغام شوند. از آنجا که عملیات ادغام می‌تواند به بهبود خدمات ائتلاف‌های ادغام شده کمک کند، این بازی، از گره‌ها (به‌عنوان ائتلاف‌های جداگانه) با یک نفر شروع می‌شود. در مرحله بعد افراد سعی به اضافه شدن در گروه‌های ائتلافی ایجاد شدهٔ قبلی که بیشترین سود را برایشان دارد، دارند. ائتلاف‌هایی که می‌توانند بیشترین افزایش سود مورد نظر را داشته باشند در ائتلاف‌های بزرگتر ادغام می‌شوند تا تابع مطلوبیت گروه‌ها بهبود یابد تا زمانی که چنین عملیات ادغامی دیگر نباشد. این نشان می‌دهد که بازی به یک حالت تعادل ائتلافی رسیده است، که در آن هیچ گروهی از بازیکنان علاقه‌ای برای انجام عملیات ادغام دیگری ندارد [۷]. مرجع اصلی مطالب دو صفحه بعد مقاله [۲۴] می‌باشد.

تعریف ۱.۲ (تابع مطلوبیت یک ائتلاف). فرض کنیم S_i مجموعه انجمن‌ها به نام ائتلاف باشد و ائتلاف در یک شبکه $G = (V, E)$ تعریف شده باشد. اگر $e(S_i)$ تعداد یال‌های بین رأس‌های داخلی ائتلاف S_i و $d(x)$ درجه‌ی رأس x باشد، آنگاه تابع مطلوبیت $\nu(S_i)$ از S_i به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$v(S_i) = \frac{۲e(S_i)}{\sum_{x\in S_i} d(x)} - (\frac{\sum_{x\in S_i} d(x)}{۲m})^۲ \quad (۱)$$

در واقع $\nu(S_i)$ تابع مطلوبیت بهبودیافتهٔ مدل نیومن [۱۳] و گیروان [۱۴] است [۹]. مطلوبیت کلی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Q = \sum_{c=۱}^{n_c} (\frac{e(S_c)}{m} - (\frac{d(S_c)}{m})^۲) \quad (۲)$$

در این تعریف، Q نیز تابع مطلوبیت کلی ائتلاف است که با جمع مقادیر تابع مطلوبیت برای هر انجمن در ائتلاف به‌دست می‌آید. همچنین فرمول عمومی تابع مطلوبیت به‌صورت زیر است: فرض کنیم S ائتلافی از گراف $G = (V, E)$ باشد، تابع مطلوبیت $v(S)$ از S به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$v(S) = \frac{۲e(S)}{\sum_{x\in S} d(S)} - \alpha(\frac{\sum_{x\in S} d(S)}{۲\beta|E|})^۲ \quad (۳)$$

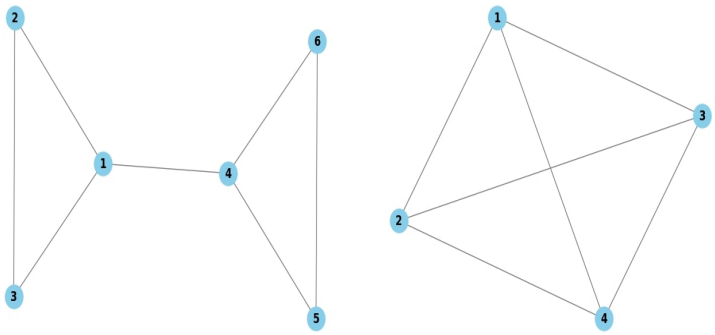
جمله اول و جمله دوم در معادله ۳، به‌ترتیب تابع بهره و تابع هزینه S نامیده می‌شوند. تابع افزایش نسبت پیوندهای داخل S به درجه کل رئوس در S است. تابع هزینه در عوض نشان دهنده نسبت درجه کل در آن ائتلاف به درجه کل در شبکه است. مقدار تابع بهرهٔ بزرگ به این معنی است که تعاملات بیشتری بین بازیکنان داخل S وجود دارد و مقدار تابع هزینه بزرگتر به این معنی است که تعامل بیشتری بین بازیکنان ائتلاف S و گره‌های بقیه در شبکه وجود دارد. معادله ۲.۲ به این معنی است که تشکیل یک ائتلاف برای اعضای آن دستاوردهایی به همراه دارد، اما دستاوردها با هزینه‌ای برای تشکیل ائتلاف محدود می‌شود. پارامتر $\alpha \in [۰, ۱]$ یک عامل مقیاس است که برای تنظیم هزینه ائتلاف S استفاده می‌شود. توجه کنید $\alpha = ۰$ به معنای هزینه صفر برای تشکیل ائتلاف است، یعنی تشکیل ائتلاف همیشه سودمند است. در این مورد، تابع سودمند $\nu(S)$ به‌دلیل اینکه تنها توسط تابع بهره تعریف می‌شود، صعودی اکید است.

[13] Neuman [14] Girvan

بدین ترتیب $\nu(V) = ۱$، $\nu(\{x\}) = ۰, x \in V$ بدان معناست که تابع مطلوبیت ائتلاف بزرگ دارای مقدار حداکثر است، درحالی‌که تابع مطلوبیت یک ائتلاف تک‌نفره دارای مقدار ۰ است. وقتی‌که $\alpha = ۱$، هزینه تشکیل ائتلاف‌ها حداکثر است،

$$V(\{x\}) = -\alpha(\frac{\sum_{x\in V} d(S)}{۲\beta|E|})^{۲}, \ x \in V.$$

بنابراین ائتلاف بزرگ و مجموعه ائتلاف‌های بی‌اهمیت به ندرت ساختارهای بهینه هستند. علاوه بر این، هرچه $d(x)$ کوچکتر باشد؛ $v(x)$، بزرگتر خواهد بود. این بدان معناست که رئوس با درجات کوچک تمایل بیشتری به همکاری با رئوس دیگر برای بهبود کاربردهای خود دارند. پارامتر $\beta \in (۰, ۱]$ پارامتر دیگری است که برای تنظیم زمینه ائتلاف استفاده می‌شود. $\beta = ۱$ به این معنی است که زمینه ائتلاف‌ها کل شبکه است. $\beta < ۱$ به این معنی است که زمینه ائتلاف محلی از شبکه‌های پیچیده و معمولاً شامل رئوس و پیوندهای زیادی هستند، بنابراین هزینه یک ائتلاف با درجات کمتر ممکن است نسبت به کل شبکه نادیده گرفته شود. با استفاده از β، هزینه‌ها محلی‌سازی می‌شوند.



شکل ۱. دو گراف ساده

Figure 1: Two simple graph

مثال ۲.۲. [۲۴] شکل ۱، دو شبکه اجتماعی ساده را نشان‌می دهد. یک شکل، یک شبکه با ۴–خوشه و شکل دیگر یک شبکه با دو ۳–خوشه است. برای ۴–خوشه، اگر $\alpha = ۱$، و $\beta = ۱$؛ آنگاه $\nu(S) = \frac{۲e(S)}{d(S)} - (\frac{d(S)}{۲|E|})^{۲}$ و بنابراین

$$\nu(۱, ۲) = \frac{۲}{۶} - (\frac{۶}{۱۲})^{۲} = ۰٫۰۸,$$
$$\nu(\{۱, ۲, ۳\}) = \frac{۶}{۹} - (\frac{۹}{۱۲})^{۲} = ۰٫۱۲,$$
$$\nu(\{۱, ۲, ۳, ۴\}) = ۰.$$

پس ۴–خوشه را نمی‌توان به‌درستی ارزیابی کرد. اگر $\alpha = \frac{۱}{\sqrt{|E|}}$، و $\beta = ۱$؛ آنگاه

$$\nu(\{۱, ۲\}) = \frac{۲}{۶} - \frac{۱}{\sqrt{۶}}(\frac{۶}{۱۲})^{۲} = ۰٫۲۳,$$
$$\nu(۱, ۲, ۳) = \frac{۶}{۹} - \frac{۱}{\sqrt{۶}}(\frac{۹}{۱۲})^{۲} = ۰٫۴۴,$$
$$\nu(۱, ۲, ۳, ۴) = ۱ - \frac{۱}{\sqrt{۶}} = ۰٫۵۹.$$

بنابراین، ۴–خوشه را می‌توان به درستی ارزیابی کرد.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140739.1647

در شکل با دو ۳–خوشه اگر $\beta = ۱$، و $\alpha = ۰$؛ آنگاه

$$\nu(۱,۲,۳,۴,۵,۶) = ۱,$$

ائتلاف بزرگ مطلوبیت حداکثر دارد و نمی‌توان دو ۳–خوشه را به‌درستی ارزیابی کرد.
اگر $\beta = ۱$، و $\alpha = \frac{۱}{\sqrt{|E|}}$؛ آنگاه

$$\nu(\{۲,۳\}) = \frac{۲}{۴} - \frac{۱}{\sqrt{۷}}(\frac{۷}{۱۴})^۲ = ۰/۶۸,$$
$$\nu(۱,۲,۳,۴) = \frac{۸}{۱۰} - \frac{۱}{\sqrt{۷}}(\frac{۸}{۱۴})^۲ = ۰/۶۸,$$
$$\nu(\{۱,۲,۳\}) = \frac{۶}{۷} - \frac{۱}{\sqrt{۷}}(\frac{۷}{۱۴})^۲ = ۰/۷۶.$$

دو ۳–خوشه را می‌توان به‌درستی ارزیابی کرد. نابرابری

$$\nu(۴) < \nu(۱,۲,۳,۴) < \nu(۱,۲,۳),$$

به این معنی است که بازیکنان ۱، ۲ و ۳ با بازیکن ۴ همکاری نمی‌کنند، اگرچه بازیکن ۴ قصد دارد به گروه بپیوندد [۱۶].

تعریف ۳.۲. ائتلاف S_i به‌عنوان یک ائتلاف پایدار در نظر گرفته می‌شود، هرگاه S_i نتواند از طریق ادغام با سایر ائتلاف‌ها، مطلوبیت خود را بهبود بخشد، یعنی:

$$\nu(S_i + S_j) < \nu(S_i), \quad \forall\, S_j \neq S_i,$$

و

$$\nu(S_i) > \nu(S_j), \quad \forall\, S_j \subset S_i.$$

تعریف ۴.۲. فرض کنیم $S_{ij} = S_i + S_j$ با ادغام ائتلاف S_i و S_j به‌دست آید. تغییرات تابع مطلوبیت ائتلاف (تفاضل متقارن) S_i نسبت به S_{ij} با $\Delta\nu(S_i, S_{ij}) = \nu(S_{ij}) - \nu(S_i)$ تعریف می‌شود. دو شرط $e(S_i, S_j) \neq ۰$ و $\Delta\nu(S_i, S_{ij}) > ۰, \Delta\nu(S_j, S_{ij}) > ۰$ باید برای ادغام‌های S_i و S_j برقرار باشد.

شرط اول نشان می‌دهد که دو ائتلاف بدون یال مشترک نمی‌توانند در یک ائتلاف بزرگتر ادغام شوند. طبیعی است که در این عملیات، ادغام نمی‌تواند به بهبود مطلوبیت ائتلاف کمک کند، بنابراین برای ادغام ائتلاف با دیگران می‌توان تنها با بررسی همسایگان آن (ائتلاف‌هایی که یال‌های مشترک بین آن‌ها وجود دارد)، بدون جستجوی جامع در کل شبکه، تصمیم گرفت. بحث‌های بعدی نشان می‌دهد که مطلوبیت S_i و S_j باید از طریق عملیات ادغام بهبود یابند [۵]. قضیه زیر شرط کافی برای پایدار بودن یک ساختار انجمن را بیان می‌کند.

قضیه ۵.۲. مجموعه ائتلاف‌های $\Gamma = \{S_۱, S_۲, \ldots, S_k\}$ یک ساختار انجمن پایدار است اگر تمام انجمن‌های $S_۱, S_۲, \ldots, S_k$ پایدار باشند.

اثبات. از این‌که $S_۱, S_۲, \ldots, S_k$ جوامع پایدار هستند، برای هر کدام از آن‌ها داریم:

$$S_i \in \Gamma, \quad \forall S_{ij} \in \Gamma, \quad \Delta\nu(S_i, S_{ij}) < ۰.$$

بنابراین

$$\forall\, S_i \in \Gamma, \quad \max(\max_{S_{ij}} \Delta\nu(S_i, S_{ij}), ۰) = ۰.$$

از این‌رو، می‌توان نتیجه گرفت که مجموعه ائتلاف‌ها نیز یک ساختار انجمن پایدار است. □

قضیه ۶.۲. ساختار انجمن پایدار $\Gamma = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$، حداکثر مقدار مطلوبیت $v(\Gamma)$ را اختیار می‌کند.

اثبات. از اینکه $\Gamma = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ یک ساختار انجمن پایدار است، نتیجه می‌گیریم که:

$$\forall\, S_i \in \Gamma, \quad \max(\max_{S_{ij}} \Delta\nu(S_i, S_{ij}), 0) = 0 \quad \Rightarrow \nu(\Gamma) = 0.$$

به این ترتیب، ساختار انجمن کل مطلوبیت $v(\Gamma)$ را به حداکثر می‌رساند [۲۳]. □

تعریف ۷.۲. مجموعه ائتلاف‌های $\Gamma = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ را به‌عنوان یک ساختار ائتلاف پایدار در نظر می‌گیریم، هرگاه شرط زیر برقرار باشد:

$$\forall\, S_i \in \Gamma, \max\left(\max_{S_{ij}} \Delta\nu(S_i, S_{ij}), 0\right) = 0$$

ساختار ائتلاف پایدار، نوعی حالت تعادل برای ائتلاف‌ها است که در آن هیچ گروهی از بازیکنان علاقه‌ای به انجام عملیات ادغام بیشتر ندارد. بعد از رسیدن بازی گروهی به حالت تعادل ائتلاف‌ها، مطلوبیت هر ائتلاف نمی‌تواند بهبود یابد، اما ممکن است مطلوبیت فردی برخی از بازیکنان حاصل نشود. بنابراین، بازیکنان برای بهبود مطلوبیت فردی خود، به بازی انفرادی می‌پردازند.

۲.۲. بازی‌غیرهمکارانه. روش‌های مبتنی بر نظریه‌بازی غیرهمکارانه، تشکیل انجمن را نتیجهٔ رفتارهای فردی عوامل خودخواه و ساختار جامعه را به‌عنوان تعادل بین عوامل فردی در نظر می‌گیرند. به‌عبارت دیگر، این روش‌ها فرض می‌کنند که افراد در یک جامعه به‌صورت غیرهمکارانه عمل می‌کنند و تمرکزشان بر سود و منافع فردی است.

در یک بازی فردی، هر فرد به‌عنوان یک بازیکن خودخواه در یک شبکه اجتماعی مدل‌سازی می‌شود. این بازیکنان، مستقل از ساختار مجموعه‌ای از ائتلاف‌های پایدار $\Gamma = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$، بر اساس یک معیار اندازه‌گیری مناسب، ائتلاف‌ها را انتخاب می‌کنند. هر بازیکن می‌تواند چندین ائتلاف را برای پیوستن یا ترک انتخاب کند [۲۰].

تعریف ۸.۲. در این بخش به‌بررسی تشکیل انجمن‌ها براساس رفتار فردی بازیکنان می‌پردازیم. ابتدا سود رأس x در ائتلاف تعریف می‌شود، فرض کنیم $x \in V$، $S_i \in \Gamma$ و $d(x)$ درجه رأس x باشند. سود رأس x در ائتلاف S_i به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\nu_x(S_i) = \frac{e(x, S_i)}{d(x)},$$

که در آن $e(x, S_i)$ تعداد یال‌هایی است که رأس x را به رئوس ائتلاف S_i متصل می‌کنند. مقدار $\nu_x(S_i)$ نسبت یال‌های بین رأس x و ائتلاف S_i به درجه x را اندازه‌گیری می‌کند و نشان‌دهنده نزدیکی، بین x و S_i است.

روابط $0 \leq \nu_x(S_i) \leq 1$ و $\nu_x(S_i) = 1$ به این معنی است که همهٔ یال‌های x به رئوس در S_i متصل هستند. در این‌حالت پس از پیوستن به S_i، x به رأس داخلی S_i تبدیل می‌شود، به‌عبارت دیگر مقدار بیشتر $\nu_x(S_i)$ نشان‌دهندهٔ رابطه نزدیک‌تر بین x و S_i است. $\nu_x(S_i) = 0$ به این معنی است که هیچ یالی x را به یکی از رئوس در ائتلاف S_i متصل نمی‌کند.

۳.۲. الگوریتم‌های مبتنی بر نظریه بازی برای تشخیص انجمن‌ها. الگوریتم مبتنی بر نظریه‌بازی برای تشخیص انجمن‌ها، که با عنوان الگوریتم COCO-game [۱۵] مشخص می‌شود، یک بازی تشکیل انجمن‌ها است که در آن اعضا به تشکیل انجمن‌ها (گروه‌ها) در یک شبکه اقدام می‌کنند. این بازی ابتکاری است که به‌منظور بررسی و تحلیل رفتار افراد در شبکه‌های اجتماعی و شبکه‌های پیچیده توسعه داده شده است [۲۴]. الگوریتم مبتنی بر نظریه‌بازی می‌تواند در تشخیص جوامع در شبکه‌های مختلف مانند شبکه‌های اجتماعی، شبکه‌های وب و شبکه‌های حمل و نقل مورد استفاده قرار گیرد. با استفاده از این الگوریتم، می‌توان ساختار جامعه‌ها را بهبود بخشید. مراحل اصلی الگوریتم refalg:coco-game به شرح زیر است:

[15] COCO (Community-Organized Collocation Overlapping)

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140739.1647

الگوریتم ۱ الگوریتم COCO-game

ورودی: توضیح ورودی‌ها.

خروجی: توضیح خروجی‌ها.

شروع

۱: مرحله تخصیص اولیه: در این مرحله، هر گره به‌صورت جداگانه به یک انجمن اختصاص می‌یابد. به‌عبارت دیگر در مرحله اول $\Gamma = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ مجموعه‌ای از انجمن‌ها است که هر S_i یک مجموعه تک عضوی است.

۲: مرحله تنظیم بازی: برای هر گره، یک تابع سود تعریف می‌شود که نشان می‌دهد تمایل آن گره برای تعامل با گره‌های دیگر در یک انجمن چقدر است. این تابع سود بر اساس تعداد همسایگان یک گره در انجمن خود و تعداد همسایگان آن در انجمن‌های دیگر محاسبه می‌شود.

در مرحله ۲، برای هر S_i و S_j در Γ، S_{ij} را قرار می‌دهیم اگر $e(S_i, S_j) \neq 0$ باشد و شروط $\Delta\nu(S_i, S_{ij}) > 0$ و $\Delta\nu(S_j, S_{ij}) > 0$ برقرار باشند. در این‌صورت Γ جدید به‌صورت $\Gamma = \Gamma + \{S_{ij}\} - \{S_i\} - \{S_j\}$ خواهد بود.

۳: مرحله تکرار بازی: در این مرحله، بازی بین هر گره و همسایگانش تکرار می‌شود تا سود آن‌ها بهبود یابد. در هر تکرار، یک گره انتخاب می‌شود که به یک انجمن همسایه بپیوندد یا همسایگان خود را به انجمن خود دعوت کند. هدف این مرحله، انتخاب عملیاتی است که بهبودی در سود آن گره ایجاد کند.

۴: مرحله پایانی: تکرار بازی متوقف می‌شود، وقتی هیچ گره‌ای نتواند با تغییر استراتژی خود سود خود را بهبود دهد. در مرحله ۴، برای هر $x \in V$، اگر $x \notin S_i$ و $\nu_x(S_i) > \omega$ باشد، آنگاه $S_i = S_i + \{x\}$ موجب پیوستن x به S_i خواهد شد. همچنین، اگر $x \in S_i$ و $\nu_x < \varepsilon$، آنگاه $S_i = S_i - \{x\}$ که موجب ترک کردن x خواهد شد. توجه کنید که مقادیر ω و ε معیارهایی برای پیوستن و یا ترک کردن هستند.

۵: مرحله پس‌پردازش: در این مرحله، انجمن‌هایی که تداخل قابل توجهی در اعضای آن‌ها وجود دارد، ترکیب می‌شوند. این کار با محاسبه شباهت میان اعضای انجمن‌ها و ترکیب جوامعی که شباهت بیشتری دارند، انجام می‌شود. در نهایت، ساختار نهایی انجمن پایدار $\Gamma = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ حاصل می‌شود [۲۴].

۴.۲. الگوریتم مبتنی بر تعادل محلی و بازی گروهی. در این زیربخش توضیحات مختصری در مورد دو الگوریتم تعادل محلی و بازی گروهی ارائه خواهیم داد.

زمانی‌که جوامع یا شبکه‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم، می‌توان از نظریه بازی برای مدل‌سازی تعاملات و فرایندهای تصمیم‌گیری بین اعضای آنها استفاده کرد. هر عضو را می‌توان به‌عنوان یک بازیکن در یک بازی در نظر گرفت، جایی‌که استراتژی او نمایانگر دستور عمل ترجیحی اوست. با تحلیل استراتژی‌ها و پاداش‌ها (پاداش یا هزینه) مرتبط با اقدامات مختلف، نظریه‌بازی می‌تواند به پیش‌بینی یا توضیح رفتار و نتایج در جامعه کمک کند.

نظریه‌بازی و تشخیص جوامع در شبکه، تعادل‌های محلی (تعادل ناش) در داخل شبکه را تحلیل می‌کند. به‌جای در نظرگرفتن شبکه به‌عنوان یک کُل، تمرکز بر مطالعه تعاملات و تعادل‌ها در داخل زیرگروه‌ها یا جوامع کوچکتر است. با بررسی استراتژی‌ها و تعادل‌های درون این جوامع محلی، می‌توانیم درکی از نحوه تعامل و تصمیم‌گیری اعضا در داخل گروه‌های خودشان پیدا کنیم. توجه کنید در تعادل محلی، هر شرکت‌کننده در تعاملی استراتژیک و با توجه به استراتژی‌های انتخاب شده توسط سایر شرکت‌کنندگان، استراتژیی را انتخاب کرده است که برای خودش بهینه است، به عبارت‌دیگر در تعادل ناش، هیچ بازیکنی حوصله تغییر استراتژی خود را به‌صورت یکجانبه ندارد، زیرا این کار نتیجه خود را بهبود نخواهد بخشید. برای مطالعه بیشتر خواننده را به [۵، ۱۳] ارجاع می‌دهیم.

الگوریتم بازی گروهی (GGA) یک روش تشخیص اجتماعی بر پایه نظریه‌بازی است. هدف این الگوریتم شناسایی اجتماعات یا گروه‌های درون یک شبکه است که با مدل‌سازی تعامل بین گره‌ها به‌عنوان یک بازی همکارانه انجام می‌شود.

در زیر مراحل الگوریتم۲ (بازی گروهی) را بررسی می‌کنیم:

الگوریتم ۲ الگوریتم بازی گروهی (GGA)

ورودی: به هر گره در شبکه، راهبرد اولیه اختصاص داده می‌شود.
خروجی: تابع پاداش تعیین می‌کند که هر گره بر اساس راهبرد خود و ر اهبردهای گره‌های همسایه، چه سود یا فایده‌ای کسب می‌کند.
شروع
۱: تکرار بازی: مراحل زیر تا همگرایی یا رسیدن به یک شرط توقف پیش‌تعیین شده تکرار می‌شوند:
- هر گره راهبرد بهترین پاسخ خود را با در نظر گرفتن راهبردهای همسایه‌های خود انتخاب می‌کند.
- راهبرد همه گره‌ها به‌طور همزمان بر اساس بهترین پاسخ‌هایشان به‌روز می‌شوند.
- پاداش‌ها برای هر گره بر اساس راهبردهای به‌روز شده محاسبه می‌شوند.

۲: تشخیص اجتماعی:
- پس از همگرایی، استراتژی‌های نهایی گره‌ها را تجزیه و تحلیل می‌کنیم.
- گره‌هایی که استراتژی‌های مشابهی دارند، به یک خوشه استراتژی متعلق هستند، یعنی به‌عنوان یک اجتماع یا گروه مشخص می‌شوند.

۵.۲. الگوریتم تشکیل ائتلاف مبتنی بر بازی حریصانه تجمعی. در این زیربخش به‌طور خیلی خلاصه و گذرا به الگوریتم تشکیل ائتلاف مبتنی بر بازی حریصانه تجمعی (COFOGA) [۱۶] اشاره می‌کنیم. الگوریتم COFOGA از رویکرد خویشاوندانه استفاده می‌کند و با انتخاب ترکیب ائتلافی که منجر به بیشترین افزایش سود می‌شود، عمل می‌کند. هدف از این الگوریتم، بیشینه کردن سودها یا فواید گروه‌ها با ترکیب آنها به صورت استراتژیک است. این فرآیند تا زمانی ادامه می‌یابد که دیگر عملیات ترکیب قابل انجام نباشد که این نشان دهنده رسیدن الگوریتم به یک حالت پایدار است. برای تشخیص اینکه آیا دو ائتلاف قابل ترکیب هستند یا خیر، باید شرایط خاصی برقرار شود. این شرایط ممکن است بسته به الگوریتم و سنجه سود استفاده شده متفاوت باشد. متن ارائه شده شرایط دقیقی برای ترکیب دو ائتلاف فراهم نمی‌کند، اما به‌طور کلی ارزیابی سود یا بهره‌مندی حاصل از ترکیب ائتلاف‌ها نسبت به حفظ آنها به صورت جداگانه انجام می‌شود. برای آشنایی و مطالعه بیشتر این الگوریتم به [۲۳] مراجعه کنید.

۳. ارزیابی الگوریتم‌ها روی شبکه‌های واقعی

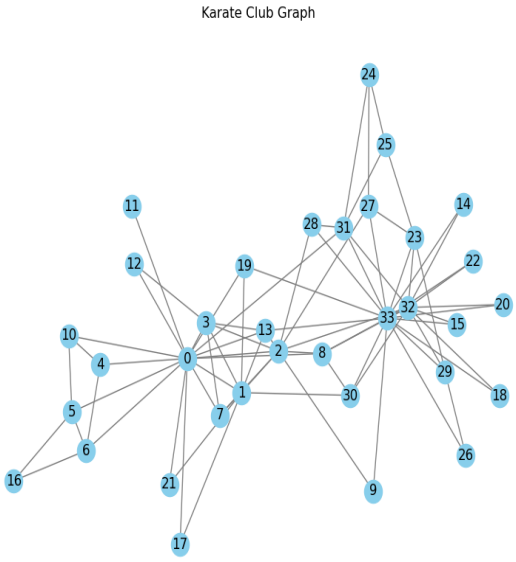
در این قسمت نتایج حاصل از پیاده‌سازی الگوریتم‌ها روی شبکه باشگاه کاراته زاخاری مورد مطالعه قرار گرفته است. این شبکه برای ارزیابی الگوریتم‌های انجمن‌یابی مورد استفاده قرار می‌گیرد. شبکه باشگاه کاراته (شکل ۲) شامل ۳۴ گره و ۷۹ یال است که نشان دهنده تعامل بین افرادی است که خارج از فعالیت‌های باشگاه با هم تعامل داشتند [۱۹].

شکل‌های ۳ و ۴ نتایج حاصل از پیاده‌سازی الگوریتم‌ها روی شبکه زاخاری را نشان می‌دهد. شکل ۳ سمت راست نتیجه الگوریتم تعادل‌محلی را نشان می‌دهد و شکل ۳ سمت چپ نشان دهنده نتیجه الگوریتم بازی‌گروهی است. شکل ۴ سمت راست نشان دهنده نتیجه الگوریتم COFOGA [۱۷] است و شکل ۴ سمت چپ نشان دهنده نتیجه الگوریتم COCO-game است. در این شبکه، الگوریتم تعادل‌محلی شش انجمن، الگوریتم بازی‌گروهی سه انجمن، الگوریتم COCO-game چهار انجمن و COFOGA سه انجمن را شناسایی می‌کنند [۵].

[16] Coalition formation game-based greedy agglomerative [17] coalition formation game-based greedy agglomerative

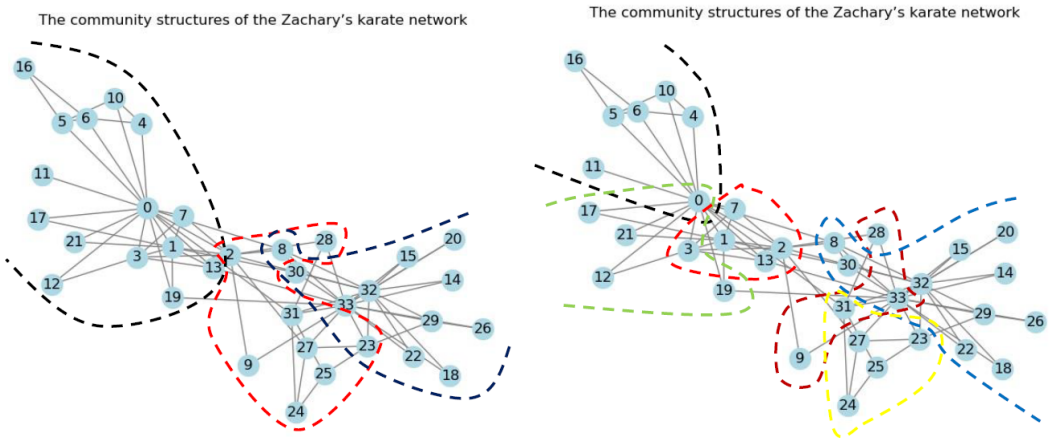
http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140739.1647

با مقایسه شکل‌های ۳ سمت چپ و ۴ سمت راست مشاهده می‌شود که گره، ۳ عضویت خود را تغییر می‌دهد و این تغییر عضویت، منجر به تقسیم انجمن به دو انجمن می‌شود. همچنین، با مقایسه شکل ۳ سمت راست و شکل ۴ سمت چپ، متوجه می‌شویم که ساختارهای شناسایی انجمن‌ها توسط الگوریتم تعادل‌محلی و الگوریتم COCO-game ساختارهای انجمن کشف شده در مطالعه نیومن و گیروان را اصلاح می‌کنند، به صورتی‌که شبکه به دو بخش تقسیم می‌شود: یک انجمن همپوشانی در سمت چپ و دو انجمن در سمت راست در شکل قابل مشاهده هستند.



شکل ۲. گراف کاراته زاخاری

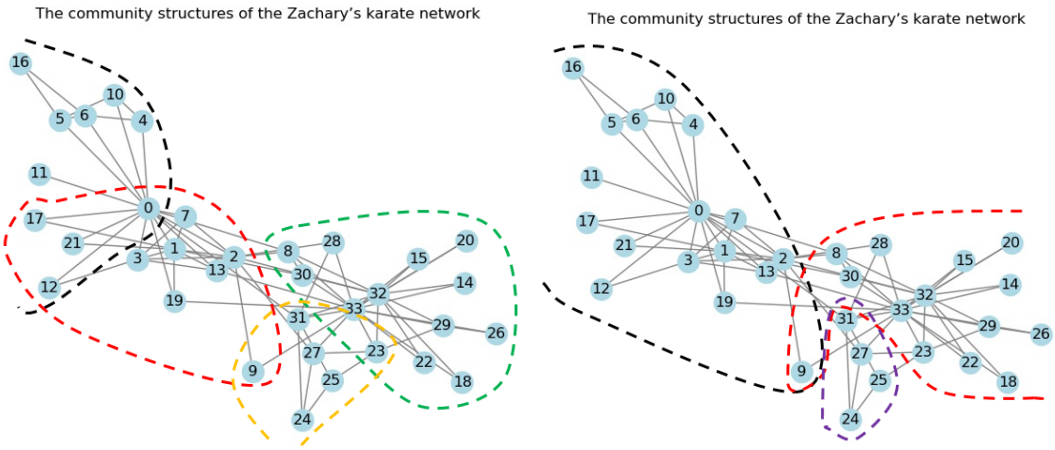
Figure 2: Karate Club graph



شکل ۳. از راست به ترتیب: خروجی الگوریتم تعادل محلی و خروجی الگوریتم بازی گروهی

Figure 3: From right to left: output of local equilibrium algorithm and output of group game algorithm

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140739.1647



شکل ۴. از راست خروجی الگوریتم COFOGA و خروجی الگوریتم COCO-game

Figure 4: From right, output of COFOGA and COCO-game algorithms

انجمن‌های شناسایی شده توسط COFOGA در سطح اول ($k = ۱$) در شبکه باشگاه کاراته، ساختارهای انجمنی شناسایی شده توسط الگوریتم تعادل‌محلی را تکرار می‌کنند. با این‌حال، تعداد انجمن‌ها و رئوس همپوشانی کشف شده توسط COFOGA با الگوریتم تعادل‌محلی متفاوت است. به‌عنوان مثال، در شبکه باشگاه کاراته، الگوریتم تعادل‌محلی شش انجمن و سه رئوس همپوشانی (۰، ۳۲ و ۳۳) را شناسایی می‌کند، در حالی‌که COFOGA سه انجمن و تنها یک رأس همپوشانی (رأس ۰، که دارای دو پیوند متصل به رئوس در جوامع مختلف است) را شناسایی می‌کند. در مقایسه گراف کاراته‌زخاری مشاهده می‌شود که، بازی‌گروهی و روش COFOGA همپوشانی بیشتر دارد و انجمن‌های بزرگتری نسبت به تعادل‌محلی و بازی COCO-game دارند در نتیجه بازی‌گروهی و روش COFOGA انجمن‌یابی بهتری انجام داده‌اند [۵].

۱.۳. ارزیابی الگوریتم‌ها با استفاده از شبکه‌های مرجع. ساختار انجمن، یکی از مهمترین ویژگی های شبکه‌های واقعی است و سازماندهی داخلی گره‌ها را آشکار می‌کند. الگوریتم‌های زیادی پیشنهاد شده‌اند، اما مسئله حیاتی، یعنی این که یک الگوریتم چقدر خوب است، با توجه به دیگر الگوریتم‌ها، مسأله ساده‌ای نیست. آزمون‌های استاندارد، شامل تجزیه و تحلیل گراف‌های مصنوعی ساده با ساختار انجمنی است که الگوریتم باید آنها را بازیابی کند. با این حال، نمودارهای ویژه اتخاذ شده در آزمون‌های واقعی ساختاری دارند که منعکس کننده ویژگی‌های واقعی گره‌ها و جوامع موجود در شبکه‌های واقعی نیست. لانچیچینتی [۱۸]، فورتوناتو [۱۹] و رادیچی [۲۰] یک کلاس جدید از گراف‌های معیار را معرفی کرده‌اند که ناموزونی در توزیع‌ها را با استفاده از درجه گره و اندازه انجمن توضیح می‌دهد. آنها از این معیار برای آزمایش دو روش رایج تشخیص انجمن، بهینه‌سازی مدولاریته و خوشه‌بندی مدل پاتز استفاده می‌کنند. نتایج نشان می‌دهد که معیار آنها نسبت به معیارهای استاندارد، آزمون بسیار سخت‌تری را برای الگوریتم‌ها ایجاد کرده و محدودیت‌هایی را آشکار می‌کند که ممکن است در تحلیل اول آشکار نباشند [۱۰]. برای ارزیابی الگوریتم COFOGA از معیار منسوب به این سه نفر استفاده می‌کنیم. می‌دانیم که اطلاعات متقابل عادی شده (NMI) [۲۱] [۲۲] معیاری است که به‌طور گسترده برای مقایسه روش‌های تشخیص جامعه و انجمن مورد استفاده قرار می‌گیرد. نتایج شبکه‌های واقعی را تجسم می‌کنیم و NMI بین ساختارهای انجمن شناسایی‌شده و حقیقت زمینه‌ای شبکه‌های

[۲۲] اطلاعات متقابل عادی شده (NMI) یک معیار تشابه پرکاربرد برای ارزیابی عملکرد الگوریتم‌های خوشه‌بندی و طبقه‌بندی است. وابستگی آماری بین دو متغیر را با در نظر گرفتن توزیع مشترک آنها و توزیع‌های فردی هر متغیر کمی می‌کند.

[18] Lancichinetti [19] Fortunato [20] Radicchi [21] normalized mutual information

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140739.1647

معیار را به‌عنوان معیار ارزیابی محاسبه می‌کنیم. همچنین، نتایج خود را از مراحل (۱) تا (۴) بازی گروهی الگوریتم COCO-game با نتایج تعادل‌محلی و COFOGA مقایسه می‌کنیم. این رویکرد برای تشخیص جوامع همپوشانی بر اساس نظریه‌بازی‌های غیرهمکارانه و ساختارهای مرجع کشف شده استفاده می‌شود.

در زیر به مهمترین نکات مربوط به مقدارهای NMI اشاره می‌کنیم:

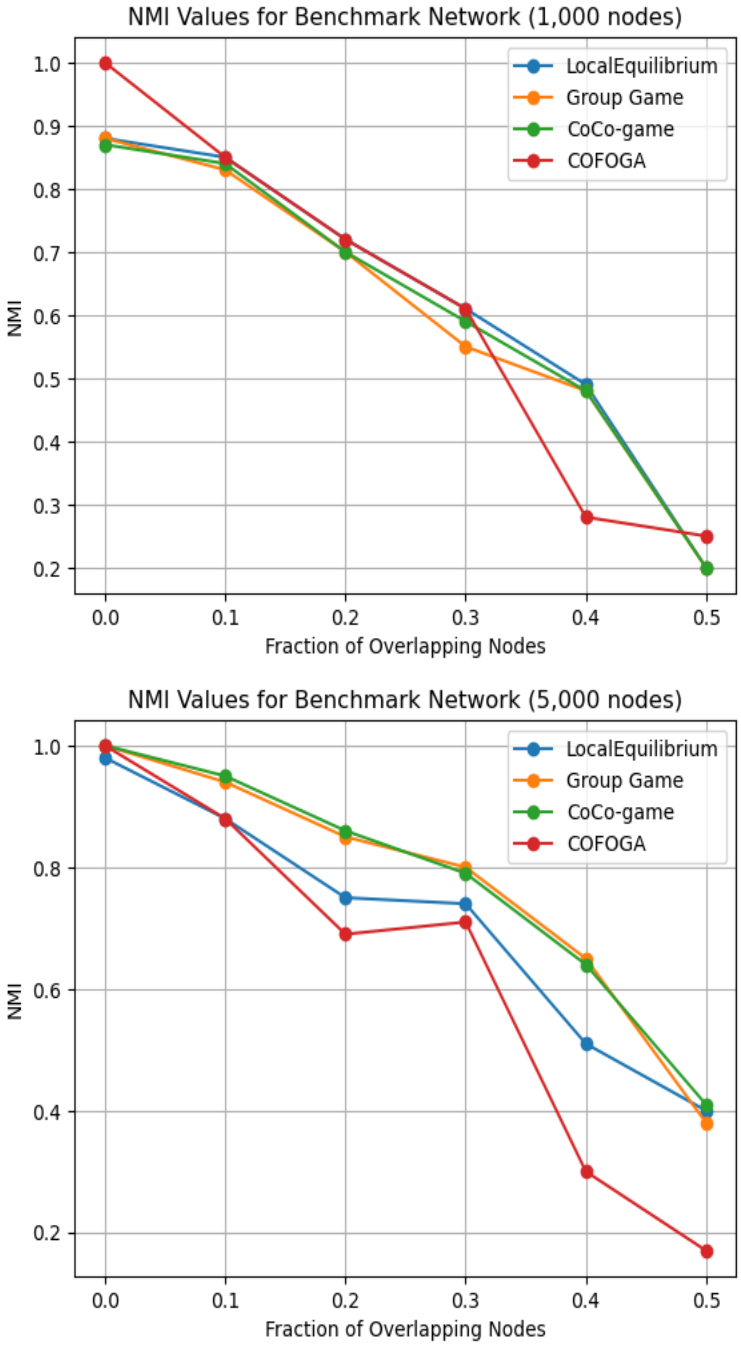
۱. NMI به‌عنوان معیاری از شباهت: NMI یک معیار معمول برای اندازه‌گیری شباهت بین دو مجموعه از ساختارهای انجمن است و مقدار آن بین ۰ تا ۱ قرار دارد، به‌گونه‌ای که عدد ۰ عدم شباهت را نشان می‌دهد و عدد ۱ به معنای تطابق کامل بین ساختارها است.
۲. مقایسه الگوریتم‌ها: این معیار به شما امکان می‌دهد که عملکرد الگوریتم‌های مختلف تعادل‌محلی، بازی‌گروهی، COCO-game و COFOGA در شناسایی ساختارهای انجمنی را مقایسه کنید. مقادیر NMI بالاتر به معنای توافق بیشتر بین انجمن‌های کشف شده است.
۳. تأثیر گره‌های تداخلی: این معیار تأثیر کسری از گره‌های تداخلی را بر عملکرد الگوریتم‌ها مورد بررسی قرار می‌دهد. با تغییر کسری از گره‌های تداخلی از ۰ تا ۵٪ می‌توانید تغییرات مقادیر NMI را مشاهده کنید. این کمک می‌کند تا درک بهتری از نحوه کار الگوریتم‌ها در مدیریت همپوشانی انجمن‌ها در حالت‌هایی که سطح همپوشانی افزایش می‌یابد، پیدا کنید.
۴. اندازه شبکه‌ها و پارامترهای مختلف: این معیار نیز به اندازه شبکه‌های مختلف (۱۰۰۰ و ۵۰۰۰ گره) و پارامترهایی مانند درجه میانگین، درجه بیشینه، تعداد عضویت گره‌های تداخلی، پارامتر ترکیب و اندازه انجمن توجه می‌کند. این تنوع‌ها به شما اجازه می‌دهد تا عملکرد الگوریتم‌ها را در تنظیمات شبکه‌های مختلف ارزیابی کنید.

به‌طور خلاصه مقادیر NMI اطلاعاتی درباره میزان شباهت الگوریتم‌های مختلف در شناسایی ساختارهای انجمنی در ساختارهای مرجع را ارائه می‌دهند. مقادیر NMI بالاتر، نشانگر توافق بیشتر بین انجمن‌های شناسایی شده و انجمن‌های مرجع هستند [۲۴].

شاخص‌های، میانگین درجه گره‌ها، درجه گره‌ها، تعداد گره‌های همپوشانی (تداخلی) و کسر گره‌های همپوشانی بین ۰ و ۵٪ برای تولید شبکه‌ها استفاده می‌شوند. تعداد گره‌ها در شکل ۵ مشخص است.

در شکل ۵ و ۶، الگوریتم‌های تعادل‌محلی، بازی گروهی، COCO-game و COFOGA براساس NMI حاصل ازخروجی الگوریتم ها روی شبکه های معیار مورد مقایسه قرار گرفتند. این مقایسه با استفاده از مقدارهای مختلف برای کسر رئوس همپوشانی که با μ نشان داده می‌شود، انجام شده است. در نمودار اول از شکل ۵، شبکه مرجع دارای ۱۰۰۰ گره است و در نمودار دوم از شکل ۵، شبکه مرجع دارای ۵۰۰۰ گره است. محور x میزان همپوشانی‌ها را نشان می‌دهد. شکل ۵ نشان می‌دهد که COCO-game در همه موارد بهتر از تعادل‌محلی و COFOGA عمل می‌کند. این نتیجه نشان می‌دهد که بازی‌انفرادی پس از بازی‌گروهی تأثیرگذار است. همچنین، COCO-game مشابه بازی‌گروهی عمل می‌کند و در برابر تعادل‌محلی و COFOGA بهتر عمل می‌کند. زمان اجرای بازی‌گروهی و COCO-game در شکل ۵ قابل قبول است و در همه موارد بسیار سریعتر از تعادل‌محلی و COFOGA است. همچنین، زمان اجرای الگوریتم تعادل‌محلی با افزایش تعداد گره‌ها، تعداد بخش‌های یال‌های متقاطع μ و کسر گره‌های همپوشانی به‌شدت افزایش می‌یابد. اما زمان اجرای بازی‌گروهی و COCO-game پایدارتر از تعادل‌محلی و الگوریتم COCO-game است.

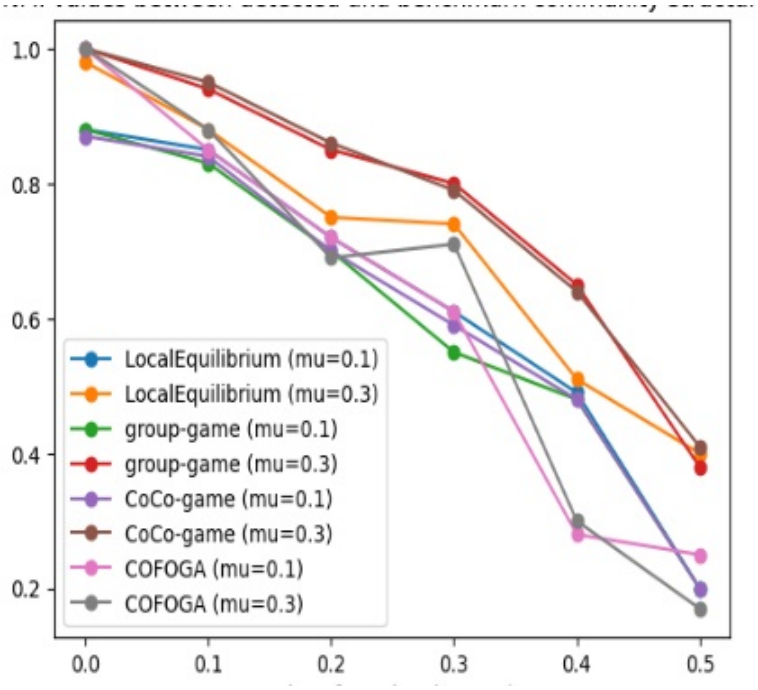
دو شکل ۵، نمایش مقادیر NMI بین ساختارهای انجمنی شناسایی شده توسط COCO-game و ساختارهای معیار انجمنی تحت پارامترهای ω و ε مختلف را نشان می‌دهد. در این شکل، از یک شبکه با ۱۰۰۰ گره استفاده شده است که ۱۵۰ گره آن متعلق به چهار انجمن است. محور x نشان دهنده مقدار ω یا ε است. از شکل ۳ مشاهده می‌شود که مقدار NMI تحت تأثیر ω و ε قرار دارد. تنظیم خودکار پارامترهای $\omega = \frac{1}{4}$ و $\varepsilon = \frac{1}{3}$ به‌عنوان پیشنهادی برای کارهای آینده ارائه شده است [۵].



شکل ۵. NMI شناسایی شده بین انجمن‌ها

Figure 5: NMI identified between communities

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140739.1647



شکل ۶. مقادیر NMI شناسایی شده بین انجمن‌ها

Figure 6: Values of NMI identified between communities

شکل ۵ نشان‌دهنده مقادیر NMI بین ساختارهای انجمن شناسایی شده توسط COCO-game و و ساختارهای جامعه با ویژگی‌های مختلف است. اندازه انجمن‌ها در شکل اول ۵ بین $s_{min} = ۱۰$ تا $s_{max} = ۵۰$ عضو و در شکل دوم ۵ بین $s_{min} = ۲۰$ تا $s_{max} = ۱۰۰$ عضو است. کسر همپوشانی برای شکل اول و دوم ۵ به‌ترتیب برابر با $\mu = ۰/۱$ و $\mu = ۰/۳$ است. سایر پارامترها شامل $\tau_۱ = ۲$، $\tau_۲ = ۱$، $k = ۲۰$ و $\max k = ۵۰$ و $om = ۲$ هستند (توجه کنید k مرتبه خوشه و om مقدار مدولاریتی بوده و توان‌های $\tau_۱$ و $\tau_۲$ مربوط به درجه گره‌هاست). نمودارها توسط مراحل زیر تولید شده‌اند:

۱. تعداد انجمن‌ها که هر گره به آن تعلق دارد، تولید می‌شود. درجه هر گره بر اساس توزیع توانی با توان $\tau_۱$ به گره‌ها اختصاص می‌یابد.
۲. اندازه انجمن براساس توزیع توانی دیگری با توان $\tau_۲$ برای تعداد ثابتی از انجمن‌ها اختصاص می‌یابد.
۳. گراف دوبخشی بین گره‌ها و انجمن‌ها را با مدل پیکربندی تولید می‌شود [۱۲].
۴. برای هر گره، درجه خروجی انجمن و درجه داخلی که کسر همپوشانی نامیده می‌شود، در هر انجمن بر اساس μ اختصاص می‌یابد.
۵. نمودارها را برای هر انجمن و یال‌های متقاطع انجمن به وسیله مدل پیکربندی ساخته می‌شود. برای گام‌های دقیق‌تر در مورد چگونگی تولید و پالایش نمودارها، خوانندگان می‌توانند به [۱۰] مراجعه کنند.

از شکل ۵ مشاهده می‌شود که الگوریتم‌های تعادل‌محلی، بازی‌گروهی، COCO-game و COFOGA زمانی‌که بخش یال‌های متقاطع $\mu = ۰/۱$ با مقدار NMI بالای ۹۰٪، عملکرد بسیار خوبی دارند. در گراف ۱۰۰۰ گره روش COFOGA و تعادل‌محلی بهتر انجمن‌یابی می‌کنند. همچنین، در گراف ۵۰۰۰ گره COCO-game زمانی‌که بخش رئوس همپوشانی کوچک است، از تعادل‌محلی و COFOGA بهتر عمل می‌کند و در بازی‌گروهی تقریباً مشابه عمل می‌کند. با توجه به $\mu = ۰/۳$، تعداد رئوس ($N = ۱۰۰۰$ یا $N = ۵۰۰۰$)، تعادل‌محلی

بهتر از COFOGA عمل می‌کند. از شکل ۵ مشاهده می‌شود که تعادل‌محلی در همه موارد بسیار سریعتر از COFOGA اجرا می‌شود. طولانی‌ترین زمان اجرای COFOGA به ترتیب ۱۱ و ۶۷ ثانیه برای $N = ۱۰۰۰$ و $N = ۵۰۰۰$ است، در حالی‌که کوتاه‌ترین زمان اجرای تعادل‌محلی ۱۸۵ ثانیه است و برای COFOGA، ۲۰۳ ثانیه برای $N = ۱۰۰۰$ و $N = ۵۰۰۰$ به‌ترتیب است.

علاوه بر این، زمان اجرای تعادل‌محلی با افزایش تعداد رئوس (N)، مقدار μ و کسری از رئوس همپوشانی به شدت افزایش می‌یابد. به‌عنوان مثال، زمان اجرای تعادل‌محلی برای $\mu = ۰/۳$ و $N = ۵۰۰۰$ برابر با ۴۴۹۵ ثانیه است. در این‌حالت، نیمی از رئوس مربوط به چند انجمن است. اما زمان اجرای COFOGA پایدارتر از تعادل‌محلی است.

از شکل ۵ مشاهده می‌شود که مقادیر مختلف β به مقادیر متفاوت NMI برای شبکه‌های مختلف منجر می‌شود و برای دستیابی به حداکثر NMI در شبکه‌های مختلف لازم است مقادیر متفاوتی از β در نظر گرفته شود. انتخاب مناسب β برای یک شبکه، یک مسئله مهم است که می‌توان به آن پرداخت.

۴. بحث و نتیجه‌گیری

وب‌سایت‌های شبکه‌های اجتماعی امکان برقراری ارتباط بین مردم از طریق اینترنت را فراهم می‌سازد. یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های شبکه‌های اجتماعی، ساختار انجمن‌ها در شبکه‌ها می‌باشد. این مقاله یک رویکرد مبتنی بر نظریه بازی‌ها را برای شناسایی همپوشانی انجمن‌ها که مسأله مهمی در این موضوع است، مورد بررسی قرار داده است. در روش مطالعه شده، شبکه‌ها یا انجمن‌ها را به‌عنوان یک بازی تشکیل ائتلاف مدل‌سازی کرده و افراد در یک شبکه اجتماعی به‌عنوان بازیگران منطقی، مدل‌سازی می‌شوند که هدفشان بهبود مطلوبیت گروه است که از طریق همکاری با سایر بازیکنان و تشکیل ائتلاف‌ها دست‌یابی به این هدف را ممکن می‌سازد. هر بازیکن می‌تواند به چندین ائتلاف بپیوندد و ائتلاف‌هایی که بازیکنان کمتری دارند، می‌توانند تا زمانی‌که عملیات پیوستن برای اهداف ائتلاف، بهبود بخش باشد، در یک ائتلاف بزرگتر با یکدیگر ادغام شوند. بنابراین، همپوشانی انجمن‌ها می‌توانند به‌طور همزمان شناسایی شوند. گزارش نتایج براساس مقایسه روش‌های انجمن‌یابی به‌صورت نمودار مورد بررسی قرار گرفته و مشاهده شد که بازی‌گروهی و روش COFOGA بهتر انجمن‌یابی می‌کنند.

مراجع

[1] Y. Y. Ahn, J. P. Bagrow and S. Lehmann, Link communities reveal multiscale complexity in networks, *Nature*, **466** (2010) 761–764.

[2] H. Alvari, S. Hashemi and A. Hamzeh, Detecting overlapping communities in social networks by game theory and structural equivalence concept, In: *International Conference on Artificial Intelligence and Computational Intelligence*, Springer, Berlin, Heidelberg, (2011) 620–630.

[3] B. Ball, B. Karrer and M. E. Newman, Efficient and principled method for detecting communities in networks, *Phys. Rev. E*, **84** no. 3 (2011) 036103.

[4] O. Chatain, *Cooperative and non-cooperative game theory*, In book: The Palgrave Encyclopedia of Strategic Management, University of Pennsylvania, 2016 pp. 1–3.

[5] W. Chen, Z. Liu, X. Sun and Y. Wang, *A game-theoretic framework to identify overlapping communities in social networks*, *Data Min. Knowl. Discov.*, **21** no. 2 (2010) 224–240.

[6] PO. Fjällström, Algorithms for graph partitioning: a survey, *Linköping electronic articles in computer and information science*, **3** (1998) pp. 34. `http://www.ep.liu.se/ea/cis/1998/010/`.

[7] M. Girvan and M. E. Newman, Community structure in social and biological networks, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **99** no. 12 (2002) 7821–7826.

[8] A. Hajibagheri, H. Alvari, A. Hamzeh and S. Hashemi, Social networks community detection using the shapley value, In: *The 16th CSI International Symposium on Artificial Intelligence and Signal Processing (AISP 2012)*, Shiraz, Iran, (2012) 222–227.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140739.1647

[9] A. Lancichinetti, S. Fortunato and J. Kertesz, Detecting the overlapping and hierarchical community structure in complex networks, *New J. Phys.*, **11** (2009) 122–128.

[10] A. Lancichinetti, S. Fortunato, and F. Radicchi, Benchmark graphs for testing community detection algorithms on directed and weighted graphs with overlapping communities. *Phys. Rev. E* **80** no.1 (2009) pp. 9.

[11] R. I. Lung, A. Gog and C. Chira, A game theoretic approach to community detection in social networks, Chapter In: *Nature Inspired Cooperative Strategies for Optimization (NICSO 2011)*, Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, (2011) 121–131.

[12] M. Molloy and B. Reed, A critical point for random graphs with a given degree sequence, *Random Struct Algorithms*, **6** no. 2-3 (1995) 161–180.

[13] V. Moscato, A. Picariello and G. Sperlí, Community detection based on Game Theory, *Eng. Appl. Artif. Intell.*, **85** (2019) 773–782.

[14] M. E. J. Newman, Modularity and community structure in networks, *Proc. Natl. Acad. Sci.*, **103** no. 23 (2006) 8577–8582.

[15] M. E. J. Newman and M. Girvan, Finding and evaluating community structure in networks, *Phys. Rev. E*, **69** (2004) 231–238.

[16] G. Palla, I. Derényi, I. Farkas and T. Vicsek, Uncovering the overlapping community structure of complex networks in nature and society, *Nature*, **435** (2005) 814–818.

[17] A. Roth, *The Shapley Value: Essays in Honor of Lloyd S. Shapley*, Cambridge: Cambridge University Press, 1988.

[18] H. C. White, S. A. Boorman and R. L. Breiger, Social structure from multiple networks. I. blockmodels of roles and positions, *Am. J. Soc.*, **81** no. 4 (1976) 730–780.

[19] W. W. Zachary, An information flow model for conflict and fission in small groups, *Journal of Anthropological Research*, **33** no. 4 (1977) 452–473.

[20] G. L.Zacharias, J. E. Macmillan and S. B. Van Hemel, *Behavioral modeling and simulation: From individuals to societies*, National Academies Press, 2008.

[21] L. Zhou, C. Cheng, K. Lü and H. Chen, Using coalitional games to detect communities in social networks, In: *International Conference on Web-Age Information Management*, Springer, Berlin, Heidelberg, (2013) 326–331.

[22] L. Zhou and K. Lü, Detecting communities with different sizes for social network analysis, *The Computer Journal*, **58** no. 9 (2015) 1894–1908.

[23] L. Zhou, K. Lü, P. Yang, L. Wang and B. Kong, An approach for overlapping and hierarchical community detection in social networks based on coalition formation game theory, *Expert Syst. Appl.*, **42** no. 24 (2015) 9634–9646.

[24] L. Zhou, P. Yang, K. Lü, L. Wang and H. Chen, A fast approach for detecting overlapping communities in social networks based on game theory, In: *British International Conference on Databases*, Springer, Cham, (2015) 62–73.

محمدولی حیران
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه یزد، یزد، ایران
mwalihairan۸@gmail.com>

محمدولی حیران دانشجوی دکتری ریاضی کاربردی دانشگاه یزد است.

علی دلاور خلفی
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه یزد، یزد، ایران
delavarkh@yazd.ac.ir

علی دلاور خلفی استاد بخش ریاضی کاربردی دانشکده علوم ریاضی دانشگاه یزد است.

سعید علیخانی
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه یزد، یزد، ایران
alikhani@yazd.ac.ir

سعید علیخانی استاد بخش ریاضی محض دانشکده علوم ریاضی دانشگاه یزد است.

زهرا نیکوئی نژاد
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه یزد، یزد، ایران
z.nikooeinejad@yazd.ac.ir

زهرا نیکوئی نژاد استادیار بخش ریاضی کاربردی دانشکده علوم ریاضی دانشگاه یزد است.

مهدیه هاشمی نژاد
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه یزد، یزد، ایران
hasheminezhad@yazd.ac.ir

مهدیه هاشمی نژاد استادیار بخش علوم کامپیوتر دانشکده علوم ریاضی دانشگاه یزد است.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140739.1647