Mathematics and Society
University of Isfahan
http://math-sci.ui.ac.ir

Journal of Mathematics and Society
ISSN (print): 2345-6493, ISSN (on-line): 2345-6507
Vol. 10 No. 1 (2025), pp. 67-77.

http://www.ui.ac.ir

TWO PROOFS FROM ĀZARKHOR ASHTĀZ GOSHNASP

REZA KAHKESHANI

Abstract. One of the Iranian scientists of the fourth and fifth centuries AH is Āzarkhor Ashtāz Goshnasp. His name is only mentioned in the works of the prominent Iranian scientist, Abū Rayhān al-Bīrūnī. In this paper, we will explain Āzarkhor's two proofs on the first theorem of the book "al-Estekhrāj al-Awtār" that given by Abū Rayhān. This theorem is called "Theorem of the broken chord" and these two proofs are the only mathematical legacy left by Āzarkhor.

1. Introduction

One of the Iranian engineers and mathematicians of the second half of the 4th century and the first third of the 5th century AH (10th and 11th centuries AD) is Āzarkhor Ashtāz Goshnasp. There is not much information about his life and his name is only mentioned in the works of famous Iranian scientist, Ūstād Abū Rayhān al-Bīrūnī [5]. In fact, Abū Rayhān's works are the only source about him. His name in Abū Rayhān's book, "al-Āthār al-Bāqiyah 'An al-Qurūn al-Khāliyah" (The Remaining Signs of Past Centuries) or in short "al-Āthār al-Bāqiyah", is mentioned in three places as "Abul-Hasan Āzarkhor ibn Yazdān-Khasis al-Muhandis" (where "Yazdān-Khasis" can be considered as a misspelling of "Yazdān-Djoshnasb"), "Abul-Hasan Āzarkhor al-Muhandis" and "Āzarkhor al-Muhandis" [2]. In these positions, Abū Rayhān has stated what he heard from Āzarkhor himself, respectively about

Keywords: Āzarkhor Ashtāz Goshnasp, Abū Rayhān al-Bīrūnī, al-Estekhrāj al-Awtār, Islamic age, Geometry.

Article Type: Promotional Paper.

Communicated by Saeid Maghsoudi.

Received: 13-11-2023, Accepted: 06-08-2024, Published Online: 13-02-2025.

Cite this article: R. Kahkeshani, Two proofs from Āzarkhor Ashtāz Goshnasp, *Journal of Mathematics and Society*, **10** no. 1 (2025) 67–77.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.139764.1622 .

"Epahomene", "the opinion of Iranians about the origin of the world and the creation of mankind" and "Sraosha day". In fact, al-Āthār al-Bāqiyah is a book on chronology, mixed with mathematics, astronomy and history, in which Abū Rayhān, in addition to the comparative study of the calendars of different nations, also explores their customs and religions. As can be seen, Āzarkhor was a contemporary of Abū Rayhān and they have met each other at least once. Also, in Abū Rayhān's book, the name "Āzarkhor" appears as "Āzarkhor ibn Ashtāz Djoshnas" in two positions [3]. According to the existence of similar names in the book "Iranian Name Book" [1], it is concluded that the correct form of his name is "Āzarkhor Ashtāz Goshnasp" [6].

The legacy of mathematics left by Āzarkhor can be found in the book "al-Estekhrāj al-Awtār". Abū Rayhān have discussed four geometrical theorems in this book and presented various proofs from himself and other mathematicians for each of them. Then, he have solved 30 problems in geometry, algebra and astronomy using these proofs and arguments. The main purpose of the book "al-Estekhrāj al-Awtār" is to compute the length of the chords of a circle in terms of its diameter [3]. In fact, Abū Rayhān has written two books on the derivation of the chords in the scientific language of those days, namely Arabic. All the contents of these two books have been compiled in a new form and along with the current mathematical terms by Abolqāsem Qorbānī, a prominent researcher of the history of Iranian mathematics, in Persian language in a book titled "Tahrīr al-Estekhrāj al-Awtār" [3]. To prove the first theorem of this book, Abū Rayhān has given 22 proofs, two of which are from Āzarkhor. Āzarkhor's first proof is similar to one of Archimedes's proofs in his book "The Circles" with a slight difference. Abū Rayhān has chosen the second proof of Āzarkhor with a small change to be mentioned in the book "al-Qānūn al-Mas'ūdī" from among the proofs that he and other scientists have given for the theorem [4]. In this paper, we explain Āzarkhor's two proofs for the first theorem of al-Estekhrāj al-Awtār. As it is stated, these two proofs are the only mathematical legacy left by Āzarkhor, which has reached us thanks to Abū Rayhān.

2. Main Results

In this section, we will state the first theorem of the book "al-Estekhrāj al-Awtār" and Āzarkhor's two proofs for this theorem. This theorem is known as "Theorem of the broken chord". To see the theorem and Āzarkhor's proofs, refer to the manuscript of the Leiden University Library. See Figures 1, 2 and 3. Leiden University is a university in the Netherlands whose library contains important resources in oriental studies.

Theorem 2.1. *Let the arc ABC in a circle and the broken chord ABC such that $AB > BC$. If we draw the perpendicular DE from point D, which is the midpoint of the arc ABC, to the chord AB then $AE = BC + BE$, that is, E bisects the broken chord ABC (Figure 4).*

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.139764.1622

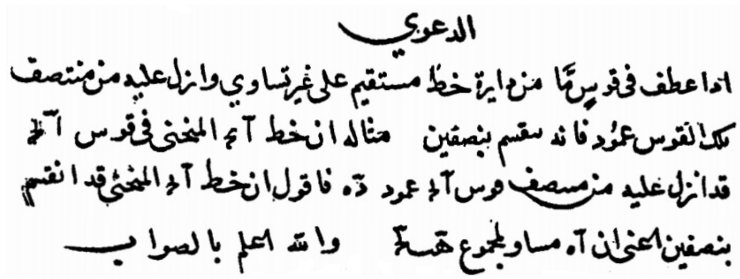


FIGURE 1. The first theorem in the Leiden University Library manuscript.

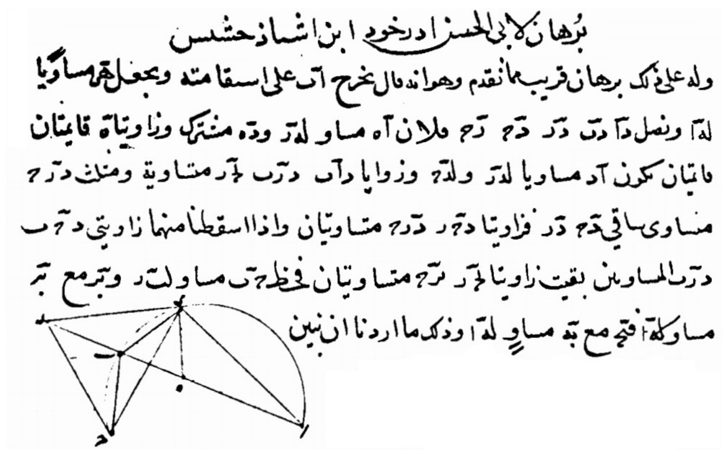


FIGURE 2. Āzarkhor's first proof in the Leiden University Library manuscript.

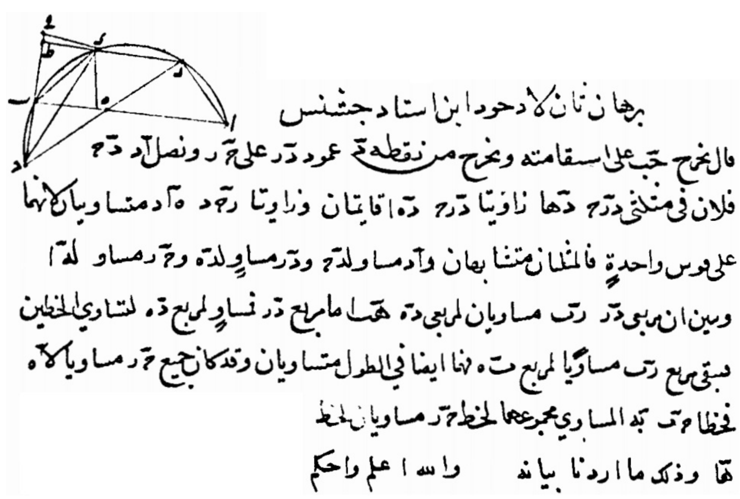


FIGURE 3. Āzarkhor's second proof in the Leiden University Library manuscript.

3. Summary of Proofs

In this section, we explain Āzarkhor's two proofs.

The first proof. We extend the chord AB to the point Z so that $AE = EZ$ and draw the line segments AD, BD, CD, CZ and DZ (Figure 5). Since DE is the perpendicular bisector of AZ, $AD = DZ$ and $\angle DAB = \angle DZB$. It is clear that $\angle DAB = \angle DCB = \overset{\frown}{BD}/2$. On the other hand, D is in the middle point of the arc ABC and $AD = CD$. Therefore, CDZ is an isosceles triangle and $\angle DZC = \angle DCZ$. Now,

$$\angle BZC = \angle DZC - \angle DZB = \angle DCZ - \angle DCB = \angle BCZ$$

and BCZ is also an isosceles triangle. So, $BC = BZ$ and

$$BC + BE = BZ + BE = ZE = AE.$$

□

The second proof. We extend the line segment BC and draw a perpendicular line DZ from D to the line BC. Moreover, we draw the line segments AD, BD and CD (Figure 6). Since D is in the middle point of the arc ABC, $AD = CD$. On the other hand, $\angle DAB = \angle BCD = \overset{\frown}{BD}/2$. Therefore, two right triangles AED and CDZ are congruent by the ASA and $DE = DZ$ and $AE = CZ$. It follows that two right triangles BDE and BDZ, which have a common chord, are congruent. So, $BE = BZ$ and

$$AE = CZ = CB + BZ = CB + BE.$$

□

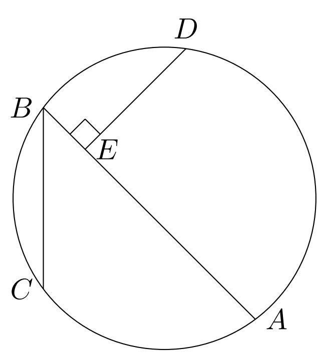


FIGURE 4. The broken line enclosed in a circle

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.139764.1622

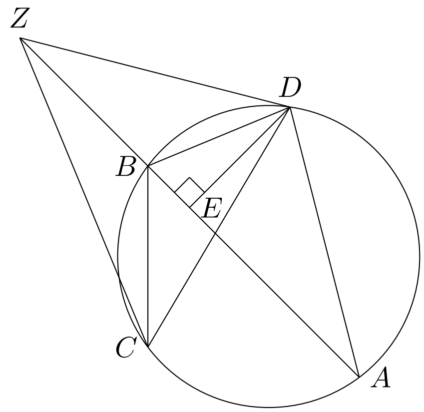


Figure 5. Āzarkhor's first proof

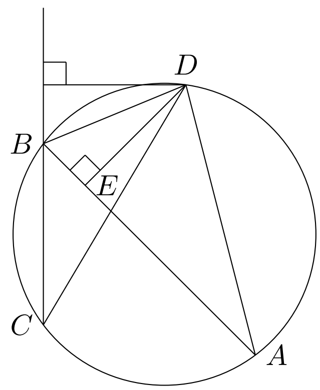


Figure 6. Āzarkhor's second proof

References

[1] F. Justi, *Iranisches Namenbuch*, N. G. Elwert'Sche Verlagsbuchhandlung, Marburg, 1895.

[2] A. R. al-Bīrūnī, *al-Āthār al-Bāqiyah*, Translated by A. Danaseresht, Amir Kabir Publishers, Tehran, 2010. [In Persian]

[3] A. Qorbānī, *Tahrīr al-Estekhrāj al-Awtār*, Andjoman Āsār Mellī Publishers, Tehran, 1976. [In Persian]

[4] A. Qorbānī, *A Research in the Mathematical Works of Abū Rayhān al-Bīrūnī (A new edition of Bīrūnī Nāmeh)*, Markaz Nashr Dāneshgāhī, Tehran, 1995. [In Persian]

[5] A. Qorbānī, *Biographies of Mathematicians of the Islamic Age*, 2nd printing, Markaz Nashr Dāneshgāhī, Tehran, 1996. [In Persian]

[6] Y. Kerāmatī, *The Great Islamic Encyclopedia*, The Center for the Great Islamic Encyclopedia, Tehran, 2021. [In Persian]

Reza Kahkeshani

Department of Pure Mathematics, University of Kashan, Postal Code 8731753153, Kashan, Iran

Emaill: kahkeshanireza@kashanu.ac.ir

ریاضی و جامعه
شاپا (چاپی): ۲۳۴۵-۶۴۹۳، شاپا(الکترونیکی): ۲۳۴۵-۶۵۰۷
جلد ۱۰، شماره ۱ (۱۴۰۴)، صص. ۶۷-۷۷

http://math-sci.ui.ac.ir
http://www.ui.ac.ir

دو برهان از آذرخور اشتاذ گشنسپ

رضا کهکشانی

چکیده. یکی از دانشمندان ایرانی سده‌های چهارم و پنجم هجری قمری، آذَرْخورِ اَشْتاذْ گُشْنَسْپ [1] است. نام وی تنها در آثار دانشمند برجسته ایرانی، استاد ابوریحان بیرونی [2]، آمده است. در این مقاله، به دو برهانی که ابوریحان از وی بر قضیه نخست کتاب استخراج الاوتار آورده است، می‌پردازیم. این قضیه به‌ویژگی خط شکسته محاط در دایره معروف است و این دو برهان تنها یادگار ریاضی بر جای مانده از آذرخور است.

۱. مقدمه

یکی از مهندسین و ریاضیدانان ایرانی نیمه دوم سده چهارم و ثلث اول سده پنجم هجری قمری (سده‌های دهم و یازدهم میلادی) آذَرْخورِ اَشْتاذْ گُشْنَسْپ است. اطلاع چندانی از زندگانی وی در دست نیست و نام ایشان تنها در آثار دانشمند نامی ایران، استاد ابوریحان بیرونی، آمده است [۵]. به واقع، آثار ابوریحان تنها ماخذ درباره وی به‌شمار می‌آیند. نام ایشان در کتاب «آثار الباقیه عن القرون الخالیه (یا به اختصار، آثار الباقیه)» ابوریحان در سه موضع به‌صورت‌های «ابوالحسن آذرخور ابن یزدانخسیس المهندس» (که در اینجا می‌توان یزدانخسیس را تصحیفی از یزدانجشنس دانست)، «ابوالحسن آذرخور المهندس» و «آذرخور المهندس» آورده شده است [۲]. ابوریحان در این مواضع به بیان شنیده‌های خود از زبان آذرخور به‌ترتیب درباره «پنجه دزدیده شده (خمسه مسترقه)»، «عقیده ایرانیان در باب مبدأ جهان و پیدایش نوع بشر» و «سروش روز» می‌پردازد. در واقع، آثار الباقیه کتابی است درگاه‌شناسی، آمیخته با ریاضیات، نجوم و تاریخ، که ابوریحان در آن، علاوه بر مطالعه تطبیقی تقویم‌های ملل گوناگون، آداب و رسوم و ادیان ایشان را نیز می‌کاود. چنان‌که مشاهده می‌شود، آذرخور معاصر ابوریحان بوده است و ایشان دست کم یک‌بار با یکدیگر ملاقات نموده‌اند. همچنین، نام آذرخور در کتاب استخراج الاوتارِ ابوریحان در دو موضع به‌صورت «آذرخور ابن اشتاذ جشنس» آورده شده است [۳]. با توجه به وجود نام‌های مشابه در کتاب «نام‌نامه ایرانی» [۱]، چنین استنباط می‌شود که شکل صحیح نام وی «آذرخور اشتاذ گشنسپ» است [۶].

میراث ریاضی به‌جای مانده از آذرخور را می‌توان در کتاب استخراج الاوتار یافت. ابوریحان در این کتاب چهار قضیه هندسی را مورد بحث قرار داده و برای هر یک از آنها برهان‌های گوناگونی از خود و دیگر ریاضی‌دانان ارائه می‌دهد. سپس، از این برهان‌ها و استدلال‌ها در حل روی هم‌رفته سی مسئله هندسی، جبری و نجومی استفاده می‌نماید. هدف اصلی کتاب

نوع مقاله: ترویجی
دبیرتخصصی رابط: سعید مقصودی
تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۸/۲۲ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۵/۱۶ تاریخ انتشار آنلاین: ۱۴۰۳/۱۱/۲۵
ارجاع به مقاله: ر. کهکشانی، دو برهان از آذرخور اشتاذ گشنسپ، نشریه ریاضی و جامعه، ۱۰ شماره ۱ (۱۴۰۴) ۶۷–۷۷.
https://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.139764.1622

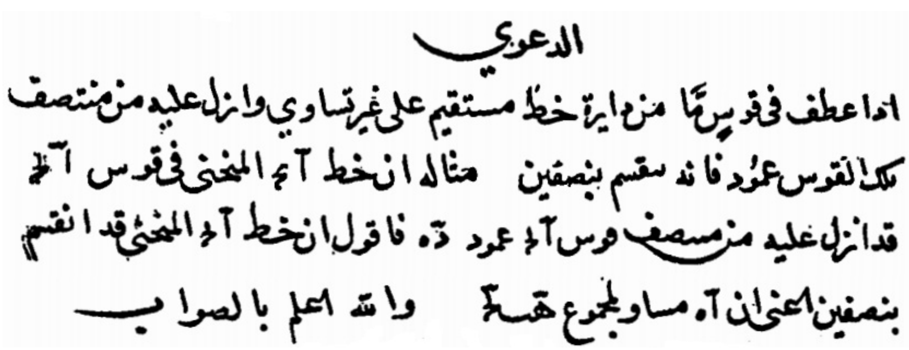
استخراج الاوتار محاسبه طول وترهای دایره بر حسب قطر آن است [۳]. در واقع، ابوریحان دو کتاب در مورد استخراج وترهای دایره به زبان علمی آن روزها، یعنی زبان عربی، نوشته است:

- مقاله فی استخراج الاوتار فی الدائره بخواص الخط المنحنی الواقع فیها؛
- جمع الطرق السائره فی معرفه اوتار الدائره (البته، نام این کتاب در نسخه خطی سال ۱۹۶۵ چاپ قاهره به‌صورت «کتاب عملته لحصر الطرق السائره فی استخراج اوتار الدائره» ذکر شده است).

تمامی مطالب این دو کتاب به شکلی نوین و همراه با اصطلاحات ریاضی کنونی توسط ابوالقاسم قربانی، پژوهشگر برجسته تاریخ ریاضیات ایران، به زبان فارسی درکتابی با عنوان «تحریر استخراج الاوتار» تدوین شده است [۳]. ابوریحان برای اثبات قضیه نخست این کتاب بیست و دو برهان آورده که دو برهان از آنِ آذرخور است. نخستین برهان آذرخور با اندکی اختلاف مشابه با یکی از برهان‌های ارشمیدس درکتاب «الدوائر» وی است. ابوریحان از میان برهان‌هایی که از خود و دیگر دانشمندان برای این قضیه آورده است، دومین برهان آذرخور را همراه با تغییری اندک برای ذکر درکتاب قانون مسعودی برگزیده است [۴]. در این مقاله، به‌شرح دو برهان آذرخور برای قضیه نخست کتاب استخراج الاوتار می‌پردازیم. چنان‌که بیان شد، دو برهان مذکور تنها میراث ریاضی به‌جای مانده از این دانشمند است که به لطف ابوریحان به‌دست ما رسیده است.

۲. یادگار ریاضی آذرخور

در این بخش، قضیه نخست کتاب استخراج الاوتار بیان و دو برهان آذرخور شرح داده می‌شود. قضیه نخست به‌ویژگی خط شکسته محاط در دایره معروف است. برای ملاحظه صورت قضیه و دو برهان آذرخور در نسخه خطی کتابخانه دانشگاه لیدن [۱] به شکل‌های ۱، ۲ و ۳ رجوع شود.



الدعوى

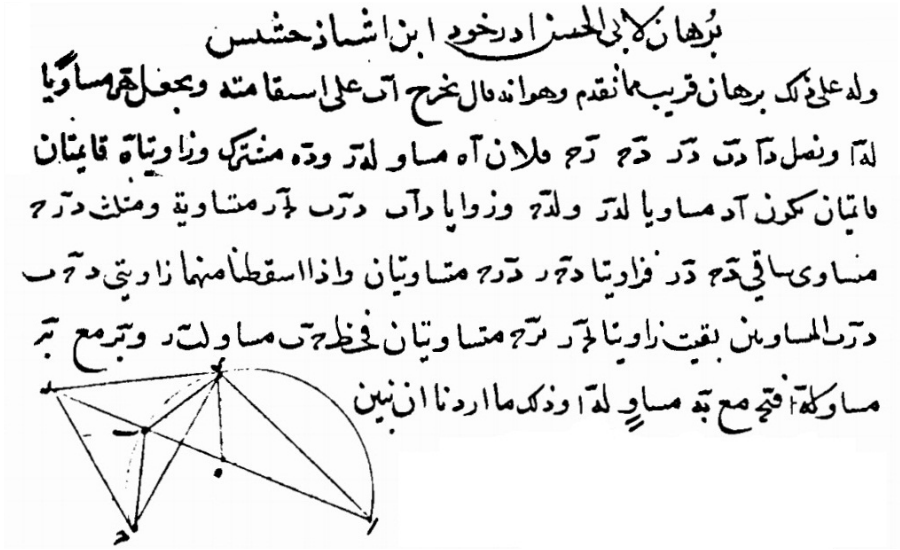
اذا عطف في قوس ما من دايرة خط مستقيم على غير تساوي وانزل عليه من منتصف تلك القوس عمود فانه يقسم بنصفين مثاله ان خط آ ب ج المنحني في قوس آ ب ج قد انزل عليه من منتصف قوس آ ب ج عمود د ه فاقول ان خط آ ب ج المنحني قد انقسم بنصفين اعني ان آ ه مساو لمجموع ه ب ج والله اعلم بالصواب

شکل ۱. صورت قضیه نخست در نسخه خطی کتابخانه دانشگاه لیدن.

Figure 1: The first theorem in the Leiden University Library manuscript.

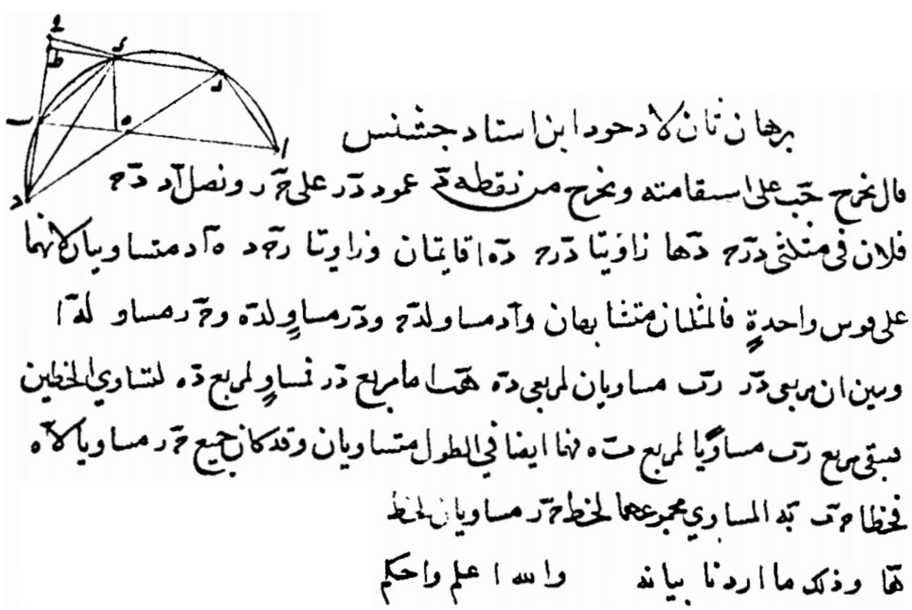
[۱] دانشگاه لیدن (Leiden University) دانشگاهی است در هلند که کتابخانه آن حاوی منابعی مهم در مطالعات شرق‌شناسی است.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.139764.1622



شکل ۲. برهان نخست آذرخور در نسخه خطی کتابخانه دانشگاه لیدن.

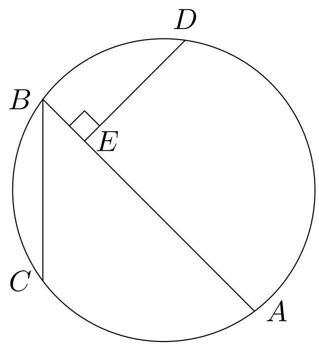
Figure 2: Āzarkhor's first proof in the Leiden University Library manuscript.



شکل ۳. برهان دوم آذرخور در نسخه خطی کتابخانه دانشگاه لیدن.

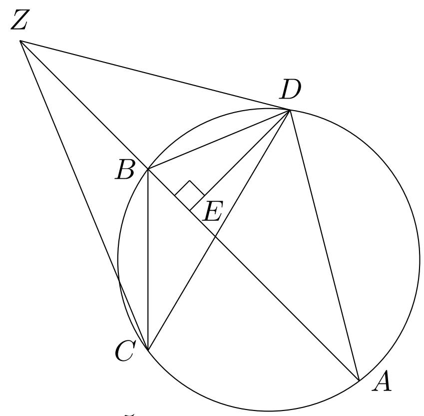
Figure 3: Āzarkhor's second proof in the Leiden University Library manuscript.

قضیه ۱.۲. کمانی از یک دایره مانند ABC و خط شکسته ABC محاط در این کمان مفروض است به‌طوری‌که $AB > BC$. اگر از نقطه D، که وسط کمان ABC است، عمود DE را بر AB فرود آوریم آنگاه $AE = BC + BE$ و به‌عبارتی، نقطه E وسط خط شکسته ABC است (شکل ۴).



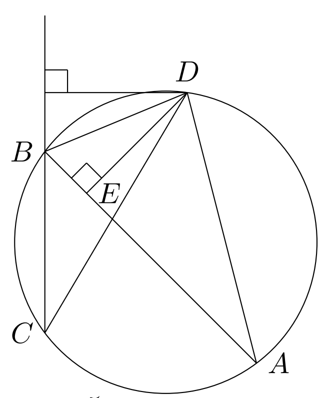
شکل ۴. خط شکسته محاط در دایره.

Figure 4: The broken line enclosed in a circle



شکل ۵. برهان نخست آذرخور.

Figure 5: Āzarkhor's first proof



شکل ۶. برهان دوم آذرخور.

Figure 6: Āzarkhor's second proof

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.139764.1622

برهان نخست. وتر AB را از سمت B امتداد داده و نقطه Z را در این امتداد به گونه‌ای تعیین می‌کنیم که $AE = EZ$. همچنین، پاره‌خط‌های AD، BD، CD، CZ و DZ را رسم می‌کنیم. شکل ۵ ملاحظه شود. از آنجا که DE عمودمنصف AZ است، $AD = DZ$ و $\angle DAB = \angle DZB$. روشن است که $\angle DAB = \angle DCB = \widehat{BD}/۲$. از طرفی، نقطه D وسط کمان ABC می‌باشد و $AD = CD$. بنابراین، مثلث CDZ متساوی‌الساقین است و $\angle DZC = \angle DCZ$. حال،

$$\angle BZC = \angle DZC - \angle DZB = \angle DCZ - \angle DCB = \angle BCZ$$

و مثلث BCZ متساوی الساقین است. پس، $BC = BZ$ و

$$BC + BE = BZ + BE = ZE = AE.$$

$\square$

برهان دوم. پاره‌خط BC را امتداد داده و از نقطه D عمود DZ را بر آن فرود می‌آوریم. پاره‌خط‌های AD، BD و CD را نیز رسم می‌کنیم. شکل ۶ ملاحظه شود. چون نقطه D وسط کمان ABC است، $AD = CD$. از طرفی، $\angle DAB = \angle BCD = \widehat{BD}/۲$. پس، دو مثلث قائم‌الزاویه AED و CDZ بنا به‌حالت وتر و یک زاویه حاده با یکدیگر مساوی هستند و $DE = DZ$ و $AE = CZ$. از اینجا نتیجه می‌شود که دو مثلث قائم‌الزاویه BDE و BDZ، که در یک وتر مشترک هستند، با هم برابر می‌باشند. پس، $BE = BZ$ و

$$AE = CZ = CB + BZ = CB + BE.$$

$\square$

۳. تشکر وقدردانی

این مقاله به‌طور جزئی با پژوهانه شماره ۱۰۷۳۲۱۱ دانشگاه کاشان مورد حمایت قرارگرفته است.

مراجع

[1] F. Justi, *Iranisches Namenbuch*, N. G. Elwert'Sche Verlagsbuchhandlung, Marburg, 1895.
[۲] ا. بیرونی، آثار الباقیه، ترجمه ا. داناسرشت، مؤسسه انتشارات امیرکبیر، تهران، ۱۳۸۹.
[۳] ا. قربانی، تحریر استخراج الاوتار، انتشارات انجمن آثار ملی، تهران، ۱۳۵۵.
[۴] ا. قربانی، تحقیقی در آثار ریاضی ابوریحان بیرونی (تحریری نوین از بیرونی‌نامه)، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۷۴.
[۵] ا. قربانی، زندگی‌نامه ریاضی‌دانان دوره اسلامی، چاپ دوم (با تجدید نظر و تکمیل)، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۷۵.
[۶] ی. کرامتی، آذَرْخورِ اَشْتاذْ گُشْنَسْپ، دایره المعارف بزرگ اسلامی، نشر مرکز دایره المعارف بزرگ اسلامی، تهران، ۱۴۰۰.

رضا کهکشانی
گروه ریاضی محض، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران
kahkeshanireza@kashanu.ac.ir

رضا کهکشانی متولد اردیبهشت ماه ۱۳۵۷ در شهرستان کاشان است. وی در مقاطع کارشناسی، کارشناسی ارشد و دکتری رشته ریاضی به ترتیب از دانشگاه‌های صنعتی شریف، تهران و تربیت مدرس در سال‌های ۱۳۸۰، ۱۳۸۲ و ۱۳۹۰ فارغ‌التحصیل شد. عنوان رساله دکتری وی «ساخت طرح‌ها و کدها با استفاده از عمل گروه» است. رضا کهکشانی هم‌اکنون عضو هیئت علمی دانشگاه کاشان است و نظریه کدگذاری، ترکیبیات و تاریخ ریاضیات از علائق پژوهشی ایشان هستند.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.139764.1622