http://math-sci.ui.ac.ir

Journal of Mathematics and Society
ISSN (print): 2345-6493, ISSN (on-line): 2345-6507
Vol. 10 No. 2 (2025), pp. 47-62.

http://www.ui.ac.ir

APPROXIMATION OF SYMMETRICALLY RECIPROCAL MATRICES USING MUTATIONS IN MAX ALGEBRA

SEYED MAHMOUD MANJEGANI* AND HOJR SHOKOOH SALJOOGH

Abstract. The objective of this paper is to propose a method for constructing a transitive matrix by maximizing the mutation of a symmetrically reciprocal matrix A, such that the resulting matrix is closest to A in terms of a relative error measure. By employing this approach, the need for calculating the maximum eigenvector is eliminated, leading to faster results. Additionally, we investigate the impact of mutations on two cases of change, specifically when a single measurement is corrected or when a new alternative is added, and analyse their effectiveness in ranking.

1. Introduction

An (entry wise) positive $n \times n$ matrix $A = (a_{ij})$ is called a symmetrically reciprocal matrix (SR-matrix) if $a_{ij}a_{ji} = 1$ for all $i, j = 1, \ldots, n$, thus $a_{ii} = 1$. These matrices first time were introduced by Saaty [4] and used in the analytic hierarchy process(AHP method) for multi criteria decision making. An SR- matrix $B = (b_{ij})$ is called transitive if there is a positive vector $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ such that $b_{ij} = \dfrac{w_i}{w_j}$ for $i, j = 1,\ dots, n$. Sometimes it is required to deduce positive weights $w_1, w_2, \ldots, w_n$ attached to the alternatives $A_1, \ldots, A_n$ respectively, from the SR-matrix A. These matrices can be

Keywords: mutation, circuit geometric mean, critical circuit, max algebra.

Article Type: Research Paper.

Communicated by Saeid Azam.

*Corresponding author.

Received: 08-02-2024, Accepted: 20-07-2024, Published Online: 19-04-2025.

Cite this article: S. M. Manjegani and H. Shokooh saljoogh, Approximation of symmetrically reciprocal matrices using mutations in Max Algebra, *Journal of Mathematics and Society*, **10** no. 2 (2025) 47–62.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140663.1644 .

ranked [1]. If $a_{ij} = \dfrac{w_i}{w_j}$ for $i, j = 1, 2, \ldots, n$, then we can obtain ideal case, that is a transitive (consistent) matrix of rank one.

In [2] for constructing a weight vector $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ using that of max-eigenvector of A that solves a useful optimization problem that is, minimizing the relative error useful optimization problem, namely minimizing relative error

$$e(w) = \max \left| \frac{a_{ik} - \dfrac{w_i}{w_j}}{a_{ik}} \right|. \tag{1.1}$$

This paper presents a ground breaking method for constructing a weight vector, denoted as $W = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$, by leveraging matrix mutations. Compared to existing methods, our approach offers several distinct advantages.

2. Max algebra

The max-algebra system is one of the analogues of linear algebra that has recently attracted the attention of many researchers. The *max-algebra system* consists of nonnegative real numbers $\mathbb{R}_+$ equipped with the operations of multiplication $a \otimes b = ab$, and maximization $a \oplus b = \max\{a, b\}$.

The identity element for $\oplus$ is 0 i.e., $a \oplus 0 = 0 \oplus a = a$ for all $a \in \mathbb{R}_+$. Operations of the max algebra $\oplus$ and $\otimes$ extend to vectors and matrices in the same way as in conventional linear algebra. For $A, B \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$, we denote the sum by $(A \oplus B)_{ij} = \max(a_{ij}, b_{ij})$ and the product by $(A \otimes B)_{ij} = \max_{1\le k\le n}(a_{ik}b_{kj})$.

For an $n \times n$ non-negative matrix A, the eigenequation in the max algebra is given by

$$A \otimes x = \lambda x$$

that $\lambda \geq 0$ is a max eigenvalue and $x > 0$ is a max eigenvector.

Definition 2.1. [3] *Suppose that $A = [a_{ij}]$ is a nonnegative matrix. Each term in the determinant of A of the form $a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$, is called a mutation. A mutation is called a major mutation if none of the elements in the mutation are from the main diagonal of A, and it is called a minor mutation if at least one element in the mutation is from the main diagonal of A. If all elements in a mutation are from the main diagonal of A, then it is referred to as a principal mutation.*

Example 2.2. [3] *Consider the following matrix*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140663.1644

We have

$$det\ A = 1\cdot 5\cdot 9 - 1\cdot 6\cdot 8 - 2\cdot 4\cdot 9 + 2\cdot 6\cdot 7 + 3\cdot 4\cdot 8 - 3\cdot 5\cdot 7\,,$$

where $3\cdot 4\cdot 8$ *and* $2\cdot 6\cdot 7$ *are major mutations,* $1\cdot 5\cdot 9$ *is a principal mutation, and other terms are minor mutations.*

3. Approximation of symmetrically reciprocal matrices

In this section, we will present several theorems regarding the relationship between mutations and the symmetrically reciprocal matrix, as well as the transitive matrix. We will also discuss two types of changes that can be made to mutations. The first change involves altering a pair in the inverse of the symmetrically reciprocal matrix, with the optimal change being applied to the main mutation that has the highest possible value, resulting in modifications to the ranking matrix. The second change is accomplished using mutations. In this approach the new alternatives are introduced, and based on the elements of the main mutation, a new row and column are added to the symmetrically reciprocal matrix in such a way that the ranking of the new matrix remains unaffected. Given the definition of the symmetric two-sided matrix and the definition of mutations, it is evident that the product of all the elements in a mutation of the symmetrically reciprocal matrix is greater than or equal to zero. Therefore, based on this observation we can state the following theorem.

Theorem 3.1. *A matrix A is transitive if and only if $a_{ii} = 1$ and the product of all the mutations of A is equal to 1.*

Theorem 3.2. [1] *Let $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R}+)$ be a symmetrically reciprocal (SR) matrix, and $w = (w_1, \cdots, w_n)^T$ a positive vector and $B = (b_{ij})$, where $b_{ij} = w_i/w_k$. Let $c > 0$. Then the following statements are equivalent*

(a) $|a_{ij} - b_{ij}| \leq c a_{ij}, \qquad i, j = 1, 2, \cdots, n,$
(b) $a_{ij}\frac{w_j}{w_i} \leq 1 + c, \qquad i, j = 1, 2, \cdots, n.$

In particular, choosing $w_i = x_i, i = 1, ..., n,$ where $x = (x_1, \cdots, x_n)^T$ is a maxeigenvector of A with max-eigenvalue $\mu(A)$, then $c = \mu(A)1$ is minimal, and

$$\min_{w>0} e(w) = e(x) = \max_{i,j} \left| \frac{a_{ij} - \frac{x_i}{x_j}}{a_{ij}} \right| = \mu(A) - 1.$$

Let A be a positive symmetrically reciprocal (SR) matrix, and let $\tau > 0$. We define $M_{\max}$ as the set of all elements in the major mutation that corresponds to the maximum mutation, and $M_{\min}$ as the set of all elements in the major mutation that corresponds to the minimum mutation. Let $A(\tau) = [a^{\tau}_{ij}]$

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140663.1644

where

$$a_{ij}^{\tau} = \begin{cases} a_{sp}\tau, & a_{sp} \in M_{\max}; \\ \frac{a_{ps}}{\tau}, & a_{ps} \in M_{\min}; \\ a_{ij}, & \textit{other wise}. \end{cases} \tag{3.1}$$

Lemma 3.3. *For $n \geq 3$, there exist positive numbers $T_1 \leq T_2$ such that the function $\mu(\tau)$ is strictly decreasing in the interval $(0, T_1]$, constant in the interval $[T_1, T_2]$, and strictly increasing in the interval $[T_2, \infty)$. In other words, the behaviour of the function $\mu(\tau)$ changes at T_1 and T_2, with a monotonicity pattern of decreasing, constant, and then increasing.*

Lemma 3.4. *Suppose A is a symmetrically reciprocal (SR) matrix, and $\mu(A)$ is obtained by the main mutation of length n. In this case, the matrix $A(\mu)$ is a transitive matrix.*

Theorem 3.5. *Let in (3.1), $(s, p) = (1, 2)$, $0 < \tau_0 < \tau_1$ and x, y be two max eigenvector of $A(\tau)$ such that*

$$A(\tau_0) \otimes x = \mu(\tau_0)x \qquad A(\tau_1) \otimes y = \mu(\tau_1)y. \tag{3.2}$$

Then

1. *If $\mu(\tau_0) < \mu(\tau_1)$, then $\frac{y_1}{x_1} > \frac{y_i}{x_i}$, $\qquad i \geq 2$.*
2. *If $\mu(\tau_0) > \mu(\tau_1)$ then $\frac{y_2}{x_2} < \frac{y_i}{x_i}$, $\qquad i \neq 2$.*

Now, let's consider the scenario where a new alternative is added to the weight vector construction method. In this case, our method involves adding a new row and column to the existing matrix by utilizing mutation. We begin with an $n \times n$ symmetrically reciprocal (SR) matrix A.

Let $A \in M_n$ be an SR matrix with an eigenvalue μ and an eigenvector x, satisfying $A \otimes x = \mu x$. Additionally, let $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ be a vector such that $s^{-1} = (s_1^{-1}, s_2^{-1}, \ldots, s_n^{-1})$.

To accommodate the addition of a new alternative, we define a new matrix A_e as follows:

$$A_e = \begin{pmatrix} A & s \\ s^{-1} & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Theorem 3.6. *Let A be a SR matrix with max-eigenvalue $\mu(A) > 1$. Then following are equivalent:*

1. *$\mu(A) = \mu(A_e)$ and there is $\alpha > 0$ such that (x^T, α) is the max-eigenvector of A_e.*
2. *$\max_k(\frac{s_k}{x_k}) \max_k(\frac{x_k}{s_k}) \leq \mu^2$.*

Sufficient condition for s to satisfy conditions (1) and (2) are: there exist $h > 0$ such that $s = A \otimes h$ or $s = Ah$.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140663.1644

References

[1] L. Elsner and P. Van Driessche, Max-algebra and pairwise comparison matrices, *Linear Algebra Appl.*, **385** (2004) 47–62.

[2] A. Farkas, P. Lancaster and P. Rózsa, Consistency adjustment for pairwise comparison matrices, *Numer. Linear Algebra Appl.*, accepted.

[3] S. M. Manjegani, A. Peperko and H. Shokooh Saljooghi, Calculating eigenvectors in max-algebra by mutation-sunflower method,arxiv.

[4] T. L. Saaty, A scaling method for priorities in hierarchical structures, *J. Math. Psychol.*, **32** (1977) 234–281.

Seyed Mahmoud Manjegani

Department of Mathematics, Department of Mathematical Sciences, Isfahan University of Technology, Isfahan 84156-83111, Iran

Email: manjgani@cc.iut.ac.ir

Hojr Shokooh saljoogh

Department of Mathematics, Department of Mathematical Sciences, Isfahan University of Technology, Isfahan 84156-83111, Iran

Email: h.shokooh@alumni.iut.ac.ir

http://www.ui.ac.ir

ریاضی و جامعه

شاپا (چاپی): ۲۳۴۵-۶۴۹۳، شاپا(الکترونیکی): ۲۳۴۵-۶۵۰۷

جلد ۱۰، شماره ۲ (۱۴۰۴)، صص. ۴۷-۶۲

http://math-sci.ui.ac.ir

تقریب ماتریس‌های دوجانبه متقارن با استفاده از جهش‌ها در جبر ماکزیموم

سید محمود منجگانی* و حجر شکوه سلجوقی

چکیده. هدف اصلی این مقاله ساخت ماتریس‌های انتقالی با استفاده از جهش‌های ماتریس دوجانبه متقارن است، که دارای کمترین تقریب خطا با این گونه ماتریس‌ها می‌باشند. در این روش بر خلاف روش‌های قبلی نیازی به محاسبه مقادیر ویژه و بردارهای ویژه در جبر ماکزیموم نیست. همچنین در این روش با استفاده از تغییراتی که در عناصر اساسی جهش‌های یک ماتریس (ضرب یا تقسیم کردن در یک عدد ثابت) اعمال کرده‌ایم، کران‌هایی برای مقادیر ویژه به دست آورده‌ایم که در رتبه‌بندی ماتریس‌ها از اهمیت خاصی برخوردار است.

۱. مقدمه

در سلسه مراتب تصمیم‌گیری در مراحل یک فرآیند (تولید و ساخت و ...)، n گزینه به نام‌های $A_1, \dots, A_n$ وجود دارد، که در آن $n \geq 3$. عدد a_{ij} نشان دهنده برتری گزینه A_i نسبت به گزینه A_j است، اعداد a_{ij} معمولا از یک آزمایش، نظرسنجی یا تغییر رفتار استنباط می‌شوند. به این ترتیب می‌توان یک ماتریس دوجانبه متقارن را توصیف کرد.

تعریف ۱.۱. ماتریس $n \times n$ مثبت $A = (a_{ij})$ دوجانبه متقارن[1] نامیده می‌شود هرگاه برای $i, j = 1, 2, \dots, n$، $a_{ij} a_{ji} = 1$.

این ماتریس‌ها اولین‌بار توسط ساتی [2] [7] معرفی شدند و در فرآیند تحلیل سلسه مراتبی[3] برای تصمیم‌گیری‌های چند معیاره استفاده می‌شوند.

تعریف ۲.۱. ماتریس دوجانبه متقارن $B = (b_{ij})$، ماتریس انتقالی[4] نامیده می‌شود هرگاه بردار مثبت $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $b_{ij} = \dfrac{w_i}{w_j}$.

لازم است یادآوری کنیم که هر ماتریس رتبه-واحد به‌صورت ضرب (استاندارد) یک بردار ستونی در یک بردار سطری قابل بیان است. بنابراین هدف اصلی، محاسبه بردار وزن w برای ماتریس دوجانبه متقارن مانند A است که با توجه به آن ماتریس

عبارات و کلمات کلیدي: جبر ماکزیموم، ماتریس‌های دوجانبه متقارن، ماتریس‌های انتقالی، جهش‌ها.

دبیرتخصصی رابط: سعید اعظم

نوع مقاله: پژوهشی

* نویسنده مسئول

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۱۱/۱۹ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۴/۳۰ تاریخ انتشار آنلاین: ۱۴۰۴/۰۱/۳۰

ارجاع به مقاله: س. م. منجگانی و ح. شکوه سلجوقی، تقریب ماتریس‌های دوجانبه متقارن با استفاده از جهش‌ها در جبر ماکزیموم، نشریه ریاضی و جامعه، ۱۰ شماره ۲ (۱۴۰۴) ۴۷-۶۲.
https://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140663.1644 .

[1]symmetrically reciprocal (SR) [2]T. L. Saaty [3]analytic hierarchy process (AHP) [4]transitive (consistent) matrix

تعددی B از رتبه یک ساخته شود، چرا که در این شرایط B برابر خواهد بود با ضرب استاندارد بردار ستونی w در بردار سطری $(w_1^{-1}, w_2^{-1}, \dots, w_n^{-1}) = w$. تقریب ماتریس دوجانبه متقارن توسط ماتریس تعددی یک مرحله مهم در فرآیندهای تصمیم گیری باتوجه به ماتریس دوجانبه متقارن است. حالت ایده‌ال ساخت ماتریس انتقالی B از ماتریس دوجانبه متقارن A زمانی است که ماتریس $w = (w_i)$ را به گونه‌ای بیابیم که برای $i, j = 1, 2, \dots, n$ داشته باشیم $a_{ij} = \dfrac{w_i}{w_j}$. یکی از موضوعات مهم، ساخت بردار وزن $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ است. چندین روش برای ساخت بردار وزن وجود دارد. در اینجا برخی از این روش‌ها را شرح می‌دهیم. ساتی بردار پرون را برای ساخت بردار وزن پیشنهاد داد به‌طوری‌که ماتریس ساخته شده توسط بردار $\dfrac{w_i}{w_j}$ دارای حداقل فاصله با ماتریس A در نرم اقلیدسی می‌باشد به این معنا که $\sum_{i,k=1}^{n}(a_{ik} - \dfrac{w_i}{w_k})^2$ مینیمال باشد [۲]. در مرجع [۳] از بردار ویژه برای ساختن بردار وزن استفاده می‌شود که یک مسئله بهینه‌سازی مهم را حل می‌کند به این معنا که اقدام به حداقل‌رسانی خطای بهینه‌سازی می‌کنند یعنی:

$$e(w) = \max \left| \frac{a_{ik} - \dfrac{w_i}{w_j}}{a_{ik}} \right| . \tag{1}$$

برای محاسبه بردار ویژه نیاز به انجام $O(n^3)$ مرحله عملیات است [۱]. السنر [5] و فون‌دن‌دریسه [6] با استفاده از بردار ویژه ماکزیموم اقدام به ساخت بردار وزن کردند [۲]. در این مقاله ما با استفاده از مفهومی تحت عنوان جهش، این بردار ویژه را به‌دست می‌آوریم که بر خلاف روش‌های قبلی ماتریس انتقالی ساخته شده دارای تقریب بهتری با ماتریس دوجانبه متقارن A است. علاوه بر این ساخت بردار وزن، با این روش طی مراحل کمتری انجام می‌شود و نیازی به محاسبه مقدار ویژه و بردار ویژه ماکزیموم نیست.

۲. جبر ماکزیموم

هنگامی‌که عملگر ماکزیموم را به‌جای جمع و عملگر جمع را به‌جای ضرب جایگزین می‌کنیم، نظریه تکنیکی و ریاضی جبر ماکزیموم جمعی [7] برای تبدیل برخی از مسائل غیرخطی به مسائل خطی ایجاد می‌شود. جبرماکزیموم زیر شاخه‌ای از جبرخطی می‌باشد که به سرعت رو به پیشرفت است. مبانی اولیه این نظریه حدود هفتاد سال پیش در انگلستان به وجود آمد [۵]. سیستم جبرماکزیموم علاوه بر برتری تبدیل مسائل غیرخطی به مسائل خطی، به همراه روش های جبرماکزیموم امکان توصیف کارآمد مجموعه‌ای از راه حل‌ها و از این‌رو انتخاب بهترین راه‌حل با توجه به معیارهای تعیین‌شده را، به وجود می‌آورد.

تعریف ۱.۲. [۲]. جبرماکزیموم یک ساختار جبری متشکل از اعداد نامنفی به همراه دو عملگر اساسی $\oplus$ و $\otimes$ است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$a \oplus b = \max\{a, b\} \ , \ a \otimes b = a \times b \tag{2}$$

جبر ماکزیموم را با $\mathbb{R}_{\max,\times}$ نشان می‌دهیم که $\mathbb{R}_{\max,\times} = (\mathbb{R}_+, \oplus, \otimes)$ تشکیل یک نیم‌حلقه (یک حلقه بدون قرینه جمعی) از اعداد نامنفی با عملگرهای $\oplus$ و $\otimes$ می‌دهد. عنصر همانی برای عملگر $\oplus$ برابر صفر است، به این معنا که به ازای هر $a \in \mathbb{R}_+$، $a \oplus 0 = 0 \oplus a = a$. به‌علاوه عملگر $\oplus$ خود توان است به این معنا که $a \oplus a = a$ و همچنین یک ترتیب معمولی روی نیم‌حلقه (شبه‌حلقه) ماکزیموم چنان وجود دارد که $a \oplus b = b$ نتیجه می‌دهد که برای هر $a, b \in \mathbb{R}_+$، $a \leq b$.

عملگر ضرب دارای خاصیت جابه‌جایی می‌باشد به این معنا که برای $a, b \in \mathbb{R}_+$، $a \otimes b = b \otimes a$ و دارای عنصر همانی یک می‌باشد به این معنا که $a \otimes 1 = 1 \otimes a = a$. عملگرهای جبرماکزیموم، $\oplus$ و $\otimes$ بر روی بردارها و ماتریس‌ها به مانند جبرخطی

[5] L. Elsner [6] P. Van Driessche [7] max plus algebra

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140663.1644

معمولی قابل تعمیم و گسترش می‌باشند. برای $A,B\in\mathbb{R}_+^{n\times n}$ مجموع آنها را به‌صورت، $(A\oplus B)_{ij}=\max(a_{ij},b_{ij})$ و حاصل‌ضرب آنها را به‌صورت $(A\otimes B)_{ij}=\max\limits_{1\leq k\leq n}(a_{ik}b_{kj})$ برای $1\leq i,j\leq n$، نشان می‌دهیم. یکی از مسائل مهم در جبرماکزیموم، مسئله یافتن مقدار ویژه و بردار ویژه ماکزیموم می‌باشد.

تعریف ۲.۲. فرض کنیم $A\in M_n(\mathbb{R}_+)$. در این‌صورت اسکالر $\lambda\in\mathbb{R}_+$ را یک مقدار ویژه ماکزیموم از A گویند، هرگاه بردار ناصفر و نامنفی $v\geqslant 0$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$A\otimes v=\lambda v.$$

بزرگترین مقدار ویژه ماکزیموم ماتریس A را با $\mu(A)$ نشان می‌دهیم. ثابت می‌شود که اگر A یک ماتریس تحویل‌ناپذیر باشد، تنها دارای یک مقدار ویژه می‌باشد که همان $\mu(A)$ است. لازم به ذکر است که ماتریس $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ تحویل‌پذیر (تجزیه‌پذیر) نامیده می‌شود اگر $n=1$، آنگاه $A=0$ و برای $n\geq 2$، ماتریس جایگشتی $P\in\mathbb{R}^{n\times n}$ موجود باشد که

$$P^TAP=\begin{pmatrix} B & C\\ 0 & D\end{pmatrix},$$

که در آن B و D ماتریس‌های مربعی هستند. اگر ماتریس A تحویل‌پذیر نباشد، تحویل‌ناپذیر نامیده می‌شود.

یکی از روش‌های یافتن و محاسبه مقادیر ویژه یک ماتریس، استفاده از نظریه گراف می‌باشد. پس ما به اختصار به بیان مفاهیم مورد نیاز از نظریه گراف می‌پردازیم؛ بحث را با تعریف گراف غیرجهت‌دار آغاز می‌کنیم [۴].

تعریف ۳.۲. یک گراف غیرجهت‌دار، زوج مرتب $G=(N,E)$ می‌باشد که متشکل از مجموعه N، مجموعه متناهی از رئوس، و E مجموعه یال‌های بین دو راس در N می‌باشد. اگر یک یال بین دو راس u و v وجود داشته باشد می‌نویسیم $e=\{u,v\}$. لازم به یادآوری است که به هریک از راس‌های یک گراف، گره نیز گفته می‌شود. همچنین در این بخش u و v نقاط انتهایی نامیده می‌شوند. اگر دو نقطه انتهایی یکسان باشند در این صورت یال ارتباطی بین آنها را طوقه می‌نامیم.

تعریف ۴.۲. یک گراف جهت‌دار[8] یک زوج مرتب متشکل از مجموعه متناهی از رئوس N و مجموعه یال‌های E بین رئوس N می‌باشد. یال‌ها در گراف جهت‌دار به کمک زوج رئوس $e=(u,v)$ با علامت پیکان بر روی آنها نشان داده می‌شوند که بیانگر آن است که یال جهت‌دار از راس u شروع شده است و به راس v خاتمه پیدا می‌کند. گرافی که متشکل از زیرمجموعه‌های N و یال‌های آن زیرمجموعه E باشند، زیر گراف G نامیده می‌شود.

تعریف ۵.۲. برای ماتریس $A\in\mathbb{R}_+^{n\times n}$ گراف جهت‌دار وزن‌دار متناظر با A را با $D(A)=(N(A),E(A))$ نشان می‌دهیم. یال جهت‌دار (i,j) با وزن a_{ij} از i به j وجود دارد اگر $a_{ij}>0$.

تعریف ۶.۲. یک مسیر جهت‌دار $(i=i_1,i_2,\ldots,i_k=j)$ یک دنباله از رئوس مجزا بین دو راس i و j در $D(A)$ می‌باشد که در آن (i_p,i_{p+1}) یک یال در $D(A)$، برای $p=1,\ldots,k-1$، است.

طول یک مسیر به تعداد یال‌های روی آن مسیر گفته می‌شود و آن‌را با ℓ نشان می‌دهیم. وزن مسیر $(i=i_1,\ldots,i_k=j)$ به طول $k-1$ به‌صورت حاصل‌ضرب $a_{i_1i_2}a_{i_2i_3}\cdots a_{i_{k-1}i_k}$ بیان می‌شود. یک دور به طول k در$D(A)$ یک مسیر بسته به شکل $(i_1,i_2,\ldots,i_1)$ می‌باشد که در آن عناصر مجزای $i_1,i_2,\ldots,i_k$ متعلق به مجموعه $\{1,2,\ldots,n\}$ می‌باشند. توجه نمایید که طوقه $(1\leq j\leq n),(i_j,i_j)$ یک دور به طول یک با وزن $a_{i_ji_j}$ است. به‌علاوه دورهای $(i_1,i_2,\ldots,i_1)$ و $(i_2,i_3,\ldots,i_1,i_2)$ و $(i_k,i_1,\ldots,i_{k-1},i_k)$ یکسان می‌باشند.

[8] digraph

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140663.1644

تعریف ۷.۲. فرض کنیم که Γ اشاره به دور $(i_1, i_2, \ldots, i_k, i_1)$ داشته باشد، دراین‌صورت تعاریف زیر را داریم.

الف) $\Pi(\Gamma) = a_{i_1i_2}a_{i_2i_3}\cdots a_{i_ki_1}$ وزن دور Γ است.

ب) ریشه k ام حاصل‌ضرب وزن‌های یک دور به طول k مانند $(i_1, i_2, \ldots, i_k, i_1)$، یعنی $\sqrt[k]{a_{i_1i_2}a_{i_2i_3}\cdots a_{i_ki_1}}$ میانگین هندسی نامیده می‌شود.

ج) یک زیر گراف از گراف $D(A)$، قسمتی از آن گراف است که مجموعه رئوسش زیر مجموعه‌ای از رئوس $D(A)$ باشد.

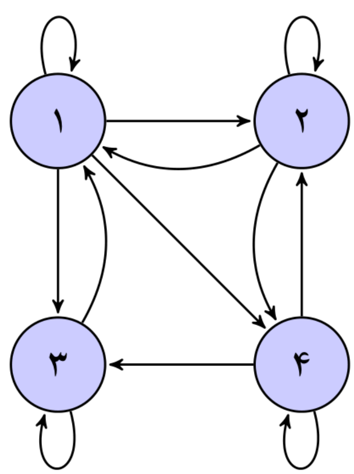
د) تعداد رئوسی که به سمت یک گره اشاره دارد، درجه درونی و به تعداد رئوسی که به سمت خارج از یک گره اشاره دارد، درجه بیرونی نامیده می‌شود.

ماکزیموم میانگین هندسی دوری روی تمامی دورهای ممکن گراف $D(A)$ برابر $\mu(A)$ است [۲]. دوری که با توجه به آن $\mu(A)$ ساخته می‌شود، دور بحرانی نامیده می‌شود و زیر ماتریسی که فقط درایه‌های دور بحرانی در آن شرکت دارد و مابقی درایه‌های آن صفر می‌باشد، ماتریس بحرانی نامیده می‌شود [۶].

مثال ۸.۲. ماتریس زیر را در نظر بگیرید.

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰.۲۵ & ۰.۲ & ۰.۵ \\ ۴ & ۰.۲ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰.۵ & ۰ \\ ۰ & ۰.۲۵ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

گراف جهت‌دار وزن‌دار متناظر با A به‌صورت زیر است:



شکل ۱. گراف وابسته به مثال ۸.۲

Figure 1: *Dependent graph by example 2.8*

در این ماتریس ده دور در $D(A)$ به‌صورت زیر وجود دارد:

$$\Gamma_1 = (1, 1), \Pi(\Gamma_1) = a_{11} = 1, \ell(\Gamma_1) = 1,$$

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140663.1644

$$\Gamma_۲ = (۲, ۲), \Pi(\Gamma_۲) = a_{۲۲} = ۰ \cdot ۲, \ell(\Gamma_۲) = ۱,$$

$$\Gamma_۲ = (۳, ۳), \Pi(\Gamma_۳) = a_{۳۳} = ۰ \cdot ۵, \ell(\Gamma_۳) = ۱,$$

$$\Gamma_۴ = (۴, ۴), \Pi(\Gamma_۴) = a_{۴۴} = ۱, \ell(\Gamma_۴) = ۱,$$

$$\Gamma_۵ = (۱, ۲), (۲, ۱), \Pi(\Gamma_۵) = a_{۱۲}a_{۲۱} = ۱, \ell(\Gamma_۵) = ۲,$$

$$\Gamma_۶ = (۱, ۳), (۳, ۱), \Pi(\Gamma_۶) = a_{۱۳}a_{۳۱} = ۰ \cdot ۲, \ell(\Gamma_۶) = ۲,$$

$$\Gamma_۷ = (۲, ۴), (۴, ۲), \Pi(\Gamma_۷) = a_{۲۴}a_{۴۲} = ۰ \cdot ۲۵, \ell(\Gamma_۷) = ۲,$$

$$\Gamma_۸ = (۱, ۴), (۴, ۲), (۲, ۱), \Pi(\Gamma_۸) = a_{۱۴}a_{۴۲}a_{۲۱} = ۰ \cdot ۵, \ell(\Gamma_۸) = ۳,$$

$$\Gamma_۹ = (۱, ۴), (۴, ۳), (۳, ۱), \Pi(\Gamma_۹) = a_{۱۴}a_{۴۳}a_{۳۱} = ۰ \cdot ۵, \ell(\Gamma_۹) = ۳,$$

$$\Gamma_{۱۰} = (۱, ۲), (۲, ۴), (۴, ۳), (۳, ۱), \Pi(\Gamma_{۱۰}) = a_{۱۲}a_{۲۴}a_{۴۳}a_{۳۱} = \frac{۱}{۱۶}, \ell(\Gamma_{۱۰}) = ۴.$$

در این‌صورت

$$\mu(A) = ۱$$

بنابراین $\Gamma_۱$ و $\Gamma_۴$ و $\Gamma_۵$ دورهای بحرانی می‌باشند. پس ماتریس بحرانی A به‌صورت زیر است:

$$A^c = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \cdot ۲۵ & ۰ \\ ۴ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

تعریف ۹.۲. فرض کنیم که ماتریس نامنفی $A = [a_{ij}]$ داده شده باشد. در این‌صورت هریک از عامل‌های دترمینان ماتریس A یعنی، $a_{۱\sigma(۱)}a_{۲\sigma(۲)} \cdots a_{n\sigma(n)}$، یک جهش نامیده می‌شود. اگر تمامی درایه‌های به کار رفته در یک جهش، غیر از درایه‌های قطر اصلی باشند به آن، جهش اصلی می‌گویند در غیراین‌صورت به آن، جهش فرعی گفته می‌شود. به جهشی که تمامی عناصر آن از قطر اصلی انتخاب شده باشد، جهش قطر اصلی گفته می‌شود.

برای یک ماتریس $n \times n$ مانند A به تعداد $n!$ جهش وجود دارد. باید توجه داشت که عناصر به کار رفته در یک جهش تشکیل یک دور می‌دهند.

مثال ۱۰.۲. فرض کنیم که

$$A = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \\ ۷ & ۸ & ۹ \end{pmatrix}$$

باشد. در این‌صورت

$$\det A = ۱ \cdot ۵ \cdot ۹ - ۱ \cdot ۶ \cdot ۸ - ۲ \cdot ۴ \cdot ۹ + ۲ \cdot ۶ \cdot ۷ + ۳ \cdot ۴ \cdot ۸ - ۳ \cdot ۵ \cdot ۷$$

و بنابراین ۳۰۴۰۸ و ۲۰۶۰۷ یک جهش اصلی و ۱۰۵۰۹ جهش قطر اصلی می‌باشد.

برای دیدن جزییات بیشتر می‌توان به مرجع [۶] رجوع کرد.

۳. تقریب ماتریس دوجانبه متقارن

در این بخش، ابتدا به بیان چند قضیه در مورد رابطه بین جهش‌ها و ماتریس دوجانبه متقارن و ماتریس انتقالی می‌پردازیم و ویژگی‌های جهش‌هایی که درفرایند تحلیل سلسه مراتبی نقش دارند را مورد بررسی قرار می‌دهیم. سپس دو تغییر روی جهش را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم. اولین تغییر زمانی است که یک زوج درایه از ماتریس دوجانبه متقارن A تغییر می‌کند. با توجه به تحقیقات انجام شده توسط ساتی که بردار پرون را به‌عنوان بردار وزن برای ساختن ماتریس انتقالی B در نظر گرفت [۲]، یکی از مهمترین تغییرات، تغییر عناصر به‌کار رفته در دور بحرانی است، چون باعث تغییر $\mu(A)$ و در نتیجه تغییر بردار پرون می‌شود. این تغییر باعث به‌دست آمدن ماتریس‌های انتقالی متفاوتی خواهد شد. تغییر دوم نیز با کمک جهش‌ها انجام می‌شود. در این روش جایگزین‌های جدیدی معرفی می‌شود، با توجه به عناصر جهش اصلی، یک سطر و ستون جدید به ماتریس دوجانبه متقارن اضافه می‌شود به گونه‌ای که در رتبه ماتریس جدید ساخته شده تاثیر ندارد.

با توجه به تعریف ماتریس دوجانبه متقارن و با توجه به تعریف جهش واضح است که حاصل‌ضرب تمام عناصر از یک جهش ماتریس دوجانبه متقارن بزرگتر یا مساوی صفر است، پس با توجه به این موضوع قضیه زیر را می‌توانیم بیان کنیم.

قضیه ۱.۳. ماتریس دوجانبه متقارن A انتقالی است اگر و فقط اگر حاصل‌ضرب عناصر هر جهش آن برابر یک باشد.

اثبات. فرض کنیم که A یک ماتریس انتقالی باشد. در این‌صورت بردار وزن $w=(w_۱,w_۲,\dots,w_n)$ موجود است به‌طوری‌که $a_{ij}=w_i/w_j$. از طرفی می‌دانیم عناصر یک جهش اصلی به‌صورت $a_{ij},a_{jk},\dots,a_{si}$ و عناصر جهش فرعی به‌صورت $a_{rj},a_{jk},\dots,a_{sr},a_{ii}$ به ازای $i\neq j\neq k\cdots\neq s$ می‌باشند. پس داریم

$$\frac{w_i}{w_j}\times\frac{w_j}{w_k}\times\cdots\times\frac{w_h}{w_s}\times\frac{w_s}{w_i}=۱\quad,\quad\frac{w_r}{w_j}\times\cdots\times\frac{w_s}{w_r}\times\frac{w_i}{w_i}=۱. \tag{۴}$$

برعکس، اگر A یک ماتریس دوجانبه متقارن باشد، حاصل‌ضرب عناصر هر جهش آن برابر یک است، کافی است ستون اول ماتریس A را به عنوان بردار w در نظر بگیریم (البته هر یک از ستون‌های A را می‌توانیم در نظر بگیریم). با توجه به اینکه حاصل‌ضرب عناصر هر جهش برابر یک است برای هر درایه A می‌توان جهشی یافت که این درایه در آن جهش باشد. با استفاده از این جهش و اینکه A یک ماتریس دوجانبه متقارن است، درایه مورد نظر به‌صورت تقسیم دو درایه در ستون انتخاب شده است. □

در ادامه به بیان لم زیر از مرجع [۲] می‌پردازیم که در اثبات قضیه ۳.۳ به‌کار می‌رود.

لم ۲.۳. برای اعداد مثبت a,b,c گزاره‌های زیر معادلند.

الف) $\frac{۱}{۱+c}\leq ab\leq ۱+c$،

ب) $|a-\frac{۱}{b}|\leq ca$ و $|\frac{۱}{a}-b|\leq\frac{c}{a}$.

قضیه زیر که در مرجع [۲] اثبات شده است، نشان می‌دهد که ماتریس انتقالی B ساخته شده توسط بردار ویژه ماتریس دوجانبه متقارن A، خطای نسبی در اندازه‌گیری فاصله B از A را به حداقل می‌رساند.

قضیه ۳.۳. فرض کنیم ماتریس $A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{R}_+)$ یک ماتریس دوجانبه متقارن و B ماتریس انتقالی ساخته شده توسط بردار مثبت $w=(w_۱,w_۲,\dots,w_n)$ باشد. برای عدد مثبت c شرایط زیر معادل است.

الف) $|a_{ij}-b_{ij}|\leq ca_{ij}$، $i,j=۱,۲,\dots,n$،

ب) $a_{ij}\frac{w_j}{w_i}\leq ۱+c$، $i,j=۱,۲,\dots,n$.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140663.1644

در حالت خاص اگر w برابر بردار ویژه x وابسته به $\mu(A)$ باشد، آنگاه مینیمم مقدار c برابر $\mu(A)-۱$ است و داریم

$$\min_{w>۰} e(w) = e(x) = \max_{i,j} \left| \frac{a_{ij} - \frac{x_i}{x_j}}{a_{ij}} \right| = \mu(A) - ۱.$$

با توجه به اینکه ماتریس‌های مورد بررسی ماتریس دوجانبه متقارن می‌باشند، پس $\mu(A)$ روی دوری با طول بیشتر از دو رخ خواهد داد؛ بنابراین برای یک ماتریس از بعد سه این پارامتر حتماً روی یک دور سه تایی یا جهش اصلی ظاهر خواهد شد و بنابراین در این‌حالت μ با توجه به جهش اصلی ماکزیموم حاصل خواهد شد. پس محاسبه مقدار ویژه و بردار ویژه در این‌حالت به راحتی انجام می‌شود.

مثال ۴.۳. فرض کنیم که ماتریس دوجانبه متقارن

$$A = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & \frac{۱}{۸} \\ \frac{۱}{۲} & ۱ & ۴ \\ ۸ & \frac{۱}{۴} & ۱ \end{pmatrix}.$$

داده شده باشد. در این‌صورت $a_{۱۲}a_{۲۳}a_{۳۱} = ۲ \times ۴ \times ۸$ ماکزیموم جهش اصلی ماتریس است که با توجه به آن مقدار ویژه ماکزیموم ساخته می‌شود که برابر با $\sqrt[۳]{۲ \times ۴ \times ۸} = ۴$ خواهد بود و با توجه به رابطه $A \otimes x = ۴ \otimes x$، مقدار بردار ویژه برابر $x = (۱, ۲, ۲)$ حاصل خواهد شد. بنابراین ماتریس انتقالی

$$B = \begin{pmatrix} ۱ & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ ۲ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۱ \end{pmatrix}$$

ساخته شده توسط این بردار دارای کمترین خطا با ماتریس A می‌باشد.

۴. رفتار مقدار ویژه و بردار ویژه ماکزیموم

در این قسمت به نقش مهم عناصر جهش‌های اصلی در محاسبه و تغییرات مقدار ویژه ماکزیموم می‌پردازیم. بررسی تغییرات مقدار ویژه ماکزیموم ماتریس دوجانبه متقارن در فرایند تحلیل سلسه مراتبی از اهمیت زیادی برخوردار است، چرا که ترتیب‌گذاری گزینه‌های A_i اغلب مهم‌تر از وزن‌های w_i می‌باشد که توسط این گزینه‌ها درفرایند تحلیل سلسه تحلیلی به‌دست آمده است. برای تجزیه و تحلیل رفتار مقدار ویژه یک ماتریس، دو نوع تغییر را می‌توانیم اعمال کنیم. در تغییر اول برخی از درایه‌های ماتریس دوجانبه متقارن اصلاح می‌شوند به این معنا که برای عدد $\tau > ۰$، درایه a_{ij} با درایه $a_{ij}\tau$ و درایه a_{ji} با درایه a_{ji}/τ جایگزین می‌شود و ماتریس A_τ حاصل می‌شود. در دومین تغییر یک تناوب جدید A_s (ستون) اضافه می‌شود. چون A ماتریس دوجانبه متقارن است، پس یک سطر نیز اضافه خواهد شد. اولین سؤالی که مطرح می‌شود این است که آیا این موضوع باعث تغییر در بردار وزن می‌شود؟ سؤال بعدی که مطرح می‌شود این است که آیا تغییر در بردارهای ویژه، باعث تغییر در رتبه‌بندی می‌شود یا خیر؟ ما در ادامه سعی می‌کنیم به این پرسش‌ها پاسخ دهیم.

$\mu(\tau) = \mu(A_\tau)$ تابعی از τ است. هدف ما در ادامه بررسی رفتار تابع $\mu(\tau)$ است. لم زیر که در مرجع [۲] اثبات شده است به بیان بررسی رفتار تابع $\mu(\tau)$ می‌پردازد.

لم ۱.۴. فرض کنیم $n \geq ۳$. در این‌صورت اعداد مثبت $T_۱ \leq T_۲$ چنان موجود است که $\mu(\tau)$ روی بازه $(۰, T_۱]$ اکیداً کاهشی و در بازه $[T_۱, T_۲]$ ثابت است و در بازه $[T_۲, \infty)$ اکیداً افزایشی است. برای $\tau \in (۰, T_۱)$ و $\tau \in (T_۲, \infty)$ بردار ویژه ماکزیموم $A(\tau)$ صرف نظر از اسکالر، یکتا است.

برای روشن شدن مطلب مثال زیر را بیان می‌کنیم و نشان می‌دهیم اگر این تغییر بر روی یک عنصر از جهش ماکزیموم صورت بگیرد، $\mu(A)$ در چه بازه‌ای اکیداً افزایشی است و اگر این تغییر در عنصری خارج جهش ماکزیموم صورت بگیرد، $\mu(A)$ در چه بازه‌ای ثابت و در چه بازه‌ای افزایشی است.

مثال ۲.۴. فرض کنیم ماتریس A به‌صورت زیر داده شده باشد:

$$A = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۴ & \frac{۱}{۱۶} \\ \frac{۱}{۲} & ۱ & \frac{۱}{۸} & ۸ \\ \frac{۱}{۴} & ۸ & ۱ & ۱ \\ ۱۶ & \frac{۱}{۸} & ۱ & ۱ \end{pmatrix}.$$

در این‌صورت

$$\mu(A) = \sqrt[۴]{a_{۱۳}a_{۳۲}a_{۲۴}a_{۴۱}} = \sqrt[۴]{۴ \times ۸ \times ۸ \times ۱۶} = ۸.$$

جهش بعدی ماکزیموم جهش

$$\sqrt[۳]{a_{۱۲}a_{۲۴}a_{۴۱}} = \sqrt[۳]{۲ \times ۸ \times ۱۶} = ۴\sqrt[۳]{۴}$$

است. تابع $\mu(\tau)$ تا زمانی که عضو انتخاب شده از جهش اصلی $a_{۱۳}a_{۳۲}a_{۲۴}a_{۴۱}$ به جهش $a_{۱۲}a_{۲۴}a_{۴۱}$ کاهش مقدار پیدا نکند افزایشی باقی می‌ماند. کران بازه‌ای که تابع $\mu(\tau)$ تغییر می‌کند برابر است با

$$\frac{a_{۱۲}a_{۲۴}a_{۴۱}}{a_{۱۳}a_{۳۲}a_{۲۴}a_{۴۱}} = \frac{۱}{۱۶}$$

فرض کنیم که $a_{۱۳}$ را به $a_{۱۳}\tau$ و $a_{۳۱}$ را به $\frac{a_{۳۱}}{\tau}$ تبدیل کنیم، در این‌صورت تابع $\mu(\tau)$ به ازای هر $\tau \in (۰, \frac{۱}{۱۶}]$ نزولی است زیرا در این بازه هنوز $\mu(A)$ بر روی جهش ماکزیموم اتفاق می‌افتد و در بازه $[\frac{۱}{۱۶}, ۱]$ این تابع ثابت است زیرا تغییر جهش ماکزیموم به سمت جهش $a_{۱۲}a_{۲۴}a_{۴۱}$ خواهد بود و از یک به بعد تابع $\mu(A_\tau)$ صعودی است.

اکنون به بررسی حالت‌های خاص از لم قبل می‌پردازیم. اگر عنصر انتخاب شده از جهش اصلی ماکزیموم، روی دوری باشد که $\mu(A)$ توسط آن محاسبه شده است، در این‌حالت به‌دست آوردن بازه‌هایی که $\mu(\tau)$ افزایشی، کاهشی و یا ثابت است، با توجه به این عنصر حاصل خواهد شد. حالت دوم را حالتی را فرض می کنیم که عنصر انتخاب شده از دور بحرانی نباشد. در این‌حالت تا زمانی که حاصل ضرب این دور در عدد τ از دوری که $\mu(A)$ بر اساس آن ساخته شده کمتر باشد تابع $\mu(\tau)$ ثابت خواهد بود.

فرض کنیم که A یک ماتریس دوجانبه متقارن مثبت و $\tau > ۰$ است. $M_{\max}$ جهشی از ماتریس است که مقدار ویژه ماکزیموم توسط این جهش به‌دست می‌آید و $M_{\min}$ جهشی از ماتریس است که درایه‌های آن معکوس درایه‌های $M_{\max}$ باشند.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140663.1644

ماتریس $A_\tau = [a_{ij}(\tau)]$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A(\tau) = a_{ij}\tau = \begin{cases} a_{s,p}\tau, & a_{s,p} \in M_{\max}; \\ \dfrac{a_{p,s}}{\tau}, & a_{p,s} \in M_{\min}; \\ a_{ij}, & \text{سایر جاها}. \end{cases} \tag{۵}$$

در ادامه به بیان یک روش جدید برای به‌دست آوردن ماتریس انتقالی از یک ماتریس دوجانبه متقارن می‌پردازیم. لم زیر حالت خاص از [۲، لم ۴] می‌باشد که در آن ماتریس دوجانبه متقارن با توجه به جهش اصلی تبدیل به ماتریس انتقالی می‌شود. ماتریس $A(\mu)$ ماتریسی است که درآن $\tau = \dfrac{۱}{\mu(A)}$.

لم ۳.۴. فرض کنیم A یک ماتریس دوجانبه متقارن است و $\mu(A)$ توسط جهش اصلی به طول n به‌دست آمده است. در این‌صورت ماتریس $A(\mu)$ یک ماتریس انتقالی است.

اثبات. با توجه به ساختار $A(\mu)$ و اینکه $\mu(A)$ توسط جهشی با طول n حاصل می‌شود، نتیجه می‌گیریم که حاصل‌ضرب عناصر هر جهش آن برابر یک است و بنابراین با به‌کار بردن لم ۱.۳ اثبات کامل می‌شود. □

مثال ۴.۴. فرض کنیم که ماتریس دوجانبه متقارن

$$A = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & \frac{۱}{۸} \\ \frac{۱}{۲} & ۱ & ۴ \\ ۸ & \frac{۱}{۴} & ۱ \end{pmatrix}$$

داده شده باشد. در این‌صورت $a_{۱۲}a_{۲۳}a_{۳۱} = ۲ \times ۴ \times ۸$ عناصر جهش اصلی ماتریس می‌باشند. در این‌صورت با تقسیم این عناصر بر $\mu(A) = ۴$ و ضرب عناصر مزدوج آنها در $\mu(A)$ ماتریس انتقالی زیر ساخته خواهد شد.

$$A(\mu) = \begin{pmatrix} ۱ & \frac{۲}{۴} & \frac{۱}{۸} \times ۴ \\ \frac{۱}{۲} \times ۴ & ۱ & \frac{۴}{۴} \\ \frac{۸}{۴} & \frac{۱}{۴} \times ۴ & ۱ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱ & \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ ۲ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۱ \end{pmatrix}.$$

که در آن هر سطر از این ماتریس بردار وزن یا همان بردار ویژه ماتریس A می‌باشد.

در ادامه دو قضیه که در مرجع [۲] اثبات شده است را بیان می‌کنیم.

قضیه ۵.۴. فرض کنیم که A یک ماتریس دوجانبه متقارن، $۰ < \tau_۰ < \tau_۱$ و $x, y > ۰$ بردارهای ویژه ماکزیموم ماتریس $A(\tau)$ هستند.

$$A(\tau_۰) \otimes x = \mu(\tau_۰)x \,, \qquad A(\tau_۱) \otimes y = \mu(\tau_۱)y. \tag{۶}$$

در این‌صورت

الف) اگر $\mu(\tau_۰) < \mu(\tau_۱)$، آنگاه

$$\frac{y_۱}{x_۱} > \frac{y_i}{x_i}, \qquad i \geq ۲.$$

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140663.1644

ب) اگر $\mu(\tau_0) > \mu(\tau_1)$، آنگاه

$$\frac{y_2}{x_2} < \frac{y_i}{x_i}, \qquad i \neq 2.$$

قضیه ۶.۴. فرض کنیم شرایط قضیه ۵.۴ برقرار باشد و $\mu(\tau_0) = \mu(\tau_1)$.

الف) اگر $\tau \in (\tau_0, \tau_1)$ وجود داشته باشد که $\mu(\tau) < \mu(\tau_0)$، آنگاه

$$\frac{y_1}{x_1} \geq \frac{y_i}{x_i} \geq \frac{y_2}{x_2}, \tag{7}$$

علاوه بر آن

$$\frac{y_1}{x_1} > \frac{y_2}{x_2}. \tag{8}$$

ب) اگر $\tau_0, \tau_1 \in (T-1, T_2)$ باشند، $[T_1, T_2]$ بازه ذکر شده در لم ۱.۴ است و برای حداقل یکی از τ_0 و τ_1 بردار ویژه منحصر بفرد باشد، آنگاه رابطه (۷) برقرار است.

اکنون به‌بررسی حالتی می‌پردازیم که یک تناوب جدید اضافه شود. همان‌گونه که قبلاً اشاره شد در این روش یک سطر و ستون جدید به ماتریس اضافه می‌شود. این مطلب در مرجع [۲] بررسی شده است. فرض کنیم که $A \in M_n$ یک ماتریس دوجانبه متقارن با مقدار ویژه μ و بردار ویژه x است به‌طوری‌که $A \otimes x = \mu x$ و $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ برداری است که $s^{-1} = (s_1^{-1}, s_2^{-1}, \ldots, s_n^{-1})$. ماتریس A_e را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A_e = \begin{pmatrix} A & S \\ S^{-1} & 1 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

ماتریس دوجانبه متقارن A_e تشکیل شده باید دارای این ویژگی باشد که مقدار ویژه آن با مقدار ویژه A برابر باشد. دو حالت می‌تواند رخ دهد. در حالت اول در ماتریس جدید مؤلفه‌های بردار s و s^{-1} نقشی در به وجود آوردن مقدار ویژه ندارند، به‌عبارت دیگر در دور بحرانی (دوری که با توجه به آن مقدار ویژه ماکزیموم به‌دست می‌آید) مؤلفه‌های s و s^{-1} به کار نمی‌روند. در این‌حالت مشخص است که دور بحرانی A و A_e یکسان می‌باشند. در حالت دوم دقیقاً یک عنصر از بردار s و دقیقاً یک عنصر از بردار s^{-1} در دور بحرانی شرکت دارند. قضیه زیر در ارتباط با چگونگی انتخاب s در مرجع [۲] اثبات شده است.

قضیه ۷.۴. فرض کنیم A ماتریس دوجانبه متقارن با مقدار ویژه μ و بردار ویژه x و A_e ماتریس تعریف شده در رابطه (۹) باشد. در این‌صورت شرایط زیر معادلند.

(۱) $\mu = \mu(A) = \mu(A_e)$ و برای هر $\alpha > 0$ و $(x^T, \alpha)^T$ زوج ویژه ماکزیموم از A_e.

(۲) $\max_k(\frac{s_k}{x_k}) \max_k(\frac{x_k}{s_k}) \leq \mu^2$.

شرط کافی برای برقراری گزاره‌های (۱) و (۲) آن است که برداری مانند $h > 0$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $S = A \otimes h$ یا $S = Ah$.

تشکر و قدر دانی

این مقاله با استفاده از اعتبار پژوهشی دانشگاه صنعتی اصفهان انجام شده است.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140663.1644

مراجع

[1] L. Elsner and P. Van Driessche, Modifying the method in max algebra, *Linear Algebra Appl.*, 332–385 (2001) 3–13.

[2] L. Elsner and P. Van Driessche, Max-algebra and pairwise comparison matrices, *Linear Algebra Appl.*, **385** (2004) 47–62.

[3] A. Farkas, P. Lancaster and P. Rózsa, Consistency adjustment for pairwise comparison matrices, *Numer. Linear Algebra Appl.*, accepted.

[4] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[5] S. Kleene, Representation of Events in Nerve Nets and Finite Automata, Princeton University Press, (1956), 3–42.

[6] S. M. Manjegani, A. Peperko and H. Shokooh Saljooghi, Calculating eigenvectors in max-algebra by mutation-sunflower method,arxiv.

[7] T. L. Saaty, A scaling method for priorities in hierarchical structures, *J. Math. Psychol.*, **32** (1977) 234–281.

سید محمود منجگانی
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ایران
manjgani@cc.iut.ac.ir

سید محمود منجگانی متولد شهریور ماه ۱۳۴۵ در شهرستان بیرجند است. وی مقطع کارشناسی خود را در رشته ریاضی محض در دانشگاه فردوسی مشهد، مقاطع کارشناسی ارشد را در دانشگاه صنعتی اصفهان و مقطع دکترای خود را در رشته ریاضی محض در دانشگاه رجینا کانادا گذرانده است.

حجر شکوه سلجوقی
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ایران
h.shokooh@alumni.iut.ac.ir

حجر شکوه سلجوقی متولد آبان ماه ۱۳۶۵ در شهرستان بافت است. وی در سال ۱۳۸۴ وارد مقطع کارشناسی رشته ریاضی محض دانشگاه زاهدان شد و در سال ۱۳۸۹ وارد مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض دانشگاه شهید باهنر کرمان شد و مقطع دکتری خود را در سال ۱۴۰۰ در دانشگاه صنعتی اصفهان به پایان رسانده است.