

CUBIC SEMISYMMETRIC GRAPHS OF ORDER $40p$

MOHAMMAD REZA SALARIAN AND JAVANSHIR REZAEI^{*}

ABSTRACT. A simple graph Γ is called semisymmetric if it is regular and edge-transitive but not vertex-transitive. A simple graph Γ is called cubic whenever it is 3-regular. An important research problem is the classification of semisymmetric cubic graphs of different orders. The purpose of this article is the classification of semisymmetric cubic graphs of order $40p$, where p is a prime number. We show that for $p \neq 3, 31$ such a graph Does not exist. Suppose p is a prime number, Folkman showed in [13] that there is no semisymmetric graph of order $2p$ or $2p^2$. We show that if Γ is a semisymmetric cubic graph of order $40p$, then $p = 3$ and Γ is isomorphic to a semisymmetric cubic graph of order 120 or $p = 31$ and Γ is isomorphic to the coset graph $C(L_2(31) : \mathbb{S}_4, \mathbb{S}_4)$. Our basic tools in this research are automorphism of graphs, simple groups, solvable groups and permutation groups.

1. Introduction

Throughout of this paper all graphs are finite, undirected and simple, i.e. without loops or multiple edges. A graph is said semisymmetric if it is regular and edge-transitive, but not vertex-transitive. An interesting research question is to classify connected cubic semisymmetric graphs of various types of orders. Folkman proved in [13] that there is no connected cubic semisymmetric graph of order $2p$ or $2p^2$. cubic semisymmetric graphs of orders $4p^2, 8p^2$ and $10p^3$ have respectively been classified in

Keywords: Semisymmetric graph, Symmetric graph, Vertex-transitive graph, Edge-transitive graph, Automorphism of graph.

Article Type: Research Paper.

Communicated by Alireza Abdollahi.

^{*}Corresponding author.

Received: 07-01-2024, Accepted: 06-08-2024, Published Online: 07-04-2025.

Cite this article: M. R. Salarian and J. Rezaei, Cubic semisymmetric graphs of order $40p$, *Journal of Mathematics and Society*, 10 no. 1 (2025) 125–144.

<http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140259.1639> .

[2],[1] and [3]. The authors of these articles have shown that there is no cubic semisymmetric graphs of these orders. According to [23], only cubic semisymmetric graph is obtained for $p = 3$ and it is gray graph with 54 vertices. In [18], it has been shown that there is no cubic semisymmetric graph of order $4p^3$ and only cubic semisymmetric graph of order $8p^3$ is obtained $p = 3$. cubic semisymmetric graphs of orders $6p^2, 10p^2, 14p^2, 20p^2, 20p, 6p^3, 12p^3, 34p^3$ have respectively been classified in [16],[19],[4],[11],[29],[23],[12],[18],[5],[10]. In this paper we will characterize connected cubic semisymmetric graphs of order $40p$. In fact we prove that if Γ is a connected cubic semisymmetric graph of order $40p$, p prime, then either $p = 3$ and Γ is isomorphic to the cubic semisymmetric graph of order 120 in or $p = 31$ and $\Gamma \cong C(L_2(31); S_4, S_4)$. So precisely, we shall prove the following theorem.

Theorem 1.1. *Let p be a prime and $p \neq 3, 31$. Then there is no connected cubic semisymmetric graph of order $40p$.*

2. Main Results

In this section, we prove theorem 1.1 First we state some lemmas and prove some of them.

Notation and Assumptions: According to [7], for $p = 3$ there is only one cubic semisymmetric graph of order 120 and for $p = 5, 7, 11, 13$ and 17 there is no cubic semisymmetric graph of order $40p$. Thus we can assume that $p > 19$. In the remaining of this paper Γ is a cubic connected semisymmetric graph of order $40p$, where $p > 19$ is a prime. Set $A = \text{Aut}(\Gamma)$.

Lemma 2.1. *If $O_p(A) = 1$, then A does not have normal subgroup of orders 10 and 20.*

Proof. Let $\{U, V\}$ be the bipartition of Γ and $u \in U$. Then $|U| = |V| = 20p$ and $|A_u| = 2^r \cdot 3$, for some r , $0 \leq r \leq 7$. So $|A| = |A_u||U| = 2^{r+2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot p$. Assume that $O_p(A) = 1$ and let M be a normal subgroup of A of order 20. Then M is intransitive on U and Γ_M is a $\frac{A}{M}$ -semisymmetric graph with bipartition $\{U_M, W_M\}$. We note that $|\frac{A}{M}| = 2^r \cdot 3 \cdot p$, and $|U_M| = |W_M| = p$. Let $\frac{K}{M}$ be a minimal normal subgroup of $\frac{A}{M}$. If $\frac{K}{M}$ is unsolvable, it must be a simple group of order $2^i \cdot 3 \cdot p$ for some i , $1 \leq i \leq 7$. But since $p > 19$ there is no K_3 -group of such order. So $\frac{K}{M}$ is solvable and therefore elementary abelian, whether it is transitive or intransitive on the partition sets we have $|K| = 20p$. The Sylow p -subgroup of K is normal in K and since it is characterisitic in K , hence normal in A that contradicting with our assumption $O_p(A) = 1$. Let M be a subgroup of A of order 10. Since M is intransitive on U , we have that Γ_M is $\frac{A}{M}$ -semisymmetric with a bipartition $\{U_M, W_M\}$, $|\frac{A}{M}| = 2^{r+1} \cdot 3 \cdot p$ and $|U_M| = |W_M| = 2p$. Let $\frac{K}{M}$ be a minimal normal subgroup of $\frac{A}{M}$. If $\frac{K}{M}$ is unsolvable, it must be a simple group of order $2^{i+1} \cdot 3 \cdot p$ for some i , $1 \leq i \leq 8$. But there is no K_3 -group of such order (for $p > 19$). So $\frac{K}{M}$ is solvable and then elementary abelian, whether it is transitive or intransitive on the partition sets we have $|K| = 20$ or $10p$. The first case could not be possible and in the second case

the Sylow p -subgroup of K is normal in K and since it is characteristic in K , hence normal in A that contradicting our assumption $O_p(A) = 1$. Now the lemma is proved. $\square$

Lemma 2.2. *We have either $|O_p(A)| = p$ or $p = 31$ and $\Gamma \cong C(L_2(31); S_4, S_4)$.*

Proof. Let $\{U, W\}$ be a bipartition for Γ . Then $|U| = |W| = 20p$ and $|A| = 2^{r+2}.3.5.p$, for some $r, 0 \leq r \leq 7$. Let N be a minimal normal subgroup of A , then $N \cong T^k$, where T is a simple group. If T is nonabelian, since the powers 3 and 5 in $|A|$ equal 1, we get that $k = 1$ and $N \cong T$. Either $|N|$ divides $|U| = 20p$ or $|U|$ divides $|N|$. In the first case, since $|N|$ is divisible by at least three distinct primes we have $|N| = 2^i.5.p$ and hence N is a simple K_3 -group. But the order of such groups is divisible by 3. Therefore $|N|$ is divisible by $20p$. Again since the order of every simple K_3 -group is divisible by 3, N must be a simple K_4 -group of order $2^i.3.5.p$. So $N \cong L_2(11), L_2(2^4)$ or $L_2(31)$, these groups correspond to $p = 11, p = 17$ and $p = 31$. Since $p > 19$, $N \cong L_2(31)$ and the order of $\frac{A}{N}$ does not divisible by 3. Now Γ is a N -semisymmetric graph. For each $u \in U$ and $v \in W$ by [9], we have $N_u = N_v \cong S_4$ and $\Gamma \cong C(N; N_u, N_v)$. We note that by [24, Theorem 1.3], $C(L_2(31); S_4, S_4)$ is a connected cubic semisymmetric graph.

Now assume that N is solvable and hence elementary abelian. It gives us that Γ_N is a connected cubic $\frac{A}{N}$ -semisymmetric graph of order $\frac{40p}{|N|}$. We claim that $|O_p(A)| = p$. Assume not and $O_p(A) = 1$, then $N \cong Z_2, Z_2 \times Z_2$ or Z_5 and Γ_N is $\frac{A}{N}$ -semisymmetric graph of order $20p, 10p$ or $8p$ respectively. Take $\{U_N, W_N\}$ to be the bipartition of Γ_N and $\frac{M}{N}$ be a minimal normal subgroup of $\frac{A}{N}$. Assume that $N \cong Z_2$, then $|\frac{M}{N}| = 2^{r+1}.3.5.p$ and $|U_N| = |W_N| = 10p$. If $\frac{M}{N}$ is unsolvable, then it must be a simple K_4 -group of order $2^i.3.5.p$ that contradicts our assumption. If $\frac{M}{N}$ is solvable, then $\frac{M}{N} \cong Z_2, Z_5$ or Z_p . If $\frac{M}{N} \cong Z_5$, then $|M| = 10$ that according to lemma 2.1 it could not be possible. If $\frac{M}{N} \cong Z_p$, the Sylow p -subgroup of M is normal and characteristic in M , so it is normal in A , contradicting our assumption. If $\frac{M}{N} \cong Z_2$, then $M \cong Z_2 \times Z_2$ or Z_4 , $|\frac{A}{M}| = 2^r.3.5.p$ and $|U_M| = |W_M| = 5p$. Let $\frac{K}{M}$ be a minimal normal subgroup of $\frac{A}{M}$, then it is solvable and isomorphic to Z_5 or Z_p . The first case by lemma 2.1 can not be hold and in the second case we have $|O_p(A)| > 1$, contradiction our assumption. This shows that N is not isomorphic to Z_2 and a similar argument also shows that N is not isomorphic to $Z_2 \times Z_2$. Finally we assume that $N \cong Z_5$, then $|\frac{A}{N}| = 2^{r+2}.3.p$. But there is no such simple K_3 -group since $p > 19$. If $\frac{M}{N}$ is solvable, then it is isomorphic to $Z_2, Z_2 \times Z_2$ or Z_p which implies that $|M| = 10, 20$ or $5p$ and each of them is impossible. Now the lemma is proved. $\square$

By lemma above, in the remaining of this paper we assume that $p \neq 31$. Then a Sylow p -subgroup of A is normal in A .

Lemma 2.3. *Let M be the Sylow p -subgroup of A and $\frac{A}{M} \cong G$. Then we have*

- (i) *For each vertex u , A_u is isomorphic to a subgroup of G .*

(ii) $A \cong G \ltimes_{\phi} M$ for some homomorphism $\phi : G \rightarrow \text{Aut}(M)$.

Lemma 2.4. *Let M be the Sylow p -subgroup of A . Then $\frac{A}{M}$ is not isomorphic to A_5 .*

Lemma 2.5. *Let M be the Sylow p -subgroup of A . Then $\frac{A}{M}$ is not isomorphic to S_5 .*

Now we can prove our main theorem. We note that $\mathbb{F}_{40}$ is the unique cubic symmetric graph of order 40.

The proof of theorem 1.1. : Let Γ be a connected cubic semisymmetric graph of order $40p$. By [7] we assume that $p > 19$. Let $A = \text{Aut}(\Gamma)$ and M be a Sylow p -subgroup of A . We have $|A| = 2^{r+2}.3.5.p$ and by lemma 2.2, either $M \leq A$ or $\Gamma \cong C(L_2(31); \mathbb{S}_4, \mathbb{S}_4)$. So we assume that M is normal in A . Let U, W be a bipartition of Γ . Then we have $|U| = |W| = 20p$ and M is on both U and W intransitive. Now Γ_M is a connected cubic $\frac{A}{M}$ -semisymmetric graph of order 40. Set $G = \frac{A}{M}$. Since Γ_M is G -semisymmetric, we get by [7] that it is G -edge transitive and hence it is symmetric. Thus $\Gamma_M \cong \mathbb{F}_{40}$ and G is isomorphic to a subgroup of $\text{Aut}(\mathbb{F}_{40})$. By [7] we get that $|\text{Aut}(\mathbb{F}_{40})| = 480$, so we have $|G| = 2^{r+2}.3.5 \leq 480$. This implies that $2^{r+2} \leq 32$ and G is intransitive on U . Therefore $|G| < 480$ and $0 \leq r \leq 2$. Hence $|G| = 60, 120$ or 240 and G is transitive on both U_M and W_M . This gives us that G is a transitive permutation group of degree 20 and of order 60, 120 or 240. We note that $\text{Aut}(\mathbb{F}_{40})$ has a subgroup $H \cong \mathbb{A}_5 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ of index 2 and G is a subgroup of $\text{Aut}(\mathbb{F}_{40})$. So $G \cap H$ is a subgroup of index at most 2 in G . Assume that $|G| = 60$. Then using Gap we get that $G \cong \mathbb{A}_5$ or $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{A}_4$. The first case due to lemma 2.4 is not true and by the structure of $(\mathbb{F}_{40})$ we get that G is not isomorphic to $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{A}_4$. Now assume that $|G| = 120$. Again using Gap we obtain that $G \cong \mathbb{S}_5, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{A}_5, \mathbb{S}_4 \ltimes \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{A}_4$ or $\mathbb{D}_{10} \times \mathbb{A}_4$. By lemma 2.5, G is not isomorphic to S_5 . By the structure of $\text{Aut}(\mathbb{F}_{40})$, we get that the only possibility for G is to be isomorphic to $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{A}_5$. If $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{A}_5$, then G has a normal subgroup $K \cong \mathbb{A}_5$ and 3 does not divide the order of $\frac{G}{K}$. This implies that Γ_M is K -semisymmetric which is impossible. Now assume that $|G| = 240$. Then G is a subgroup of index 2 in $\text{Aut}(\mathbb{F}_{40})$. By this and Gap we get that $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{S}_5, \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{A}_5, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{A}_5$ or $\mathbb{A}_5 \ltimes \mathbb{Z}_4$. Assume that $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{S}_5$ and set $T = Z(G)$. Then $T \cong \mathbb{Z}_2$ and $(\Gamma_M)_T$ is $\frac{G}{T}$ -semisymmetric. Now let $B = \frac{G}{T}$. Then $B \cong S_5$ and for each edge $\{u, v\}$ in Γ we have $|B_u| = |B_v| = 12$, also each subgroup of B of order 12 is isomorphic to $\mathbb{A}_4$. This gives us that $(B_u, B_v) = (\mathbb{A}_4, \mathbb{A}_4)$ that is impossible. A similar argument shows that G is not isomorphic to $\mathbb{A}_5 \ltimes \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{A}_5$ or $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{A}_5$. This completes the proof of theorem 1.1. $\square$

3. Conclusions

Corollary 3.1. *We assume p is prime and Γ is a connected cubic graphs of order $40p$:*

- (1) If Γ is a semisymmetric graph then $p = 3$ and Γ is isomorphic to a semisymmetric cubic graph of order 120 or $p = 31$ and Γ is isomorphic to the coset graph $C(L_2(31) : \mathbb{S}_4, \mathbb{S}_4)$
- (2) IF $p \neq 3, 31$ then Γ is symmetric

4. Tables, Figures and graphs

TABLE 1. K_4 -Simple groups of order $2^i \times 3 \times 5 \times p$

Group	order
$L_2(11)$	$2^2 \times 3 \times 5 \times 11$
$L_2(2^4)$	$2^4 \times 3 \times 5 \times 17$
$L_2(31)$	$2^5 \times 3 \times 5 \times 31$

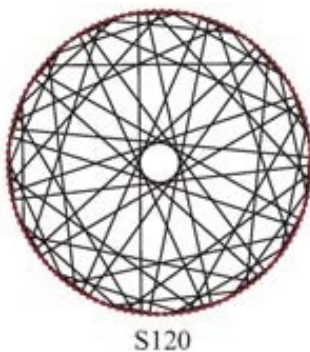


FIGURE 1. Semisymmetric graph diagram $\mathbb{S}_{120}$

Mohammad reza Salarian

Faculty of Mathematical Sciences and Computer, Kharazmi of TEHRAN, P.O.Box 1561836314, Tehran, Iran

Email: Salariankhu.ac.ir

Javanshir Rezaei

Faculty of Mathematical Sciences and Computer, Kharazmi of TEHRAN, P.O.Box1561836314, Tehram, Iran

Email:jre927gmail.com

گراف‌های نیم‌متقارن مکعبی از مرتبه 4^0p

محمدرضا سالاریان و جوانشیر رضایی*

چکیده. گراف ساده Γ را نیم‌متقارن می‌نامیم هرگاه منتظم و یال-انتقالی بوده اما رأس-انتقالی نباشد. هرگراف ۳-منتظم را مکعبی می‌نامیم. یک مسئله تحقیقاتی مهم تعیین گراف‌های نیم‌متقارن مکعبی از مرتبه‌های مختلف است. هدف از این مقاله تعیین گراف‌های نیم‌متقارن مکعبی از مرتبه 4^0p است که p ، اول است. نشان می‌دهیم برای 31 و $3 \neq p$ چنین گرافی وجود ندارد. به عبارت دیگر در این حالت گراف متقارن است. فرض کنیم p اول باشد، فاکتمن در [۱۳] نشان داد، گرافی نیم‌متقارن از مرتبه $2p$ یا $2p^2$ وجود ندارد. ما نشان می‌دهیم اگر Γ یک گراف نیم‌متقارن مکعبی از مرتبه 4^0p باشد آنگاه $p = 3$ و Γ بایک گراف نیم‌متقارن از مرتبه 12^0 یکرخت است یا $p = 31$ و $p \in \{4, 5, 11, 12, 13, 17, 19, 23, 29, 37, 47, 59, 71, 83, 97, 107, 127, 137, 149, 157, 173, 181, 191, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 251, 263, 271, 281, 283, 293, 307, 311, 331, 337, 347, 359, 367, 373, 383, 397, 401, 409, 419, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463, 467, 479, 487, 491, 499, 503, 509, 521, 523, 527, 539, 541, 547, 557, 563, 569, 571, 577, 587, 593, 599, 607, 613, 617, 619, 623, 629, 631, 637, 641, 643, 647, 653, 659, 661, 667, 671, 673, 677, 683, 687, 691, 697, 701, 703, 707, 709, 713, 719, 727, 731, 733, 737, 739, 743, 749, 751, 757, 761, 763, 767, 769, 773, 779, 781, 787, 791, 793, 797, 803, 809, 811, 817, 821, 823, 827, 829, 833, 837, 839, 843, 847, 851, 853, 857, 859, 863, 867, 869, 871, 877, 881, 883, 887, 893, 897, 901, 907, 911, 913, 917, 919, 923, 927, 929, 931, 937, 939, 941, 943, 947, 949, 953, 957, 959, 961, 967, 969, 971, 973, 977, 979, 983, 987, 991, 993, 997$. ابزارهای اساسی ما در این تحقیق خودریختی گراف‌ها، گروه‌های ساده، گروه‌های حل پذیر و گروه‌های جایگشتی می‌باشند.

۱. مقدمه

در سراسر این مقاله، ما گراف‌ها را ساده، همبند، غیر جهت‌دار، یعنی بدون طوقه و فاقد یال‌های چندگانه، در نظر می‌گیریم. یک گراف را نیم‌متقارن می‌نامیم هرگاه منتظم و یال-انتقالی بوده ولی رأس-انتقالی نباشد. فاکتمن^۱ در [۱۳] نشان داد، گرافی نیم‌متقارن از مرتبه $2p$ یا $2p^2$ وجود ندارد. گراف‌های همبند نیم‌متقارن مکعبی از مرتبه‌های $4p^2$ ، $8p^2$ ، $10p^2$ به ترتیب در [۲]، [۱] و [۳] بررسی شده‌اند، نویسندگان این مقاله‌ها نشان داده‌اند گرافی نیم‌متقارن مکعبی از این مرتبه‌ها وجود ندارند. با توجه به [۲۳] تنها گراف نیم‌متقارن مکعبی از مرتبه $2p^3$ ، به ازای $p = 3$ ، به دست می‌آید که آن گراف گرای^۲ با 54 رأس است. در [۱۸] نشان داده شده است که گراف نیم‌متقارن مکعبی از مرتبه $4p^3$ وجود ندارد و تنها گراف نیم‌متقارن مکعبی از مرتبه $8p^3$ به ازای $p = 3$ به دست می‌آید. گراف‌های نیم‌متقارن مکعبی از مرتبه‌های $34p^3$ ، $12p^3$ ، $6p^3$ ، $20p^2$ ، $14p^2$ ، $10p^2$ ، $6p^2$ به ترتیب در مقالات [۱۶]، [۱۹]، [۴]، [۱۱]، [۲۹]، [۲۳]، [۱۲]، [۱۸]، [۵]، [۱۰] رده‌بندی شده‌اند. ما در این مقاله گراف‌های همبند نیم‌متقارن مکعبی از مرتبه 4^0p را رده‌بندی می‌کنیم. درحقیقت نشان می‌دهیم اگر Γ چنین گرافی باشد آنگاه $p = 3$ و Γ با یک گراف نیم‌متقارن از مرتبه 12^0 یکرخت است و یا $p = 31$ و Γ با گراف همدسته $C(L_2(31) : \mathbb{S}_4, \mathbb{S}_4)$ یکرخت است. در واقع هدف ما اثبات قضیه زیر است:

عبارات و کلمات کلیدی: گراف نیم‌متقارن، گراف متقارن گراف رأس-انتقالی، گراف یال-انتقالی، خودریختی گراف.

نوع مقاله: پژوهشی

دبیرتخصصی رابط: علیرضا عبدالهی

* نویسنده مسئول

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۱۰/۱۷ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۴/۲۱ تاریخ انتشار آنلاین: ۱۴۰۴/۰۱/۱۸

ارجاع به مقاله: م. ر. سالاریان و ج. رضایی، گراف‌های نیم‌متقارن مکعبی از مرتبه 4^0p ، نشریه ریاضی و جامعه، ۱۰ شماره ۱ (۱۴۰۴) ۱۲۵-۱۴۴.

<https://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140259.1639>

قضیه ۱.۱. فرض می‌کنیم p اول و $3, 31 \neq p$ ، در این صورت گرافی همبند، مکعبی و نیم‌متقارن از مرتبه $4 \cdot p$ وجود ندارد.

۲. متن اصلی

در این قسمت ابتدا مفاهیمی از نظریه گروه‌های متناهی و نظریه جبری گراف، که برای اثبات قضیه ۱.۱ از آنها استفاده می‌کنیم، را بیان می‌کنیم سپس در ادامه این قضیه را اثبات می‌کنیم.

۱.۲. مقدمات و پیش‌نیازها. در این مقاله عدد اصلی مجموعه متناهی A را با $|A|$ نشان می‌دهیم. مقدار تابع f در x را با xf نشان می‌دهیم. همچنین ترکیب fg را به صورت $(fg)(x) = (xf)g$ تعریف می‌کنیم. فرض کنیم G یک گروه باشد عضو همانی آن را با e و زیرگروه همانی را با 1 نشان می‌دهیم. گروه‌های متقارن و متناوب از درجه n ، گروه‌های دوری از مرتبه n و گروه‌های دووجهی از مرتبه $2n$ را به ترتیب با $\mathbb{D}_{2n}$ و $\mathbb{C}_n, \mathbb{A}_n, \mathbb{S}_n$ نشان می‌دهیم. برای هرگروه G ، مرکز و گروه خودریختی‌های G را به ترتیب با $Z(G)$ و $\text{Aut}(G)$ نمایش می‌دهیم. فرض کنید p یک عامل اول مرتبه G باشد. بزرگ‌ترین p -زیرگروه نرمال G را با $O_p(G)$ نشان می‌دهیم. زیرگروه H از G را زیرگروه مشخصه^۳ G می‌نامیم در صورتی که به ازای هر خود ریختی $H\alpha \leq H$ ، $\alpha \in \text{Aut}(G)$ در این صورت می‌نویسیم $H \text{ ch } G$ می‌توان نشان داد که اگر $K \text{ ch } G$ و $H \text{ ch } K$ آنگاه $H \text{ ch } G$ و علاوه بر این اگر $H \text{ ch } K$ و $K \leq G$ آنگاه $H \leq G$. واضح است اگر P تنها p -زیرگروه سیلوی گروه G باشد آنگاه P زیرگروه مشخصه G است. گروه G را حل‌پذیر^۴ می‌نامیم هرگاه دنباله‌ای متناهی از زیرگروه‌های G مانند

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq G_2 \leq \dots \leq G_r = G$$

وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر i که $1 \leq i \leq r$ ، $G_{i-1} \leq G_i$ و G_i/G_{i-1} آبلی باشد. زیرگروه M از G را زیرگروه نرمال می‌نامیم^۵ اگر $M \neq 1$ و اگر L زیرگروه نرمال G باشد به طوری که $1 \leq L \leq M$ آنگاه $L = M$ یا $L = 1$. هر زیرگروه نرمال می‌نیمال از یک گروه متناهی حاصل ضرب مستقیم نسخه‌هایی از یک گروه ساده است. علاوه بر این اگر یک گروه حل‌پذیر باشد با توجه به [۲۸، قضیه ۵-۲] هر زیرگروه نرمال می‌نیمال آن آبلی مقدماتی است. فرض کنیم G یک گروه و X مجموعه‌ای ناتهی باشد. می‌گوییم G بر X عمل می‌کند هرگاه تابعی از $G \times X \rightarrow X$ وجود داشته باشد که اگر مقدار این تابع را (g, x) ، که $x \in X$ و $g \in G$ ، را با x^g نشان دهیم در شرایط زیر صدق کند:

$$(i) \text{ به ازای هر } x \text{ از } X, x^e = x$$

$$(ii) \text{ به ازای هر } g_1 \text{ و } g_2 \text{ از } G \text{ و هر } x \text{ از } X, x^{(g_1 g_2)} = (x^{g_1})^{g_2}$$

فرض کنیم G روی X عمل کند و $x \in X$ ، پایدار ساز^۶ x را با G_x نشان داده و به صورت: $G_x = \{g \in G | x^g = x\}$ تعریف می‌کنیم. G را روی X انتقالی^۷ می‌نامیم هرگاه برای هر دو عضو x و y در X ، عضوی مانند $g \in G$ وجود داشته باشد که $x^g = y$. عمل G روی X را نیم‌منظم^۸ می‌نامیم هرگاه، برای هر $x \in X$ داشته باشیم: $G_x = 1$ و آن را منظم^۹ می‌نامیم هرگاه هم نیم‌منظم باشد هم انتقالی. همچنین این عمل را صادق^{۱۰} می‌نامیم هرگاه عضو همانی تنها عضوی از G باشد که تمام اعضای X را ثابت نگه می‌دارد. در این حالت G را یک گروه جایگشتی^{۱۱} روی X می‌نامیم.

فرض کنیم H و K دوگروه باشند و $\phi: H \rightarrow \text{Aut}(K)$ یک همریختی باشد. حاصل ضرب نیم‌مستقیم^{۱۲} H و K توسط ϕ را با $H \ltimes_{\phi} K$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(h_1, k_1)(h_2, k_2) = (h_1 h_2, (k_1 \phi_{h_2}) k_2)$$

³Characteristic ⁴Solvable ⁵minimal normal ⁶Stabilizer ⁷Transitive ⁸Semiregular ⁹Regular ¹⁰Faithful ¹¹Permutation Group ¹²Semidirect Product

در صورتی که ابهامی در مورد ϕ پیش نیاید یا مشخص کردن آن نیاز نباشد می‌نویسیم $H \times K$. فرض کنیم Γ یک گراف ساده باشد. اگر u و v دو رأس مجاور باشند می‌نویسیم $u \sim v$. مجموعه تمام رأس‌های مجاور u را با Γ_u نشان می‌دهیم. واضح است که درجه u برابر است با $|\Gamma_u|$. بزرگ‌ترین عدد در میان فاصله رأس‌های گراف Γ از همدیگر را قطر^{۱۳} گراف Γ می‌نامیم و آن را با $diam(\Gamma)$ نشان می‌دهیم. همچنین طول کوتاه‌ترین دور این گراف را کمر^{۱۴} گراف Γ می‌نامیم و آن را با $girth(\Gamma)$ نمایش می‌دهیم. گراف Γ را منتظم می‌نامیم هرگاه درجه تمام رأس‌های آن با هم برابر باشند. مجموعه رأس‌ها، مجموعه یال‌ها، مجموعه کمان‌ها و مجموعه تمام خودریختی‌های گراف Γ را به ترتیب با $V(\Gamma)$ ، $E(\Gamma)$ ، $Arc(\Gamma)$ و $Aut(\Gamma)$ نشان می‌دهیم. فرض کنیم N زیرگروهی از $Aut(\Gamma)$ باشد. گراف خارج قسمتی Γ_N گرافی است که مجموعه رأس‌های آن مدارهای N روی $V(\Gamma)$ هستند و دومدار در Γ_N مجاورند اگر و فقط اگر یک عضو از یکی با عضوی از دیگری در $V(\Gamma)$ مجاور باشند. فرض کنید G زیرگروهی از $Aut(\Gamma)$ باشد. اگر عمل G روی $V(\Gamma)$ ، $E(\Gamma)$ و $Arc(\Gamma)$ انتقالی باشد، Γ را به ترتیب G -رأس-انتقالی^{۱۵}، G -یال-انتقالی^{۱۶} و G -کمان-انتقالی^{۱۷} می‌نامیم. Γ را G -نیم‌متقارن^{۱۸} می‌نامیم هرگاه، منتظم G -یال-انتقالی باشد ولی G -رأس-انتقالی نباشد. به علاوه Γ را G -متقارن^{۱۹} می‌نامیم هرگاه G -رأس-انتقالی و G -کمان-انتقالی باشد. اگر $G = Aut(\Gamma)$ باشد، معمولاً G را حذف می‌کنیم و Γ را به ترتیب رأس-انتقالی، یال-انتقالی، کمان-انتقالی، نیم‌متقارن و متقارن می‌نامیم. هرگراف همبند G -نیم‌متقارن دوبخشی^{۲۰} است و هر دوبخش آن تعداد اعضای یکسان دارند با توجه به [۸] فقط یک گراف متقارن مکعبی از مرتبه ۴۰ وجود دارد که دوبخشی است. این گراف را با $\mathbb{F}_{40}$ نشان می‌دهیم. با توجه به [۷] به ازای $p = 3$ ، فقط یک گراف نیم‌متقارن مکعبی از مرتبه ۱۲۰ وجود دارد. این گراف را با $\mathbb{S}_{120}$ نشان می‌دهیم، مشخصات مهم این گراف به صورت زیر است:

$$diam(\mathbb{S}_{120}) = girth(\mathbb{S}_{120}) = 8, |Aut(\mathbb{S}_{120})| = 720, |Aut(\mathbb{S}_{120})_u| = 12$$

نموداری از این گراف در شکل ۱ آمده است.

به ازای $p = 5, 7, 11, 13, 17$ و $p = 19$ گراف نیم‌متقارن مکعبی از مرتبه $40p$ وجود ندارد. یک گروه متناهی را K_n -گروه می‌نامیم هرگاه در مرتبه آن دقیقاً n عامل اول متمایز وجود داشته باشد. در دو قضیه بعد K_3 -گروه‌های ساده و K_4 -گروه‌ها ساده را رده‌بندی می‌کنیم.

قضیه ۱.۲. [۹]، [۱۷] هر K_3 -گروه ساده با یکی از گروه‌های زیر یکرخت است:

- گروه‌های متناوب^{۲۱} A_5 از مرتبه $2^2 \times 3 \times 5$ و A_6 از مرتبه $2^2 \times 3^2 \times 5$.
- گروه‌های خطی خاص تصویری^{۲۲} $L_2(7)$ از مرتبه $2^2 \times 3 \times 7$ و $L_2(17)$ از مرتبه $2^4 \times 3^2 \times 17$ و $L_3(3)$ از مرتبه $2^4 \times 3^3 \times 13$.
- گروه‌های یکانی خاص تصویری^{۲۳} $U_3(3)$ از مرتبه $2^5 \times 3^3 \times 7$ و $U_4(2)$ از مرتبه $2^6 \times 3^4 \times 5$.

قضیه ۲.۲. [۶]، [۲۶]، [۹]، [۳۱] هر K_4 -گروه ساده با یکی از گروه‌های زیر یکرخت است:

(i)

- گروه‌های متناوب A_7, A_8, A_9, A_{10} به ترتیب از مرتبه‌های

$$2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7, 2^6 \times 3^2 \times 5 \times 7, 2^6 \times 3^4 \times 5 \times 7, 2^7 \times 3^4 \times 5^2 \times 7$$

¹³Diameter ¹⁴Girth ¹⁵vertex-transitive ¹⁶edge-transitive ¹⁷arc-transitive ¹⁸semisymmetric ¹⁹symmetric ²⁰bipartit
²¹Alternating Groups ²²Projective Special Linear Groups ²³Projective Special Unitary Groups

• گروه‌های خطی خاص تصویری

$$L_2(2^4), L_2(5^2), L_2(7^2), L_2(3^4), L_2(9^2), L_2(3^5), L_2(5^2 \cdot 7), L_3(2^2), L_3(5), L_3(7), L_3(2^3), L_3(17), L_4(3)$$

به ترتیب از مرتبه های

$$2^4 \times 3 \times 5 \times 17, 2^3 \times 3 \times 5^2 \times 13, 2^4 \times 3 \times 5 \times 7^2, 2^4 \times 3^4 \times 5 \times 41, 2^5 \times 3 \times 7^2 \times 97, \\ 2^3 \times 3^5 \times 11^2 \times 61, 2^6 \times 3^2 \times 7^2 \times 577, 2^6 \times 3^2 \times 5 \times 7, 2^5 \times 3 \times 5^3 \times 31, 2^5 \times 3^2 \times 7^3 \times 19, \\ 2^9 \times 3^2 \times 7 \times 511, 2^9 \times 3^3 \times 17^3 \times 307, 2^7 \times 3^6 \times 5 \times 13$$

• گروه‌های یکانی خاص تصویری

$$U_2(2^2), U_2(5), U_2(7), U_2(2^3), U_2(3^2), U_4(3), U_5(2)$$

به ترتیب از مرتبه های

$$2^6 \times 3 \times 5^2 \times 13, 2^4 \times 3^2 \times 5^3 \times 17, 2^7 \times 3 \times 7^3 \times 43, 2^9 \times 3^4 \times 7 \times 19, \\ 2^5 \times 3^6 \times 5^2 \times 73, 2^7 \times 3^6 \times 5 \times 7, 2^{10} \times 3^5 \times 5 \times 11$$

• گروه‌های ماتئو^{۲۴} M_{11}, M_{12} به ترتیب از مرتبه های $2^4 \times 3^2 \times 5 \times 11, 2^6 \times 3^3 \times 5 \times 11$

• گروه‌های هم‌تافته تصویری^{۲۵}

$$S_4(2^2), S_4(5), S_4(7), S_4(3^2), S_6(2)$$

به ترتیب از مرتبه های

$$2^8 \times 3^2 \times 5^2 \times 17, 2^6 \times 3^2 \times 5^4 \times 13, 2^8 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^4, 2^8 \times 3^8 \times 5^2 \times 41, 2^9 \times 3^4 \times 5 \times 7$$

• گروه متعامد^{۲۶} $O_8^+(2)$ از مرتبه $2^{12} \times 3^5 \times 5^2 \times 7$

• گروه شوالی^{۲۷} $G_2(3)$ از مرتبه $2^6 \times 3^6 \times 7 \times 13$

• گروه‌های سوزوکی^{۲۸} $S_z(2^3), S_z(2^5)$ به ترتیب از مرتبه های $2^5 \times 5 \times 7 \times 13, 2^{10} \times 5^2 \times 31 \times 41$

• گروه ${}^2F_4(2)'$ از مرتبه $2^{11} \times 3^3 \times 5^2 \times 13$

• گروه ${}^3D_4(2)$ از مرتبه $2^{12} \times 3^4 \times 7^2 \times 13$

• گروه جانکو^{۲۹} J_2 از مرتبه $2^7 \times 3^3 \times 5^2 \times 7$

(ii) $L_2(r)$ هنگامی که r عددی اول است و $s > 3$ در آن $r^2 - 1 = 2^a 3^b \cdot s$ ؛ $a, b \in \mathbb{N}$

(iii) $L_2(2^m)$ وقتی که $2^m - 1, \frac{2^m + 1}{3}, m$ اعدادی اول و بزرگتر از ۳ هستند؛

(iv) $L_2(3^m)$ وقتی که $\frac{3^m + 1}{4}, \frac{3^m - 1}{2}, m$ اعداد اول و فرد متمایزی هستند.

نتیجه ۳.۲. تنها سه K_4 -گروه ساده از مرتبه $2^i \times 3 \times 5 \times p$ وجود دارند، که p اول است، و $p > 5$ و $i \in \mathbb{N}$ و $2 \leq i \leq 9$. این گروه‌ها عبارت هستند از $L_2(11), L_2(2^4)$ و $L_2(31)$.

²⁴Mathieu Groups ²⁵Projective Symplectic Groups ²⁶Orthogonal Group ²⁷Chevalley Group ²⁸Suzuki Group ²⁹Janko Group

اثبات. با بررسی گروه‌های بدست آمده در قضیه ۲،۲ می بینیم که تنها گروهی از مرتبه $2^i \times 5 \times p$ در آیت‌های (i)، (iii) و (iv) گروه $L_2(2^4)$ است. اگر مرتبه یک گروه در آیت (ii) برابر $2^i \times 3 \times 5 \times p$ باشد بایستی داشته باشیم: $2^{a-1} \cdot 3^b r s = 2^i \times 3 \times 5 \times p$. در نتیجه $a-1 = i, b = 1, s = 5$ و لذا $a-1 = i, b = 1, s = 5$ و $r^2 - 1 = 2^{i+1} \times 3 \times 5$ و $2 \leq i \leq 9, r = 11$ یا $r = 31$ یک عدد فرد اول است. و از این بدست می آید $r = 11$ یا $r = 31$ $\square$

باتوجه به نتیجه بالا در جدول زیر K_4 -گروه‌های ساده از مرتبه $2^i \times 3 \times 5 \times p$ $2 \leq i \leq 9, i \in \mathbb{N}$ به همراه مرتبه آنها، مشخص شده اند: ۱

گزاره ۴.۲. [۲۵، قضیه ۹.۱.۲] فرض کنیم N زیرگروه نرمالی از G باشد، به طوری که $1 = (|N|, \frac{G}{N})$. در این صورت G زیرگروهی مانند H دارد به طوری که $G = HN, H \cap N = 1$ یعنی $G \cong H \rtimes N$.

در ادامه قضیه مهم برنساید^{۳۰} را بیان می‌کنیم. یک نتیجه جالب این قضیه این است که مرتبه هر گروه ساده غیر آبلی حداقل سه عامل اول متمایز دارد.

قضیه ۵.۲. (قضیه $p^a q^b$ برنساید). [۲۸، قضیه ۵.۲۵] اگر $a, b \in \mathbb{N}$ و p و q دو عدد اول متمایز باشند، هر گروه از مرتبه $p^a q^b$ حل پذیر است.

قضیه ۶.۲. [۱۵] فرض کنیم $V(\Gamma)$ یک گراف G -نیم‌متقارن مکعبی باشد. در این صورت مرتبه پایدار ساز هر رأس برابر است با $2^r \cdot 3$ که در آن $0 \leq r \leq 7$. علاوه بر این اگر $\{u, v\} \in E(\Gamma)$ آنگاه (G_u, G_v) یکی از یازده زوج مرتب زیر یا وارون آنها می باشد. توجه کنید منظور از وارون زوج مرتب (a, b) زوج مرتب (b, a) است. همچنین C_n, B_n, A_n و D_n گروه‌های غیردوری شناخته شده ای هستند که ما نیازی به ساختار آنها نداریم.

$$(\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_3), (\mathbb{S}_3, \mathbb{S}_3), (\mathbb{S}_3, \mathbb{Z}_6), (\mathbb{D}_{12}, \mathbb{D}_{12}), (\mathbb{D}_{12}, \mathbb{A}_4), (\mathbb{S}_4, \mathbb{D}_{24}), (\mathbb{S}_4, \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{D}_8), \\ (\mathbb{A}_4 \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{D}_{12} \times \mathbb{Z}_2), (\mathbb{S}_4, \mathbb{S}_4), (\mathbb{S}_4 \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{D}_8 \times \mathbb{S}_3), (\mathbb{S}_4 \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{S}_4 \times \mathbb{Z}_2), \\ (\mathbb{A}_{46}, \mathbb{B}_{46}), (\mathbb{A}_{192}, \mathbb{B}_{192}), (\mathbb{C}_{192}, \mathbb{D}_{192}), (\mathbb{A}_{384}, \mathbb{B}_{384}).$$

قضیه ۷.۲. [۲۳، قضیه ۲.۶] فرض کنیم $G \leq \text{Aut}(\Gamma)$ و Γ یک گراف G -نیم‌متقارن مکعبی باشد. در این صورت $\Gamma \cong K_{3,3}$ یا G ، روی هر دوبخش Γ ، به طور صادق عمل می کند.

قضیه ۸.۲. [۳۰] فرض کنیم $G \leq \text{Aut}(\Gamma)$ و Γ یک گراف G -نیم‌متقارن مکعبی باشد. اگر $N \leq G$ و 3 ، یک شمارنده مرتبه $\frac{G}{N}$ نباشد آنگاه Γ, N -نیم‌متقارن است.

قضیه ۹.۲. [۲۰] فرض کنیم $G \leq \text{Aut}(\Gamma)$ و Γ یک گراف G -نیم‌متقارن مکعبی باشد و $\{U, W\}$ دوبخش Γ باشند. اگر $N \leq G$ هم روی U و هم روی W ، انتقالی نباشد آنگاه N روی این دوبخش، نیم منظم عمل می کند و Γ_N گرافی $\frac{G}{N}$ -نیم‌متقارن است.

نتیجه ۱۰.۲. فرض کنیم $G \leq \text{Aut}(\Gamma)$ و Γ یک گراف G -نیم‌متقارن نیم مکعبی باشد و $\{U, W\}$ دوبخش Γ باشند. اگر $N \leq G$ آنگاه $N \leq G$ یا $|U|$ یا $|W|$ یا $|N|$.

³⁰William Burnside

اثبات. اگر عمل N روی U انتقالی باشد، آنگاه $|U| \mid |N|$ در غیر این صورت، باتوجه به قضیه ۹.۲ N روی U ، به طور نیم منظم عمل می‌کند و در نتیجه $|U| \mid |N|$. $\square$

تعریف ۱۱.۲. فرض کنیم G ، یک گروه و H و K ، دو زیرگروه متناهی آن باشند. گراف همدسته $C(G; H, K)$ گرافی است دوبخشی که مجموعه رأس‌های آن برابر است با، $\{Hx|x \in G\} \cup \{Ky|y \in G\}$ و دو رأس Hx و Ky مجاورند، اگر و فقط اگر $Hx \cap Ky \neq \emptyset$.

گزاره ۱۲.۲. [۱۵، بخش ۲] فرض کنیم G گروهی متناهی باشد و H و K دو زیرگروه آن باشند. در این صورت در $C(G; H, K)$ خواص زیر برقرار هستند:

(۱) $C(G; H, K)$ منتظم از درجه d است اگر و فقط اگر اندیس $H \cap K$ در H و K برابر d باشد.

(۲) $C(G; H, K)$ همبند است اگر و فقط اگر $G = \langle H, K \rangle$.

(۳) G با ضرب از راست روی $C(G; H, K)$ عمل می‌کند و این عمل صادق است اگر و فقط اگر

$$\text{Core}_G(H \cap K) = 1$$

و در این صورت $C(G; H, K)$ یک گراف G -نیم‌متقارن است.

گزاره ۱۳.۲. [۲۲، گزاره ۲.۴] فرض کنیم Γ گرافی منتظم باشد و $G \leq \text{Aut}(\Gamma)$. اگر Γ گرافی G -نیم‌متقارن باشد، آنگاه به ازای دو رأس مجاور u و v داریم: $\Gamma \cong C(G; G_u, G_v)$.

۲.۲. نتیجه اصلی. در این قسمت ابتدا چند لم رایبان و اثبات کرده و در ادامه قضیه ۱.۱ را اثبات خواهیم کرد. نمادگذاری و فرضیات: از این به بعد تا پایان این بخش فرض می‌کنیم Γ گرافی نیم‌متقارن مکعبی از مرتبه $4 \times p$ باشد، که $p > 19$ عددی اول است و $A = \text{Aut}(\Gamma)$.

لم ۱۴.۲. اگر $O_p(A) = 1$ ، آنگاه A نمی‌تواند زیر گروهی نرمال از مرتبه 10 یا 20 داشته باشد.

اثبات. فرض کنیم $\{U, W\}$ دوبخشی Γ باشد. فرض کنیم $u \in U$. بنا بر قضیه ۶.۲

$$0 \leq r \leq 7, |A_u| = 2^r \times 3, |U| = |W| = 2 \times p.$$

بنابر این

$$|A| = |A_u||U| = 2^{r+2} \times 3 \times 5 \times p.$$

فرض کنیم $O_p(A) = 1$ و M زیر گروه نرمال A از مرتبه 20 باشد. بنا بر لم ۱۰.۲، M روی U و W انتقالی نیست و باتوجه به قضیه ۹.۲ یک گراف $\frac{A}{M}$ -نیم‌متقارن است. فرض کنیم $\{U_M, W_M\}$ دو بخشی Γ_M باشد. در این صورت داریم:

$$|\frac{A}{M}| = 2^r \times 3 \times p, |\Gamma_M| = 2p,$$

و بنا بر این

$$|U_M| = |W_M| = p.$$

فرض کنیم $\frac{K}{M}$ زیر گروه نرمال می نیمال $\frac{A}{M}$ باشد. اگر $\frac{K}{M}$ حل پذیر نباشد آن یک K_3 -گروه ساده از مرتبه

$$2^i \times 3 \times p, 1 \leq i \leq 7,$$

است اما با توجه به این که $p > 19$ و بنا بر قضیه ۱۰.۲ چنین گروه ساده ای وجود ندارد. پس $\frac{K}{M}$ حل پذیر و بنابراین آبدلی مقدماتی است و روی U_M انتقالی یا غیر انتقالی است. بنا بر این

$$\frac{K}{M} \cong \mathbb{Z}_p$$

و در نتیجه $|K| = 2^0 p$ ، p -زیر گروه سیلوی K زیر گروه مشخصه K است و چون K زیر گروه نرمال A است، پس p -زیر گروه سیلوی K در A نرمال است و این با فرض $1 = O_P(A)$ تناقض دارد. فرض کنیم M زیر گروه نرمال A از مرتبه ۱۰ باشد. بنا بر لم ۱۰.۲، M روی U و W انتقالی نیست و با توجه به قضیه ۹.۲ Γ_M یک گراف $\frac{A}{M}$ -نیم متقارن است. فرض کنیم $\{U_M, W_M\}$ دوبخشی Γ_M باشد. در این صورت داریم:

$$|\frac{A}{M}| = 2^{r+1} \times 3 \times p, |\Gamma_M| = 4p$$

بنا بر این

$$|U_M| = |W_M| = 2p.$$

فرض کنیم $\frac{K}{M}$ زیر گروه نرمال می نیمال $\frac{A}{M}$ باشد. اگر $\frac{K}{M}$ حل پذیر نباشد آن یک K_3 -گروه ساده از مرتبه

$$2^i \times 3 \times p, 1 \leq i \leq 8$$

است اما با توجه به این که $p > 19$ و بنا بر قضیه ۱۰.۲ چنین گروه ساده ای وجود ندارد. پس $\frac{K}{M}$ حل پذیر و بنابراین آبدلی مقدماتی است و روی U_M انتقالی یا غیر انتقالی است. بنا بر این

$$\frac{K}{M} \cong \mathbb{Z}_p \text{ یا } \frac{K}{M} \cong \mathbb{Z}_2$$

در نتیجه، $|K| = 2^0 p$ یا $|K| = 2^0$ است. در حالت اول p -زیر گروه سیلوی K زیر گروه مشخصه K است و چون K زیر گروه نرمال A است، پس p -زیر گروه سیلوی K در A نرمال است و این با فرض $1 = O_P(A)$ تناقض دارد. و حالت دوم هم با توجه به $|M| = 2^0$ امکان پذیر نیست. $\square$

لم ۱۵.۲. $|O_p(A)| = p$ یا $p = 31$ و $\Gamma \cong C(L_2(31); \mathbb{S}_4, \mathbb{S}_4)$.

اثبات. فرض کنیم $\{U, W\}$ دوبخشی Γ باشد. آنگاه

$$|U| = |W| = 2^0 p \text{ و } |A| = 2^{r+2} \times 3 \times 5 \times p,$$

که در آن، $0 \leq r \leq 7$. فرض کنیم N زیر گروه نرمال می نیمال A باشد. آنگاه $N \cong T^k$ که T گروهی ساده است. فرض کنیم T غیر آبدلی باشد. چون توان های ۳ و ۵ در مرتبه A ، برابر ۱ است خواهیم داشت $k = 1$ و لذا $N \cong T$. بنا بر لم ۱۰.۲، $|U| = 2^0 p$ یا $|N| = |U|$ در حالت اول چون N یک گروه ساده غیر آبدلی است و مرتبه آن حداقل بر سه عدد اول بخش پذیر است، به دست می آوریم:

$$|N| = 2^i \times 5 \times p$$

که در آن

$$1 \leq i \leq 2,$$

و بنا بر این N یک K_3 -گروه ساده است. اما با توجه به قضیه ۱۰.۲، ۳ یک عامل اول مرتبه هر K_3 -گروه ساده است. پس این حالت امکان پذیر نیست. بنا بر این $|N| \mid 2 \circ p$ دوباره چون ۳ عامل اول هر K_3 -گروه ساده است، پس N یک K_4 -گروه ساده با مرتبه

$$2^i \times 3 \times 5 \times p \quad (2 \leq i \leq 9)$$

با توجه به نتیجه ۳.۲ به دست می‌آوریم

$$N \cong L_2(11), L_2(2^4), L_2(31)$$

این گروه‌ها به ترتیب با اعداد اول ۳۱ یا ۱۷، ۱۱ متناظر هستند. چون $p > 19$ است نتیجه می‌گیریم $N \cong (L_2(31))$ و مرتبه $\frac{A}{N}$ بر ۳ بخش پذیر نیست. حال با توجه به قضیه ۸.۲ Γ یک گراف N -نیم‌متقارن است. برای هر $u \in U$ و $v \in W$ با توجه به [۲۷، فصل ۳-قضیه ۶-۲۵] داریم:

$$(G_u, G_v) = (S_4, S_4)$$

و بنا بر گزاره ۱۳.۲ $\Gamma \cong C(N, N_u, N_v)$. توجه می‌کنیم که با استفاده از [۲۴، قضیه ۱-۳] گراف

$$C(L_2(31); S_4, S_4)$$

همبند، نیم‌متقارن و مکعبی است. حال فرض کنیم N حل پذیر است و در نتیجه آبلی مقدماتی می‌باشد و Γ_N یک گراف $\frac{A}{N}$ -نیم‌متقارن از مرتبه $\frac{4 \circ p}{|N|}$ است. ادعا می‌کنیم $|O_p(A)| = p$ فرض کنیم $O_p(A) = 1$ آنگاه

$$N \cong \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \text{ یا } \mathbb{Z}_5$$

و Γ_N یک گراف $\frac{A}{N}$ -نیم‌متقارن به ترتیب از مرتبه $8p$ یا $10p$ ، $2 \circ p$ است. فرض کنیم $\{U_N, W_N\}$ مجموعه دو بخش Γ_N و $\frac{M}{N}$ زیرگروه نرمال می‌نیمال $\frac{A}{N}$ باشد. ابتدا فرض می‌کنیم $N \cong \mathbb{Z}_2$ ،

$$|\frac{A}{N}| = 2^{r+1} \times 3 \times 5 \times p$$

و $|U_N| = |W_N| = 10p$. اگر $\frac{M}{N}$ حل پذیر نباشد آن یک K_4 -گروه ساده با مرتبه $2^i \times 3 \times 5 \times p$ برای بعضی مقادیر i که $1 \leq i \leq 8$ است. اما با توجه به نتیجه ۳.۲ و این که $31 \neq p$ و $p > 19$ چنین K_4 -گروه ساده‌ای وجود ندارد. بنا بر این $\frac{M}{N}$ حل پذیر و بنابراین آبلی مقدماتی است و به دست می‌آوریم:

$$\frac{M}{N} \cong \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_5 \text{ یا } \mathbb{Z}_p$$

اگر $\frac{M}{N} \cong \mathbb{Z}_5$ آنگاه $|M| = 10$ و این با توجه به لم ۱۴.۲ غیرممکن است. اگر $\frac{M}{N} \cong \mathbb{Z}_p$ آنگاه p -زیرگروه سیلوی M ، زیرگروه مشخصه M است و چون $M \leq A$ بنا بر این آن زیرگروه نرمال A است که با فرض $o_p(A) = 1$ تناقض دارد. اگر $\frac{M}{N} \cong \mathbb{Z}_2$ آنگاه

$$M \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \text{ یا } \mathbb{Z}_4$$

$$\left| \frac{A}{M} \right| = 2^r \times 3 \times 5 \times p, \text{ و}$$

$$|U_M| = |W_M| = 5p.$$

اگر $\frac{K}{M}$ زیرگروه نرمال می نیمال $\frac{A}{M}$ باشد. اگر $\frac{M}{N}$ حل پذیر نباشد آن یک K_2 -گروه ساده با مرتبه

$$2^i \times 3 \times 5 \times p$$

است. اما با توجه به نتیجه ۳.۲ و این که $31 \neq p$ و $19 < p$ چنین K_2 -گروه ساده ای وجود ندارد. اگر $\frac{K}{M}$ حل پذیر باشد آن آبلی مقدماتی است و بنابراین

$$\frac{K}{M} \cong \mathbb{Z}_5 \text{ یا } \mathbb{Z}_p$$

در حالت اول $|K| = 2^0$ که با توجه به لم ۱۴.۲ ناممکن است و در حالت دوم بدست می آوریم $|O_p(A)| > 1$ که مخالف فرض ما است. بنابراین N نمی تواند از مرتبه ۲ باشد. با استدلالی مشابه N نمی تواند با $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ یکرخت باشد. حال فرض کنیم $N \cong \mathbb{Z}_5$ آنگاه $\left| \frac{A}{N} \right| = 2^{r+2} \times 3 \times p$ اما چنین K_2 -گروه ساده ای وجود ندارد زیرا $19 < p$. بنا بر این اگر $\frac{M}{N}$ زیرگروه نرمال می نیمال $\frac{A}{N}$ باشد، آن حل پذیر است و لذا آبلی مقدماتی است و داریم:

$$\frac{M}{N} \cong \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \text{ یا } \mathbb{Z}_p$$

بنابر این $5p$ یا $2^0, 2^1$ که در هر حالت امکان پذیر نیست. □

با توجه به لم بالا در باقی مانده این بخش فرض می کنیم $31 \neq p$ و p -زیرگروه سیلوی A در A نرمال است.

لم ۱۶.۲. فرض کنیم M ، p -زیرگروه سیلوی A که در A نرمال است. اگر $\frac{A}{M} \cong G$ که $G = \mathbb{A}_5$ یا $\mathbb{S}_5$ آنگاه

(۱) برای هر رأس u, A_u با زیرگروهی از G یکرخت است.

(۲) $A \cong G \rtimes_\phi M$ که در آن $\phi: G \rightarrow \text{Aut}(M)$ یک همریختی است.

اثبات. (۱)

$$|A_u| = \frac{|A|}{2^0 p}, A_u \cong \frac{A_u}{1} = \frac{A_u}{A_u \cap M} \cong \frac{A_u \cdot M}{M} \leq \frac{A}{M} \cong G$$

(۲) مرتبه M و مرتبه $\frac{A}{M}$ نسبت به هم اول هستند. بنا بر قضیه ۴.۲، A زیرگروهی مانند H دارد که برای یک همریختی $\phi: H \rightarrow \text{Aut}(M)$ داریم؛ $A \cong H \rtimes_\phi M$ و

$$H \cong \frac{H}{1} = \frac{H}{H \cap M} \cong \frac{HM}{M} = \frac{A}{M} \cong G,$$

و در نتیجه $A \cong G \rtimes_\phi M$. □

تبصره ۱۷.۲. تا پایان این بخش فرض می کنیم $A = \text{Aut}(\Gamma)$ که Γ گرافی نیم متقارن مکعبی از مرتبه $4^0 p$ است و مرتبه M p -سیلوی Γ برابر p است.

لم ۱۸.۲. فرض کنیم M, p - زیرگروه سیلوی A باشد که در A نرمال است. آنگاه $\frac{A}{M}$ با $\mathbb{A}_5$ یکرخت نیست.

اثبات. فرض کنیم $\frac{A}{M} \cong \mathbb{A}_5$. برای هر رأس u ، داریم:

$$|A_u| = \frac{|A|}{2 \cdot p^2} = 3$$

و در نتیجه $A_u \cong \mathbb{Z}_3$ با توجه به لم ۲، ۱۶ برای یک همریختی $\phi: \mathbb{A}_5 \rightarrow \text{Aut}(M)$ داریم:

$$A \cong \mathbb{A}_5 \rtimes_{\phi} M$$

$\mathbb{A}_5$ ساده است. بنابراین $1 = \text{Ker} \phi$ یا $\mathbb{A}_5 = \text{Ker} \phi$ اگر $\text{Ker} \phi = 1$ آنگاه $\mathbb{A}_5$ باید با زیرگروهی از $\text{Aut}(M)$ یکرخت باشد. که $\text{Aut}(M) \cong \mathbb{Z}_{p-1}$ و این غیرممکن است زیرا $\mathbb{A}_5$ غیرآبلی است. اگر $\text{Ker} \phi = \mathbb{A}_5$ آنگاه $A \cong \mathbb{A}_5 \times M$. Γ یک گراف نیم‌متقارن است و با توجه به گزاره ۱۳.۲ $\Gamma \cong C(A; A_u, A_v)$ که u و v دورأس مجاورند و

$$A = \langle A_u, A_v \rangle \cong \langle \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_3 \rangle$$

بنا براین A زیرگروه‌هایی مانند H و K یکرخت با $\mathbb{Z}_3$ دارد که

$$A \cong \mathbb{A}_5 \times M = \langle H, K \rangle$$

حال فرض کنیم $(g, m) \in H$ در این صورت داریم:

$$(g, m)^3 = (g^3, m^3) = (g^2, 1)$$

پس $1 = m^3$ از طرفی مرتبه m برابر p است و یا $1 = m$ که نتیجه می‌شود $1 = m$. یعنی دومین مولفه هر زوج مرتب در H برابر ۱ است به طور مشابه دومین مولفه هر زوج مرتب در K برابر e است که نتیجه می‌شود دومین مولفه هر زوج مرتب در $A \cong \mathbb{A}_5 \times M$ برابر e است که غیرممکن است. $\square$

لم ۱۹.۲. فرض کنیم M, p - زیرگروه سیلوی A باشد که در A نرمال است. آنگاه $\frac{A}{M}$ نمی‌تواند با $\mathbb{S}_5$ یکرخت باشد.

اثبات. فرض کنیم $\frac{A}{M} \cong \mathbb{A}_5$ برای هر رأس u ، داریم: $|A_u| = \frac{|A|}{2 \cdot p} = 6$ و در نتیجه $A_u \cong \mathbb{S}_3$ یا $A_u \cong \mathbb{Z}_6$ و چون A_u با زیرگروهی از $\mathbb{S}_5$ یکرخت است و $\mathbb{S}_5$ زیرگروهی یکرخت با $\mathbb{Z}_6$ ندارد. پس $A_u \cong \mathbb{S}_3$ با توجه به لم ۲، ۱۶ برای یک همریختی $\phi: \mathbb{S}_5 \rightarrow \text{Aut}(M)$ داریم:

$$A \cong \mathbb{S}_5 \rtimes_{\phi} M.$$

$\text{Ker} \phi$ زیرگروه نرمال $\mathbb{S}_5$ است بنابراین $\mathbb{S}_5$ یا $\mathbb{A}_5$ اگر $\text{Ker} \phi = 1$ آنگاه $\mathbb{S}_5$ و $\mathbb{A}_5$ باید با زیرگروهی از $\text{Aut}(M)$ یکرخت باشند. که $\text{Aut}(M) \cong \mathbb{Z}_{p-1}$ و این ناممکن است زیرا $\mathbb{S}_5$ غیرآبلی است. اگر $\text{Ker} \phi = \mathbb{S}_5$ آنگاه $A \cong \mathbb{S}_5 \times M$. Γ یک گراف نیم‌متقارن است و با توجه به گزاره ۱۳.۲

$$\Gamma \cong C(A; A_u, A_v)$$

که u و v دو رأس مجاورند و

$$A = \langle A_u, A_v \rangle \cong \langle \mathbb{S}_3, \mathbb{S}_3 \rangle$$

بنا بر این A زیرگروه‌هایی مانند H و K یکرخت با $\mathbb{S}_3$ دارد که $A \cong \mathbb{S}_5 \times M = \langle H, K \rangle$ حال فرض کنیم $(g, m) \in H$ در این صورت داریم:

$$(g, m)^e = (g^e, g^e) = (g^e, 1)$$

پس $m^e = 1$ از طرفی مرتبه m برابر p یا p^2 است و یا $m = e$ که نتیجه می شود $m = e$ یعنی دومین مولفه هر زوج مرتب در H برابر e است به طور مشابه دومین مولفه هر زوج مرتب در K برابر e است که نتیجه می شود دومین مولفه هر زوج مرتب در

$$A \cong M \times \mathbb{S}_5$$

برابر e است که ناممکن است. اگر $\text{Ker } \phi = \mathbb{A}_5$ انگاه تصویر ϕ یکرخت است با

$$\frac{\mathbb{S}_5}{\mathbb{A}_5} \cong \mathbb{Z}_2.$$

بنا بر این یک خودریختی T از مرتبه ۲ وجود دارد که برای هر $g \in \mathbb{A}_5$ داریم $g\phi$ خود ریختی همانی است و برای هر $g \notin \mathbb{A}_5$ داریم: $g\phi = T$. برای هر دو عضو

$$(g, m), (h, n) \in \mathbb{S}_5 \times_\phi M$$

، اگر $h \in \mathbb{A}_5$ داریم: $(g, m)(h, n) = (gh, mn)$ و اگر $h \notin \mathbb{A}_5$ خواهیم داشت،

$$(g, m)(h, n) = (gh, (mT)n)$$

بنابر این اگر $g \in \mathbb{A}_5$ برای هر عدد طبیعی n داریم: $(g, m)^n = (g^n, m^n)$ و اگر $h \notin \mathbb{A}_5$ داریم:

$$(g, m)^{2n} = (g^{2n}, (m^n T)m^n)$$

حال داریم:

$$(g, m)^{12} = (g^{12}, (m^6 T)m^6) = (g^{12}, e)$$

با توجه به این که $m \in M, m^e = e$ می شود $m = 1$ و می توان نتیجه گرفت که دومین مولفه هر زوج مرتب در

$$A \cong \mathbb{S}_5 \times_\phi M$$

□

برابر است با e و این غیر ممکن است. بنا بر این $\frac{A}{M}$ نمی تواند با $\mathbb{S}_5$ یکرخت باشد.

حال می توانیم قضیه ۱۰.۱ را اثبات کنیم.

اثبات قضیه ۱۰.۱. فرض کنیم Γ یک گراف همبند، نیم‌متقارن و مکعبی از مرتبه $4^o p$ باشد. به ازای $p = 3$ گرافی نیم‌متقارن از مرتبه 12^o وجود دارد و آن $\mathbb{S}_{12}$ است. و به ازای ۱۹ و ۱۷، ۱۳، ۱۱، ۷، ۵، ۲ $p =$ چنین گرافی وجود ندارد و به ازای $p = 31$ این گراف با گراف $(L_2(31), \mathbb{S}_2, \mathbb{S}_2)$ یکرخت است. بنابراین فرض می‌کنیم $31 \neq p$ ، $p > 19$. قرار می‌دهیم $A = \text{Aut}(\Gamma)$ و $M, -p$ زیرگروه سیلوی A باشد. ما داریم

$$|A| = 2^{r+2} \times 3 \times 5 \times p,$$

و با توجه به لم ۱۵.۲، $M \leq A$ ، فرض کنیم $\{U, W\}$ دوبخشی Γ باشد. آنگاه داریم

$$|U| = |W| = 2 \circ p$$

و M هم روی U و هم روی W ، غیر انتقالی است و بنا بر قضیه ۹.۲، Γ_M یک گراف همبند $\frac{A}{M} -$ نیم‌متقارن مکعبی از مرتبه $4 \circ$ است. قرار می‌دهیم $G = \frac{A}{M}$ و $\Gamma_M - G$ نیم‌متقارن و بنابراین $G -$ یال - انتقالی است. اما هرگراف یال انتقالی از مرتبه $4 \circ$ رأس انتقالی و بنابر این متقارن است. در نتیجه

$$\Gamma_M \cong \mathbb{F}_{4 \circ}.$$

و G با زیرگروهی از $\text{Aut}(\mathbb{F}_{4 \circ})$ یکرخت است و $|\text{Aut}(\mathbb{F}_{4 \circ})|$ برابر است با $48 \circ$. بنابر این داریم:

$$2^{r+2} \cdot 3 \cdot 5 \leq 48 \circ.$$

از این نتیجه می‌شود

$$2^{r+2} \leq 32$$

چون G روی $V(\mathbb{F}_{4 \circ})$ انتقالی نیست، پس

$$2^{r+2} \leq 16$$

و به دست می‌آوریم:

$$0 \leq r \leq 2$$

و در نتیجه $12 \circ$ ، $|G| = 6 \circ$ یا $24 \circ$ است و G روی U_M و W_M انتقالی است. از این نتیجه می‌شود G یک گروه جایگشتی انتقالی از درجه $2 \circ$ است. ما توجه می‌کنیم که $\text{Aut}(\mathbb{F}_{4 \circ})$ زیرگروهی مانند H یکرخت با

$$\mathbb{A}_5 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

از اندیس ۲ دارد و G زیرگروهی از $\text{Aut}(\mathbb{F}_{4 \circ})$ است. بنابر این $G \cap H$ زیرگروهی از G با اندیس حداکثر ۲ است. فرض کنیم $|G| = 6 \circ$ باشد. با استفاده از Gap بدست می‌آوریم:

$$G \cong \mathbb{A}_5 \text{ یا } \mathbb{A}_4 \times \mathbb{Z}_2.$$

حالت اول بنا بر لم ۱۸.۲ نمی‌تواند درست باشد و حالت دوم هم با توجه به ساختار $\text{Aut}(\mathbb{F}_{4 \circ})$ ، G نمی‌تواند با

$$\mathbb{A}_4 \times \mathbb{Z}_2$$

یکریخت باشد. حال فرض کنیم $|G| = 12 \circ$ دوباره با استفاده از Gap به دست می‌آوریم:

$$G \cong \mathbb{S}_5, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{A}_5, \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{S}_4, \mathbb{S}_4 \times \mathbb{Z}_5 \text{ یا } \mathbb{D}_{10} \times \mathbb{A}_4.$$

با استفاده از لم ۱۹.۲ نتیجه می‌گیریم G نمی‌تواند با $\mathbb{S}_5$ یکرخت باشد. با توجه به ساختار G و $\text{Aut}(\mathbb{F}_{4 \circ})$ تنها امکان برای G این است که با

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{A}_5$$

یکریخت باشد. اگر

$$G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{A}_5$$

آنگاه G زیرگروهی نرمال مانند K یکرخت با $\mathbb{A}_5$ دارد. و مرتبه $\frac{G}{K}$ بر ۳ بخش پذیر نیست. بنا بر این Γ_M یک گراف K -نیممقارن است که امکان پذیر نیست. حال فرض کنیم $|G| = 240$. آنگاه G زیرگروهی از اندیس ۲ در $\text{Aut}(\mathbb{F}_{40})$ است. از این و با استفاده از Gap بدست می آوریم

$$G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{S}_5, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{A}_5, \mathbb{A}_5 \times \mathbb{Z}_4 \text{ یا } \mathbb{A}_5 \rtimes \mathbb{Z}_4$$

اگر

$$G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{S}_5$$

و فرض کنیم $T = Z(G)$ آنگاه

$$T \cong \mathbb{Z}_2$$

و $(\Gamma_M)_T$ یک گراف $\frac{G}{T}$ -نیممقارن است. قرار می دهیم $B = \frac{G}{T}$ آنگاه

$$B \cong \mathbb{S}_5$$

برای هر یال $\{u, v\}$ داریم

$$|B_u| = |B_v| = 12$$

و هر زیرگروه B از مرتبه ۱۲ با $\mathbb{A}_4$ یکرخت است. از این نتیجه می گیریم

$$(B_u, B_v) = (\mathbb{A}_4, \mathbb{A}_4)$$

که با توجه به قضیه ۶.۲ غیرممکن است. استدلالی مشابه نشان می دهد که G نمی تواند با

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{A}_5, \mathbb{A}_5 \times \mathbb{Z}_4 \text{ یا } \mathbb{A}_5 \rtimes \mathbb{Z}_4$$

یکریخت باشد. این به ما نشان می دهد گرافی همبند، نیممقارن و مکعبی از مرتبه $40p$ وجود ندارد. اثبات قضیه ۱.۱ کامل می شود. $\square$

نتیجه ۲.۰.۲. فرض کنیم p عددی اول و Γ گراف همبند، یال-انتقالی و مکعبی از مرتبه $40p$ باشد.

۱. اگر Γ نیممقارن باشد آنگاه $p = 3$ و $\Gamma \cong \mathbb{S}_{12}$ یا $p = 31$ و $\Gamma \cong C(L_2(31); \mathbb{S}_4, \mathbb{S}_4)$.

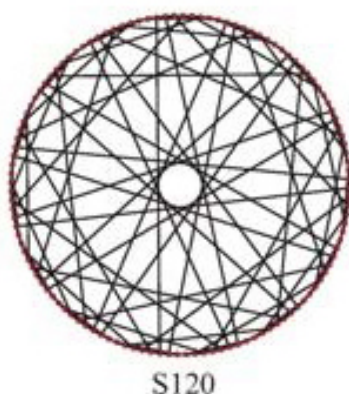
۲. اگر 31 و $p \neq 3$ آنگاه Γ مقارن است.

۳. جدول ها، شکل ها و نمودارها

جدول ۱. K_4 -گروه های ساده از مرتبه $2^i \times 3 \times 5 \times p$

Table 1: K_4 -Simple groups of order $2^i \times 3 \times 5 \times p$

گروه	مرتبه
$L_2(11)$	$2^2 \times 3 \times 5 \times 11$
$L_2(2^4)$	$2^4 \times 3 \times 5 \times 17$
$L_2(31)$	$2^5 \times 3 \times 5 \times 31$



شکل ۱. نمودار گراف نیم‌متقارن S_{120}

Figure 1: Semisymmetric graph diagram S_{120}

مراجع

- [1] M. Alaeiyan and M. Ghasemi, Cubic edge-transitive graphs of order $8p^2$, *Bull. Aust. Math. Soc.*, **77** (2008) 315–323.
- [2] M. Alaeiyan and B. N. Onagh, Cubic edge-transitive graphs of order $4p^2$, *Acta. Math. Univ. Com. New. Ser.*, **78** (2009) 183–186.
- [3] M. Alaeiyan and B. N. Onagh, On semisymmetric cubic graphs of order $10p^3$, *Hace. J. Math. Stat*, **40** (2011) 531–535.
- [4] M. Alaeiyan and M. Lashini, Classification of cubic edge-transitive graphs of order $14p^2$, *Hace. J. Math. Stat.*, **41** (2012) 277–282.
- [5] P. M. Amoli, M. R. Darafsheh and A. Tehranian, Semi-symmetric cubic graph of order $12p^3$, *Bull. Korean. Math. Soc.*, **59** (2022) 203–212.
- [6] Y. Bugeand, Z. Cao and M. Mignoto, On simple K_4 -groups, *J. Algebra.*, **241** (2001) 658–668.
- [7] M. Conder, M. Malnic, D. Marusic and P. Potocnic, A census of semisymmetric cubic graphs on up to 768 vertices, *J. Algebraic Comb.*, **23** (2006) 255–294.
- [8] M. Conder and R. Nedla, A refined classification of symmetric cubic graphs, *J. Algebra.*, **322** (2009) 722–740.
- [9] J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker and R. A. Wilson, *Atlas of finite groups*, Oxford University Press, 1985.
- [10] M. Darafsheh and M. Shasavaran, Semisymmetric cubic graphs of order $34p^3$, *Bull. Korean. Math. Soc.*, **57** (2020) 739–750.
- [11] M. R. Darafsheh and M. Shasavaran, On semisymmetric cubic graphs of order $20p^2$, *Discuss. Math. Graph Theory.*, **41** (2021) 873–891.
- [12] Y. Feng, M. Ghasemi and W. Changqun, Cubic semisymmetric graphs of order $6p^3$, *Disc. Math.*, **310** (2010) 2345–2355.
- [13] J. Folkman, Regular line-symmetric graphs, *J. Comb. Theory.*, **3** (1967) 215–232.
- [14] C. Godsil, G. F. Royle, *Algebraic graph theory*, New York, Springer, 2001.
- [15] D. M. Goldschmidt, Automorphisms of trivalent graphs, *Ann. Math.*, **111** (1980) 377–406.
- [16] H. Han and Z. Lu, Semisymmetric graphs of order $6p^2$ and prime valency, *Sci. China Math.*, **55** (2012) 2579–2592.

- [17] M. Herzog, On finite simple groups of order divisible by three primes only, *J. Algebra.*, **120** (1968) 383–388.
- [18] X. Hua and Y. Feng, Cubic semisymmetric graphs of order $8p^3$, *Sci. China Math.*, **54** (2011) 1937–1949.
- [19] X. Hua, S. Guo and L. Chen, Cubic Semisymmetric Graphs of Order $2qp^2$, *Acta. Math. Appl. Sin. Engl. Ser.*, **35** (2019) 629–637.
- [20] J. H. Kwak and R. Nedela, Graphs and their coverings, *Lect. Notes. Ser.*, **17** (2007).
- [21] Z. Lu, C. Wang and M. Xu, On semisymmetric cubic graphs of order $6p^2$, *Sci. China Ser. A. Math.*, **47** (2004) 1–17.
- [22] A. Malnic, D. Marusic and C. Wang, Cubic Semisymmetric Graphs of Order $2p^3$, *Disc. Math.*, 2000.
- [23] A. Malnic, D. Marusic, and C. Wang, Cubic edge-transitive graphs of order $2p^3$, *Disc. Math.*, **274** (2004) 187–198.
- [24] C. Parker and P. Rowley, Classical groups in dimension 3 as completions of the Goldschmidt G_3 -Amalgam, *J. LMS.*, **62** (2000) 802–812.
- [25] D. J. Robinson, *A course in the theory of groups*, Springer-Verlag, New York, 1982.
- [26] W. J. Shi, On simple K_4 -groups, *Chin. sci. Bull.*, **36** (1991) 1281–1283.
- [27] M. Suzuki, *Group theory I*, Springer Berlin, Heidelberg, 1982.
- [28] M. Suzuki, *Group theory II*, Springer-Verlag, New York, 1986.
- [29] M. Shahsavarani and M. R. Darafsheh, Classifying semisymmetric cubic graphs of order $20p$, *Turk. J. Math.*, **43** (2019) 2755–2766.
- [30] W. T. Tutte, *Connectivity in graphs*, University of Toronto Press, Toronto, 1966.
- [31] S. Zhang and W. J. Shi, Revisiting the number of simple K_4 -groups, *arXiv:1307.8079v1 [math.NT]*, (2013).

محمد رضا سالاریان

گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران
salarian@khu.ac.ir

محمد رضا سالاریان متولد فروردین ماه ۱۳۵۷ در شهر مشهد است. وی در سال ۱۳۷۵ وارد مقطع کارشناسی رشته ریاضی محض دانشگاه فردوسی مشهد شد و در سال ۱۳۷۹ وارد مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض دانشگاه علم و صنعت شد و در سال ۱۳۸۲ وارد مقطع دکتری در دانشگاه هاله-وینتبرگ آلمان شد. و از سال ۱۳۹۰ تا حالا استادیار گروه ریاضی دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر دانشگاه خوارزمی می باشد



جوانشیر رضایی

گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران
jre927@gmail.com

جوانشیر رضایی متولد اسفند ماه ۱۳۴۷ در شهر کرمانشاه است. وی در سال ۱۳۶۷ وارد مقطع کارشناسی رشته دبیری ریاضی دانشگاه رازی کرمانشاه شد و در سال ۱۳۷۷ وارد مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض دانشگاه کاشان شد.