

NEW SOLUTIONS TO EINSTEIN'S EQUATIONS TO FIND WALKER MANIFOLDS

SHAHROUD AZAMI 

ABSTRACT. In this paper, we investigate the Einsteinian manifolds with parallel null distribution. For this, we first obtain the equations that lead to finding the mentioned manifolds. These equations are known as Einstein's equations. Then we reduce these equations by using Lie symmetry method. These equations are known as Einstein's equations. In this method, we first obtain the generators of the symmetry algebra and then calculate the differential invariants for each of the generators and calculate the group invariant solutions of this equation. In addition to this, we also obtain the optimal system of the one-dimensional sub-algebras of these equations. This optimal system helps us to have a classification on group invariant solutions using conjugate mapping.

1. Introduction

Many physical phenomena around us are modeled based on a differential equation. The role of differential equations, especially differential equations with partial derivatives, is very prominent in various sciences, especially in physics and engineering sciences. Obtaining the solutions of such equations has been of interest to mathematicians for a long time, and so far various methods have been presented to solve differential equations. One of the most powerful methods is Lie symmetry method, which was first described by Sophus Lie in the late 19th century [9]. The main and fundamental

Keywords: Solutions of the partial invariants, Walker manifolds, Einstein equation.

Article Type: Research Paper.

Communicated by Mohamad Reza Pouryayevali.

Received: 07-02-2024, Accepted: 06-07-2024, Published Online: 12-04-2025.

Cite this article: Sh. Azami, New solutions to Einstein's equations to find Walker manifolds, *Journal of Mathematics and Society*, **10** no. 1 (2025) 105–124.

<http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140664.1643> .

concept in this method are Lie groups. With this method, the order of ordinary differential equations can be reduced, differential equations with partial derivatives can also be reduced in special cases, the solutions of equations can be classified and etc [4, 12]. In short, it can be said that the symmetric group is a group of transformations that affects the independent and dependent variables of the equation and convert the solutions to solutions. Therefore, by having a symmetric group and a solution to the equation, various solutions of that equation can be obtained. The important point is that in some systems of partial differential equations, all symmetry reductions are not obtained from the classical symmetry method. This caused many mathematicians to search for ways to generalize Lie's method so that with the help of these methods they can obtain more solutions of the equation. Ozyannikov in [13, 15] generalized the concept of group invertible solutions and called this group of solutions partial invertible solutions. The difference between these solutions and group invertible solutions is that their graph is not completely invertible under the group of assumed transformations.

There are more recent generalizations of the concept of group irreducible solutions, which can be referred to the method presented by Blueman and Cole [3], and it is called the non-classical method in group irreducible solutions. In recent years, the solutions of many important and practical equations in physics have been obtained by the partial invariant method, and this method has attracted the attention of researchers in this field [1, 2, 11].

In this article, we are going to get the partial solutions of Einstein's equations and compare them. Einstein's equations are equations whose solutions determine the metric of a special type of manifolds called Walker manifolds. Walker manifolds are manifolds that have a null parallel distribution [5, 17, 18]. These manifolds play a very important role in modeling physical problems. In this, the role of 4-dimensional Walker manifolds is very important. These models express the fact that matter determines the geometry of space-time and opposite to the motion of matter, it is determined by the space meter tensor [16, 19]. Einstein's equation system for 4-dimensional Walker manifolds is:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} c_{22} + a_{12} &= 0, & b_{22} - a_{11} &= 0, & c_{11} + b_{12} &= 0, \\ 2c_{23} - ac_{12} - 2a_{24} + ba_{22} + 2ca_{12} - c_2^2 - a_2c_1 + a_2b_2 + a_1c_2 &= 0, \\ c_{24} - bc_{22} - bc_{22} - cc_{12}x - ac_{11} - b_{23} - a_{14} + ca_{11} - c_1c_2 + a_2b_1 &= 0, \\ 2c_{14} - bc_{12} - 2b_{13} + 2cb_{12} + ab_{11} - c_1^2 + b_2c_1 - b_1c_2 + a_1b_1 &= 0, \end{aligned}$$

where a , b , and c are function with respect to (x, t, y, z) and the metric of 4-dimensional Walker manifold is determined by

$$(1.2) \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & c \\ 0 & 1 & c & b \end{pmatrix}.$$

Due to the importance expressed about Einstein's equations, many efforts have been made to solve these equations in recent years. In some studies, solutions of this system of equations have been presented in special cases. For example, if we assume that the functions a , b and c depend only on y and z , we can define a hyper-para-Kaehler structure on the manifold which is Ricci flat. Some other special cases have also been investigated, for instance, $a = b = 0$ and $b = c = 0$ [5]. Also, the case where the functions a , b and c depend only on x and t has also been investigated [8]. Also, see [6, 7, 10, 14].

2. Main Results

We prove any two-dimensional sub-algebra of the symmetric algebra of Einstein's equations, with exactly one of the following sub-algebras is conjugated

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_1^1 : \langle X_1, X_3 + \alpha X_6 + \beta X_7 \rangle, & \quad \mathcal{V}_1^2 : \langle X_1, X_2 + \alpha X_5 + \beta X_7 \rangle, & \mathcal{V}_1^3 : \langle X_1, X_5 + \alpha X_7 \rangle, \\ \mathcal{V}_1^4 : \langle X_1, X_3 + X_6 + \epsilon X_5 + \alpha X_7 \rangle, & \mathcal{V}_1^5 : \langle X_1, X_2 + \alpha X_3 + \beta X_7 \rangle, & \mathcal{V}_1^6 : \langle X_1, \alpha X_7 + X_6 \rangle, \\ \mathcal{V}_1^7 : \langle X_1, X_7 \rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_2^1 : \langle X_2, \beta X_7 + \alpha X_6 + X_3 \rangle, & \quad \mathcal{V}_2^2 : \langle X_2, X_1 + \epsilon X_4 + \beta X_7 \rangle, & \mathcal{V}_2^3 : \langle X_2, X_4 + \alpha X_7 \rangle, \\ \mathcal{V}_2^4 : \langle X_2, X_3 + \epsilon X_4 + \alpha X_7 + X_6 \rangle, & \mathcal{V}_2^5 : \langle X_2, X_1 + X_6 + \alpha X_7 \rangle, & \mathcal{V}_2^6 : \langle X_2, \alpha X_7 + X_6 \rangle, \\ \mathcal{V}_2^7 : \langle X_2, X_7 \rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_3^1 : \langle X_6, \alpha X_7 + X_3 \rangle, & \quad \mathcal{V}_3^2 : \langle X_6, X_4 \rangle, & \mathcal{V}_3^3 : \langle X_6, X_5 \rangle, \\ \mathcal{V}_3^4 : \langle X_6, X_1 + \alpha X_7 \rangle, & \mathcal{V}_3^5 : \langle X_6, X_2 \rangle, & \mathcal{V}_3^6 : \langle X_6, X_7 \rangle, \end{aligned}$$

$$\mathcal{V}_4^1 : \langle \epsilon X_1 + X_6, X_2 \rangle, \quad \mathcal{V}_4^2 : \langle \epsilon X_1 + X_6, X_5 \rangle, \quad \mathcal{V}_4^3 : \langle \epsilon X_1 + X_6, X_7 \rangle,$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_5^1 : \langle X_5, X_3 + \alpha X_6 + \beta X_7 \rangle, & \quad \mathcal{V}_5^2 : \langle X_5, X_1 + \alpha X_6 + \beta X_7 \rangle, & \mathcal{V}_5^3 : \langle X_5, X_6 + \alpha X_7 \rangle, \\ \mathcal{V}_5^4 : \langle X_5, X_7 \rangle, \end{aligned}$$

$$\mathcal{V}_6^1 : \langle \epsilon X_2 + X_5, X_3 + \frac{1}{2} X_6 + \alpha X_7 \rangle, \quad \mathcal{V}_6^2 : \langle \epsilon X_2 + X_5, X_1 + \alpha X_7 \rangle, \quad \mathcal{V}_6^3 : \langle \epsilon X_2 + X_5, X_7 \rangle,$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_7^1 : \langle X_4, X_3 + \alpha X_6 + \beta X_7 \rangle, & \quad \mathcal{V}_7^2 : \langle X_4, X_2 + \alpha X_3 + \beta X_7 \rangle, & \mathcal{V}_7^3 : \langle X_4, X_6 + \alpha X_7 \rangle, \\ \mathcal{V}_7^4 : \langle X_4, X_7 \rangle, \end{aligned}$$

$$\mathcal{V}_8^1 : \langle X_4 + \epsilon X_1, \alpha X_7 + 2X_6 + X_3 \rangle, \quad \mathcal{V}_8^2 : \langle \epsilon X_1 + X_4, X_2 + \alpha X_7 \rangle, \quad \mathcal{V}_8^3 : \langle \epsilon X_1 + X_4, X_7 \rangle,$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_9^1 : \langle X_3, \alpha X_7 + X_2 \rangle, & \quad \mathcal{V}_9^2 : \langle X_3, X_5 \rangle, & \mathcal{V}_9^3 : \langle X_3, X_1 \rangle, \\ \mathcal{V}_9^4 : \langle X_3, X_6 + \alpha X_7 \rangle, & \mathcal{V}_9^5 : \langle X_3, X_7 \rangle, & \mathcal{V}_9^6 : \langle X_3, X_4 \rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{10}^1 : \langle \epsilon X_2 + X_3, X_1 \rangle, & \quad \mathcal{V}_{10}^2 : \langle \epsilon X_2 + X_3, X_4 \rangle, & \mathcal{V}_{10}^3 : \langle \epsilon X_3 + X_2, X_7 \rangle, \\ \mathcal{V}_{10}^4 : \langle X_2, \alpha X_7 + X_3 \rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{11}^1 : \langle \epsilon X_4 + X_3, -2X_7 + X_6 + \epsilon X_5 \rangle, & \quad \mathcal{V}_{11}^2 : \langle X_3 + \epsilon X_4, X_2 + \alpha X_7 \rangle, & \mathcal{V}_{11}^3 : \langle \epsilon X_4 + X_3, X_7 \rangle, \\ \mathcal{V}_{11}^4 : \langle \epsilon X_4 + X_3, X_3 + X_6 + \alpha X_7 \rangle, & \mathcal{V}_{11}^5 : \langle \epsilon X_4 + X_3, \epsilon X_2 + X_1 \rangle, \end{aligned}$$

$$\mathcal{V}_{12}^1 : \langle \epsilon' X_4 + X_3 + \epsilon X_2, \epsilon' X_2 + X_1 \rangle, \quad \mathcal{V}_{12}^2 : \langle \epsilon' X_4 + X_3 + \epsilon X_2, X_7 \rangle,$$

where α and β are constants, $\varepsilon = \pm 1$ and $\varepsilon' = \pm 1$ and $\epsilon = \pm 1$ or 0.

In the following, we calculate the partial invariant solutions of the Einstein equation system.

- For the subalgebra $\langle X_1, X_7 \rangle$ the invariants are $\{t, \frac{b}{a}, \frac{c}{a}\}$, so the dependent variables are

$$(2.1) \quad a = a(x, t), \quad c = ag(t), \quad b = af(t).$$

Then the corresponding partial invariants solutions are as

$$(2.2) \quad \begin{aligned} 1) & \begin{cases} a = c_1 \\ b = (c_4 + c_3 t)c_1 \\ c = c_2 c_1 \end{cases} & 2) & \begin{cases} a = c_2 + c_1 t \\ b = c_5 + c_3^2 c_1 t \\ c = c_4 c_1 + (c_2 + c_1 t)c_3 \end{cases} \\ 3) & \begin{cases} a = \frac{-\ln(t + c_2)}{c_1} + c_3 \\ b = c_5(c_2 + t) \\ c = c_4 \end{cases} & 4) & \begin{cases} a = c_4 + tc_3 + c_1 \ln(c_2 + t) \\ b = \frac{c_6^2(t + c_2)}{c_3} \\ c = c_5 + c_6 t \end{cases} \end{aligned}$$

- For the subalgebra $\langle X_2, X_7 \rangle$ the invariants are $\{x, \frac{b}{a}, \frac{c}{a}\}$, so the dependent variables are

$$c = ag(x), \quad b = af(x), \quad a = a(x, t).$$

Then the corresponding partial invariants solutions are as

$$a = c_1 x + c_2, \quad b = c_1 c_3^2 x + \left(\frac{c_5}{c_1} - c_3^2 c_2\right) \ln(c_1 x + c_2) + c_6, \quad c = c_3(c_1 x + c_2) + c_1 c_4,$$

- For the subalgebra $\langle X_5, X_7 \rangle$ the invariants are $\{t, \frac{c^2 - ba}{b^2}, \frac{-ct + bx}{b}\}$ so the dependent variables are

$$a = -bf(t) + \frac{b(g(t) - x)^2}{t^2}, \quad b = b(x, t), \quad c = (g(t) - x)\frac{b}{t},$$

Then the corresponding partial invariants solutions are as

$$a = \frac{(c_1 + c_2 t^3)(x - c_3)^2}{t^3} - (A), \quad b = \frac{c_1 + c_2 t^3}{t}, \quad c = \frac{(c_1 + c_2 t^3)(x - c_3)}{t^2},$$

where

$$A = (c_5 + c_4)t \left(\ln\left(t + \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^2 - \ln\left(-t\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{\frac{1}{3}} + t^2 + \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{\frac{2}{3}}\right) + 2\sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{2c_2 t}{\sqrt{3}c_1}\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right).$$

- For the subalgebra $\langle X_4, X_7 \rangle$ the invariants are $\{x, \frac{-at + cx}{xa}, \frac{at^2 - 2xtc + bx^2}{x^2 a}\}$ so the dependent variables are

$$a = a(x, t), \quad b = a\left(2\frac{t}{x}f(x) + g(x) + \frac{t^2}{x^2}\right), \quad c = a\left(\frac{t}{x} + f(x)\right)$$

Then the corresponding partial invariants solutions are as

$$a = \frac{c_1 + c_2 x^3}{x}, \quad b = \frac{(c_1 + c_2 x^3)(t + c_3)^2}{x^3} + (B), \quad c = \frac{(c_1 + c_2 x^3)(t + c_3)}{x^2},$$

where

$$B = (c_5 + c_4)x(\ln(x + (\frac{c_1}{c_2})^{(\frac{1}{3})})^2 - \ln(-x(\frac{c_1}{c_2})^{(\frac{1}{3})} + x^2 + (\frac{c_1}{c_2})^{(\frac{2}{3})}) + 2\sqrt{3}\tan^{-1}(\frac{2c_2x}{\sqrt{3}c_1}(\frac{c_1}{c_2})^{(\frac{2}{3})} - \frac{1}{\sqrt{3}})).$$

- For the subalgebra $\langle X_2, X_6 + X_7 \rangle$ the invariants are $\{x, \frac{b}{a^3}, \frac{c}{a^2}\}$, so the dependent variables are

$$c = a^2g(x), \quad b = a^3f(x), \quad a = a(x, t),$$

Then the corresponding partial invariants solutions are as

$$a = \frac{4(t + c_1)}{(c_2x + c_3)^2}, \quad b = \frac{4c_2^2(t + c_1)^3}{(c_2x + c_3)^4}, \quad c = \frac{4c_2(t + c_1)^2}{(c_2x + c_3)^3},$$

where c_i are constants.

3. Conclusions

In this article, after stating the definition and the method of obtaining the solutions of differential invariants for an equation, we obtained the two-dimensional sub-algebras of the symmetric algebra of Einstein's equations. Then, using it, we calculated the solutions of the partial invariants of these equations and proved that these solutions are different from the solutions obtained by the Lie symmetry method. In fact, it was proved that these solutions are non-reducing. Based on this, new and valuable solutions were obtained from one of the famous and widely used equations in physics, Einstein's equations. These equations actually determine the metric of Walker manifolds, which play an essential role in space-time modeling.

Shahroud Azami

Department of Pure Mathematics, Faculty of Science, Imam Khomeini International University Qazvin, Iran

Email: azami@sci.ikiu.ac.ir

جواب‌های جدیدی از معادلات اینشتین برای یافتن خمینه‌های والکری

شاهرود اعظمی^۱

چکیده. در این مقاله با استفاده از روش ناوردهای جزئی که تعمیمی از روش تقارنی کلاسیک لی و تعمیم جواب‌های ناوردهای گروهی است، جواب‌های جدیدی از معادلات اینشتین را به دست خواهیم آورد. معادلات اینشتین، معادلات بسیار مهم و کاربردی در هندسه دیفرانسیل و فیزیک نظری هستند و به دست آوردن جواب‌های آن منجر به یافتن خمینه‌های والکری خواهد شد که در مدل کردن مسائل فیزیکی نقش مهم و فراوانی دارند. برای استفاده از روش ناوردهای جزئی، ابتدا به طبقه‌بندی زیرجبرهای جبر تقارنی معادله اینشتین با کمک مفهوم کاستی می‌پردازیم و جواب‌های ناوردهای جزئی را از حذف شرط ناوردایی کامل جواب‌ها به دست می‌آوریم. برای این منظور ابتدا زیرجبرهای ۱-بعدی و سپس زیرجبرهای ۲-بعدی را خواهیم یافت. در ادامه نشان می‌دهیم این جواب‌ها، جواب‌های ناوردایی غیرکاهشی هستند که نشان دهنده جدید بودن آنها است. این معادلات در واقع تعیین‌کننده متریک خمینه‌های والکری هستند که در مدل بندی فضا-زمان نقش اساسی دارند.

۱. مقدمه

بسیاری از پدیده‌های فیزیکی پیرامون ما بر اساس یک معادله دیفرانسیل مدل بندی می‌شوند. نقش معادلات دیفرانسیل خصوصاً معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی در علوم مختلف، به‌ویژه در فیزیک و علوم مهندسی، بسیار پررنگ می‌باشد. به دست آوردن جواب‌های اینگونه معادلات از دیرباز مورد توجه ریاضیدانان بوده و تاکنون روش‌های متنوعی برای حل معادلات دیفرانسیل ارائه شده است. یکی از قدرتمندترین روش‌ها، روش تقارنی لی است که اولین بار توسط سوفوس لی^۱ در اواخر قرن ۱۹ میلادی بیان گردید [۸]. مفهوم اصلی و بنیادی در این روش گروه‌های لی هستند. با این روش می‌توان مرتبه معادلات دیفرانسیل معمولی را کاهش داد، می‌توان مرتبه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی را نیز در حالت‌های خاص کاهش داد، جواب‌های معادلات را طبقه‌بندی نمود و ... [۴، ۱۱]. به طور خلاصه می‌توان گفت گروه تقارنی، گروهی از تبدیلات است که روی متغیرهای مستقل و وابسته معادله اثر می‌کند و جواب‌ها را به جواب تبدیل می‌کند. بنابراین با داشتن گروه تقارنی و یک جواب از معادله می‌توان جواب‌های متنوعی از آن معادله را به دست آورد. نکته حائز اهمیت این است که در برخی از دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل جزئی، همه کاهش‌های تقارنی از روش کلاسیک تقارنی، به دست نمی‌آیند. این امر باعث شد تا ریاضیدانان بسیاری در جستجوی روش‌هایی برای تعمیم روش لی، گام بردارند تا با کمک این روش‌ها بتوانند جواب‌های

عبارات و کلمات کلیدی: جواب‌های ناوردهای جزئی، خمینه‌های والکری، معادلات اینشتین، دستگاه بهینه زیرجبرها.

دبیر تخصصی رابط: محمدرضا پوریای ولی

نوع مقاله: پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۱۱/۱۸ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۴/۱۶ تاریخ انتشار آنلاین: ۱۴۰۴/۰۱/۲۳

ارجاع به مقاله: ش. اعظمی، جواب‌های جدیدی از معادلات اینشتین برای یافتن خمینه‌های والکری، نشریه ریاضی و جامعه، ۱۰ شماره ۱ (۱۴۰۴) ۱۲۴-۱۰۵.

<http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140664.1643>

¹Sophus Lie

بیشتری از معادله را به دست آورند. اوزیانیکوف^۲ در [۱۲، ۱۴] مفهوم جواب‌های ناوردای گروهی را تعمیم داد و این دسته از جواب‌ها را جواب‌های ناوردای جزیی نامید. تفاوت این جواب‌ها با جواب‌های ناوردای گروهی آن است که گرافشان تحت گروه تبدیلات مفروض به طور کامل ناوردا نیست. تعمیم‌های جدیدتری از مفهوم جواب‌های ناوردای گروهی وجود دارند که می‌توان به روشی که بلومن^۳ و کول^۴ ارائه کردند و از آن تحت عنوان روش غیر کلاسیک در جواب‌های ناوردای گروهی نام برده می‌شود اشاره کرد [۳]. در سال‌های اخیر جواب‌های بسیاری از معادلات مهم و کاربردی در فیزیک با روش ناوردهای جزیی به دست آمده و این روش مورد توجه پژوهشگران در این زمینه بوده است [۱، ۲، ۱۰].

در این مقاله قصد داریم جواب‌های ناوردای جزیی معادلات اینشتین را به دست آورده و آنها را مقایسه کنیم. معادلات اینشتین، معادلاتی هستند که جواب‌های آن، متریک نوع خاصی از خمینه‌ها به نام خمینه‌های والکری را مشخص می‌کند. خمینه‌های والکری، خمینه‌هایی هستند که دارای توزیع پوچ موازی می‌باشند [۵، ۱۶، ۱۷]. این خمینه‌ها نقش بسیار مهمی در مدل کردن مسایل فیزیکی ایفا می‌کنند. در این میان نقش خمینه‌های والکری ۴-بعدی بسیار حائز اهمیت است. این مدل‌ها بیان کننده این مطلب هستند که ماده، مشخص کننده هندسه فضا-زمان است و برعکس حرکت ماده، توسط تانسور متر فضا مشخص می‌شود [۱۵، ۱۹]. دستگاه معادلات اینشتین برای خمینه‌های والکری ۴-بعدی عبارتست از

$$\begin{aligned} c_{22} + a_{12} &= 0, & b_{22} - a_{11} &= 0, & c_{11} + b_{12} &= 0, \\ 2c_{23} - ac_{12} - 2a_{24} + ba_{22} + 2ca_{12} - c_2^2 - a_2c_1 + a_2b_2 + a_1c_2 &= 0, \\ c_{24} - bc_{22} - bc_{22} - cc_{12}x - ac_{11} - b_{23} - a_{14} + ca_{11} - c_1c_2 + a_2b_1 &= 0, \\ 2c_{14} - bc_{12} - 2b_{13} + 2cb_{12} + ab_{11} - c_1^2 + b_2c_1 - b_1c_2 + a_1b_1 &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن a, b و c توابعی بر حسب (x, t, y, z) هستند و متریک خمینه والکری ۴-بعدی را به صورت زیر مشخص می‌کنند.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & c \\ 0 & 1 & c & b \end{pmatrix}. \quad (2)$$

با توجه به اهمیت بیان شده در خصوص معادلات اینشتین، تلاش‌های زیادی برای حل این معادلات در سال‌های اخیر انجام شده و در بعضی از مطالعات، جواب‌هایی از این دستگاه معادلات در حالت‌های خاص ارائه شده است. به عنوان مثال اگر فرض کنیم توابع a, b و c فقط به y و z بستگی داشته باشند می‌توان یک ساختار هایپر-پارا-کهلر^۵ روی خمینه تعریف کرد که مسطح ریچی باشد. برخی موارد خاص دیگر نیز مورد بررسی قرار گرفته‌اند که از آن جمله می‌توان به حالت $a = b = 0$ و $b = c = 0$ اشاره کرد [۵]. همچنین حالتی که توابع a, b و c فقط به x و t بستگی داشته باشند نیز مورد بررسی قرار گرفته است [۱۸].

این مقاله به ترتیب زیر بخش بندی شده است. در بخش ۲، به بیان تعاریف، پیش‌نیازها و قضایای مهم که در ادامه کار به آن نیاز داریم می‌پردازیم. در بخش ۳، جواب‌های ناوردای جزیی را تعریف کرده و روش به دست آوردن آن را بیان می‌کنیم. در فصل ۴، زیرجبرهای جبر تقارنی لی دستگاه معادلات اینشتین را طبقه بندی و سیستم بهینه زیرجبرها را به دست می‌آوریم. در بخش ۵، جواب‌های ناوردای جزیی معادلات اینشتین را به دست می‌آوریم و ثابت می‌کنیم غیرکاهشی و کاملاً جدید هستند.

²L. V. Ovsiannikov ³G. W. Bluman ⁴J. D. Cole ⁵hyper-para-kaehler

۲. تعاریف و پیش‌نیازها

در این بخش به بیان تعاریف و قضایای مورد نیاز برای رسیدن به تعریف جواب‌های ناوردای جزئی می‌پردازیم. همان‌گونه که بیان شد اگر خاصیت ناوردایی جواب‌های یک معادله دیفرانسیل در نظر گرفته نشود، امکان یافتن جواب، بیشتر خواهد شد. سؤال اساسی که در اینجا مطرح می‌شود این است که چه خاصیتی باید جایگزین ناوردایی شود تا بتوانیم مزایایی را که جواب‌های ناوردا داشتند حفظ کنیم. این سؤال توسط مبحث ناوردایی جزئی یک خمینه پاسخ داده می‌شود.

تعریف ۱.۲. فرض کنیم G یک گروه لی از تبدیلات باشد که توسط نگاشت $\phi : G \times M \rightarrow M$ روی خمینه n -بعدی M عمل می‌کند. همچنین فرض کنیم N یک زیرخمینه از M و V یک همسایگی حول عضو همانی G باشد. مدار خمینه‌ای N ، که با $\phi(N, V)$ نشان می‌دهیم، عبارت است از تمام نقاط متعلق به مدارهای $\phi_x(V)$ برای هر $x \in N$ به عبارت دیگر مدار $\phi(N, V)$ از خمینه N اجتماع مدارهای همه نقاط این خمینه است.

برای مدار خمینه‌ای دو حالت وجود دارد، یا $\phi(N, V)$ با M برابر است یا اینکه یک زیرخمینه از M با بعد کمتر از n است. در حالت دوم $\phi(N, V)$ را یک زیرخمینه مشخصه M می‌نامند. واضح است که در این حالت عمل G متعدی نیست. لازم به ذکر است که عکس این مطلب صحیح نیست. یعنی اگر عمل متعدی نباشد لزومی ندارد $\phi(N, V)$ مشخصه باشد. برای هر خمینه W که تحت گروه G ناوردا باشد و $N \subset W$ داریم $\phi(N, V) \subset W$. بنابراین $\phi(N, V)$ کوچکترین خمینه ناوردای گروه G شامل N است. واضح است که اگر N خود یک خمینه ناوردا تحت گروه G باشد آنگاه $\phi(N, V) = N$.

تعریف ۲.۲. فرض کنیم B و X فضاهایی با بعد متناهی باشند و $\mathcal{L}(B, X)$ فضای همه نگاشت‌های خطی از B به X باشد. نگاشت $\xi : X \rightarrow \mathcal{L}(B, X)$ را در نظر بگیرید. به ازای هر x ، $\xi(x)$ دارای رتبه مشخص است که با $\text{rank } \xi(x)$ نشان می‌دهیم. (این مقدار با محاسبه رتبه ماتریس متناظر به $\xi(x)$ به دست می‌آید و مستقل از انتخاب پایه برای X و B است.) در واقع داریم $\text{rank } \xi(x) = \dim \xi(x)(B)$. رتبه کل نگاشت ξ روی مجموعه باز $U \subset X$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$(۳) \quad r_* = r_*(\xi) = \max_{x \in U} \text{rank } \xi(x).$$

حال در تعریف رتبه کل، فرض کنیم $B = G$ یک گروه لی باشد که روی $X = M$ عمل می‌کند. واضح است که ξ روی M رتبه ثابتی ندارد و در نقاط مختلف $\text{rank } \xi(x)$ ، $x \in M$ ممکن است متفاوت باشد. با استفاده از عدد r_* می‌توانیم همه نقاط M را به دو دسته تکین و ناتکین به صورت زیر تقسیم کنیم.

تعریف ۳.۲. نقطه x را تکین (به ترتیب ناتکین) می‌نامیم اگر $\text{rank } \xi(x) < r_*$ (به ترتیب $\text{rank } \xi(x) = r_*$). همچنین خمینه $N \subset M$ را خمینه تکین برای گروه G (یا برای جبر $\mathfrak{g}$) می‌نامیم هر گاه همه نقاطش تکین باشند و نگاشت مماسی دارای یک رتبه ثابت روی N باشد. به عبارت دیگر برای یک خمینه تکین مانند N داریم:

$$(۴) \quad \text{rank } \xi(\bar{x}) = r_*(\xi|_N) < r_*, \quad \forall \bar{x} \in N.$$

اگر همه نقاط N ناتکین باشد آن را خمینه ناتکین گوئیم و داریم $r_*(\xi|_N) = r_*$.

به ویژه این تعریف نتیجه می‌دهد که همه خمینه‌های ناوردا تحت گروه G یا تکین هستند یا ناتکین [۱۲]. حال فرض کنید خمینه N به طور ضمنی توسط نگاشت هموار

$$(۵) \quad \psi : U \rightarrow \mathbb{R}^s,$$

تعریف شده باشد که در آن $U \subset M$ یک مجموعه باز و رتبه این نگاشت روی U برابر با s باشد. در واقع خمینه N مجموعه صفر این نگاشت است و داریم $\dim N = n - s$.

تعریف ۴.۲. با مفروضات فوق رتبه خمینه ناوردای ناتکین N با بعد $n - s$ نسبت به گروه G را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(۶) \quad \rho = \rho(N) = n - s - r_*.$$

حال فرض کنیم $\phi(N, V)$ یک زیرخمینه مشخصه M باشد، در این صورت $\dim \phi(N, V) < n$. بنابراین $\phi(N, V)$ یک خمینه ناوردای ناتکین نسبت به G است و طبق تعریف ۴.۲، دارای رتبه‌ای مشخص است.

تعریف ۵.۲. رتبه خمینه N نسبت به گروه G عبارت است از رتبه $\phi(N, V)$. چون این مقدار فقط به جفت (N, G) بستگی دارد، آن را با $\rho(N, G)$ نشان می‌دهیم.

کمیت مهم دیگری به نام کاستی^۶ برای خمینه N وجود دارد که به صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۶.۲. کاستی خمینه N نسبت به گروه G عبارت است از اختلاف بعد مدار و بعد خمینه N :

$$(۷) \quad \delta(N, G) = \dim \phi(N, V) - \dim N.$$

واضح است که اگر $\delta(N, G) = 0$ ، آنگاه خمینه N نسبت به گروه G ناوردا است. اگر $\delta(N, G) > 0$ آنگاه خمینه N را یک خمینه ناوردای جزئی با کاستی $\delta(N, G)$ می‌نامیم.

رتبه و کاستی یک خمینه نسبت به یک گروه، با یکدیگر ارتباط دارند و ارتباط بین آنها را می‌توان با استفاده از فضای ناوردای متناظر به گروه G که بعد آن برابر $t = n - r_*$ است، بیان کرد. با توجه به تعریف ۴.۲ داریم:

$$\dim \phi(N, V) = \rho + n - t.$$

همچنین با فرض اینکه خمینه N به صورت (۵) تعریف شده است داریم

$$(۸) \quad \delta = \dim \phi(N, V) - \dim N = (\rho + n - t) - (n - s) = \rho + s - t$$

می‌توان ثابت کرد نابرابری‌های زیر در مورد کاستی برقرار است [۱۲].

$$(۹) \quad \max\{s - t, 0\} \leq \delta \leq \min\{n - t, s - 1\}.$$

واضح است که فرمول‌های (۷) و (۸) برای محاسبه کاستی خمینه N مناسب نیستند، چون نیاز به دانستن بعد مدار $\phi(N, V)$ و یا رتبه این مدار دارند. قضیه زیر فرمولی برای محاسبه کاستی با توجه به مفهوم نگاشت تعریف N یعنی ψ و نگاشت مماسی ξ برای گروه G ، ارائه می‌دهد.

قضیه ۷.۲. [۱۲] فرض کنیم خمینه N توسط (۵) تعریف شده باشد. در این صورت

$$(۱۰) \quad \delta(N, G) = r_*((\partial\psi \circ \xi)|_N).$$

□

مسئله مهمی که در تحلیل جواب‌های یک معادله دیفرانسیل با آن روبرو هستیم این است که هنگامی که بحث از گروه G به یک زیرگروه آن مانند G' معطوف می‌شود، چه تغییری برای رتبه و کاستی خمینه N ایجاد می‌شود. این سؤال در لم زیر پاسخ داده می‌شود.

^۶defect

لم ۸.۲. فرض کنیم ρ و δ رتبه و کاستی (N, G) و همچنین ρ' و δ' رتبه و کاستی (N, G') باشد که در آن G' زیرگروه G است. در این صورت

$$(11) \quad \rho' \geq \rho, \quad \delta' \leq \delta.$$

□

[۱۲].

تعریف ۹.۲. گوییم جفت (N, G) نسبت به زیرگروه G' کاهش یافته هرگاه با انتقال از گروه G به زیرگروه G' رتبه خمینه N بدون تغییر باقی بماند و کاستی کم شود، یعنی $\rho = \rho'$ و $\delta < \delta'$.

مثال ۱۰.۲. فرض کنیم گروه تبدیلات G روی $M = \mathbb{R}^4(x, y, z, v)$ عمل کند و جبرلی این گروه دارای مولدهای زیر باشد

$$\xi_1 = x\partial_y, \quad \xi_2 = \partial_z.$$

همچنین فرض کنیم خمینه ۲-بعدی $N \subset M$ توسط معادلات زیر داده شده باشد

$$y = \lambda xz, \quad v = 0,$$

که در آن λ عدد ثابت است. در واقع N مجموعه ریشه‌های نگاشت $\psi = (y - \lambda xz, v)$ است. واضح است که N نسبت به G ناوردا نیست، چون

$$\xi_1\psi = (x, 0), \quad \xi_2\psi = (-\lambda x, 0),$$

و در نتیجه

$$\delta = r_*((\partial\psi \circ \xi) |_N) = \text{rank} \begin{pmatrix} x & 0 \\ -\lambda x & 0 \end{pmatrix} = 1.$$

حال چون $s = 2$ و $t = 2$ (ناورداها عبارتند از x و v)، از رابطه (۸) نتیجه می‌شود $\rho = 1$. حال برای زیرگروه $G' \subset G$ که توسط مولد $\lambda\xi_1 + \xi_2 = \lambda x\partial_y + \partial_z$ مشخص می‌شود داریم $(\lambda x\partial_y + \partial_z)\psi = (0, 0)$ ، در نتیجه ψ ناورداست. بنابراین خمینه N نسبت به G' ناورداست و $\delta(N, G') = 0$. اما فضای ناورداهای گروه G' ، ۳-بعدی است (ناورداها عبارتند از x ، $y - \lambda xz$ و v). با جایگذاری $s = 2$ ، $t = 3$ و $\delta = 0$ در رابطه (۸) نتیجه می‌شود $\rho(N, G') = 1$. بنابراین (N, G) با کاستی $\delta = 1$ ، به (N, G') با کاستی $\delta = 0$ کاهش می‌یابد.

۳. جواب‌های ناوردای جزیی یک معادله دیفرانسیل

در این بخش، جواب‌های ناوردای جزیی یک معادله دیفرانسیل را تعریف و طریقه به‌دست آوردن آن را بیان می‌کنیم. همان‌گونه که در مقدمه نیز بیان شد، جواب‌های ناوردای جزیی به نوعی تعمیم جواب‌های ناوردای گروهی محسوب می‌شوند. این تعمیم در واقع از حذف شرط ناوردایی کامل جواب به‌دست می‌آید.

تعریف ۱۰.۳. فرض کنیم G گروه تقارن معادله Δ باشد. جواب u را G -جواب ناوردای جزیی معادله می‌نامند هرگاه خمینه جواب معادله، که با $\mathbf{u}$ نشان می‌دهیم، یک خمینه ناوردای جزیی گروه G باشد.

طبق مباحث بخش قبل هر خمینه جواب $\mathbf{u}$ می‌تواند دو عدد به نام‌های رتبه و کاستی نسبت به گروه G داشته باشد. رتبه $\rho = \rho(\mathbf{u}, G)$ و کاستی $\delta = \delta(\mathbf{u}, G)$ را به‌ترتیب رتبه و کاستی G -جواب ناوردای جزیی u می‌نامند. حال طریقه ساختن جواب‌های ناوردای جزیی را برای دستگاه معادلات دیفرانسیل جزیی مرتبه n ،

$$(12) \quad \Delta = \Delta_\mu(x, u^{(n)}) = 0, \quad \mu = 1, \dots, m.$$

با p متغیر مستقل x و q متغیر وابسته u را، بیان می‌کنیم. فرض کنیم G یک گروه تقارنی برای دستگاه فوق باشد که روی فضای کل $X \times U$ عمل می‌کند و بعد مدارهای آن r باشد. اگر $u = f(x)$ یک جواب معادله (۱۲) باشد آنگاه مدار گراف Γ_f که با $G\Gamma_f$ نشان داده می‌شود عبارت است از همه $g.(x, u)$ ها به ازای هر $(x, u) \in \Gamma_f$ و هر $g \in G$. که در واقع همان اجتماع مدارهای اعضای Γ_f است. بنابراین طبق تعریف (۷) کاستی جواب $u = f(x)$ نسبت به گروه G به صورت $\delta = \dim(G\Gamma_f) - p$ بیان می‌شود. با توجه به روابط مذکور در بخش قبل می‌توان نتیجه گرفت $0 \leq \delta \leq \min\{r, q\}$. اگر $\delta = 0$ آنگاه $u = f(x)$ یک جواب ناوردای گروهی و اگر $0 < \delta < \min\{r, q\}$ ، $u = f(x)$ یک جواب ناوردای جزئی است. برای به دست آوردن جواب‌های ناوردای جزئی ابتدا باید گروه تقارنی معادله را به کلاس‌های مزدوجی طبقه‌بندی کرد. اگر بخواهیم کاستی جواب‌های ناوردای جزئی برابر با δ باشد باید زیرگروه‌هایی از G مانند H را انتخاب کنیم که دارای این خاصیت باشند که اگر بعد مدارهای H روی فضای $X \times U$ برابر r باشد آنگاه بعد این مدارها روی فضای X برابر با $r - \delta$ باشد [۶]. اگر H زیرگروهی با خاصیت فوق و $\mathfrak{h}$ جبر لی متناظر با آن با مولدهای بی‌نهایت کوچک $\{v_1, \dots, v_s\}$ باشد، می‌توان یک مجموعه کامل از ناوردهای مستقل تابعی برای این جبر به صورت

$$(13) \quad \{\xi_i(x), I_j(x, u)\},$$

به دست آورد که در آن $i = 1, \dots, p + \delta - s$ و $j = 1, \dots, q - \delta$. بنابراین داریم

$$(14) \quad \text{rank} \left(\frac{\partial I_j(x, u)}{\partial u} \right) = q - \delta \equiv q'.$$

حال اگر $u = f(x)$ یک تابع باشد، آنگاه $H\Gamma_f$ را می‌توان بر حسب ناوردهای (۱۳) نمایش داد. بنابراین داریم

$$(15) \quad I_j(x, u) = f_j(\xi_i(x)),$$

که در آن توابع f_j دلخواه هستند ([۱۲]، بخش ۲.۲۲). حال با توجه به (۱۴) و استفاده از قضیه تابع ضمنی، برای $q - \delta$ مختصات در U داریم

$$(16) \quad u^{i\alpha} = U^{i\alpha}(x, u^{j\beta}, f_j(\xi_i(x))),$$

که در آن $\alpha = 1, \dots, q'$ و $\beta = 1, \dots, \delta$. بقیه متغیرهای وابسته، فقط به متغیرهای مستقل اولیه بستگی دارند یعنی

$$(17) \quad u^{j\beta} = U^{j\beta}(x_1, \dots, x_p), \quad \beta = 1, \dots, \delta.$$

حال مشتقات توابع $u^1, \dots, u^q$ را نسبت به متغیرهای جدیدی که از روابط (۱۶) و (۱۷) به دست آمد محاسبه می‌کنیم. با جایگذاری در دستگاه اولیه، یک دستگاه جدید به دست می‌آید که دارای q' تابع f_j و ناوردهای ξ_i است. معادلات به دست آمده در حالت کلی لزوماً سازگار نیستند. بنابراین شرط سازگاری نیز باید در نظر گرفته شود. با در نظر گرفتن این شرایط، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی به دست می‌آید که آن را با Δ/H نشان می‌دهیم. از طرفی یک دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی از معادلات (۱۷) نتیجه می‌شود که آن را با Δ' نشان می‌دهیم. در ادامه، ابتدا دستگاه Δ/H را حل کرده و برای هر جواب آن، دستگاه Δ' را حل می‌کنیم. سپس همه جواب‌های به دست آمده را در معادلات (۱۶) و (۱۷) قرار داده و به این ترتیب جواب‌های ناوردای جزئی با کاستی δ به دست می‌آید. پس از اتمام محاسبات فوق باید بررسی کرد که آیا جواب‌های به دست آمده نسبت به برخی از زیرگروه‌های گروه تقارن ناوردا هستند یا خیر. این موضوع مبنای تعریف جواب‌های ناوردای جزئی غیرکاهشی^۷ است که در بخش آخر به آن می‌پردازیم. نکته قابل ذکر این است که برای این کار، کافی است زیرگروه‌های گروه H که جواب را از آن به دست آورده‌ایم بررسی شود و این امر تا حدودی محاسبات را کوتاه‌تر می‌کند.

⁷nonreducible

مباحثی که در این بخش ارائه شد اولین بار توسط اوزیانیکوف^۸ ارائه گردید [۱۲]. بعد از این اوزیانیکوف و ریاضیدانان دیگری روی این مبحث فعالیت داشته‌اند که از آن جمله می‌توان به ارائه الگوریتم جدید محاسبه جواب‌های ناوردای جزئی غیرکاهشی که توسط گراندلند^۹

ارائه گردید، اشاره کرد [۶]. همچنین تقسیم‌بندی جواب‌های ناوردای جزئی به دو دسته منظم و نامنظم که توسط اوزیانیکوف و همکارانش ارائه شد [۱۳] و مطالعات دیگری که ویترنیتز و همکارانش در طبقه‌بندی جواب‌های ناوردای جزئی و به‌دست آوردن جواب‌های ناوردای جزئی غیرکاهشی داشتند [۷، ۹]، از دیگر فعالیت‌های انجام شده در این زمینه است.

۴. طبقه‌بندی زیرجبرهای تقارنی معادلات اینشتین

در این بخش به طبقه‌بندی زیرجبرهای جبر تقارنی معادلات اینشتین می‌پردازیم. یادآور می‌شویم که هدف ما یافتن جواب‌های ناوردای جزئی معادلات اینشتین است. برای این کار آن دسته از جواب‌های ناوردای جزئی را بررسی می‌کنیم که دارای کاستی $\delta = 1$ بوده و دستگاه کاهش یافته Δ/H یک دستگاه معادلات معمولی باشد. بنابراین داریم $\delta = 1$ ، $p = 2$ و $p + \delta - s = 1$ ، در نتیجه $s = 2$. بنابراین باید از زیرجبرهای ۲- بعدی جبر تقارنی معادلات اینشتین استفاده کنیم. برای به‌دست آوردن زیرجبرهای ۲- بعدی ابتدا باید زیرجبرهای ۱- بعدی را به‌دست آوریم. گروه تقارنی و دستگاه بهینه زیرجبرهای ۱- بعدی جبر-تقارنی معادلات اینشتین در مرجع [۱۸] به‌دست آمده است. مولدهای گروه تقارنی به‌صورت

$$\begin{aligned}
 V_1 &= \partial_x, & V_5 &= b\partial_c + 2c\partial_a + t\partial_x, \\
 V_2 &= \partial_t, & V_6 &= c\partial_c + 2b\partial_b + t\partial_t, \\
 V_3 &= -c\partial_c + -2b\partial_b + x\partial_x, & V_7 &= c\partial_c + b\partial_b + a\partial_a. \\
 V_4 &= a\partial_c + 2c\partial_b + x\partial_t,
 \end{aligned}
 \tag{۱۸}$$

هستند و دستگاه بهینه زیرجبرهای ۱- بعدی آن به شکل

$$\begin{aligned}
 1) & V_7, & 5) & \varepsilon V_2 + V_5 + aV_6 + bV_7, \\
 2) & V_1 + aV_7, & 6) & \varepsilon V_1 + cV_7 + bV_6 + aV_5 + V_4, \\
 3) & V_2 + aV_7, & 7) & \varepsilon V_2 + cV_7 + bV_6 + aV_5 + \varepsilon' V_4 + V_3. \\
 4) & \varepsilon V_1 + V_6 + aV_7,
 \end{aligned}
 \tag{۱۹}$$

می‌باشد [۱۸]. حال زیرجبرهای ۲- بعدی جبر تقارنی معادلات اینشتین را طبقه‌بندی می‌کنیم.

^۸L. V. Ovsianikov ^۹A. M. Grundland

قضیه ۱۰۴. هر زیرجبر ۲-بعدی جبرتقارنی معادلات اینشتین، دقیقاً با یکی از زیرجبرهای زیر مزدوج است:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{V}_1^1 &: \langle X_1, X_3 + \alpha X_6 + \beta X_7 \rangle, & \mathcal{V}_1^2 &: \langle X_1, X_2 + \alpha X_5 + \beta X_7 \rangle, & \mathcal{V}_1^3 &: \langle X_1, X_5 + \alpha X_7 \rangle, \\
 \mathcal{V}_1^4 &: \langle X_1, X_3 + X_6 + \epsilon X_5 + \alpha X_7 \rangle, & \mathcal{V}_1^5 &: \langle X_1, X_2 + \alpha X_3 + \beta X_7 \rangle, & \mathcal{V}_1^6 &: \langle X_1, \alpha X_7 + X_6 \rangle, \\
 \mathcal{V}_1^7 &: \langle X_1, X_7 \rangle, & & & & \\
 \mathcal{V}_2^1 &: \langle X_2, \beta X_7 + \alpha X_6 + X_3 \rangle, & \mathcal{V}_2^2 &: \langle X_2, X_1 + \epsilon X_4 + \beta X_7 \rangle, & \mathcal{V}_2^3 &: \langle X_2, X_4 + \alpha X_7 \rangle, \\
 \mathcal{V}_2^4 &: \langle X_2, X_3 + \epsilon X_4 + \alpha X_7 + X_6 \rangle, & \mathcal{V}_2^5 &: \langle X_2, X_1 + X_6 + \alpha X_7 \rangle, & \mathcal{V}_2^6 &: \langle X_2, \alpha X_7 + X_6 \rangle, \\
 \mathcal{V}_2^7 &: \langle X_2, X_7 \rangle, & & & & \\
 \mathcal{V}_3^1 &: \langle X_6, \alpha X_7 + X_3 \rangle, & \mathcal{V}_3^2 &: \langle X_6, X_4 \rangle, & \mathcal{V}_3^3 &: \langle X_6, X_5 \rangle, \\
 \mathcal{V}_3^4 &: \langle X_6, X_1 + \alpha X_7 \rangle, & \mathcal{V}_3^5 &: \langle X_6, X_2 \rangle, & \mathcal{V}_3^6 &: \langle X_6, X_7 \rangle, \\
 \mathcal{V}_4^1 &: \langle \epsilon X_1 + X_6, X_2 \rangle, & \mathcal{V}_4^2 &: \langle \epsilon X_1 + X_6, X_5 \rangle, & \mathcal{V}_4^3 &: \langle \epsilon X_1 + X_6, X_7 \rangle, \\
 \mathcal{V}_5^1 &: \langle X_5, X_3 + \alpha X_6 + \beta X_7 \rangle, & \mathcal{V}_5^2 &: \langle X_5, X_1 + \alpha X_6 + \beta X_7 \rangle, & \mathcal{V}_5^3 &: \langle X_5, X_6 + \alpha X_7 \rangle, \\
 \mathcal{V}_5^4 &: \langle X_5, X_7 \rangle, & & & & \\
 \mathcal{V}_6^1 &: \langle \epsilon X_2 + X_5, X_3 + \frac{1}{2} X_6 + \alpha X_7 \rangle, & \mathcal{V}_6^2 &: \langle \epsilon X_2 + X_5, X_1 + \alpha X_7 \rangle, & \mathcal{V}_6^3 &: \langle \epsilon X_2 + X_5, X_7 \rangle, \\
 \mathcal{V}_7^1 &: \langle X_4, X_3 + \alpha X_6 + \beta X_7 \rangle, & \mathcal{V}_7^2 &: \langle X_4, X_2 + \alpha X_3 + \beta X_7 \rangle, & \mathcal{V}_7^3 &: \langle X_4, X_6 + \alpha X_7 \rangle, \\
 \mathcal{V}_7^4 &: \langle X_4, X_7 \rangle, & & & & \\
 \mathcal{V}_8^1 &: \langle X_4 + \epsilon X_1, \alpha X_7 + 2X_6 + X_3 \rangle, & \mathcal{V}_8^2 &: \langle \epsilon X_1 + X_4, X_2 + \alpha X_7 \rangle, & \mathcal{V}_8^3 &: \langle \epsilon X_1 + X_4, X_7 \rangle, \\
 \mathcal{V}_9^1 &: \langle X_3, \alpha X_7 + X_2 \rangle, & \mathcal{V}_9^2 &: \langle X_3, X_5 \rangle, & \mathcal{V}_9^3 &: \langle X_3, X_1 \rangle, \\
 \mathcal{V}_9^4 &: \langle X_3, X_6 + \alpha X_7 \rangle, & \mathcal{V}_9^5 &: \langle X_3, X_7 \rangle, & \mathcal{V}_9^6 &: \langle X_3, X_4 \rangle, \\
 \mathcal{V}_{10}^1 &: \langle \epsilon X_2 + X_3, X_1 \rangle, & \mathcal{V}_{10}^2 &: \langle \epsilon X_2 + X_3, X_4 \rangle, & \mathcal{V}_{10}^3 &: \langle \epsilon X_3 + X_2, X_7 \rangle, \\
 \mathcal{V}_{10}^4 &: \langle X_2, \alpha X_7 + X_3 \rangle, & & & & \\
 \mathcal{V}_{11}^1 &: \langle \epsilon X_4 + X_3, -2X_7 + X_6 + \epsilon X_5 \rangle, & \mathcal{V}_{11}^2 &: \langle X_3 + \epsilon X_4, X_2 + \alpha X_7 \rangle, & \mathcal{V}_{11}^3 &: \langle \epsilon X_4 + X_3, X_7 \rangle, \\
 \mathcal{V}_{11}^4 &: \langle \epsilon X_4 + X_3, X_3 + X_6 + \alpha X_7 \rangle, & \mathcal{V}_{11}^5 &: \langle \epsilon X_4 + X_3, \epsilon X_2 + X_1 \rangle, & & \\
 \mathcal{V}_{12}^1 &: \langle \epsilon' X_4 + X_3 + \epsilon X_2, \epsilon' X_2 + X_1 \rangle, & \mathcal{V}_{12}^2 &: \langle \epsilon' X_4 + X_3 + \epsilon X_2, X_7 \rangle, & &
 \end{aligned}$$

که در آن α و β ثابت‌های دلخواه، ϵ و ϵ' برابر ± 1 و ϵ برابر ± 1 یا صفر هستند.

اثبات: هر زیرجبر ۲-بعدی نیاز به دو مولد دارد. برای طبقه‌بندی زیرجبرهای ۲-بعدی، باید یکی از مولدها را از دستگاه بهینه زیرجبرهای ۱-بعدی، (۱۹)، و مولد دوم، یک بردار دلخواه در نظر گرفته شود. سپس باید بررسی کرد که آیا این دو بردار نسبت به گروه لی بسته هستند یا خیر، در صورت مثبت بودن جواب باید زیرگروه تولید شده توسط این دو بردار را به دو صورت ساده کرد. ابتدا از لحاظ جبری ساده می‌کنیم (یعنی بردارهای اضافی در تشکیل زیرجبر را حذف می‌کنیم) و سپس با استفاده از نگاشت‌های الحاقی آن‌را به ساده‌ترین شکل ممکن تبدیل می‌کنیم. اگر در زیرجبرهای (۱۹) حالت‌هایی که ϵ یا ϵ'

برابر با صفر می‌شوند را هم به عنوان حالت‌های جداگانه در نظر بگیریم. سیزده حالت به وجود می‌آید که عبارتند از:

- 1) $X^1 = X_7$,
- 2) $X^2 = X_1 + aX_7$,
- 3) $X^3 = X_2 + aX_7$,
- (۲۰) 4) $X^4 = X_6 + aX_7$
- 5) $X^5 = aX_7 + X_6 + \varepsilon X_1$,
- 6) $X^6 = bX_7 + aX_6 + X_5$,
- 7) $X^7 = bX_7 + aX_6 + X_5 + \varepsilon X_2$,
- 8) $X^8 = cX_7 + bX_6 + aX_5 + X_4$,
- 9) $X^9 = cX_7 + bX_6 + aX_5 + X_4 + \varepsilon X_1$,
- 10) $X^{10} = cX_7 + bX_6 + aX_5 + X_3$,
- 11) $X^{11} = cX_7 + bX_6 + aX_5 + X_3 + \varepsilon X_2$,
- 12) $X^{12} = cX_7 + bX_6 + aX_5 + \varepsilon X_4 + X_3$,
- 13) $X^{13} = cX_7 + bX_6 + aX_5 + \varepsilon' X_4 + X_3 + \varepsilon X_2$.

حال فرض کنید $\mathfrak{h} = \text{span}\{X, Y\}$ یک زیرجبر دو بعدی از $\mathfrak{g}$ باشد که در آن X برابر با یکی از بردارهای لیست (۲۰) و بردار Y یک بردار دلخواه به صورت $Y = b_1X_1 + \dots + b_7X_7$ است. حال باید به ترتیبی که بیان شد به ساده کردن $\mathfrak{h}$ بپردازیم. بخاطر طولانی بودن محاسبات فقط مورد $X = X_1 + aX_7$ را توضیح می‌دهیم، مابقی حالات به طریق مشابه اثبات می‌گردد.
در حالت فوق داریم:

$$(21) \quad \begin{aligned} \mathfrak{h} &= \langle X, Y \rangle = \langle aX_7 + X_1, \sum_{i=1}^7 b_i X_i \rangle \\ &= \langle X_1, b_7X_7 + b_6X_6 + b_5X_5 + b_4X_4 + b_3X_3 + b_2X_2 \rangle. \end{aligned}$$

بنابراین حالت‌های زیر به وجود می‌آید:

- (a) اگر $b_6 = b_5 = b_4 = b_3 = b_2 = 0$ ، آنگاه $\mathfrak{h} = \langle b_7X_7, X_1 \rangle = \langle X_7, X_1 \rangle$. چون $[X_7, X_1] = 0$ پس $\mathfrak{h}$ تحت کروسه لی بسته است. بنابراین $\mathfrak{h}$ به حالت $\mathcal{V}_1^7$ ساده می‌شود.
- (b) اگر $b_5 = b_4 = b_3 = b_2 = 0$ و $b_6 \neq 0$ ، آنگاه $\mathfrak{h} = \langle b_7X_7 + b_6X_6, X_1 \rangle = \langle X_7 + \alpha X_6, X_1 \rangle$. چون $[X_7 + \alpha X_6, X_1] = 0$ پس $\mathfrak{h}$ تحت کروسه لی بسته است. بنابراین $\mathfrak{h}$ به حالت $\mathcal{V}_1^6$ ساده می‌شود.
- (c) اگر $b_6 = b_4 = b_3 = b_2 = 0$ و $b_5 \neq 0$ ، آنگاه $\mathfrak{h} = \langle b_7X_7 + b_5X_5, X_1 \rangle = \langle \alpha X_7 + X_5, X_1 \rangle$. چون $[\alpha X_7 + X_5, X_1] = 0$ پس $\mathfrak{h}$ تحت کروسه لی بسته است. بنابراین $\mathfrak{h}$ به حالت $\mathcal{V}_1^3$ ساده می‌شود.
- (d) اگر $b_6 \neq 0$ و $b_2 = b_3 = b_4 = 0$ ، آنگاه می‌توان به وسیله $F_5^{s_5}$ و با قرار دادن $s_5 = \frac{1}{b_6}$ ضریب X_5 را به صفر تبدیل کرد. بنابراین داریم $\mathfrak{h} = \langle X_1, b_6X_6 + b_7X_7 \rangle$ ، در نتیجه مانند حالت (b)، $\mathfrak{h}$ به حالت $\mathcal{V}_1^6$ ساده می‌شود.
- (e) اگر $b_2 = b_3 = 0$ و $b_4 \neq 0$ ، آنگاه $\mathfrak{h} = \langle X_1, b_4X_4 + \dots + b_7X_7 \rangle$ و برای هر $r, s \in \mathbb{R}$ داریم

$$[X_1, b_7X_7 + b_6X_6 + b_5X_5 + b_4X_4] = b_4X_2 \neq s(b_7X_7 + b_6X_6 + b_5X_5 + b_4X_4) + rX_1.$$

بنابراین $\mathfrak{h}$ تحت کروسه لی بسته نیست و در نتیجه در این حالت زیرجبر ۲-بعدی ایجاد نمی‌شود.
(f) اگر $b_3 \neq 0$ ، $b_2 = b_4 = 0$ و $b_6 \neq 1$ ، آنگاه می‌توان با قرار دادن $s_5 = \frac{b_5}{-1+b_6}$ در $F_5^{s_5}$ ضریب X_5 را به صفر تبدیل کرد. همچنین با ضرب کردن $\mathfrak{h}$ در مقدار ثابتی در صورت نیاز، می‌توان فرض کرد $b_3 = 1$ بنابراین داریم $\mathfrak{h} = \langle b_7X_7 + b_6X_6 + X_3, X_1 \rangle$ و $[b_7X_7 + b_6X_6 + X_3, X_1] = X_1$ در نتیجه $\mathfrak{h}$ نسبت به کروسه لی بسته است و حالت $\mathcal{V}_1^1$ نتیجه می‌شود.

(g) اگر $b_6 = 1$ و $b_3 \neq 0$ ، $b_2 = b_4 = 0$ ، آنگاه با ضرب کردن h در مقدار ثابتی در صورت نیاز، می‌توان فرض کرد $b_3 = 1$. همچنین می‌توان با قرار دادن $s_6 = -\ln|b_5|$ در $F_6^{s_6}$ ضریب X_5 را به ± 1 یا صفر تبدیل کرد. بنابراین داریم $h = \langle b_7 X_7 + X_6 + \varepsilon X_5 + X_3, X_1 \rangle$ و $h = \langle b_7 X_7 + X_6 + \varepsilon X_5 + X_3, X_1 \rangle$ در نتیجه h نسبت به گروه لی بسته است و حالت $\mathcal{V}_1^4$ نتیجه می‌شود.

(h) اگر $b_2 \neq 0$ و $b_3 = b_4 = b_6 = 0$ ، آنگاه با ضرب کردن h در مقدار ثابتی در صورت نیاز، می‌توان فرض کرد $b_2 = 1$. بنابراین $h = \langle b_7 X_7 + b_5 X_5 + X_2, X_1 \rangle$ و $h = \langle b_7 X_7 + b_5 X_5 + X_2, X_1 \rangle$ در نتیجه h نسبت به گروه لی بسته است و حالت $\mathcal{V}_1^2$ نتیجه می‌شود.

(i) اگر $b_3 \neq 0$ و $b_2 \neq 0$ ، $b_4 = b_6 = 0$ ، آنگاه در صورت نیاز با ضرب کردن h در مقدار ثابتی می‌توان فرض کرد $b_2 = 1$. همچنین می‌توان با قرار دادن $s_5 = -\frac{b_5}{b_3}$ در $F_5^{s_5}$ ضریب X_5 را به صفر تبدیل کرد. بنابراین $h = \langle b_7 X_7 + b_3 X_3 + X_2, X_1 \rangle$ و $h = \langle b_7 X_7 + b_3 X_3 + X_2, X_1 \rangle$ در نتیجه h نسبت به گروه لی بسته است و حالت $\mathcal{V}_1^5$ نتیجه می‌شود.

(j) اگر $b_3 = 1$ و $b_6 \neq 0$ ، $b_4 = 0$ ، آنگاه با ضرب کردن h در مقدار ثابتی در صورت نیاز، می‌توان فرض کرد $b_6 = 1$. همچنین می‌توان با قرار دادن $s_2 = -\frac{1}{b_6}$ در $F_2^{s_2}$ ضریب X_2 را به صفر تبدیل کرد. علاوه بر این می‌توان به وسیله $F_6^{s_6}$ و با فرض $s_6 = -\ln|b_5|$ ضریب X_5 را به ± 1 یا صفر تبدیل کرد. بنابراین داریم $h = \langle X_1, X_3 + \varepsilon X_5 + X_6 + b_7 X_7 \rangle$ و در نتیجه مشابه حالت (g)، h به $\mathcal{V}_1^4$ تبدیل می‌شود.

(k) اگر $b_3 \neq 1$ و $b_6 \neq 0$ ، $b_4 = 0$ ، آنگاه با قرار دادن $s_2 = -\frac{1}{b_6}$ و $s_5 = -\frac{b_5}{b_3-1}$ به ترتیب در $F_2^{s_2}$ و $F_5^{s_5}$ می‌توان ضرایب X_2 و X_5 را به صفر تبدیل کرد. با ضرب کردن h در مقدار مناسبی در صورت نیاز داریم $h = \langle X_1, X_3 + b_6 X_6 + b_7 X_7 \rangle$ و در نتیجه مشابه حالت (f)، h به $\mathcal{V}_1^1$ تبدیل می‌شود.

لازم به ذکر است که حالت دیگری برای بررسی وجود ندارد و در هر حالت، h تا حد امکان ساده شده است. با روشی مشابه می‌توان برای یازده حالت دیگر نیز زیرجبرهای ۲-بعدی را به دست آورد.

□

۵. جواب‌های ناوردای جزئی معادلات اینشتین

در این بخش جواب‌های ناوردای جزئی دستگاه معادلات اینشتین را محاسبه می‌کنیم. برای این کار یک نمونه را با جزئیات کامل مطابق با روش بیان شده در بخش سوم توضیح می‌دهیم و در خصوص بقیه جواب‌ها فقط نتیجه را بیان می‌کنیم. به عنوان مثال زیرجبر $\langle X_1, X_7 \rangle : \mathcal{V}_1^7$ را در نظر بگیرید. مجموعه ناوردهای مستقل تابعی مربوط به $\mathcal{V}_1^7$ عبارتند از تابعی مانند I که در رابطه $X_1(I) = X_7(I) = 0$ صدق کند. با محاسبه این توابع، ناوردها به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$(22) \quad \left\{ t, \frac{b}{a}, \frac{c}{a} \right\}.$$

حال داریم

$$(23) \quad \text{rank} \left(\frac{\partial \left(\frac{b}{a}, \frac{c}{a} \right)}{\partial (a, b, c)} \right) = \text{rank} \begin{pmatrix} -b/a^2 & -c/a^2 \\ 1/a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix} = 2 = q - \delta.$$

چون $q = 3$ بنابراین $\delta = 1$ و طبق بحث فوق دستگاه معادلات اینشتین باید به یک دستگاه معادلات معمولی تبدیل شود. روابط متناظر با (۱۵) عبارتند از

$$(24) \quad \frac{b}{a} = f(t), \quad \frac{c}{a} = g(t),$$

همچنین جواب‌های متناظر با روابط (۱۶) و (۱۷) به صورت زیر نمایش داده می‌شوند

$$(25) \quad a = a(x, t), \quad c = ag(t), \quad b = af(t),$$

که در آن $a(x, t)$ یک تابع دلخواه است.

حال می‌توان به کمک روابط (۲۵) مشتقات توابع a ، b و c را محاسبه کرد:

$$(26) \quad \begin{aligned} b_1 &= a_1 f, & c_2 &= ag' + a_2 g, & c_{22} &= ag'' + 2a_2 g' + a_{22} g, \\ c_1 &= a_1 g, & b_2 &= af' + a_2 f, & b_{22} &= af'' + 2a_2 f' + a_{22} f, \\ b_{11} &= a_{11} f, & c_{12} &= a_1 g' + a_{12} g, & b_{12} &= a_1 f' + a_{12} f, \\ c_{11} &= a_{11} g. \end{aligned}$$

با جایگذاری مقادیر فوق در دستگاه معادلات اینشتین داریم:

$$(27) \quad \begin{aligned} aa_{12}fg + 3aa_1gf' + aa_{11}f - a_1^2g^2 - 2aa_1fg' + a_1^2f &= 0, \\ -a^2fg'' - 2aa_2fg' - aa_{22}fg - aa_{12}g^2 - 2aa_1g' - a_1a_2g^2 + a_1a_2f &= 0, \\ aa_{22}f + aa_{12}g - (a_2g + ag')^2 + a_2af' + a_2^2f &= 0, \\ ag'' + 2a_2g' + a_{22}g + a_{12} &= 0, \\ a_{11}g + a_1f' + a_{12}f &= 0, \\ -af'' - 2a_2f' - a_{22}f + a_{11} &= 0, . \end{aligned}$$

همچنین شرایط سازگاری معادلات (۲۷) عبارتند از معادلات

$$(28) \quad \begin{aligned} 2aa_2fg' + 2aa_2g'g^2 + a_2^2g^3 - a_2^2fg + a^2gg'^2 - aa_2f'g + a^2fg'' &= 0, \\ -a_2^2g^2 - a^2g'^2 + aa_2f' - 2aa_2gg' + a_2^2f + aa_{22}f &= 0, \\ 2aa_2gg' + a_2^2g^2 - a_2^2f + a^2g'^2 + aa_2f' + a^2f'' &= 0, & a_1 &= 0, \end{aligned}$$

و نامعادلات

$$(29) \quad f \neq 0, \quad g \neq 0, \quad a \neq 0, \quad f - g^2 \neq 0.$$

با حل دستگاه معادلات معمولی (۲۸) چهار نوع جواب به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$(30) \quad \begin{aligned} 1) & \begin{cases} a = c_1 \\ g = c_2 \\ f = c_4 + c_3 t \end{cases} & 2) & \begin{cases} f = \frac{c_1 c_3^2 t + c_5}{c_1 t + c_2} \\ g = c_3 + \frac{c_1 c_4}{c_1 t + c_2} \\ a = c_1 t + c_2 \end{cases} \\ 3) & \begin{cases} f = \frac{c_5(t+c_2)}{\ln(t+c_2)-c_3 c_1} \\ g = \frac{c_4}{\ln(t+c_2)-c_3 c_1} \\ a = -\frac{\ln(t+c_2)}{c_1} + c_3 \end{cases} & 4) & \begin{cases} f = \frac{c_6^2(c_2+t)}{(\ln(c_2+t))^{c_1+c_4+c_3 t} c_3} \\ g = \frac{c_5+c_6 t}{\ln(t+c_2)^{c_1+c_3 t+c_4}} \\ a = c_4 + t c_3 + c_1 \ln(c_2+t) \end{cases} \end{aligned}$$

حال با استفاده از روابط (۲۵) جواب‌های ناوردای جزیی متناظر با $\mathcal{V}_1^7$ به دست می‌آید:

$$(31) \quad \begin{aligned} 1) & \begin{cases} a = c_1 \\ b = (c_4 + c_3 t) c_1 \\ c = c_2 c_1 \end{cases} & 2) & \begin{cases} a = c_2 + c_1 t \\ b = c_5 + c_3^2 c_1 t \\ c = c_4 c_1 + (c_2 + c_1 t) c_3 \end{cases} \\ 3) & \begin{cases} a = \frac{-\ln(t+c_2)}{c_1} + c_3 \\ b = c_5(c_2+t) \\ c = c_4 \end{cases} & 4) & \begin{cases} a = c_4 + t c_3 + c_1 \ln(c_2+t) \\ b = \frac{c_6^2(t+c_2)}{c_3} \\ c = c_5 + c_6 t \end{cases} \end{aligned}$$

این جواب‌های ناوردای جزیی ممکن است کمی بدیهی به نظر آید، ولی بطریق مشابه می‌توان جواب‌های ناوردای جزیی پیچیده‌تری را با به کارگیری دیگر زیرجبرهای ۲- بعدی ارائه شده در قضیه ۱.۴ به دست آورد. در ادامه آن دسته از جواب‌های ناوردای جزیی را بررسی کنیم که نسبت به زیرگروه‌های گروه تقارنی G ناوردا نیستند. این جواب‌ها را جواب‌های ناوردای جزیی غیرکاهشی می‌نامند. این گونه جواب‌ها بسیار کمیاب هستند و به همین دلیل از اهمیت زیادی برخوردارند. در مقابل این دسته از جواب‌ها، جواب‌های ناوردای جزیی کاهشی قرار دارند.

اگر $u = f(x)$ یک جواب ناوردای جزیی کاهشی باشد می‌توان زیرگروهی مانند $H' \subset H$ یافت که u یک جواب H' -ناوردا باشد و $\dim(H) - \delta = s - \delta \leq \dim(H' \Gamma_f)$ [۱۲]. بنابراین جواب‌های ناوردای جزیی کاهشی را می‌توان با استفاده از روش ناوردای گروهی از دستگاه کاهش یافته‌ای که شامل $p + \delta - s \geq p - \dim(H' \Gamma_f)$ متغیر مستقل است به دست آورد که این کار به مراتب راحت‌تر از محاسبه آنها با روش ناوردای جزیی است.

به عنوان مثال، در مورد دستگاه معادلات اینشتین، جواب (۳۱) به دست آمده در بخش قبل، یک جواب ناوردای جزیی غیرکاهشی است. دلیل این امر را می‌توان به این صورت بیان نمود. جواب‌های ناوردای جزیی کاهشی باید نسبت به زیرگروه‌های یک پارامتری گروه متناظر با $\mathcal{V}_1^7$ ناوردا باشند. از طرفی همه زیرگروه‌های یک پارامتری متناظر با $\mathcal{V}_1^7$ می‌بایست مولدهای بی‌نهایت کوچکی به فرم $\alpha X_1 + \beta X_7$ داشته باشند که در آن $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. در [۱۸] جواب‌های ناوردای گروهی مربوط به این مولد به صورت زیر محاسبه شده است.

$$(32) \quad \begin{aligned} 1) & \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases} & 2) & \begin{cases} a = 0 \\ b = c_1 e^{\frac{\beta}{\alpha} x} \\ c = 0 \end{cases} & 3) & \begin{cases} a = c_2 e^{c_1 t + \frac{\beta}{\alpha} x} \\ b = -\frac{c_2 \beta}{c_1 \alpha} e^{c_1 t + \frac{\beta}{\alpha} x} \\ c = -\frac{c_1 c_2 \alpha}{\beta} e^{c_1 t + \frac{\beta}{\alpha} x} \end{cases} \end{aligned}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود هیچ کدام از این جواب‌ها هم ارز با جواب‌های جزئی (۳۱) نیستند و این مطلب غیرکاهشی بودن جواب‌های (۳۱) را نشان می‌دهد. در زیر برخی دیگر از جواب‌های ناوردای جزئی غیرکاهشی دستگاه معادلات اینشتین را به روش مشابه به دست آورده‌ایم. برای اختصار از توضیح راه حل، صرف نظر کرده‌ایم.

۱) برای زیرجبر $\langle X_2, X_7 \rangle$ ناوردها عبارتند از $\{x, \frac{b}{a}, \frac{c}{a}\}$ ، بنابراین متغیرهای وابسته به صورت

$$c = ag(x), \quad b = af(x), \quad a = a(x, t),$$

به دست می‌آیند. در نتیجه جواب‌های ناوردای جزئی مربوطه به صورت

$$a = c_1x + c_2, \quad b = c_1c_3^2x + \left(\frac{c_5}{c_1} - c_3^2c_2\right)\ln(c_1x + c_2) + c_6, \quad c = c_3(c_1x + c_2) + c_1c_4,$$

حاصل می‌شوند.

۲) برای زیرجبر $\langle X_5, X_7 \rangle$ ناوردها عبارتند از $\{t, \frac{c^2-ba}{b^2}, \frac{-ct+bx}{b}\}$ بنابراین متغیرهای وابسته به صورت

$$a = -bf(t) + \frac{b(g(t) - x)^2}{t^2}, \quad b = b(x, t), \quad c = (g(t) - x)\frac{b}{t},$$

به دست می‌آیند. در نتیجه جواب‌های ناوردای جزئی مربوطه به صورت

$$a = \frac{(c_1 + c_2t^3)(x - c_3)^2}{t^3} - (A), \quad b = \frac{c_1 + c_2t^3}{t}, \quad c = \frac{(c_1 + c_2t^3)(x - c_3)}{t^2},$$

حاصل می‌شوند که در آن

$$A = (c_5 + c_4)t\left(\ln\left(t + \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)}\right)^2 - \ln\left(-t\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)} + t^2 + \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{\left(\frac{2}{3}\right)}\right) + 2\sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{2c_2t}{\sqrt{3}c_1}\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{\left(\frac{2}{3}\right)} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right).$$

۳) برای زیرجبر $\langle X_4, X_7 \rangle$ ناوردها عبارتند از $\{x, \frac{-at+cx}{xa}, \frac{at^2-2xtc+bx^2}{x^2a}\}$ بنابراین متغیرهای وابسته به صورت

$$a = a(x, t), \quad b = a\left(2\frac{t}{x}f(x) + g(x) + \frac{t^2}{x^2}\right), \quad c = a\left(\frac{t}{x} + f(x)\right)$$

به دست می‌آیند. در نتیجه جواب‌های ناوردای جزئی مربوطه به صورت

$$a = \frac{c_1 + c_2x^3}{x}, \quad b = \frac{(c_1 + c_2x^3)(t + c_3)^2}{x^3} + (B), \quad c = \frac{(c_1 + c_2x^3)(t + c_3)}{x^2},$$

حاصل می‌شوند که در آن

$$B = (c_5 + c_4)x\left(\ln\left(x + \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)}\right)^2 - \ln\left(-x\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)} + x^2 + \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{\left(\frac{2}{3}\right)}\right) + 2\sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{2c_2x}{\sqrt{3}c_1}\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{\left(\frac{2}{3}\right)} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right).$$

۴) برای زیرجبر $\langle X_2, X_6 + X_7 \rangle$ ناوردها عبارتند از $\{x, \frac{b}{a^3}, \frac{c}{a^2}\}$ ، بنابراین متغیرهای وابسته به صورت

$$c = a^2g(x), \quad b = a^3f(x), \quad a = a(x, t),$$

به دست می‌آیند. در نتیجه جواب‌های ناوردای جزئی مربوطه به صورت

$$a = \frac{4(t + c_1)}{(c_2x + c_3)^2}, \quad b = \frac{4c_2^2(t + c_1)^3}{(c_2x + c_3)^4}, \quad c = \frac{4c_2(t + c_1)^2}{(c_2x + c_3)^3},$$

حاصل می‌شوند.

در هر چهار دسته جواب c_i ها ثابت‌های دلخواه هستند.

۶. نتیجه‌گیری

در این مقاله پس از بیان تعریف و طریقه به‌دست آوردن جواب‌های ناورداهای جزئی برای یک معادله، زیرجبرهای ۲- بعدی جبر تقارنی معادلات اینشتین را به‌دست آوردیم. سپس با استفاده از آن، جواب‌های ناوردای جزئی این معادلات را محاسبه کرده و ثابت کردیم این جواب‌ها با جواب‌های به‌دست آمده از روش تقارنی لی متفاوت است. در واقع ثابت شد که این جواب‌ها غیرکاهشی هستند. بر این اساس، جواب‌های جدید و ارزشمندی از یکی از معادلات معروف و پرکاربرد در فیزیک یعنی معادلات اینشتین به‌دست آمد. این معادلات در واقع تعیین کننده متریک خمینه‌های والکری هستند که در مدل‌بندی فضا-زمان نقش اساسی دارند.

مراجع

- [1] A. M. Barlukova and A. P. Chupakhin, Partially invariant solutions in gas dynamics and implicit equations, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, **53** no. 6 (2012) 812–824.
- [2] V. B. Bekezhanova and O. N. Goncharova, Application of a partially invariant exact solution of the thermosolutal convection equations for studying the instability of an evaporative flow in a channel heated from above, *Symmetry*, **15** no. 7 (2023) p. 13.
- [3] G. W. Bluman and J. D. Cole, The general similarity solution of the heat equation, *J. Math. Mech.*, **18** (1968/69) 1025–1042.
- [4] G. W. Bluman and S. Kumei, *Symmetry and differential equations*, Applied mathematical sciences, no. 81, Springer-Verlag, New York, 1989.
- [5] M. Brozos-Vázquez, E. García-Río, P. Gilkey, S. Nikčević and R. Vázquez-Lorenzo, *The geometry of walker manifolds*, A Publication in the Morgan and Claypool Publishers series, 2009.
- [6] A. M. Grundland and L. Lalague, Invariant and partially-invariant solutions of the equations describing a non-stationary and isentropic flow for an ideal and compressible fluid in $(3 + 1)$ dimensions, *J. Phys. A*, **29** no. 8 (1996) 1723–1739.
- [7] A. M. Grundland, P. Tempesta and P. Winternitz, Weak transversality and partially invariant solutions, *J. Math. Phys.*, **44** no. 6 (2003) 2704–2722.
- [8] S. Lie, On integration of a class of linear partial differential equations by means of definite integrals, translation by N. H. Ibragimov, *Archiv der Mathematik*, **6** no. 3 (1881) 328–368.
- [9] L. Martina and P. Winternitz, Partially invariant solutions of nonlinear Klein-Gordon and Laplace equations, *J. Math. Phys.*, **33** no. 8 (1992) 2718–2727.
- [10] S. V. Meleshko, A particular class of partially invariant solutions of the navier—stokes equations, *Non-linear Dynam.*, **36** no. 1 (2004) 47–68.
- [11] P. J. Olver, *Applications of Lie groups to differential equations*, Second edition. Graduate Texts in Mathematics, **107**, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [12] L. V. Ovsiannikov, *Group analysis of differential equations*, Translated from the Russian by Y. Chapovsky. Translation edited by William F. Ames. Academic Press, Inc. New York-London, 1982.
- [13] L. V. Ovsiannikov and A. P. Chupakhin, Regular partially invariant submodels of the equations of gas dynamic, *J. Appl. Maths Mech.*, **60** no. 6 (1996) 969–978.

- [14] L. V. Ovsianikov, *Group properties of differential equations*, Novosibirsk, Moscow, 1962.
- [15] A. A. Shaikh, Y. H. Kim and S. K. Hui, On Lorentzian quasi-Einstein manifolds, *J. Korean Math. Soc.*, **48** no. 4 (2011) 669–689.
- [16] A. G. Walker, Canonical form for a Riemannian space with a parallel field of null planes, *Quart. J. Math. Oxford*, **2** no. 1 (1950) 69–79.
- [17] A. G. Walker, On parallel fields of partially null vector spaces, *Quart. J. Math. Oxford*, **20** (1949) 135–145.
- [۱۸] م. جعفری، مطالعه خمینه‌های اینشتینی ۴-بعدی با توزیع پوچ موازی، ریاضی و جامعه، ۸ no. ۳ (۱۴۰۲) ۵۵–۷۹.
- [۱۹] ا. زعیم، ی. آریانژاد، م. قیطاسی، پیرامون برخی خمینه‌های همدیس اینشتین از بعد چهار، ریاضی و جامعه، ۷ no. ۲ (۱۴۰۱) ۱۹–۳۶.

شاهرود اعظمی

گروه ریاضی محض، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)، قزوین، ایران
azami@sci.ikiu.ac.ir

شاهرود اعظمی متولد اسفندماه ماه ۱۳۵۸ است. وی در سال ۱۳۷۸ وارد مقطع کارشناسی رشته ریاضی محض دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی شد و در سال ۱۳۸۲ وارد مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض، گرایش هندسه، دانشگاه صنعتی شریف شد. وی در سال ۱۳۸۸ وارد مقطع دکتری در رشته ریاضی محض گرایش هندسه دانشگاه صنعتی امیرکبیر گردید و در سال ۱۳۹۲ فارغ التحصیل گردید. او هم اکنون عضو هیات علمی دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره) می‌باشد. تخصص اصلی وی هندسه دیفرانسیل، آنالیز هندسی روی منیفلدها و شارهای هندسی می‌باشد.

