http://math-sci.ui.ac.ir

Journal of Mathematics and Society
ISSN (print): 2345-6493, ISSN (on-line): 2345-6507
Vol. 9 No. 4 (2024), pp. 87-102.

http://www.ui.ac.ir

BSE NORM FOR ABSTRACT SEGAL ALGEBRAS

FATEMEH ABTAHI* AND MARYAM TOUTOUNCHI

ABSTRACT. Let $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ be a commutative and semisimple Banach algebra and $(\mathcal{B}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$ be an abstract Segal algebra with respect to $\mathcal{A}$. In this paper, we first recall and study three important and practical mappings ${}_{\mathcal{A}}L$, Γ_1 and Γ_2. Then we investigate whenever these mappings have closed ranges. In fact, we research and study the conditions, under which having closed range of one of these mappings implies having the closed range of the another mapping. After that, using these results, we give a necessary and sufficient condition for $(\mathcal{B}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$, to be an algebra with BSE norm. Finally, we generalize some general results about abstract Segal algebras with respect to natural Banach functional algebras for abstract Segal algebras with respect to arbitrary Banach algebras. Also, throughout the paper, we provide examples to clarify the stated content.

1. Introduction

In 1990, Takahasi and Hatori introduced and studied the notion of BSE algebras [21]. Subsequently, several authors investigated this concept for various kinds of commutative Banach algebras; see for example [1], [2], [9], [10], [13] and [14], [21], [22] and [23]. Moreover, as the recent works and also some valuable survey works we refer to [6] and [7].

To provide the definition of BSE algebras, we present some preliminaries, as the following.

Keywords: Abstract Segal algebra, BSE algebra, BSE function, BSE norm, commutative Banach algebra, operator norm.

Article Type: Research Paper.

Communicated by Saeid Maghsoudi.

*Corresponding author.

Received: 27-03-2024, Accepted: 12-06-2024, Published Online: 28-01-2025.

Cite this article: F. Abtahi and M. Toutounchi, BSE norm for Abstract Segal algebras, *Journal of Mathematics and Society*, **9** no. 4 (2024) 87–102.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.141063.1653 .

Let $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ be a commutative Banach algebra with the dual space $\mathcal{A}^*$. Denote by $\Delta(\mathcal{A})$, the linearly independent subspace of $\mathcal{A}^*$, consisting of all nonzero multiplicative linear functionals on $\mathcal{A}$, called the Gelfand (character) space of $\mathcal{A}$. Note that $\Delta(\mathcal{A})$ is always considered with the weak* topology, inherited from $\mathcal{A}^*$ and it is a locally compact Hausdorff space [12, Theorem 2.2.3]. Furthermore, we denote by $C_b(\Delta(\mathcal{A}))$, the Banach algebra consisting of all continuous and bounded complex valued functions on $\Delta(\mathcal{A})$, equipped with the pointwise product and supremum norm. Consider the Gelfand mapping of $\mathcal{A}$, defined as

$$\mathcal{A} \to C_b(\Delta(\mathcal{A})) \qquad a \mapsto \widehat{a},$$

where $\widehat{a}(\varphi) = \varphi(a)$ $(\varphi \in \Delta(\mathcal{A}))$ and set $\widehat{\mathcal{A}} = \{\widehat{a} : \ a \in \mathcal{A}\}$. Then $\mathcal{A}$ is called semisimple if its Gelfand mapping is injective. Throughout the paper, $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ is a commutative and semisimple Banach algebra.

A function algebra on a locally compact Hausdorff space X is in fact a subalgebra $\mathcal{A}$ of $C_b(X)$, separating the point of X; in the sense that the following two conditions are satisfied;

(i). For each $x \in X$, there exists $f \in \mathcal{A}$ such that $f(x) \neq 0$.

(ii). Foe any $x, y \in X$ with $x \neq y$, there exists $g \in \mathcal{A}$ such that $g(x) \neq g(y)$.

Moreover, $\mathcal{A}$ is called a Banach function algebra, if there exists some norm $\|\cdot\|$ on $\mathcal{A}$ such that $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ is a Banach algebra. In addition, $\mathcal{A}$ is called a natural Banach function algebra if

$$\Delta(\mathcal{A}) = \{\varepsilon_x : \ \ x \in X\},$$

where $\varepsilon_x(f) = f(x)$ $(f \in \mathcal{A})$.

Following [21], the function $\sigma \in C_b(\Delta(\mathcal{A}))$ is called a BSE function if there exists a constant $M > 0$ such that the inequality

$$\left|\sum_{j=1}^{n} d_j \sigma(\varphi_j)\right| \leq M \ \left\|\sum_{j=1}^{n} d_j \varphi_j\right\|_{\mathcal{A}^*}$$

holds, for every finite number of $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ in $\Delta(\mathcal{A})$ and the same number of complex numbers $d_1, \ldots, d_n$. The BSE norm of σ ($\|\sigma\|_{BSE,\mathcal{A}}$), is the infimum of all such M. The set of all BSE$-$functions is denoted by $C_{\mathrm{BSE}}(\Delta(\mathcal{A}))$. Takahasi and Hatori [21, Lemma 1] showed that $(C_{\mathrm{BSE}}(\Delta(\mathcal{A})), \|\cdot\|_{\mathrm{BSE},\mathcal{A}})$, is always a commutative and semisimple Banach algebra. Note that

$$\widehat{\mathcal{A}} \subseteq C_{\mathrm{BSE}}(\Delta(\mathcal{A}))$$

and

$$\|\widehat{x}\|_\infty \leq \|\widehat{x}\|_{\mathrm{BSE},\mathcal{A}} \leq \|x\| \qquad (x \in \mathcal{A}).$$

Following [7] and also [22], $\mathcal{A}$ is called a BSE norm algebra (or has a BSE norm) if there exists $K > 0$ such that $\|x\| \leq K\|\widehat{x}\|_{\mathrm{BSE},\mathcal{A}}$ $(x \in \mathcal{A})$.

 http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.141063.1653

A bounded and linear operator T on $\mathcal{A}$ is called a multiplier if $xT(y) = T(x)y$ $(x, y \in \mathcal{A})$. It should be noted that by [12, Proposition 1.4.11], any multiplier T satisfies the following equality;

$$T(xy) = xT(y) = T(x)y \qquad (x, y \in \mathcal{A}).$$

Then the set $M(\mathcal{A})$, consisting of all multipliers of $\mathcal{A}$, is a unital commutative Banach algebra and it is called the multiplier algebra of $\mathcal{A}$. By [18, Theorem 1.2.2], for any $T \in M(\mathcal{A})$ there exists a unique function $\widehat{T} \in C_b(\Delta(\mathcal{A}))$ such that

$$\widehat{T(x)}(\varphi) = \widehat{T}(\varphi)\widehat{x}(\varphi),$$

for all $x \in \mathcal{A}$ and $\varphi \in \Delta(\mathcal{A})$. Furthermore, $\|\widehat{T}\|_\infty \leq \|T\|$ $(T \in M(\mathcal{A}))$. Let

$$\widehat{M(\mathcal{A})} = \{\widehat{T} : T \in M(\mathcal{A})\}.$$

Then $\mathcal{A}$ is called a BSE algebra if

$$C_{\mathrm{BSE}}(\Delta(\mathcal{A})) = \widehat{M(\mathcal{A})}.$$

Following [11], a bounded net $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ in $\mathcal{A}$, is called a bounded $\Delta-$weak approximate identity for $\mathcal{A}$, if $\lim_\alpha \varphi(ax_\alpha) = \varphi(a)$, for any $a \in \mathcal{A}$ and $\varphi \in \Delta(\mathcal{A})$ In [21, Corollary 5], the authors proved that $\mathcal{A}$ has a bounded $\Delta-$weak approximate identity if and only if

$$\widehat{M(\mathcal{A})} \subseteq C_{\mathrm{BSE}}(\Delta(\mathcal{A})).$$

It follows that all BSE algebras possess a bounded $\Delta-$weak approximate identity.

In this paper, since we are dealing with different commutative Banach algebras, to avoid ambiguity, we denote by ${}_{\mathcal{A}}L$, the natural mapping

$$L : \mathcal{A} \to M(\mathcal{A}) \quad (a \mapsto L_a),$$

where L_a is the left multiplication operator at a, defined as $L_a(b) = ab$ $(b \in \mathcal{A})$. Moreover in stead of $C_b(\Delta(\mathcal{A}))$, we denote the range of the Gelfand mapping by $(C_0(\Delta(\mathcal{A})), \|\cdot\|_\infty)$ and $(C_{\mathrm{BSE}}(\Delta(\mathcal{A})), \|\cdot\|_{\mathrm{BSE}})$, respectively. We also indicate these mapping with Γ_1 and Γ_2, respectively. Then we investigate when these mapping have closed range. These results are applied in the main achievements of the paper. Afterwards, as a main result we show in the class of BSE algebras that any abstract Segal algebra $(\mathcal{B}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$, possessing a bounded $\Delta-$weak approximate identity, is a BSE norm algebra if and only if $\mathcal{B} = \mathcal{A}$. Finally, some general results about abstract Segal algebras of natural Banach function algebras, have been generalized for arbitrary abstract Segal algebras. Furthermore, some particular examples are provided for clarification.

2. Main Results

Lemma 2.1. *Let* $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ *be a commutative and semisimple Banach algebra with a bounded* $\Delta-$*weak approximate identity. Then there exists* $\beta > 0$ *such that for each* $T \in M(\mathcal{A})$ *we have*

$$\|\widehat{T}\|_{\mathrm{BSE}} \leq \beta \|T\|.$$

Lemma 2.2. *Let* $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ *be a commutative and semisimple Banach algebra. Then* $\widehat{a} = \widehat{{}_{\mathcal{A}}L_a}$ *and* $\|\widehat{a}\|_{\mathrm{BSE},\mathcal{A}} = \|\widehat{{}_{\mathcal{A}}L_a}\|_{\mathrm{BSE}}$*, for each* $a \in \mathcal{A}$.

Proposition 2.3. *Let* $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ *be a commutative and semisimple Banach algebra. Consider the following assertions.*

(i). Γ_1 *has closed range.*
(ii). Γ_2 *has closed range.*
(iii). ${}_{\mathcal{A}}L$ *has closed range.*

Then $(i) \Rightarrow (ii)$. *Moreover, if* $\mathcal{A}$ *has a bounded* $\Delta-$*weak approximate identity then* $(ii) \Rightarrow (iii)$.

Following [5], the Banach algebra $(\mathcal{B}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$ is called an abstract Segal algebra with respect to $\mathcal{A}$ if the following conditions are satisfied.

(i) $\mathcal{B}$ is an essential dense ideal in $\mathcal{A}$; i.e.

$$\mathcal{B} = \{ab : \ a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}\}.$$

(ii) There exists $M > 0$ such that $\|b\|_{\mathcal{A}} \leq M\|b\|_{\mathcal{B}}$, for any $b \in \mathcal{B}$.
(iii) There exists $N > 0$ such that $\|ab\|_{\mathcal{B}} \leq N\|a\|_{\mathcal{A}}\|b\|_{\mathcal{B}}$, for all $a, b \in \mathcal{B}$.

Since in the definition of abstract Segal algebras, the essentiality of $\mathcal{B}$ is assumed, it follows that $\mathcal{B}$ is semisimple. Moreover, $\Delta(\mathcal{A})$ and $\Delta(\mathcal{B})$ are homeomorphic; see [5, Theorem 2.1]. In fact, $\widetilde{\varphi} = \varphi|_{\mathcal{B}}$ belongs to $\Delta(\mathcal{B})$, for any $\varphi \in \Delta(\mathcal{A})$ and

$$\Delta(\mathcal{B}) = \{\widetilde{\varphi} : \ \varphi \in \Delta(\mathcal{A})\};$$

see [3, Lemma 2.2]. For any $\sigma \in C_b(\Delta(\mathcal{A}))$, define $\widetilde{\sigma}$ on $\Delta(\mathcal{B})$ as

$$\widetilde{\sigma}(\widetilde{\varphi}) = \sigma(\varphi).$$

Lemma 2.4. *Let* $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ *be a commutative and semisimple Banach algebra and* $(\mathcal{B}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$ *be an abstract Segal algebra with respect to* $\mathcal{A}$. *Then*

$$C_b(\Delta(\mathcal{B})) = \{\widetilde{\sigma} : \ \sigma \in C_b(\Delta(\mathcal{A}))\}.$$

Moreover, $\|\widetilde{\sigma}\|_\infty = \|\sigma\|_\infty$*, for any* $\sigma \in C_b(\Delta(\mathcal{A}))$.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.141063.1653

For each $f \in \mathcal{A}^*$, the restriction of f to $\mathcal{B}$ is denoted by $\widetilde{f} = f|_{\mathcal{B}}$. Moreover, $\widetilde{f} \in \mathcal{B}^*$ and $\|\widetilde{f}\|_{\mathcal{B}^*} \leq M\|f\|_{\mathcal{A}^*}$. Now we have the next result.

Lemma 2.5. *Let $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ be a commutative and semisimple Banach algebra and $(\mathcal{B}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$ be an abstract Segal algebra with respect to $\mathcal{A}$. If $\widetilde{\sigma} \in C_{\mathrm{BSE}}(\Delta(\mathcal{B}))$ then $\sigma \in C_{\mathrm{BSE}}(\Delta(\mathcal{A}))$ and $\|\sigma\|_{\mathrm{BSE},\mathcal{A}} \leq M\|\widetilde{\sigma}\|_{\mathrm{BSE},\mathcal{B}}$.*

Corollary 2.6. *Let $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ be a commutative and semisimple Banach algebra and $(\mathcal{B}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$ be an abstract Segal algebra with respect to $\mathcal{A}$. Then for each $b \in \mathcal{B}$,*

$$\|\widehat{b}\|_{\mathrm{BSE},\mathcal{A}} \leq M\|\widehat{b}\|_{\mathrm{BSE},\mathcal{B}}.$$

Proposition 2.7. *Let $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ be a commutative and semisimple Banach algebra and $(\mathcal{B}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$ be an abstract Segal algebra with respect to $\mathcal{A}$. If ${}_{\mathcal{B}}L$ is bounded from below then $\mathcal{B} = \mathcal{A}$.*

By [7, Theorem page. 40], if the Banach algebra $\mathcal{A}$ is a BSE algebra, then $\mathcal{A}$ is a BSE norm algebra if and only if ${}_{\mathcal{A}}L$ is bounded from below. Now we have the next result, as a generalization of [7, page. 67], which has been presented for general Segal algebras.

Theorem 2.8. *Let $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ be a* BSE *algebra and $(\mathcal{B}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$ be an abstract Segal algebra with respect to $\mathcal{A}$ with a bounded $\Delta-$weak approximate identity. If $\mathcal{B}$ is a* BSE *norm algebra then $\mathcal{B} = \mathcal{A}$.*

Proposition 2.9. *Let $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ be a* BSE *algebra and $(\mathcal{B}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$ be an abstract Segal algebra with respect to $\mathcal{A}$. Then the following assertions are equivalent.*

(i). *$\mathcal{B}$ is a* BSE *norm algebra with a bounded $\Delta-$weak approximate identity.*
(ii). *$\mathcal{B} = \mathcal{A}$ and $\mathcal{A}$ is a* BSE *norm algebra.*

We conclude this paper with the next result. It is in fact a generalization of [6, Theorem page. 34], which is regarding to natural Banach function algebras.

Theorem 2.10. *Let $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ be a commutative and semisimple Banach algebra and $(\mathcal{B}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$ be an abstract Segal algebra with respect to $\mathcal{A}$. Suppose that $\mathcal{A}$ has a* BSE *norm and $\mathcal{B}$ possesses a bounded $\Delta-$weak approximate identity. Then three norms $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$, $\|\cdot\|_{\mathrm{BSE},\mathcal{A}}$ and $\|\cdot\|_{\mathrm{BSE},\mathcal{B}}$ are equivalent on $\mathcal{B}$.*

3. Conclusions

In this paper, we recall and study three mappings ${}_{\mathcal{A}}L$, Γ_1 and Γ_2. Then we investigate whenever these mappings have closed ranges. Using these results, we give a necessary and sufficient condition for $(\mathcal{B}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$, to be an algebra with BSE norm. Some general results about abstract Segal algebras with respect to natural Banach functional algebras are generalized for abstract Segal algebras with respect to arbitrary Banach algebras.

Fatemeh Abtahi

Department of Pure Mathematics, Faculty of Mathematics and Statistics, University of Isfahan, P.O.Box 81746-73441, Isfahan, Iran

Email: f.abtahi@sci.ui.ac.ir, abtahif2002@yahoo.com

Maryam Toutounchi

Department of Pure Mathematics, Faculty of Mathematics and Statistics, University of Isfahan, P.O.Box 81746-73441, Isfahan, Iran

Email: m.toutounchi@sci.ui.ac.ir, m_toutounchi@yahoo.com

 http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.141063.1653

http://www.ui.ac.ir

ریاضی و جامعه
شاپا (چاپی): ۲۳۴۵-۶۴۹۳، شاپا(الکترونیکی): ۲۳۴۵-۶۵۰۷
جلد ۹، شماره ۴ (۱۴۰۳)، صص. ۸۷-۱۰۲

http://math-sci.ui.ac.ir

نرم BSE برای جبرهای سگال مجرد

فاطمه ابطحی* و مریم توتونچی

چکیده. فرض کنیم $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ یک جبر باناخ جابجایی و نیم‌ساده و $(\mathcal{B}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$ یک جبر سگال مجرد نسبت به $\mathcal{A}$ باشد. در این مقاله، ابتدا سه نگاشت مهم و کاربردی $_{\mathcal{A}}L$، Γ_1 و نیز Γ_2 را یادآوری و مورد مطالعه قرار می‌دهیم. سپس بررسی می‌کنیم چه وقت این نگاشت‌ها دارای برد بسته هستند. در واقع، شرایطی را که بسته بودن برد یکی از این نگاشت‌ها، بسته بودن برد نگاشت دیگر را نتیجه می‌دهد، مورد تحقیق و مطالعه قرار می‌دهیم. بعد از آن با استفاده از این نتایج، یک شرط لازم و کافی ارائه می‌دهیم برای این‌که $(\mathcal{B}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$ یک جبر باناخ با نرم BSE باشد. در نهایت، برخی از نتایج عمومی موجود در خصوص جبرهای سگال مجرد وابسته به جبرهای تابعی باناخ طبیعی را برای جبرهای سگال مجرد وابسته به جبرهای باناخ دلخواه تعمیم می‌دهیم. همچنین در سرتاسر مقاله، مثال‌های مهمی را برای روشنگری مطالب و نتایج بیان شده، ارائه می‌دهیم.

۱. مقدمه و مفاهیم مورد نیاز

در سال ۱۹۹۰، تاکاهاسی و هتوری [۱] نظریه جبرهای BSE را معرفی کرده و مورد مطالعه قرار دادند [۲۱]. بعد از آن نویسندگان متعددی این مفهوم را برای انواع مختلف جبرهای باناخ جابجایی و نیم‌ساده بررسی کرده و نتایجی به‌دست آوردند. به‌عنوان برخی از مراجع مهم در این خصوص می‌توان به [۱]، [۲]، [۹]، [۱۰]، [۱۳]، [۱۴]، [۲۱]، [۲۲] و [۲۳] اشاره کرد. به‌ویژه، [۶] و [۷] را می‌توان به‌عنوان دو منبع کامل که بیشتر شامل مطالب مهم هستند، معرفی کرد.

به‌طور کلی لغت BSE یک کلمه مخفف، متشکل از سه حرف اول از سه ریاضی‌دان بزرگ به نام‌های بوخنر [۲] شوئنبرگ [۳] و ابرلین [۴] است و به یک قضیه معروف اشاره می‌کند. این قضیه ابتدا توسط بوخنر و شوئنبرگ برای گروه جمعی اعداد حقیقی [۴، ۲۰] اثبات شد. سپس توسط ابرلین، برای هر گروه آبلی به‌طور موضعی فشرده و هاسدورف G تعمیم داده شد [۸]. این قضیه در ادامه آمده است.

قضیه ۱.۱. فرض کنیم G یک گروه آبلی به‌طور موضعی فشرده و هاسدورف با دوگان $\widehat{G}$، $\tau \in C_b(\widehat{G})$ و نیز M عددی مثبت و دلخواه باشد. در این‌صورت شرایط زیر معادل هستند؛

(الف). $\nu \in M(G)$ موجود است به‌طوری‌که $\tau = \widehat{\nu}$ و $\|\nu\| \leq M$.

عبارات و کلمات کلیدی: تابع BSE، جبر باناخ جابجایی، جبر BSE، جبر سگال مجرد، نرم BSE، نرم عملگری.
نوع مقاله: پژوهشی
دبیرتخصصی رابط: سعید مقصودی
*نویسنده مسئول تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۱/۰۸ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۳/۲۳ تاریخ انتشار آنلاین: ۱۴۰۳/۱۱/۰۹
ارجاع به مقاله: ف. ابطحی و م. توتونچی، نرم BSE برای جبرهای سگال مجرد، نشریه ریاضی و جامعه، ۹ شماره ۴ (۱۴۰۳) ۸۷–۱۰۲.
. http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.141063.1653

[1]S. E. Takahasi and O. Hatori [2]Bochner [3]Schoenberg [4]Eberlein

(ب). برای هر تعداد متناهی عدد مختلط $c_1,\dots,c_n$ و به همان تعداد $\gamma_1,\dots,\gamma_n$ متعلق به $\widehat{G}$، نامساوی
$$\left|\sum_{k=1}^{n} c_k\tau(\gamma_k)\right| \leq M\left\|\sum_{k=1}^{n} c_k\gamma_k\right\|_{L^\infty(G)},$$
برقرار است.

قضیه ۱.۱ در واقع تبدیل‌های فوریه‌ـاستیلجس از اندازه‌های بورل کراندار روی یک گروه آبلی به‌طور موضعی فشرده و هاسدورف را مشخصه‌سازی می‌کند. در واقع این قضیه، تاکاهاسی و هتوری را هدایت کرد تا خاصیت BSE را برای هر جبر باناخ جابجایی و بدون ترتیب $\mathcal{A}$ معرفی کنند. بر اساس قضیه ۱.۱ و مفهوم BSE ارائه شده توسط تاکاهاسی و هتوری، جبر گروهی $L^1(G)$ همواره یک جبر BSE است. برای مشاهده اثباتی از این مطلب به [۱۹] مراجعه شود.

برای معرفی مفهوم جبر BSE به مقدماتی نیاز داریم که در ادامه خواهد آمد. به‌عنوان کامل‌ترین منابع در این‌خصوص می‌توان به مراجع [۱۲] و [۱۸] اشاره کرد. لازم به ذکر است از آن‌جایی‌که مفاهیم دوگان یک گروه و نیز تبدیل فوریه‌ـاستیلجس یک اندازه، خارج از مبحث این مقاله است لذا از آوردن آن‌ها خودداری می‌کنیم. برای مشاهده این مطالب می‌توان به [۱۲] مراجعه کرد.

فرض کنیم $(\mathcal{A},\|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ یک جبر باناخ جابجایی با دوگان $\mathcal{A}^*$ باشد. فضای مشخصه $\mathcal{A}$ را با $\Delta(\mathcal{A})$ نمایش می‌دهیم که زیرمجموعه‌ای از $\mathcal{A}^*$، شامل تمام تابعک‌های ضربی ناصفر است. این مجموعه همواره با توپولوژی ضعیف‌ـستاره القایی از $\mathcal{A}^*$ در نظر گرفته می‌شود و طبق [۱۲، قضیه ۳.۲.۲]، یک فضای به‌طور موضعی فشرده و هاسدورف است. به‌علاوه، فضای تمام توابع پیوسته، کراندار و مختلط‌ـمقدار روی $\Delta(\mathcal{A})$ را با نماد $C_b(\Delta(\mathcal{A}))$ نشان می‌دهیم که تحت ضرب نقطه‌ای توابع و نرم سوپریمم تعریف شده به‌صورت
$$\|f\|_\infty = \sup_{\varphi\in\Delta(\mathcal{A})}|f(\varphi)| \qquad (f\in C_b(\Delta(\mathcal{A}))),$$
یک جبر باناخ جابجایی است. همچنین زیرجبر بسته از $C_b(\Delta(\mathcal{A}))$ شامل تمام توابعی که در بینهایت صفر می‌شوند را با $C_0(\Delta(\mathcal{A}))$ نمایش می‌دهیم. نگاشت گلفند $\mathcal{A}$ در واقع همریختی $\Gamma:\mathcal{A}\longrightarrow C_b(\Delta(\mathcal{A}))$ تعریف شده به‌صورت $a\mapsto\widehat{a}$ است که در آن $\widehat{a}$، تبدیل گلفند a تعریف شده به‌صورت $\widehat{a}(\varphi)=\varphi(a)$ $(\varphi\in\Delta(\mathcal{A}))$ است. برای اطلاعات بیشتر در این خصوص به [۱۲] مراجعه شود. برد نگاشت گلفند را با $\widehat{\mathcal{A}}$ نمایش می‌دهیم. به بیان دیگر
$$\widehat{\mathcal{A}}=\{\widehat{a}:\ \ a\in\mathcal{A}\}.$$
در این‌صورت $\mathcal{A}$ را نیم‌ساده نامیم اگر نگاشت گلفند آن یک‌به‌یک باشد. سرتاسر مقاله $\mathcal{A}$ را یک جبر باناخ جابجایی و نیم‌ساده در نظر می‌گیریم.

یک جبر تابعی روی یک فضای به‌طور موضعی فشرده و هاسدورف X در واقع یک زیرجبر $\mathcal{A}$ از $C_b(X)$ است که نقاط X را از هم جدا می‌کند؛ به این مفهوم که دو شرط زیر ایفا شوند:

(الف). برای هر $x\in X$، تابع $f\in\mathcal{A}$ موجود باشد که $f(x)\neq 0$.

(ب). برای هر دو نقطه متفاوت x,y، تابع $g\in\mathcal{A}$ موجود باشد به‌طوری‌که $g(x)\neq g(y)$.

همچنین جبر تابعی $\mathcal{A}$ را یک جبر تابعی باناخ نامیم اگر نرم $\|\cdot\|$ روی آن موجود باشد به‌طوری‌که $\mathcal{A}$ تحت $\|\cdot\|$ کامل باشد. به‌علاوه، جبر تابعی باناخ $\mathcal{A}$ را طبیعی نامیم اگر فضای مشخصه آن به‌صورت
$$\{\varepsilon_x:\ \ x\in X\},$$
باشد که در آن $\varepsilon_x(f)=f(x)$ $(f\in\mathcal{A})$.

بر اساس [۲۱]، تابع $\sigma \in C_b(\Delta(\mathcal{A}))$ را یک تابع BSE نامیم اگر عدد $M > \circ$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر تعداد متناهی $\varphi_۱, \dots, \varphi_n$ از اعضای $\Delta(\mathcal{A})$ و به همان تعداد عدد مختلط $\alpha_۱, \dots, \alpha_n$ داشته باشیم

$$\left|\sum_{i=۱}^{n} \alpha_i \sigma(\varphi_i)\right| \leq M \left\|\sum_{i=۱}^{n} \alpha_i \varphi_i\right\|_{\mathcal{A}^*}.$$

مجموعه تمام توابع BSE را با نماد $C_{BSE}(\Delta(\mathcal{A}))$ نمایش می‌دهیم که یک زیرفضای برداری از $C_b(\Delta(\mathcal{A}))$ است. اینفیموم تمام $M > \circ$ که در نامساوی بالا صدق می‌کنند را با $\|\sigma\|_{BSE,\mathcal{A}}$ نمایش می‌دهیم. در واقع طبق [۲۱، لم ۱]، $\|\cdot\|_{BSE,\mathcal{A}}$ یک نرم روی $C_{BSE}(\Delta(\mathcal{A}))$ معرفی می‌کند به‌طوری‌که $C_{BSE}(\Delta(\mathcal{A}))$ تحت این نرم و ضرب نقطه‌ای توابع یک جبر باناخ جابجایی و نیم‌ساده است. به‌سادگی می‌توان نشان داد که $\widehat{\mathcal{A}} \subseteq C_{BSE}(\Delta(\mathcal{A}))$ و برای هر $x \in \mathcal{A}$ همواره داریم

$$\|\widehat{x}\|_\infty \leq \|\widehat{x}\|_{BSE,\mathcal{A}} \leq \|x\|.$$

این مطلب در [۲۱] نیز نشان داده شده است. بر اساس [۷] و نیز [۲۳]، $\mathcal{A}$ را یک جبر با نرم BSE نامیم اگر عدد $K > \circ$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $x \in \mathcal{A}$ داشته باشیم

$$\|x\| \leq K \|\widehat{x}\|_{BSE,\mathcal{A}}.$$

حال به‌معرفی مفهوم ضربگر می‌پردازیم. فرض کنیم $B(\mathcal{A})$ جبر باناخ متشکل از تمام عملگرهای خطی و کراندار از $\mathcal{A}$ به $\mathcal{A}$ باشد. در این‌صورت $T \in B(\mathcal{A})$ را یک ضربگر روی $\mathcal{A}$ نامیم اگر برای هر $x, y \in \mathcal{A}$ داشته باشیم $xT(y) = T(x)y$. لازم به ذکر است همان‌طور که در اثبات [۱۲، گزاره ۱.۴.۱۱] مشاهده می‌شود، هر ضربگر T دارای ویژگی زیر است؛

$$T(xy) = xT(y) = T(x)y \qquad (x, y \in \mathcal{A}).$$

مجموعه تمام ضربگرها روی $\mathcal{A}$ را با $M(\mathcal{A})$ نمایش داده، جبر ضربگری $\mathcal{A}$ می‌نامیم. لازم به ذکر است که $M(\mathcal{A})$ تحت نرم عملگرها و عمل ترکیب توابع یک جبر باناخ جابجایی و یکدار است. بر اساس [۱۸، قضیه ۲.۲.۱]، برای هر $T \in M(\mathcal{A})$ عضو $\widehat{T}$ متعلق به $C_b(\Delta(\mathcal{A}))$ موجود است به‌طوری‌که برای هر $x \in \mathcal{A}$ داریم $\widehat{Tx} = \widehat{T}\widehat{x}$. به‌علاوه، برای هر $T \in M(\mathcal{A})$ داریم $\|\widehat{T}\|_\infty \leq \|T\|$. قرار می‌دهیم

$$\widehat{M(\mathcal{A})} = \{\widehat{T} : \ T \in M(\mathcal{A})\}.$$

در این‌صورت $\mathcal{A}$ را یک جبر BSE نامیم اگر

$$C_{BSE}(\Delta(\mathcal{A})) = \widehat{M(\mathcal{A})}.$$

یادآوری می‌کنیم که تور کراندار $\{x_\alpha\}_\alpha$ در $\mathcal{A}$ یک همانی تقریبی کراندار برای $\mathcal{A}$ نامیده می‌شود اگر برای هر $a \in \mathcal{A}$ داشته باشیم

$$\lim_\alpha \|ax_\alpha - a\|_{\mathcal{A}} = \circ.$$

حال به معرفی نوعی خاص از همانی‌های تقریبی می‌پردازیم که با جبرهای BSE ارتباطی تنگاتنگ دارد. طبق [۱۱]، تور کراندار $\{x_\alpha\}_\alpha$ در $\mathcal{A}$ را یک همانی تقریبی Δ−ضعیف کراندار برای $\mathcal{A}$ نامیم اگر برای هر $\varphi \in \Delta(\mathcal{A})$ و هر $a \in \mathcal{A}$ داشته باشیم $\lim_\alpha \varphi(ax_\alpha) = \varphi(a)$. طبق [۲۱، نتیجه ۵]، $\mathcal{A}$ دارای یک همانی تقریبی Δ−ضعیف کراندار است اگر و تنها اگر

$$\widehat{M(\mathcal{A})} \subseteq C_{BSE}(\Delta(\mathcal{A})).$$

بنابراین تمام جبرهای BSE دارای همانی تقریبی Δ−ضعیف کراندار هستند.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.141063.1653

در این مقاله از آن‌جا که با جبرهای جابجایی متفاوتی سر و کار داریم برای دوری از ابهام، نگاشت طبیعی

$$L : \mathcal{A} \longrightarrow M(\mathcal{A}) \qquad (a \mapsto L_a)$$

که در آن $L_a(b) = ab$ ($b \in \mathcal{A}$) را با نماد ${}_{\mathcal{A}}L$ نشان می‌دهیم. همچنین هم‌دامنه نگاشت گلفند را به‌جای $C_b(\Delta(\mathcal{A}))$ به‌ترتیب مجموعه‌های $(C_\circ(\Delta(\mathcal{A})), \|\cdot\|_\infty)$ و $(C_{BSE}(\Delta(\mathcal{A})), \|\cdot\|_{BSE})$ در نظر می‌گیریم و این نگاشت‌ها را به‌ترتیب با Γ_1 و Γ_2 نشان می‌دهیم. سپس بررسی می‌کنیم چه وقت این نگاشت‌ها دارای برد بسته هستند. این نتایج در دستاوردهای اصلی این مقاله مورد استفاده قرار می‌گیرند. به‌عنوان یک نتیجه اصلی نشان می‌دهیم در کلاس جبرهای BSE، هر جبر سگال مجرد $(\mathcal{B}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$ که شامل یک همانی تقریبی $\Delta-$ضعیف کراندار باشد، یک جبر با نرم BSE است اگر و تنها اگر $\mathcal{B} = \mathcal{A}$. در نهایت، برخی از نتایج عمومی موجود در خصوص جبرهای سگال مجرد وابسته به جبرهای تابعی باناخ طبیعی را برای جبرهای سگال وابسته به جبرهای باناخ دلخواه تعمیم می‌دهیم. همچنین برای روشن شدن مطالب، مثال‌های متعددی را در سرتاسر مقاله ارائه می‌دهیم.

۲. نتایج عمومی

فرض کنیم $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ یک جبر باناخ جابجایی و نیم‌ساده باشد. نگاشت‌های ${}_{\mathcal{A}}L$، Γ_1 و Γ_2 که در بخش قبل یادآوری شدند را در نظر می‌گیریم. براساس [۱۲، قضیه ۱۲.۴.۱]، اگر $\mathcal{A}$ دارای یک همانی تقریبی کراندار باشد آن‌گاه ${}_{\mathcal{A}}L$ از پایین کراندار است. در این‌حالت $\mathcal{A}$ تحت نرم عملگری، تعریف شده به‌صورت $\|a\|_{op} = \|{}_{\mathcal{A}}L_a\|$ ($a \in \mathcal{A}$) بسته است. به‌علاوه، به‌سادگی دیده می‌شود که Γ_1 (به‌ترتیب Γ_2 و ${}_{\mathcal{A}}L$) دارای نرم بسته است اگر و تنها اگر $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ معادل با $\|\cdot\|_\infty$ (به‌ترتیب $\|\cdot\|_{BSE}$ و $\|\cdot\|_{op}$) باشد. بنابراین Γ_2 دارای نرم بسته است اگر و تنها اگر $\mathcal{A}$ یک جبر با نرم BSE باشد.
لم‌های زیر در نتایج ما اساسی هستند.

لم ۱.۲. فرض کنیم $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ یک جبر باناخ جابجایی و نیم‌ساده با یک همانی تقریبی $\Delta-$ضعیف کراندار باشد. در این‌صورت $\beta > \circ$ موجود است به‌طوری‌که برای هر $T \in M(\mathcal{A})$ داریم

$$\|\widehat{T}\|_{BSE} \leq \beta \|T\|.$$

اثبات. با انجام روند تکراری [۲۱، نتیجه ۵] حکم به‌سادگی به‌دست می‌آید. □

لم ۲.۲. فرض کنیم $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ یک جبر باناخ جابجایی و نیم‌ساده باشد. در این‌صورت برای هر $a \in \mathcal{A}$ داریم

$$\|\widehat{a}\|_{BSE} = \|\widehat{{}_{\mathcal{A}}L_a}\|_{BSE}.$$

اثبات. از آن‌جایی‌که برای هر $a \in \mathcal{A}$ به‌وضوح داریم $\widehat{a} = \widehat{{}_{\mathcal{A}}L_a}$، لذا حکم به‌دست می‌آید. □

گزاره بعد، ارتباط بین بسته بودن برد نگاشت‌های Γ_1، Γ_2 و ${}_{\mathcal{A}}L$ را مورد بررسی قرار می‌دهد.

گزاره ۳.۲. فرض کنیم $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ یک جبر باناخ جابجایی و نیم‌ساده باشد. عبارات زیر را در نظر می‌گیریم؛

(i). Γ_1 دارای برد بسته است.
(ii). Γ_2 دارای برد بسته است.
(iii). ${}_{\mathcal{A}}L$ دارای برد بسته است.

در این‌صورت $(ii) \Rightarrow (i)$. همچنین اگر $\mathcal{A}$ دارای همانی تقریبی $\Delta-$ضعیف کراندار باشد آن‌گاه $(iii) \Rightarrow (ii)$.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.141063.1653

اثبات. با استفاده از نامساوی

$$\|\widehat{a}\|_\infty \leq \|\widehat{a}\|_{BSE} \leq \|a\|_{\mathcal{A}} \qquad (a \in \mathcal{A}),$$

(ii) به‌سادگی از (i) به‌دست می‌آید. حال فرض کنیم $\mathcal{A}$ دارای همانی تقریبی $\Delta-$ضعیف کراندار و Γ_2 دارای برد بسته باشد. در این صورت $M > 0$ موجود است به‌طوری‌که برای هر $a \in \mathcal{A}$ داریم

$$M\|a\|_{\mathcal{A}} \leq \|\widehat{a}\|_{BSE}. \tag{1}$$

به‌علاوه، لم‌های ۱.۲ و ۲.۲ نتیجه می‌دهند که $\beta > 0$ موجود است که برای هر $a \in \mathcal{A}$ داریم

$$\|\widehat{a}\|_{BSE} = \|\widehat{{}_{\mathcal{A}}L_a}\|_{BSE} \leq \beta\|{}_{\mathcal{A}}L_a\| = \beta\|{}_{\mathcal{A}}L(a)\| \qquad (a \in \mathcal{A}). \tag{2}$$

با استفاده از نامساوی‌های (۱) و (۲) خواهیم داشت که ${}_{\mathcal{A}}L$ از پایین کراندار و بنابراین دارای برد بسته است. بنابراین (iii) به‌دست آمد. □

تبصره ۴.۲. در این‌جا در خصوص گزاره ۳.۲ به بحث و بررسی می‌پردازیم.

(۱) فرض کنیم G یک گروه آبلی به‌طور موضعی فشرده، هاسدورف و ناگسسته باشد. طبق [۱۲، قضایای ۲.۷.۲ و ۵.۷.۲]، $\Delta(L^1(G))$ همان‌ریخت با دوگان G یعنی $\widehat{G}$ است که در [۱۹] معرفی شده است. بر اساس [۲۳]، $L^1(G)$ یک جبر با نرم BSE است و بنابراین $\Gamma_2 : L^1(G) \to C_0(\widehat{G})$ دارای برد بسته است. همچنین بر اساس [۱۲، لم ۱۰.۷.۲]، $\Gamma_1 : L^1(G) \to C_0(\widehat{G})$ نمی‌تواند دارای برد بسته باشد. این مطلب نشان می‌دهد که (i) به‌طور الزام از (ii) به‌دست نمی‌آید.

(۲) فرض کنیم G یک گروه آبلی به‌طور موضعی فشرده، هاسدورف و ناگسسته باشد. همان‌طور که می‌دانیم $L^1(G)$ دارای همانی تقریبی کراندار است. بنابراین ${}_{L^1(G)}L$ از پایین کراندار است، در صورتی که طبق [۱۲، لم ۱۰.۷.۲]، Γ_1 از پایین کراندار نیست. این مطلب نشان می‌دهد که (iii) به‌طور الزام عبارت (i) را نتیجه نمی‌دهد.

(۳) نشان می‌دهیم (iii) در حالت کلی (ii) را نتیجه نمی‌دهد. برای این‌منظور فرض کنیم $\mathbb{T}$ دایره واحد در صفحه مختلط باشد. در [۷، مثال صفحه ۶۹]، نویسندگان یک جبر تابعی باناخ طبیعی یکدار خاص روی $\mathbb{T}$ ساختند که در ادامه آن را شرح می‌دهیم. ابتدا $C(\mathbb{T})$ را با زیرجبر $C([-1,1])$ یکریخت در نظر می‌گیریم. برای $\alpha \in (1,2)$ ثابت و هر $f \in C(\mathbb{T})$ و نیز $t \in [-1,1]$ فرض کنیم

$$\Omega_t(f) = \|f - {}_tf\|_1 = \int_{-1}^{1} |f(s) - f(s-t)|ds$$

و

$$I(f) = \int_{-1}^{1} \frac{\Omega_t(f)}{|t|^\alpha}dt.$$

قرار می‌دهیم

$$\mathcal{A} = \{f \in C(\mathbb{T}) : \ I(f) < \infty\}.$$

در این‌صورت $\mathcal{A}$ همراه با نرم

$$\|f\| = \|f\|_\infty + I(f)$$

و ضرب نقطه‌ای توابع یک جبر تابعی باناخ طبیعی یکدار روی $\mathbb{T}$ است. طبق [۷، مثال صفحه ۶۹]، $\mathcal{A}$ نه یک جبر BSE و نه یک جبر با نرم BSE است. بنابراین Γ_2 دارای برد بسته نیست. اما چون $\mathcal{A}$ یکدار است، لذا ${}_{\mathcal{A}}L$ از پایین کراندار است.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.141063.1653

(۴) متذکر می‌شویم که $L_{\mathcal{A}}$ در حالت کلی دارای برد بسته نیست. به‌عنوان مثال فرض کنیم φ یک تابع پیوسته حقیقی-مقدار روی $\mathbb{R}$ باشد به‌طوری‌که $\varphi(x) \geq 1$ $(x \in \mathbb{R})$ و

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x) = \lim_{x\to-\infty}\varphi(x) = +\infty.$$

فرض کنیم $\mathcal{A}$ فضای متشکل از همه توابع مختلط-مقدار $f \in C_0(\mathbb{R})$ باشد به‌طوری‌که $f\varphi \in C_b(\mathbb{R})$. در این‌صورت $\mathcal{A}$ همراه با نرم

$$\|f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)\varphi(x)| = \|f\varphi\|_\infty \quad (f \in \mathcal{A}).$$

و ضرب نقطه‌ای توابع یک زیرجبر نرم‌دار جابجایی محض از $C_0(\mathbb{R})$ است. به‌علاوه، $\mathcal{A}$ تحت نرم عملگری در $C_0(\mathbb{R})$ چگال است. بنابراین $\mathcal{A}$ نمی‌تواند تحت نرم عملگری کامل باشد. در نتیجه $L_{\mathcal{A}}$ دارای برد بسته نیست. برای جزئیات بیشتر در این‌خصوص به [۱۸، صفحه ۱۸] مراجعه شود.

۳. نتایج اصلی

در این بخش به بیان نتایج اصلی این مقاله می‌پردازیم. فرض کنیم $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ یک جبر باناخ جابجایی و نیم‌ساده باشد. بر اساس [۵]، جبر باناخ $(\mathcal{B}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$ را یک جبر سگال مجرد نسبت به $\mathcal{A}$ نامیم اگر شرایط زیر برقرار باشد؛

(i). $\mathcal{B}$ یک ایده‌ال چگال اساسی در $\mathcal{A}$ باشد؛ یعنی

$$\mathcal{B} = \{ab: \ a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}\};$$

(ii). عدد $M > 0$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $b \in \mathcal{B}$ داشته باشیم $\|b\|_{\mathcal{A}} \leq M\|b\|_{\mathcal{B}}$؛

(iii). عدد $N > 0$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $a, b \in \mathcal{B}$ داشته باشیم $\|ab\|_{\mathcal{B}} \leq N\|a\|_{\mathcal{A}}\|b\|_{\mathcal{B}}$.

چون در تعریف جبر سگال مجرد، اساسی بودن $\mathcal{B}$ مفروض شده است بنابراین $\mathcal{B}$ نیز نیم‌ساده است. همچنین طبق [۵، قضیه ۱.۲]، $\Delta(\mathcal{A})$ و $\Delta(\mathcal{B})$ همان‌ریخت هستند. به‌علاوه بر اساس [۳، لم ۲.۲]، برای هر $\varphi \in \Delta(\mathcal{A})$ تابع $\widetilde{\varphi} = \varphi|_{\mathcal{B}}$ متعلق به $\Delta(\mathcal{B})$ است و در واقع،

$$\Delta(\mathcal{B}) = \{\widetilde{\varphi}: \ \varphi \in \Delta(\mathcal{A})\}.$$

برای هر $\sigma \in C_b(\Delta(\mathcal{A}))$ تابع $\widetilde{\sigma}$ را روی $\Delta(\mathcal{B})$ به‌صورت

$$\widetilde{\sigma}(\widetilde{\varphi}) = \sigma(\varphi) \qquad (\varphi \in \Delta(\mathcal{A}))$$

تعریف می‌کنیم. حال لم کاربردی زیر را داریم که اثبات آن به‌سادگی حاصل می‌شود.

لم ۱.۳. فرض کنیم $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ یک جبر باناخ جابجایی و نیم‌ساده و $(\mathcal{B}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$ یک جبر سگال مجرد نسبت به $\mathcal{A}$ باشد. در این‌صورت

$$C_b(\Delta(\mathcal{B})) = \{\widetilde{\sigma}: \ \sigma \in C_b(\Delta(\mathcal{A}))\}.$$

به‌علاوه، برای هر $\sigma \in C_b(\Delta(\mathcal{A}))$ داریم $\|\widetilde{\sigma}\|_\infty = \|\sigma\|_\infty$.

به‌طور کلی برای هر $f \in \mathcal{A}^*$، تحدید f به $\mathcal{B}$ را با نماد $\widetilde{f}$ نمایش می‌دهیم. به‌سادگی می‌توان نشان داد که $\widetilde{f} \in \mathcal{B}^*$ و $\|\widetilde{f}\|_{\mathcal{B}^*} \leq M\|f\|_{\mathcal{A}^*}$ که در آن M، همان عدد به‌کار رفته در تعریف جبر سگال مجرد است.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.141063.1653

لم ۲.۳. فرض کنیم $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ یک جبر باناخ جابجایی و نیم‌ساده و $(\mathcal{B}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$ یک جبر سگال مجرد نسبت به $\mathcal{A}$ باشد. در این‌صورت برای هر $\sigma \in C_b(\Delta(\mathcal{A}))$، اگر $\widetilde{\sigma} \in C_{BSE}(\Delta(\mathcal{B}))$ آن‌گاه $\sigma \in C_{BSE}(\Delta(\mathcal{A}))$ و نیز

$$\|\sigma\|_{BSE,\mathcal{A}} \leq M\|\widetilde{\sigma}\|_{BSE,\mathcal{B}}.$$

اثبات. طبق فرض، برای هر تعداد متناهی $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ از اعضای $\Delta(\mathcal{A})$ و به همان تعداد عدد مختلط $c_1, \ldots, c_n$ داریم

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{n} c_i\sigma(\varphi_i)\right| &= \left|\sum_{i=1}^{n} c_i\widetilde{\sigma}(\widetilde{\varphi}_i)\right| \\ &\leq \|\widetilde{\sigma}\|_{BSE,\mathcal{B}} \left\|\sum_{i=1}^{n} c_i\widetilde{\varphi}_i\right\|_{\mathcal{B}^*} \\ &\leq M\|\widetilde{\sigma}\|_{BSE,\mathcal{B}} \left\|\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i\right\|_{\mathcal{A}^*}.\end{aligned}$$

بنابراین

$$\|\sigma\|_{BSE,\mathcal{A}} \leq M\|\widetilde{\sigma}\|_{BSE,\mathcal{B}}$$

و ادعای مورد نظر ثابت شد. □

نتیجه زیر به‌سادگی از لم ۲.۳ حاصل می‌شود.

نتیجه ۳.۳. فرض کنیم $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ یک جبر باناخ جابجایی و نیم‌ساده و $(\mathcal{B}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$ یک جبر سگال مجرد نسبت به $\mathcal{A}$ باشد. در این‌صورت برای هر $b \in \mathcal{B}$ داریم

$$\|\widehat{b}\|_{BSE,\mathcal{A}} \leq M\|\widehat{b}\|_{BSE,\mathcal{B}}.$$

بر اساس [۵، قضیه ۲.۱]، اگر $\mathcal{B}$ دارای یک همانی تقریبی کراندار باشد آن‌گاه $\mathcal{A} = \mathcal{B}$. گزاره بعد شرط ضعیفتری را برای برابری $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ ارائه می‌دهد.

گزاره ۴.۳. فرض کنیم $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ یک جبر باناخ جابجایی و نیم‌ساده و $(\mathcal{B}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$ یک جبر سگال مجرد نسبت به $\mathcal{A}$ باشد. اگر $_{\mathcal{B}}L$ از پایین کراندار باشد آن‌گاه $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

اثبات. طبق فرض، عدد $K > 0$ موجود است به‌طوری‌که برای هر $b \in \mathcal{B}$ داریم

$$K\|b\|_{\mathcal{B}} \leq \|_{\mathcal{B}}L(b)\|_{\mathcal{B}} = \sup_{c\in\mathcal{B}, \|c\|_{\mathcal{B}}\leq 1} \|bc\|_{\mathcal{B}} \leq \|b\|_{\mathcal{A}}.$$

از طرفی $\|b\|_{\mathcal{A}} \leq M\|b\|_{\mathcal{B}}$، بنابراین دو نرم $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ و $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ روی $\mathcal{B}$ با هم معادل هستند و چون $\mathcal{B}$ در $\mathcal{A}$ چگال است لذا $\mathcal{A} = \mathcal{B}$. □

طبق [۷، قضیه صفحه ۴۰]، اگر $\mathcal{A}$ یک جبر BSE باشد آن‌گاه $\mathcal{A}$ یک جبر با نرم BSE است اگر و تنها اگر عملگر $_{\mathcal{A}}L$ از پایین کراندار باشد. حال قضیه بعد را به‌عنوان تعمیمی از [۷، حکم صفحه ۶۷]، برای جبرهای سگال مجرد دلخواه ارائه می‌دهیم.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.141063.1653

قضیه ۵.۳. فرض کنیم $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ یک جبر BSE و $(\mathcal{B}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$ یک جبر سگال مجرد نسبت به $\mathcal{A}$ باشد که دارای یک همانی تقریبی $\Delta-$ضعیف کراندار است. اگر $\mathcal{B}$ یک جبر با نرم BSE باشد آن‌گاه $\mathcal{B} = \mathcal{A}$.

اثبات. طبق [۱۰، قضیه ۱۰.۹]، چون $\mathcal{B}$ دارای یک همانی تقریبی $\Delta-$ضعیف کراندار است لذا $\mathcal{B}$ یک جبر BSE است. بنابراین [۷، قضیه صفحه ۴۰] نتیجه می‌دهد که $_{\mathcal{B}}L$ از پایین کراندار است. حال حکم از گزاره ۴.۳ حاصل می‌شود. □

گزاره بعد بلافاصله از قضیه ۵.۳ حاصل می‌شود.

گزاره ۶.۳. فرض کنیم $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ یک جبر BSE و $(\mathcal{B}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$ یک جبر سگال مجرد نسبت به $\mathcal{A}$ باشد. در این‌صورت عبارات زیر معادل هستند؛

(i). $\mathcal{B}$ یک جبر با نرم BSE و دارای یک همانی تقریبی $\Delta-$ضعیف کراندار است.

(ii). $\mathcal{A}$ یک جبر با نرم BSE است و $\mathcal{B} = \mathcal{A}$.

مثال ۷.۳. فرض کنیم G یک گروه آبلی به‌طور موضعی فشرده و هاسدورف باشد و $1 < p < \infty$.

(i). هر تابع بورل–اندازه‌پذیر $\omega : G \longrightarrow (0, \infty)$ یک تابع وزن روی G نامیده می‌شود. در این‌صورت فضای تمام توابع اندازه‌پذیر و مختلط–مقدار f روی G با شرط $f\omega \in L^p(G)$ را با نماد $L^p(G, \omega)$ نمایش می‌دهیم. در این‌صورت $L^p(G, \omega)$ همراه با نرم $\|f\|_{p,\omega} = \|f\omega\|_p$ یک فضای باناخ انعکاسی است. اگر G گسسته باشد این فضا را با نماد $\ell^p(G, \omega)$ نشان می‌دهیم. در منابع [۱۵]، [۱۶] و [۱۷]، ضمن معرفی کامل این فضا و بررسی ویژگی‌های آن، شرایطی لازم و همچنین کافی برای این‌که $L^p(G, \omega)$ تحت ضرب پیچشی توابع یک جبر باناخ باشد ارائه شده است. در این‌حالت، $L^p(G, \omega)$ در دوگان دوم خود یک ایده‌آل است. حال طبق [۱۳، قضیه ۱.۳] و [۱۶، قضیه ۲.۴] عبارات زیر معادل هستند؛

(آ) $L^p(G, \omega)$ یک جبر BSE است.

(ب) $L^p(G, \omega)$ دارای یک همانی تقریبی کراندار است.

(ج) $L^p(G, \omega)$ دارای یک همانی تقریبی $\Delta-$ضعیف کراندار است.

(د) $L^p(G, \omega)$ یکدار است.

(ه) G گسسته است.

توجه داشته باشیم که اگر یکی از شرایط بالا برقرار باشد آن‌گاه G گسسته بوده و لذا $_{\ell^p(G,\omega)}L$ از پایین کراندار است. بنابراین [۷، قضیه صفحه ۴۰] نتیجه می‌دهد که $\ell^p(G, \omega)$ یک جبر با نرم BSE است. حال قضیه ۵.۳ نتیجه می‌دهد که هر جبر سگال مجرد محض $\mathcal{B}$ نسبت به $\ell^p(G, \omega)$، یا همانی تقریبی $\Delta-$ضعیف کراندار ندارد و یا نمی‌تواند یک جبر با نرم BSE باشد.

(ii). فرض کنیم G غیرفشرده باشد. قرار می‌دهیم

$$S_p(G) = L^1(G) \cap L^p(G).$$

بر اساس [۹]، $S_p(G)$ همراه با نرم

$$\|f\| = \|f\|_1 + \|f\|_p \qquad (f \in S_p(G)),$$

یک جبر سگال مجرد محض نسبت به $L^1(G)$ است. طبق [۲۱] و نیز [۲۳]، $L^1(G)$ هم یک جبر BSE و هم یک جبر با نرم BSE است. به‌علاوه، طبق [۹، قضیه ۱.۲]، $S_p(G)$ دارای یک همانی تقریبی $\Delta-$ضعیف کراندار است. حال قضیه ۵.۳ نتیجه می‌دهد که $S_p(G)$ یک جبر با نرم BSE نیست.

[۶، قضیه صفحه ۳۴] حکمی را در خصوص جبرهای تابعی باناخ طبیعی اثبات می‌کند. این مقاله را با قضیه زیر به پایان می‌بریم که در حقیقت تعمیمی از این قضیه برای جبرهای باناخ دلخواه است.

قضیه ۸.۳. فرض کنیم $(\mathcal{A}, \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ یک جبر باناخ جابجایی و نیم‌ساده با نرم BSE و $(\mathcal{B}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$ یک جبر سگال مجرد نسبت به $\mathcal{A}$ باشد که دارای یک همانی تقریبی $\Delta-$ضعیف کراندار است. در این‌صورت نرم‌های $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$، $\|\cdot\|_{BSE,\mathcal{B}}$ و $\|\cdot\|_{BSE,\mathcal{A}}$ روی $\mathcal{B}$ با هم معادل هستند.

اثبات. چون $\mathcal{A}$ یک جبر با نرم BSE است پس عدد $K > 0$ موجود است به‌طوری‌که برای هر $b \in \mathcal{B}$ داریم:

$$\|b\|_{\mathcal{A}} \leq K\|\widehat{b}\|_{BSE,\mathcal{A}}. \tag{۳}$$

لم‌های ۱.۲ و ۲.۲ و همچنین نتیجه ۳.۳ همراه با نامساوی (۳) نتیجه می‌دهند که $\beta > 0$ موجود است به‌طوری‌که برای هر $b \in \mathcal{B}$ داریم

$$\|b\|_{\mathcal{A}} \leq K\|\widehat{b}\|_{BSE,\mathcal{A}} \leq KM\|\widehat{b}\|_{BSE,\mathcal{B}} = KM\|\widehat{{}_{\mathcal{B}}L_b}\|_{BSE,\mathcal{B}} \leq KM\beta\|{}_{\mathcal{B}}L_b\| \leq KM\beta\|b\|_{\mathcal{A}}.$$

بنابرای سه نرم $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$، $\|\cdot\|_{BSE,\mathcal{B}}$ و $\|\cdot\|_{BSE,\mathcal{A}}$ روی $\mathcal{B}$ با هم معادل هستند. □

مراجع

[1] F. Abtahi, Z. Kamali, M. Toutounchi, The Bochner-Schoenberg-Eberlein property for vector-valued Lipschitz algebras, *J. Math. Anal. Appl.*, **479** (2019) 1172–1181.

[2] F. Abtahi, Z. Kamali and M. Toutounchi, The *BSE* concepts for vector-valued Lipschitz algebras, *Commun. Pure Appl. Anal.*, **20** no. 3 (2021) 1171–1186.

[3] M. Alaghmandan, R. Nasr Isfahani and M. Nemati, Character amenability and contractibility of abstract Segal algebras, *Bull. Aust. Math. Soc.*, **82** (2010) 274–281.

[4] S. Bochner, A theorem on Fourier- Stieltjes integrals, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **40** (1934) 271–276.

[5] J. T. Burnham, Closed ideals in subalgebras of Banach algebras. I, *P*roc. Amer. Math. Soc., **32** no. 2 (1972) 551–555.

[6] H. G. Dales and A. Ülger, *Approximate identities and BSE norms for Banach functin algebras*, Fields Institute, Toronto, 2014.

[7] H. G. Dales and A. Ülger, *Banach function algebras and BSE norms*, Graduate course during 23^{rd} Banach algebra conference, Oulu, Finland, 2017.

[8] W. F. Eberlein, Characterizations of Fourier-Stieltjes transforms, *Duke Math. J.*, **22** (1955) 465–468.

[9] J. Inoue, Jyunji and Sin-Ei. Takahasi, Constructions of bounded weak approximate identities for Segal algebras on LCA groups, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **66** (2000) 257–271.

[10] J. Inoue, Jyunji and Sin-Ei. Takahasi, Segal algebras in commutative Banach algebras, *Rocky Mt. J. Math.*, **44** no. 2 (2014) 539–589.

[11] C. A. Jones and C. D. Lahr, Weak and norm approximate identities are different, *Pacific J. Math.*, **72** (1977) 99–104.

[12] E. Kaniuth, *A course in commutative Banach algebras*, Springer, New York, 2009.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.141063.1653

[13] E. Kaniuth and A. Ülger, The Bochner-Schoenberg-Eberlein property for commutative Banach algebras, especially Fourier and Fourier-Stieltjes algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **362** (2010) 4331–4356.

[14] E. Kaniuth, The Bochner-Schoenberg-Eberlein Property and Spectral Synthesis for Certain Banach Algebra Products, *Canad. J. Math.*, **67** (2015) 827–847.

[15] Yu. N. Kuznetsova, Weighted L^p-algebras on groups, *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, **40** no. 3 (2006) 82–85. *Translation in Funct. Anal. Appl.*, **40** no. 3 (2006) 234–236.

[16] Yu. N. Kuznetsova, Invariant weighted algebras $L^p(G,\omega)$, *Mat. Zametki*, **84** no. 4 (2008) 567–576

[17] Yu. N. Kuznetsova, Example of a weighted algebra $L^p(G,\omega)$ on an uncountable discrete group, *J. Math. Anal. Appl.*, **353** (2009) 660–665.

[18] R. Larsen, *An introduction to the theory of multipliers*, Springer-Verlag, New York, 1971.

[19] W. Rudin, *Fourier analysis on groups*, Interscience, New York, 1962.

[20] I. J. Schoenberg, A remark on the preceding note by Bochner, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **40** (1934) 277–278.

[21] S. E. Takahasi and O. Hatori, Commutative Banach algebras which satisfy a Bochner-Schoenberg-Eberlein-type theorem, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **110** (1990) 149–158.

[22] S. E. Takahasi and O. Hatori, Commutative Banach algebras and BSE-inequalities, *Math. Japonica*, **37** (1992) 47–52.

[23] S. E. Takahasi, Y. Takahashi, O. Hatori and K. Tanahashi, Commutative Banach algebras and BSE-norm, *Math. Japonica*, **46** no. 2 (1997) 273–277.

فاطمه ابطحی

گروه ریاضی محض، دانشکده ریاضی و آمار، دانشگاه اصفهان، اصفهان، ایران

f.abtahi@sci.ui.ac.ir

فاطمه ابطحی دانشیار گروه ریاضی محض دانشگاه اصفهان است.

مریم توتونچی

گروه ریاضی محض، دانشکده ریاضی و آمار، دانشگاه اصفهان، اصفهان، ایران

m.toutounchi@sci.ui.ac.ir

مریم توتونچی فارغ التحصیل دوره دکتری در رشته آنالیز هارمونیک از گروه ریاضی محض دانشگاه اصفهان است.