ریاضی و جامعه
شاپا (چاپی): ۲۳۴۵-۶۴۹۳، شاپا(الکترونیکی): ۲۳۴۵-۶۵۰۷
جلد ۹، شماره ۴ (۱۴۰۳)، صص. ۴۵-۷۰

http://www.ui.ac.ir
http://math-sci.ui.ac.ir

طبقه‌بندی کامل ساختارهای همگن روی توسیع‌های مستقیم لورنتسی گروه هایزنبرگ

امیر حسام زعیم*، مهدی جعفری و مسلم باغگلی

چکیده. گروه لی هایزنبرگ یکی از مشهورترین و مهمترین گروه‌های لی در بین خانواده گروه‌های لی سه‌بعدی است. توسیع مستقیم این گروه به بُعد چهار در مطالعه جبرهای لی پوچ توان از بُعد چهار مورد توجه قرار گرفت و در نتیجه طبقه‌بندی این توسیع‌ها تا حد هم‌سنجی در برخی پژوهش‌های پیشین ارائه گردید. ساختارهای همگن رویکردی تانسوری برای بررسی خاصیت همگن بودن فضا در اختیار ما قرار می‌دهند. شاید مهمترین ویژگی ساختارهای همگن را بتوان در این گزاره خلاصه کرد که در هندسه ریمانی وجود ساختارهای همگن معادل با موضعاً همگن تحویلی بودن فضا است.

ما در این مقاله بر اساس طبقه‌بندی موجود از توسیع مستقیم لورنتسی گروه هایزنبرگ با بُعد چهار، که تا حد هم‌سنجی در قالب پنج خانواده دسته‌بندی شده‌اند، به مطالعه خانواده ساختارهای همگن موجود روی این فضا می‌پردازیم و آن‌ها را به‌طور کامل طبقه‌بندی می‌نماییم. در حالت‌های ناتخت، خانواده ساختارهای همگن را جداگانه در هر کلاس تعیین می‌نماییم.

۱. مقدمه

فضاهای همگن نقش مهمی در مطالعات فیزیک نظری و هندسه دیفرانسیل بازی می‌کنند. منظور از فضای همگن خمینه[۱] (شبه‌) ریمانی (M, g) است به‌طوری که به ازای هر دو نقطه $p, q \in M$، هم‌سنجی[۲] ϕ روی M وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\phi(p) = q$. به‌عبارت دیگر گروه $I(M)$ متشکل از هم‌سنجی‌های M به‌صورت متعدی روی آن عمل کند. ساده‌ترین مثال‌ها برای فضاهای همگن را می‌توان گروه‌های لی و پس از آن فضاهای متقارن در نظر گرفت، اما فضاهای همگن خانواده بسیار بزرگتری را شامل می‌شوند و مثال‌های جالبی را در مطالعات هندسی در اختیار ما قرار می‌دهند. هر خمینه همگن M دارای نمایشی به شکل خمینه خارج قسمتی G/H از گروه لی G و زیرگروه بسته H است. البته این نمایش منحصربه‌فرد نیست اما می‌تواند به مطالعات ما روی فضاهای همگن ماهیت جبری ببخشد و به‌وضوح سبب سادگی محاسبات شود. به‌عنوان نمونه بر اساس رویکردی جبری، هندسه همدیسِ فضاهای متقارن تعمیم‌یافته از بُعد چهار در مرجع [۲] مورد مطالعه قرار گرفت. همچنین در مرجع [۱] رویکردی جبری برای مطالعه ساختارهای واکر و ریچی سالیتون‌ها روی گروه‌های لی شبه‌ریمانی همدیس تخت از بعد چهار استفاده شد.

عبارات و کلمات کلیدی: توسیع مستقیم، گروه هایزنبرگ، ساختار همگن.
نوع مقاله: پژوهشی
دبیرتخصصی رابط: محمدرضا پوریای‌ولی
* نویسند مسئول
تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۱۱/۱۶ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۳/۲۱ تاریخ انتشار آنلاین: ۱۴۰۳/۱۱/۰۶
ارجاع به مقاله: ا. حسام زعیم، م. جعفری و م. باغگلی، طبقه‌بندی کامل ساختارهای همگن روی توسیع‌های مستقیم لورنتسی گروه هایزنبرگ، نشریه ریاضی و جامعه، ۹ شماره ۴ (۱۴۰۳) ۴۵–۷۰.
http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140637.1641 .

[1]manifold [2]isometry

با استفاده از ساختارهای همگن می‌توان رویکردی تانسوری برای مطالعه فضاهای همگن تحویلی در پیش گرفت. ساختارهای همگن اولین‌بار توسط آمبروز[3] و سینگر [4] [۳] در حالت ریمانی تعریف شدند و توسط تریسری[5] و وانک [6] [۱۹] مورد مطالعه دقیق قرار گرفتند و سپس توسط گادا [7] و اوبینا [8] [۱۰] به‌حالت شبه‌ـریمانی توسیع یافتند. فضای همگن G/H را تحویلی[9] نامیم هرگاه جبرلی $\mathfrak{g}$ از G را بتوان به‌صورت $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$ تجزیه کرد که در آن $\mathfrak{h}$ جبر لی H و $\mathfrak{m}$ یک زیرفضای $Ad(H)$ ناوردا است به‌طوری‌که $Ad_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{m}$. شرط $Ad_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{m}$ نتیجه می‌دهد که $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$ و عکس این مطلب نیز زمانی برقرار است که H همبند باشد. طبقه‌بندی ساختارهای همگن همواره مورد توجه محققان حوزه هندسه دیفرانسیل بوده است، به‌عنوان مثال مراجع [۹، ۱۳، ۱۴] را ببینید. توضیحات بیشتر در خصوص ساختارهای همگن را به‌بخش بعد موکول می‌کنیم.

مفهوم گروه سه‌بعدی هایزنبرگ [10] H_3 یک فرمول جبری انتزاعی از یک پدیده هندسی در زندگی روزمره ماست. اگر صفحه‌ای را در فضای سه‌بعدی خود انتخاب کنیم، گروه هایزنبرگ را ایجاد کرده‌ایم. به‌عنوان مثال، صفحه‌ای که اکنون می‌خوانید یک چنین صفحه‌ای است و یک گروه هایزنبرگ را تولید می‌کند. اگر عکس می‌گیرید در میانه نظریه گروه هایزنبرگ هستید. شما اطلاعات را در امتداد یک خط انتقال داده و آن‌را در یک صفحه رمزگذاری نموده و از این‌رو یک گروه هایزنبرگ را ایجاد کرده‌اید. گروه هایزنبرگ در ارائه مدل ریاضی برای مطالعه دستگاه های مکانیک کوانتوم یک‌بعدی نیز ظاهر می‌شود. برای آشنایی با گروه هایزنبرگ و کاربردهای آن در فیزیک به مرجع [۴] مراجعه کنید.

از لحاظ جبری گروه هایزنبرگ از ماتریس‌های با درایه‌های حقیقی با عمل ضرب معمولی ماتریس‌ها به‌صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

که با گروه لی $\mathbb{R}^3$ به همراه عمل ضرب زیر (به مفهوم گروه‌های لی) همواریخت است

$$(x, y, z)(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = (x + \tilde{x}, y + \tilde{y}, z + \tilde{z} - x\tilde{y}).$$

گروه هایزنبرگ در طبقه‌بندی گروه‌های لی‌ریمانی یا شبه‌ریمانی نیز وجود دارد و عضوی مهم با ویژگی‌های منحصربه‌فرد از خانواده گروه‌های لی سه‌بعدی است [۱۶، ۱۸].

در علم فیزیک، فضاـزمان یک مدل ریاضی است که سه‌بعد فضا و یک‌بعد زمان را در یک قاب چهاربعدی واحد ترکیب می‌کند. چنین مدل ریاضی را در هندسه دیفرانسیل به‌عنوان یک خمینه لورنتسی می‌شناسیم. نمودارهای فضاـزمان در تجسم و درک اثرات نسبیتی مانند نحوه درک ناظران مختلف از مکان و زمان وقوع رویدادها مفید هستند. تا اوایل قرن بیستم، فرض بر این بود که هندسه سه‌بعدی جهان (توصیف آن از نظر مکان‌ها، شکل‌ها، فواصل و جهت‌ها) از زمان (اندازه‌گیری زمان وقوع رویدادها در جهان) متمایز است. با این‌حال، مفهوم فضا و زمان با تبدیل لورنتس و نظریه نسبیت خاص معانی جدیدی پیدا کردند. تفسیر هندسی و به‌عبارتی مدل ریاضی این آمیختگی فضا و زمان در قالب یک قاب چهاربعدی در سال ۱۹۰۸ توسط هرمان مینکوفسکی[11] ارائه شد. این چارچوب که فضای مینکوفسکی نامیده می‌شود مبنای نظریه نسبیت خاص قرار گرفت. این تفسیر برای نظریه نسبیت عام، که در آن فضاـزمان توسط جرم و انرژی خمیده می‌شود، حیاتی بود. برای آشنایی و مطالعه بیشتر درباره خمینه‌های لورنتسی (و حالت کلی خمینه‌های شبه‌ریمانی) به مرجع [۱۷] مراجعه کنید.

---

[3]Ambrose [4]Singer [5]Tericerri [6]Vanhecke [7]Gadea [8]Oubiña [9]reductive [10]Heisenberg [11]Hermann Minkowski

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140637.1641

در این مقاله توسیع مستقیم گروه هایزنبرگ یعنی $H_3 \times \mathbb{R}$ با متریک لورنتسی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم و طبقه‌بندی کامل ساختارهای همگن روی آن‌را تعیین می‌کنیم. برای رسیدن به این هدف ابتدا در فصل دوم تعاریف مقدماتی در رابطه با ساختارهای همگن و توسیع گروه هایزنبرگ را بیان می‌کنیم. در فصل سوم خانواده متریک‌های لورنتسی موجود را به تفکیک مورد بررسی قرار داده و تمام ساختارهای همگن را تعیین نموده و طبقه‌بندی می‌کنیم. نتایج حاصل در قالب قضایای مختلف برای هر خانواده از متریک‌های لورنتسی به تفکیک بیان می‌شوند.

۲. پیش‌نیازها

در این بخش به بیان مطالب و پیش‌نیازهای لازم جهت مطالعه ساختارهای همگن روی خمینه‌های (شبه)ریمانی می‌پردازیم. همچنین به معرفی توسیع مستقیم لورنتسی گروه هایزنبرگ پرداخته و به قضیه طبقه‌بندی این گروه‌ها اشاره می‌کنیم.

۱.۲. ساختارهای همگن. فرض کنید (M, g) یک خمینه (شبه)ریمانی همبند و ∇ و R به‌ترتیب نشان دهنده هموستار لوی چویتا و تانسور انحنای (M, g) باشند. یک ساختار همگن (شبه‌ریمانی) روی (M, g) یک میدان تانسوری T از نوع $(1,2)$ روی M است به گونه‌ای که هموستار $\widetilde{\nabla} = \nabla - T$ در روابط زیر صدق کند:

$$\widetilde{\nabla} g = 0, \quad \widetilde{\nabla} R = 0, \quad \widetilde{\nabla} T = 0. \tag{1}$$

قضیه زیر به روشنی ارتباط بین وجود ساختارهای همگن روی یک خمینه و ویژگی همگن بودن آن‌را بیان می‌کند.

قضیه ۱.۲. [10] فرض کنیم (M, g) یک خمینه (شبه)ریمانی همبند، همبند ساده و کامل باشد. در این‌صورت، (M, g) یک ساختار همگن شبه‌ریمانی را می‌پذیرد اگر و فقط اگر یک خمینه شبه‌ریمانی همگن تحویلی باشد.

در واقع، یک چنین ساختار همگن T تجزیه‌ای تحویلی از یک توصیف همدسته‌ای مناسب از (M, g) را تعریف می‌کند و برعکس. توجه به این نکته حائز اهمیت است که ساختارهای همگن مختلف روی (M, g) ممکن است به نمایش‌های متفاوتی از M به‌عنوان یک فضای همدسته‌ای منجر شود. در مرجع [7] بحث ساختارهای همگن به‌طور کامل پرداخته شده است و به نتایج تحقیقات نوین در این زمینه اشاره شده است.

اگر T یک ساختار همگن روی (M, g) باشد، ما از T برای نشان دادن میدان تانسوری مرتبه $(1, 2)$ و همچنین میدان تانسوری معادل متریکی آن از مرتبه $(0, 3)$ که با $T(X, Y, Z) = g(T_X Y, Z)$ تعریف می‌شود، استفاده خواهیم کرد.

یک نقطه ثابت $x \in M$ و یک پایه متعامد یکه برای فضای مماس $T_x M$ در نظر بگیرید. فضای برداری $V = \mathbb{R}^m$ تجهیز شده با فرم دوخطی متقارن $\langle\ ,\ \rangle$ از علامت (p, q) را به‌عنوان مدلی برای فضای $(T_x M, g_x)$ در نظر می‌گیریم. فضای تانسوری $\mathcal{S}(V) \subset \otimes^3 V^*$ را که اعضای آن تقارن‌های معمول ساختارهای همگن را دارند (تقارن‌هایی که از شرط $\widetilde{\nabla} g = 0$ ناشی می‌شوند) در نظر بگیرید، در واقع

$$\mathcal{S}(V) = \{T \in \otimes^3 V | T(X, Y, Z) + T(X, Z, Y) = 0\}.$$

در شرایطی که $\dim(M) \geq 3$، فضای $\mathcal{S}(V)$ به $O(p, q)$-زیرمدول‌های تحویل‌ناپذیر و دوبه‌دو متعامد به‌صورت زیر تجزیه می‌شود:

$$\mathcal{S}(V) = \mathcal{S}_1(V) \oplus \mathcal{S}_2(V) \oplus \mathcal{S}_3(V),$$

که در آن

$$\mathcal{S}_1 = \Big\{T \in \mathcal{S} \,/\, T(X, Y, Z) = g(X, Y)\varphi(Z) - g(X, Z)\varphi(Y),\ \varphi \in \Omega^1(M)\Big\},$$

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140637.1641

$$\mathcal{S}_2 = \Big\{T \in \mathcal{S} \,/\, \sigma_{X,Y,Z} T(X,Y,Z) = 0,\; c_{12}(T) := \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i T(e_i, e_i,) = 0\Big\},$$
$$\mathcal{S}_3 = \Big\{T \in \mathcal{S} \,/\, T(X,Y,Z) + T(Y,X,Z) = 0\Big\},$$

همچنین $\sigma_{X,Y,Z}$ بیانگر مجموع دوری نسبت به X, Y, Z می‌باشد. ساختارهای همگنی که به یکی از زیرمدول‌های فوق یا به مجموع مستقیم دو تا از آنها تعلق دارند دارای معانی و خواص ویژه‌ای هستند، بخصوص

- $T \in \mathcal{S}_3$ اگر و فقط اگر

$$g([X,Y]_{\mathfrak{m}}, Z) + g([X,Z]_{\mathfrak{m}}, Y) = 0, \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{m}. \tag{2}$$

خمینه همگن $(M = G/H, g)$ با این خاصیت را طبیعی تحویلی [12] نامیم. در این‌حالت ژئودزیک‌های متناظر با هموستار لوی چویتای (M, g) و هموستار متعارف تجزیه تحویلی $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ با هم یکی هستند.

- $T \in \mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2$ اگر و فقط اگر $\sigma_{X,Y,Z} T(X,Y,Z) = 0$. در این‌حالت (M, g) را همگن دوری نامیم. در حالت ریمانی، گروه‌های لی‌دوری و فضاهای همگن دوری به‌ترتیب در مراجع [۱۱] و [۱۲]مطالعه شدند. حال آنکه گروه‌های لی دوری از بُعد چهار با علامت لورنتسی در [۸] و با علامت خنثی در [۲۰] مورد بررسی قرار گرفتند.

تصویر ساختار همگن T روی زیرفضاهای $\mathcal{S}_1$، $\mathcal{S}_2$ و $\mathcal{S}_3$ به‌ترتیب توسط روابط زیر مشخص می‌شوند:

$$p_1(T)(x,y,z) = \frac{1}{2}\langle x, y\rangle c_{12}(T)(z) - \frac{1}{2}\langle x, z\rangle c_{12}(T)(y),$$
$$p_2(T)(x,y,z) = (T - p_1(T) - p_3(T))(x,y,z),$$
$$p_3(T)(x,y,z) = \frac{1}{3}\sigma_{x,y,z} T(x,y,z).$$

۲.۲. توسیع مستقیم گروه هایزنبرگ. همان‌طور که در مقدمه به آن اشاره شده است هدف اصلی این تحقیق طبقه‌بندی کامل ساختارهای همگن روی توسیع مستقیم لورنتسی گروه هایزنبرگ می‌باشد. این خانواده از گروه‌های لی‌لورنتسی در طبقه‌بندی جبرهای پوچ‌توان از بُعد چهار ظاهر و مورد توجه قرار گرفتند. مانین[13] در مرجع [۱۵] نشان داد که در حد یکریختی تنها دو جبر لی ناآبلی پوچ‌توان از بُعد چهار وجود دارد. یکی $\mathfrak{h}_3 \oplus \mathfrak{r}$ و دیگری $\mathfrak{g}_4$ است که متناظر با گروه‌های لی $H_3 \times \mathbb{R}$ و G_4 هستند. پس از آن در مرجع [۵] متریک‌های لورنتسی ناوردای‌چپ تا حد هم‌سنجی‌های روی این گروه‌های لی طبقه‌بندی شدند. قضیه اساسی زیر به این طبقه‌بندی اشاره دارد.

[12] naturally reductive [13] Magnin

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140637.1641

قضیه ۲.۲. [۵] هر متریک لورنتسی ناوردای چپ روی توسیع مستقیم گروه هایزنبرگ $H_۳\times\mathbb{R}$ تا حد خودریختی‌های $H_۳\times\mathbb{R}$ نسبت به پایه $\{e_۱,\dots,e_۴\}$ با یکی از متریک های زیر هم‌سنج است

$$
g_\mu=\begin{pmatrix} ۱&۰&۰&۰\\ ۰&-۱&۰&۰\\ ۰&۰&\mu&۰\\ ۰&۰&۰&۱\end{pmatrix},\ ۰<\mu\in\mathbb{R},\quad g_\lambda=\begin{pmatrix} ۱&۰&۰&۰\\ ۰&۱&۰&۰\\ ۰&۰&\varepsilon\lambda&۰\\ ۰&۰&۰&-\varepsilon\end{pmatrix},\ ۰<\lambda\in\mathbb{R},\varepsilon^۲=۱,
$$
$$
g_۱=\begin{pmatrix} ۱&۰&۰&۰\\ ۰&۱&۰&۰\\ ۰&۰&۰&۱\\ ۰&۰&۱&۰\end{pmatrix},\qquad g_۲=\begin{pmatrix} ۱&۰&۰&۰\\ ۰&۰&۱&۰\\ ۰&۱&۰&۰\\ ۰&۰&۰&۱\end{pmatrix},\tag{۳}
$$
$$
g_۳=\begin{pmatrix} ۱&۰&۰&۰\\ ۰&۰&۰&۱\\ ۰&۰&۱&۰\\ ۰&۱&۰&۰\end{pmatrix}.
$$

این قضیه زمینه مناسب برای مطالعه ساختارهای همگن را فراهم می‌نماید. در اینجا توجه به این نکته حائز اهمیت است که جبر لی متناظر با توسیع مستقیم گروه هایزنبرگ یعنی $\mathfrak{h}_۳\times\mathfrak{r}$ در پایه فوق به‌صورت $[e_۱,e_۲]=e_۳$ است. لازم است که معادلات مربوط به ساختارهای همگن بررسی و جواب‌های موجود تعیین شوند. در بخش بعد به این موضوع می‌پردازیم.

۳. مطالعه ساختارهای همگن

در این بخش معادلات مربوط به ساختارهای همگن را روی کلاس‌های مختلف توسیع‌های مستقیم گروه هایزنبرگ $H_۳\times\mathbb{R}$ از علامت لورنتسی بررسی و به‌طور کامل ساختارهای همگن موجود در هر خانواده را طبقه‌بندی می‌کنیم.

۱.۳. کلاس $(H_۳\times\mathbb{R},g_\mu)$. توسیع مستقیم $H_۳\times\mathbb{R}$ تجهیز شده به متریک لورنتسی g_μ که در رابطه (۳) معرفی شده است را در نظر بگیرید. اگر قرار دهیم $\Lambda_i:=\nabla_{e_i}$، با استفاده از رابطه مشهور کشل[۱۴] مؤلفه‌های هموستار لوی-چویتا به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$
\Lambda_۱=\begin{pmatrix} ۰&۰&۰&۰\\ ۰&۰&\frac{\mu}{۲}&۰\\ ۰&\frac{۱}{۲}&۰&۰\\ ۰&۰&۰&۰\end{pmatrix},\quad \Lambda_۲=\begin{pmatrix} ۰&۰&\frac{\mu}{۲}&۰\\ ۰&۰&۰&۰\\ -\frac{۱}{۲}&۰&۰&۰\\ ۰&۰&۰&۰\end{pmatrix},\tag{۴}
$$
$$
\Lambda_۳=\begin{pmatrix} ۰&\frac{\mu}{۲}&۰&۰\\ \frac{\mu}{۲}&۰&۰&۰\\ ۰&۰&۰&۰\\ ۰&۰&۰&۰\end{pmatrix},\quad \Lambda_۴=۰.
$$

[14] Koszul

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140637.1641

حال با استفاده از رابطه $R_{ij} := R(e_i, e_j) = [\nabla_{e_i}, \nabla_{e_j}] - \nabla_{[e_i,e_j]}$، مؤلفه‌های ناصفر تانسور انحنا به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$R_{12} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{4}\mu & 0 & 0 \\ -\frac{3}{4}\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{4}\mu^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4}\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$R_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4}\mu^2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4}\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

با بررسی معادله $\nabla R = 0$ نتیجه می‌شود $\mu = 0$ که ممکن نیست. بنابراین اعضای این خانواده هرگز متقارن نیستند. حال فرض کنید T یک ساختار همگن با تقارن‌های معمول آنها روی $(H_3 \times \mathbb{R}, g_\mu)$ باشد. مؤلفه‌های $\widetilde{\nabla} = \nabla - T$ به‌صورت زیر قابل محاسبه هستند:

$$\begin{array}{lll}
\widetilde{\nabla}_{112} = -T_{112}, & \widetilde{\nabla}_{113} = -T_{113} & \widetilde{\nabla}_{114} = -T_{114}, \\
\widetilde{\nabla}_{123} = -T_{123} + \frac{\mu}{2}, & \widetilde{\nabla}_{124} = -T_{124}, & \widetilde{\nabla}_{134} = -T_{134}, \\
\widetilde{\nabla}_{212} = -T_{212}, & \widetilde{\nabla}_{213} = -T_{213} - \frac{\mu}{2} & \widetilde{\nabla}_{214} = -T_{214}, \\
\widetilde{\nabla}_{223} = -T_{223}, & \widetilde{\nabla}_{224} = -T_{224}, & \widetilde{\nabla}_{234} = -T_{234}, \\
\widetilde{\nabla}_{312} = -T_{312} - \frac{\mu}{2}, & \widetilde{\nabla}_{313} = -T_{313} & \widetilde{\nabla}_{314} = -T_{314}, \\
\widetilde{\nabla}_{323} = -T_{323}, & \widetilde{\nabla}_{324} = -T_{324}, & \widetilde{\nabla}_{334} = -T_{334}, \\
\widetilde{\nabla}_{412} = -T_{412}, & \widetilde{\nabla}_{413} = -T_{413} & \widetilde{\nabla}_{414} = -T_{414}, \\
\widetilde{\nabla}_{423} = -T_{423}, & \widetilde{\nabla}_{424} = -T_{424}, & \widetilde{\nabla}_{434} = -T_{434}.
\end{array} \tag{6}$$

با توجه به تقارن‌های T به‌وضوح $\widetilde{\nabla} g = 0$. اگر قرار دهیم $\mathfrak{R}_{ijkl;r} = (\widetilde{\nabla}_{e_r} R)_{ijkl}$، با انجام محاسباتی استاندارد مؤلفه‌های ناصفر مشتق هموَرد تانسور انحنا نسبت به هموستار $\widetilde{\nabla}$ به‌صورت زیر هستند:

$$\begin{array}{ll}
\mathfrak{R}_{1213;1} = -\frac{1}{2}\mu(2T_{123} - \mu), & \mathfrak{R}_{1213;r} = -T_{r23}\mu, r = 2, 3, 4, \\
\mathfrak{R}_{1214;r} = -\frac{3}{4}\mu T_{r24}, r = 1, \dots, 4, & \mathfrak{R}_{1223;2} = -\frac{1}{2}\mu(2T_{213} + \mu), \\
\mathfrak{R}_{1223;r} = -T_{r13}\mu, r = 1, 3, 4, & \mathfrak{R}_{1224;r} = -\frac{3}{4}\mu T_{r14}, r = 1, \dots, 4, \\
\mathfrak{R}_{1314;r} = \frac{1}{4}\mu T_{r34}, r = 1, \dots, 4, & \mathfrak{R}_{1334;r} = -\frac{1}{4}\mu^2 T_{r14}, r = 1, \dots, 4, \\
\mathfrak{R}_{2324;r} = -\frac{1}{4}\mu T_{r34}, r = 1, \dots, 4 & \mathfrak{R}_{2334;r} = -\frac{1}{4}\mu^2 T_{r24}, r = 1, \dots, 4.
\end{array}$$

بنابراین با توجه به شرط $\widetilde{\nabla} R = 0$ و $\mu > 0$ نتیجه می‌شود

$$\begin{array}{l}
T_{123} = \frac{\mu}{2}, T_{213} = -\frac{\mu}{2}, T_{223} = T_{323} = T_{423} = T_{113} = T_{313} = T_{413} = 0, \\
T_{r14} = T_{r24} = T_{r34} = 0, r = 1, \dots, 4.
\end{array}$$

حال به محاسبه $\widetilde{\nabla} T$ می‌پرازیم. اگر قرار دهیم $\mathfrak{T}_{ijk;l} = (\widetilde{\nabla}_{e_l} T)_{ijk}$ داریم

$$\mathfrak{T}_{212;1} = -T^2_{112}, \mathfrak{T}_{112;2} = -T^2_{212},$$

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140637.1641

که بلافاصله با توجه به رابطه $\widetilde{\nabla}T=0$ نتیجه می‌دهد $T_{112}=T_{212}=0$. در این‌صورت خودبه‌خود $\widetilde{\nabla}T$ برابر صفر می‌شود و لذا چنانچه قرار دهیم $T_{312}=\kappa$ و $T_{412}=\eta$، ساختار همگن T به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$T=\mu(e^1\otimes e^2\wedge e^3-e^2\otimes e^1\wedge e^3)+2\kappa(e^3\otimes e^1\wedge e^2)+2\eta(e^4\otimes e^1\wedge e^2),\kappa,\eta\in\mathbb{R}.$$

تصویر این ساختار همگن روی زیرفضاهای $\mathcal{S}_1$، $\mathcal{S}_2$ و $\mathcal{S}_3$ به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
p1(T)&=0,\\
p2(T)&=\tfrac{1}{3}(\mu-2\kappa)(e^1\otimes e^2\wedge e^3-e^2\otimes e^1\wedge e^3)-\tfrac{2}{3}\eta(e^1\otimes e^2\wedge e^4-e^2\otimes e^1\wedge e^4)\\
&\quad-\tfrac{2}{3}(\mu-2\kappa)e^3\otimes e^1\wedge e^2+\tfrac{4}{3}\eta e^4\otimes e^1\wedge e^2,\\
p3(T)&=\tfrac{2}{3}(\mu+\kappa)(e^1\otimes e^2\wedge e^3-e^2\otimes e^1\wedge e^3+e^3\otimes e^1\wedge e^2)\\
&\quad+\tfrac{2}{3}\eta(e^1\otimes e^2\wedge e^4-e^2\otimes e^1\wedge e^4+e^4\otimes e^1\wedge e^2).
\end{aligned}$$

با توجه به مباحث قبل قضیه زیر را بیان می‌کنیم.

قضیه ۱.۳. فرض کنیم $(H_3\times\mathbb{R},g_\mu)$ یک توسیع مستقیم گروه هایزنبرگ با متریک g_μ معرفی شده در رابطه (۳) باشد. در این‌صورت تمام ساختارهای همگن $(H_3\times\mathbb{R},g_\mu)$ به‌صورت زیر هستند:

$$T=\mu(e^1\otimes e^2\wedge e^3-e^2\otimes e^1\wedge e^3)+2\kappa(e^3\otimes e^1\wedge e^2)+2\eta(e^4\otimes e^1\wedge e^2),\kappa,\eta\in\mathbb{R},$$

که در آن κ,η ضرائب حقیقی دلخواه هستند. همچنین این ساختار همگن متعلق به کلاس $\mathcal{S}_3$ است هرگاه $\eta=\mu-2\kappa=0$ و متعلق به کلاس $\mathcal{S}_2$ است هرگاه $\eta=\mu+\kappa=0$ و در غیر این‌صورت از نوع $\mathcal{S}_2\oplus\mathcal{S}_3$ می‌باشد. همچنین هیچ ساختار همگن متعارفی (یعنی $\widetilde{\nabla}=0$) وجود ندارد.

۲.۳. کلاس $(H_3\times\mathbb{R},g_\lambda)$. فرض کنیم متریک مورد نظر g_λ که در رابطه (۳) معرفی شد، روی توسیع مستقیم $H_3\times\mathbb{R}$ باشد. مؤلفه‌های هموستار لوی چویتا به‌صورت زیر قابل محاسبه هستند:

$$\Lambda_1=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&-\frac{1}{2}\varepsilon\lambda&0\\0&\frac{1}{2}&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \Lambda_2=\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{2}\varepsilon\lambda&0\\0&0&0&0\\-\frac{1}{2}&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$
$$\Lambda_3=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}\varepsilon\lambda&0&0\\-\frac{1}{2}\varepsilon\lambda&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \Lambda_4=0. \tag{7}$$

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140637.1641

سپس مؤلفه‌های ناصفر تانسور انحنای ریمان به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند

$$R_{12}=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{4}\varepsilon\lambda & 0 & 0\\ \frac{3}{4}\varepsilon\lambda & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad R_{13}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4}\lambda^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -\frac{1}{4}\varepsilon\lambda & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$
$$R_{23}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{4}\lambda^2 & 0\\ 0 & -\frac{1}{4}\varepsilon\lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{8}$$

با استفاده از روابط (۷) و (۸) و محاسباتی سرراست می‌توان نشان داد که شرط موضعاً متقارن بودن معادل با $\lambda=0$ است که ممکن نیست. بنابراین این خانواده از توسیع‌های مستقیم گروه هایزنبرگ هیچ‌گاه موضعاً متقارن نیستند. حال مؤلفه‌های هموستار $\widetilde{\nabla}$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند

$$\begin{array}{lll}
\widetilde{\nabla}_{112}=-T_{112}, & \widetilde{\nabla}_{113}=-T_{113} & \widetilde{\nabla}_{114}=-T_{114},\\
\widetilde{\nabla}_{123}=-T_{123}+\frac{\varepsilon\lambda}{2}, & \widetilde{\nabla}_{124}=-T_{124}, & \widetilde{\nabla}_{134}=-T_{134},\\
\widetilde{\nabla}_{212}=-T_{212}, & \widetilde{\nabla}_{213}=-T_{213}-\frac{\varepsilon\lambda}{2} & \widetilde{\nabla}_{214}=-T_{214},\\
\widetilde{\nabla}_{223}=-T_{223}, & \widetilde{\nabla}_{224}=-T_{224}, & \widetilde{\nabla}_{234}=-T_{234},\\
\widetilde{\nabla}_{312}=-T_{312}-\frac{\varepsilon\lambda}{2}, & \widetilde{\nabla}_{313}=-T_{313} & \widetilde{\nabla}_{314}=-T_{314},\\
\widetilde{\nabla}_{323}=-T_{323}, & \widetilde{\nabla}_{324}=-T_{324}, & \widetilde{\nabla}_{334}=-T_{334},\\
\widetilde{\nabla}_{412}=-T_{412}, & \widetilde{\nabla}_{413}=-T_{413} & \widetilde{\nabla}_{414}=-T_{414},\\
\widetilde{\nabla}_{423}=-T_{423}, & \widetilde{\nabla}_{424}=-T_{424}, & \widetilde{\nabla}_{434}=-T_{434}.
\end{array} \tag{9}$$

سپس به محاسبه مؤلفه‌های ناصفر مشتق هموردِ تانسور انحنای ریمان نسبت به هموستار $\widetilde{\nabla}$ می‌پردازیم که به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{array}{ll}
\mathfrak{R}_{1213;1}=\frac{1}{4}\varepsilon\lambda(2T_{123}-\varepsilon\lambda), & \mathfrak{R}_{1213;r}=T_{r23}\varepsilon\lambda,\ r=2,3,4,\\
\mathfrak{R}_{1214;r}=\frac{3}{4}\varepsilon\lambda T_{r24},\ r=1,\ldots,4, & \mathfrak{R}_{1223;2}=-\frac{1}{4}\varepsilon\lambda(2T_{213}+\varepsilon\lambda),\\
\mathfrak{R}_{1223;r}=-T_{r13}\mu,\ r=1,3,4, & \mathfrak{R}_{1224;r}=-\frac{3}{4}\varepsilon\lambda T_{r14},\ r=1,\ldots,4,\\
\mathfrak{R}_{1314;r}=-\frac{1}{4}\varepsilon\lambda T_{r34},\ r=1,\ldots,4, & \mathfrak{R}_{1334;r}=\frac{1}{4}\lambda^2T_{r14},\ r=1,\ldots,4,\\
\mathfrak{R}_{2324;r}=-\frac{1}{4}\varepsilon\lambda T_{r34},\ r=1,\ldots,4 & \mathfrak{R}_{2334;r}=\frac{1}{4}\lambda^2T_{r24},\ r=1,\ldots,4.
\end{array}$$

با توجه به شرط $\widetilde{\nabla}R=0$ بلافاصله می‌توان نتیجه گرفت

$$\begin{aligned}
&T_{123}=\frac{\varepsilon\lambda}{2},\ T_{213}=-\frac{\varepsilon\lambda}{2},\ T_{223}=T_{323}=T_{423}=T_{113}=T_{313}=T_{413}=0,\\
&T_{r14}=T_{r24}=T_{r34}=0,\ r=1,\ldots,4.
\end{aligned}$$

حال به محاسبه مؤلفه‌های $\widetilde{\nabla}T$ می‌پردازیم. محاسبات استاندارد با استفاده از روابط (۹) نتیجه می‌دهد

$$\mathfrak{T}_{212;1}=-T_{112}^2,\ \mathfrak{T}_{112;2}=T_{212}^2,$$

که بلافاصله با توجه به رابطه $\widetilde{\nabla} T=0$ نتیجه می‌دهد $T_{112}=T_{212}=0$. در این‌صورت خودبه‌خود $\widetilde{\nabla} T$ برابر صفر می‌شود و لذا چنانچه قرار دهیم $T_{312}=\kappa$ و $T_{412}=\eta$ ساختار همگن T به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$T=\varepsilon\lambda(e^1\otimes e^2\wedge e^3-e^2\otimes e^1\wedge e^3)+2\kappa(e^3\otimes e^1\wedge e^2)+2\eta(e^4\otimes e^1\wedge e^2), \kappa,\eta\in\mathbb{R}.$$

تصویر این ساختار همگن روی زیرفضاهای $\mathcal{S}_1$، $\mathcal{S}_2$ و $\mathcal{S}_3$ به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
p1(T)&=0,\\
p2(T)&=\tfrac{1}{3}(\varepsilon\lambda-2\kappa)(e^1\otimes e^2\wedge e^3-e^2\otimes e^1\wedge e^3)-\tfrac{2}{3}\eta(e^1\otimes e^2\wedge e^4-e^2\otimes e^1\wedge e^4)\\
&\quad-\tfrac{2}{3}(\varepsilon\lambda-2\kappa)e^3\otimes e^1\wedge e^2+\tfrac{4}{3}\eta e^4\otimes e^1\wedge e^2,\\
p3(T)&=\tfrac{2}{3}(\varepsilon\lambda+\kappa)(e^1\otimes e^2\wedge e^3-e^2\otimes e^1\wedge e^3+e^3\otimes e^1\wedge e^2)\\
&\quad+\tfrac{2}{3}\eta(e^1\otimes e^2\wedge e^4-e^2\otimes e^1\wedge e^4+e^4\otimes e^1\wedge e^2).
\end{aligned}$$

با توجه به مباحث قبل قضیه زیر را بیان می‌کنیم.

قضیه ۲.۳. فرض کنیم $(H_3\times\mathbb{R},g_\lambda)$ یک توسیع مستقیم گروه هایزنبرگ با متریک g_λ معرفی شده در رابطه (۳) باشد. در این‌صورت تمام ساختارهای همگن $(H_3\times\mathbb{R},g_\lambda)$ به‌صورت زیر هستند:

$$T=\varepsilon\lambda(e^1\otimes e^2\wedge e^3-e^2\otimes e^1\wedge e^3)+2\kappa(e^3\otimes e^1\wedge e^2)+2\eta(e^4\otimes e^1\wedge e^2), \kappa,\eta\in\mathbb{R}.$$

که در آن κ,η ضرائب حقیقی دلخواه هستند. همچنین این ساختار همگن متعلق به کلاس $\mathcal{S}_3$ است هرگاه $\eta=\varepsilon\lambda-2\kappa=0$ و متعلق به کلاس $\mathcal{S}_2$ است هرگاه $\eta=\varepsilon\lambda+\kappa=0$ و در غیر این‌صورت از نوع $\mathcal{S}_2\oplus\mathcal{S}_3$ می‌باشد. همچنین هیچ ساختار همگن متعارفی (یعنی $\widetilde{\nabla}=0$) وجود ندارد.

۳.۳. کلاس $(H_3\times\mathbb{R},g_1)$. فرض کنیم توسیع مستقیم $H_3\times\mathbb{R}$ را به متریک g_1 که در رابطه (۳) معرفی شده است مجهز نماییم. حال به بررسی ساختارهای همگن روی $(H_3\times\mathbb{R},g_1)$ می‌پردازیم. ابتدا مؤلفه‌های هموستار لوی چویتا را به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\Lambda_1=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&-\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad \Lambda_2=\begin{pmatrix}0&0&0&\frac{1}{2}\\0&0&0&0\\-\frac{1}{2}&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\Lambda_3=0,\qquad \Lambda_4=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&0&0\\-\frac{1}{2}&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}. \tag{۱۰}$$

حال با محاسباتی سرراست مؤلفه‌های ناصفر تانسور انحنای ریمان را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$R_{14}=\begin{pmatrix}0&0&0&\frac{1}{4}\\0&0&0&0\\-\frac{1}{4}&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad R_{24}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&\frac{1}{4}\\0&-\frac{1}{4}&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}. \tag{۱۱}$$

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140637.1641

در اینجا با استفاده از روابط (۱۰) و (۱۱) می‌توان نتیجه گرفت که $\nabla R = ۰$ و لذا این خانواده از توسیع‌های مستقیم گروه هایزنبرگ همواره موضعاً متقارن هستند. مؤلفه‌های هموستار $\widetilde{\nabla}$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{array}{lll}
\widetilde{\nabla}_{۱۱۲} = -T_{۱۱۲}, & \widetilde{\nabla}_{۱۱۳} = -T_{۱۱۳} & \widetilde{\nabla}_{۱۱۴} = -T_{۱۱۴}, \\
\widetilde{\nabla}_{۱۲۳} = -T_{۱۲۳}, & \widetilde{\nabla}_{۱۲۴} = -T_{۱۲۴} + \frac{۱}{۲}, & \widetilde{\nabla}_{۱۳۴} = -T_{۱۳۴}, \\
\widetilde{\nabla}_{۲۱۲} = -T_{۲۱۲}, & \widetilde{\nabla}_{۲۱۳} = -T_{۲۱۳} & \widetilde{\nabla}_{۲۱۴} = -T_{۲۱۴} - \frac{۱}{۲}, \\
\widetilde{\nabla}_{۲۲۳} = -T_{۲۲۳}, & \widetilde{\nabla}_{۲۲۴} = -T_{۲۲۴}, & \widetilde{\nabla}_{۲۳۴} = -T_{۲۳۴}, \\
\widetilde{\nabla}_{۳۱۲} = -T_{۳۱۲}, & \widetilde{\nabla}_{۳۱۳} = -T_{۳۱۳} & \widetilde{\nabla}_{۳۱۴} = -T_{۳۱۴}, \\
\widetilde{\nabla}_{۳۲۳} = -T_{۳۲۳}, & \widetilde{\nabla}_{۳۲۴} = -T_{۳۲۴}, & \widetilde{\nabla}_{۳۳۴} = -T_{۳۳۴}, \\
\widetilde{\nabla}_{۴۱۲} = -T_{۴۱۲} - \frac{۱}{۲}, & \widetilde{\nabla}_{۴۱۳} = -T_{۴۱۳} & \widetilde{\nabla}_{۴۱۴} = -T_{۴۱۴}, \\
\widetilde{\nabla}_{۴۲۳} = -T_{۴۲۳}, & \widetilde{\nabla}_{۴۲۴} = -T_{۴۲۴}, & \widetilde{\nabla}_{۴۳۴} = -T_{۴۳۴}.
\end{array} \tag{۱۲}$$

مشاهده می‌کنیم که مؤلفه‌های ناصفر مشتق هموردِ تانسور انحنای ریمان نسبت به هموستار $\widetilde{\nabla}$ عبارتند از

$$\mathfrak{R}_{۱۲۱۴;r} = \tfrac{۱}{۴}T_{r۲۳}, \quad \mathfrak{R}_{۱۲۲۴;r} = -\tfrac{۱}{۴}T_{r۱۳}, \quad \mathfrak{R}_{۱۴۱۴;r} = -\tfrac{۱}{۲}T_{r۳۴},$$
$$r = ۱, \ldots, ۴.$$

با توجه به شرط $\widetilde{\nabla}R = ۰$، بلافاصله می‌توان در مورد مؤلفه‌های ساختار همگن Tنتیجه گرفت

$$T_{r۲۳} = T_{r۱۳} = T_{r۳۴} = ۰, r = ۱, \ldots, ۴.$$

حال بر اساس محاسباتی استاندارد شرط $\widetilde{\nabla}T$ برقرار خواهد شد اگر و فقط اگر به شرط صفر شدن سایر مؤلفه‌ها یکی از سه دسته جواب زیر برقرار شوند

- $T_{۱۲۴} = -T_{۲۱۴} = T_{۴۱۲}$,
- $T_{۱۲۴} = -T_{۲۱۴} = T_{۴۱۲} = -\frac{۱}{۲}, T_{۴۱۴} = \text{دلخواه}, T_{۴۲۴} = \text{دلخواه}$,
- $T_{۱۲۴} = -T_{۲۱۴} = \frac{۱}{۲}, T_{۳۱۲} = \text{دلخواه}, T_{۴۱۲} = \text{دلخواه}$.

اگر اولین دسته جواب برقرار باشد و قرار دهیم $T_{۴۱۲} = \kappa$ آنگاه ساختار همگن T به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$T = ۲\kappa(e^۱ \otimes e^۲ \wedge e^۴ - e^۲ \otimes e^۱ \wedge e^۴ + e^۴ \otimes e^۱ \wedge e^۲), \kappa \in \mathbb{R}.$$

تصویر این ساختار همگن روی زیرفضاهای $S_۱$ و $S_۲$ برابر صفر است و لذا این ساختار همگن کاملاً در کلاس $S_۳$ قرار می‌گیرد. حال دومین دسته جواب فوق را مورد بررسی قرار می‌دهیم که با شرط $T_{۴۱۴} = \kappa$ و $T_{۴۲۴} = \eta$ ساختار همگن زیر را نتیجه می‌دهد

$$T = -\frac{۱}{۲}(e^۱ \otimes e^۲ \wedge e^۴ + e^۲ \otimes e^۱ \wedge e^۴ - e^۴ \otimes e^۱ \wedge e^۲) + \kappa e^۴ \otimes e^۱ \wedge e^۴ + \eta e^۴ \otimes e^۲ \wedge e^۴.$$

تصویر این ساختار همگن روی زیرفضاهای $S_۱$ و $S_۲$ و $S_۳$ عبارتند از

$$p۱(T) = ۰,$$
$$p۲(T) = ۲\kappa e^۴ \otimes e^۱ \wedge e^۴ + ۲\eta e^۴ \otimes e^۲ \wedge e^۴,$$
$$p۳(T) = -(e^۱ \otimes e^۲ \wedge e^۴ - e^۲ \otimes e^۱ \wedge e^۴ + e^۴ \otimes e^۱ \wedge e^۲).$$

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140637.1641

سومین دسته جواب بالا نیز با شرط $T_{312}=\kappa$ و $T_{412}=\eta$ ساختار همگن زیر را نتیجه می‌دهد

$$T=(e^1\otimes e^2\wedge e^4-e^2\otimes e^1\wedge e^4)+2\kappa e^3\otimes e^1\wedge e^2+2\eta e^4\otimes e^1\wedge e^2.$$

تصویر این ساختار همگن روی زیرفضاهای $\mathcal{S}_1$ و $\mathcal{S}_2$ و $\mathcal{S}_3$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\begin{aligned}p1(T)&=0,\\ p2(T)&=-\tfrac{2}{3}\kappa(e^1\otimes e^2\wedge e^3-e^2\otimes e^1\wedge e^3-2e^3\otimes e^1\wedge e^2)\\&\quad+\tfrac{1}{3}(1-2\eta)(e^1\otimes e^2\wedge e^4-e^2\otimes e^1\wedge e^4-2e^4\otimes e^1\wedge e^2),\\ p3(T)&=\tfrac{2}{3}\kappa(e^1\otimes e^2\wedge e^3-e^2\otimes e^1\wedge e^3+e^3\otimes e^1\wedge e^2)\\&\quad+\tfrac{2}{3}(1+\eta)(e^1\otimes e^2\wedge e^4-e^2\otimes e^1\wedge e^4+e^4\otimes e^1\wedge e^2).\end{aligned}$$

با توجه به مباحث بالا قضیه زیر را بیان می‌کنیم.

قضیه ۳.۳. فرض کنید $(H_3\times\mathbb{R},g_1)$ یک توسیع مستقیم گروه هایزنبرگ با متریک g_1 باشد که در رابطه (۳) معرفی شده است. در این‌صورت تمام ساختارهای همگن $(H_3\times\mathbb{R},g_1)$ به‌صورت یکی از خانواده‌های زیر هستند

(i)

$$T=2\kappa(e^1\otimes e^2\wedge e^4-e^2\otimes e^1\wedge e^4+e^4\otimes e^1\wedge e^2),\quad 0\neq\kappa\in\mathbb{R}.$$

این خانواده از ساختارهای همگن همواره متعلق به کلاس $\mathcal{S}_3$ هستند.

(ii)

$$T=-(e^1\otimes e^2\wedge e^4+e^2\otimes e^1\wedge e^4-e^4\otimes e^1\wedge e^2)+2\kappa e^4\otimes e^1\wedge e^4+2\eta e^4\otimes e^2\wedge e^4,\kappa,\eta\in\mathbb{R}.$$

این خانواده از ساختارهای همگن متعلق به کلاس $\mathcal{S}_3$ هستند هرگاه $\kappa=\eta=0$ و در غیر این‌صورت عضو کلاس $\mathcal{S}_2\oplus\mathcal{S}_3$ هستند.

(iii)

$$T=(e^1\otimes e^2\wedge e^4-e^2\otimes e^1\wedge e^4)+2\kappa e^3\otimes e^1\wedge e^2+2\eta e^4\otimes e^1\wedge e^2,\quad \kappa,\eta\in\mathbb{R}.$$

این خانواده از ساختارهای همگن متعلق به کلاس $\mathcal{S}_2$ هستند هرگاه $\kappa=\eta+1=0$ و متعلق به کلاس $\mathcal{S}_3$ هستند هرگاه $\kappa=1-2\eta=0$ و در غیر این‌صورت عضو کلاس $\mathcal{S}_2\oplus\mathcal{S}_3$ می‌باشند. همچنین این ساختار همگن متعارف است هرگاه $\kappa=1+2\eta=0$.

۴.۳. کلاس $(H_3\times\mathbb{R},g_2)$. فرض کنید توسیع مستقیم $H_3\times\mathbb{R}$ را به متریک g_2 در رابطه (۳) مجهز کنیم. در این‌صورت مؤلفه‌های هموستار لوی چویتا به‌صورت زیر خواهند بود:

$$\Lambda_1=\Lambda_3=\Lambda_4=0,\quad \Lambda_2=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.\tag{۱۳}$$

در اینجا با محاسباتی سرراست می‌توان نشان داد که $R\equiv 0$ و لذا این خانواده از توسیع‌های مستقیم گروه هایزنبرگ، تخت هستند. بنابراین تنها معادله باقی‌مانده از رابطه (۱) برای ساختارهای همگن رابطه $\widetilde{\nabla}T=0$ است. خانواده ساختارهای

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140637.1641

همگن برای فضاهای تخت، نسبتاً بزرگ هستند. در حقیقت یک خمینه تخت با $\mathbb{R}^n$ و متریک استاندارد آن هم‌سنج است، لذا در این پژوهش از این حالت بدیهی (حالت تخت) می‌گذریم و به مطالعه خانواده بعدی می‌پردازیم.

۵.۳. کلاس $(H_3\times\mathbb{R}, g_3)$. حال متریک g_3 از رابطه (۳) را روی گروه $H_3\times\mathbb{R}$ مورد بررسی قرار می‌دهیم. طبق روال معمول ابتدا به محاسبه مؤلفه‌های هموستار لوی-چویتا می‌پردازیم که به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{gathered}
\Lambda_1=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&\frac{1}{2}&0&0\\0&0&-\frac{1}{2}&0\end{pmatrix},\quad \Lambda_2=\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{2}&0\\0&0&0&0\\-\frac{1}{2}&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\\
\Lambda_3=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\-\frac{1}{2}&0&0&0\end{pmatrix},\quad \Lambda_4=0.
\end{gathered}\tag{14}$$

حال مؤلفه‌های ناصفر تانسور انحنای ریمان را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$R_{12}=\begin{pmatrix}0&-\frac{3}{4}&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\\frac{3}{4}&0&0&0\end{pmatrix}\quad R_{23}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&-\frac{1}{4}&0&0\\0&0&\frac{1}{4}&0\end{pmatrix}.\tag{15}$$

در اینجا با استفاده از روابط (۱۴) و (۱۵) می‌توان نتیجه گرفت که $\nabla R\neq 0$ و لذا این خانواده از توسیع‌های مستقیم گروه هایزنبرگ در هیچ شرایطی موضعاً متقارن نیستند. مؤلفه‌های هموستار $\widetilde{\nabla}$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{array}{lll}
\widetilde{\nabla}_{112}=-T_{112}, & \widetilde{\nabla}_{113}=-T_{113} & \widetilde{\nabla}_{114}=-T_{114},\\
\widetilde{\nabla}_{123}=-T_{123}+\frac{1}{2}, & \widetilde{\nabla}_{124}=-T_{124}, & \widetilde{\nabla}_{134}=-T_{134},\\
\widetilde{\nabla}_{212}=-T_{212}, & \widetilde{\nabla}_{213}=-T_{213}-\frac{1}{2} & \widetilde{\nabla}_{214}=-T_{214},\\
\widetilde{\nabla}_{223}=-T_{223}, & \widetilde{\nabla}_{224}=-T_{224}, & \widetilde{\nabla}_{234}=-T_{234},\\
\widetilde{\nabla}_{312}=-T_{312}-\frac{1}{2}, & \widetilde{\nabla}_{313}=-T_{313} & \widetilde{\nabla}_{314}=-T_{314},\\
\widetilde{\nabla}_{323}=-T_{323}, & \widetilde{\nabla}_{324}=-T_{324}, & \widetilde{\nabla}_{334}=-T_{334},\\
\widetilde{\nabla}_{412}=-T_{412}, & \widetilde{\nabla}_{413}=-T_{413} & \widetilde{\nabla}_{414}=-T_{414},\\
\widetilde{\nabla}_{423}=-T_{423}, & \widetilde{\nabla}_{424}=-T_{424}, & \widetilde{\nabla}_{434}=-T_{434}.
\end{array}\tag{16}$$

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140637.1641

بر اساس محاسباتی استاندارد می‌توان نتیجه گرفت که مؤلفه‌های ناصفر مشتق همورد تانسور انحنای ریمان نسبت به هموستار $\widetilde{\nabla}$ به‌صورت زیر هستند:

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{R}_{1212;r} = -\tfrac{3}{2}T_{r24}, && \mathfrak{R}_{1213;r} = -\tfrac{3}{4}T_{r34}, && \mathfrak{R}_{1224;r} = -\tfrac{3}{4}T_{r14},\\
&\mathfrak{R}_{1323;r} = \tfrac{1}{4}T_{r14}, && \mathfrak{R}_{2323;r} = \tfrac{1}{2}T_{r24}, && \mathfrak{R}_{2324;r} = -\tfrac{1}{4}T_{r34},\\
&r = 1,\dots,4, && && \\
&\mathfrak{R}_{1223;r} = -T_{r13}, r = 1,3,4, && \mathfrak{R}_{1223;2} = -T_{213} - \tfrac{1}{2}. &&
\end{aligned}
$$

با توجه به شرط $\widetilde{\nabla}R = 0$ بلافاصله می‌توان در مورد مؤلفه‌های ساختار همگن T نتیجه گرفت که

$$T_{r14} = T_{r24} = T_{r34} = T_{113} = T_{213} + \frac{1}{2} = T_{313} = T_{413} = 0, r = 1,\dots,4.$$

در اینجا به بررسی شرط $\widetilde{\nabla}T = 0$ می‌پردازیم. با توجه به رابطه $\mathfrak{T}_{112;4} = T^2_{412}$ نتیجه می‌شود که $T_{412} = 0$. حال داریم $\mathfrak{T}_{323;4} = -T^2_{423}$ که از آن نتیجه می‌گیریم $T_{423} = 0$. حال از روابط باقی‌مانده به بررسی دستگاه معادلات زیر می‌پردازیم:

$$
\begin{cases}
\mathfrak{T}_{212;1} = (\frac{1}{4} + T_{312}(T_{123} - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}T_{123} - T^2_{112}) = 0,\\
\mathfrak{T}_{223;1} = -\frac{1}{2}(T_{112} - T_{323})(2T_{123} - 1) = 0,\\
\mathfrak{T}_{212;2} = (T_{223}(T_{312} - \frac{1}{2}) - T_{112}T_{212}) = 0,\\
\mathfrak{T}_{223;2} = (T_{223}T_{323} - T_{212}(T_{123} - \frac{1}{2})) = 0,\\
\mathfrak{T}_{212;3} = (T_{323}(T_{312} - \frac{1}{2}) - T_{112}(T_{312} + \frac{1}{2})) = 0,\\
\mathfrak{T}_{223;3} = (\frac{1}{4} + T^2_{323} - T_{123}(T_{312} + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}T_{312}) = 0.
\end{cases}
$$

با بررسی دقیق این دستگاه دو دسته جواب به‌صورت زیر وجود خواهد داشت:

$$
\begin{aligned}
&\bullet T_{112} = T_{123} - \tfrac{1}{2} = T_{223} = T_{323} = 0, T_{212} = \text{دلخواه}, T_{312} = \text{دلخواه},\\
&\bullet T_{112} = T_{123} - \tfrac{1}{2} = T_{312} - \tfrac{1}{2} = T_{323} = 0, T_{212} = \text{دلخواه}, T_{223} = \text{دلخواه}.
\end{aligned}
$$

چنانچه در مجموعه اول جواب قرار دهیم $T_{212} = \kappa, T_{312} = \eta$ خانواده دو پارامتری از ساختارهای همگن زیر را خواهیم داشت:

$$T = (e^1 \otimes e^2 \wedge e^3 - e^2 \otimes e^1 \wedge e^3) + 2\kappa e^2 \otimes e^1 \wedge e^2 + 2\eta e^3 \otimes e^1 \wedge e^2, \quad \kappa, \eta \in \mathbb{R}.$$

تصویر این ساختار همگن روی زیرفضاهای S_1، S_2 و S_3 نیز با محاسباتی استاندارد به‌صورت زیر می‌شود:

$$
\begin{aligned}
&p1(T) = 0,\\
&p2(T) = \tfrac{1}{4}(1 - 2\eta)(e^1 \otimes e^2 \wedge e^3 - e^2 \otimes e^1 \wedge e^3) + 2\kappa e^2 \otimes e^1 \wedge e^2 - \tfrac{2}{4}(1 - 2\eta)e^3 \otimes e^1 \wedge e^2,\\
&p3(T) = \tfrac{2}{4}(1 + \eta)(e^1 \otimes e^2 \wedge e^3 - e^2 \otimes e^1 \wedge e^3 + e^3 \otimes e^1 \wedge e^2).
\end{aligned}
$$

سپس در دومین مجموعه جواب قرار می‌دهیم $T_{212} = \kappa$ و $T_{223} = \eta$ و خانواده ساختارهای همگن زیر را به‌دست می‌آوریم

$$T = e^1 \otimes e^2 \wedge e^3 + 2\kappa e^2 \otimes e^1 \wedge e^2 - e^2 \otimes e^1 \wedge e^3 + 2\eta e^2 \otimes e^2 \wedge e^3 + e^3 \otimes e^1 \wedge e^2, \quad \eta, \kappa \in \mathbb{R}.$$

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140637.1641

همچنین تصویر این ساختار همگن روی زیرفضاهای $\mathcal{S}_۱$، $\mathcal{S}_۲$ و $\mathcal{S}_۳$ به‌صورت زیر است:

$$p۱(T) = ۰,$$
$$p۲(T) = ۲\kappa(e^۲ \otimes e^۱ \wedge e^۲) + ۲\eta(e^۲ \otimes e^۲ \wedge e^۳),$$
$$p۳(T) = e^۱ \otimes e^۲ \wedge e^۳ - e^۲ \otimes e^۱ \wedge e^۳ + e^۳ \otimes e^۱ \wedge e^۲.$$

با توجه به مطالب قبل برای طبقه‌بندی ساختارهای همگن کلاس $(H_۳ \times \mathbb{R}, g_۳)$ از توسیع‌های مستقیم گروه هایزنبرگ قضیه زیر را می‌توان بیان کرد.

قضیه ۴.۳. فرض کنید $(H_۳ \times \mathbb{R}, g_۳)$یک توسیع مستقیم گروه هایزنبرگ با متریک $g_۳$ معرفی شده در رابطه (۳) باشد. در این‌صورت تمام ساختارهای همگن $(H_۳ \times \mathbb{R}, g_۳)$ به‌صورت یکی از خانواده‌های زیر هستند

(i)

$$T = (e^۱ \otimes e^۲ \wedge e^۳ - e^۲ \otimes e^۱ \wedge e^۳) + ۲\kappa e^۲ \otimes e^۱ \wedge e^۲ + ۲\eta e^۳ \otimes e^۱ \wedge e^۲, \quad \kappa, \eta \in \mathbb{R}.$$

این خانواده از ساختارهای همگن متعلق به کلاس $\mathcal{S}_۳$ هستند هرگاه $\kappa = \eta - \frac{۱}{۲} = ۰$ و نیز متعلق به کلاس $\mathcal{S}_۲$ هستند هرگاه $\eta = -۱$ و در غیر این‌صورت عضو کلاس $\mathcal{S}_۲ \oplus \mathcal{S}_۳$ می‌باشند. همچنین ساختارهای همگن متعارف به‌وجود می‌آیند هرگاه $\kappa = \eta + \frac{۱}{۲} = ۰$.

(ii)

$$T = e^۱ \otimes e^۲ \wedge e^۳ + ۲\kappa e^۲ \otimes e^۱ \wedge e^۲ - e^۲ \otimes e^۱ \wedge e^۳ + ۲\eta e^۲ \otimes e^۲ \wedge e^۳ + e^۳ \otimes e^۱ \wedge e^۲, \quad \eta, \kappa \in \mathbb{R}.$$

این خانواده از ساختارهای همگن متعلق به کلاس $\mathcal{S}_۳$ هستند هرگاه $\kappa = \eta = ۰$ و در غیر این‌صورت عضو کلاس $\mathcal{S}_۲ \oplus \mathcal{S}_۳$ هستند.

۴. نتیجه‌گیری

در این مقاله به بررسی توسیع‌های مستقیم گروه هایزنبرگ سه‌بعدی یعنی $H_۳ \times \mathbb{R}$ پرداختیم. توسیع ذکر شده که طبیعتاً چهاربعدی است را به متریک لورنتسی تجهیز نمودیم. بر اساس مطالعات پیشین این خانواده از توسیع‌های گروه هایزنبرگ تا حد هم‌سنجی به یکی از پنج خانواده اشاره شده در قضیه ۳ تعلق دارند. لذا با رویکری محاسباتی هر یک از خانواده متریک‌های لورنتسی را جداگانه مورد مطالعه قرار دادیم و معادلات مربوط به ساختارهای همگن را بررسی کردیم. حل این معادلات را به‌طور دقیق و مرحله به مرحله انجام دادیم و تمام جواب‌های موجود را مشخص کردیم. نتایج حاصل از این طبقه‌بندی ساختارهای همگن در قضایای ۱.۳، ۲.۳، ۳.۳ و ۴.۳ بیان گردید. شایان ذکر است که در حین مطالعه مشخص شد که توسیع مستقیم گروه هایزنبرگ با متریک کلاس $g_۲$ تخت هستند.

همان‌طور که در مرجع [۹، گزاره ۲-۲]، بیان شده است خانواده گروه‌های لی همبند ساده لورنتسی با خانواده گروه‌های لی همبند ساده ریمانی از همان بُعد یکی است. بنابراین در این پژوهش به بررسی ساختارهای همگن روی حالت خاص ضرب مستقیم در خانواده کلاس ۲ii از طبقه‌بندی ارائه شده در گزاره ۲-۱ مرجع مذکور پرداختیم. مطالعه ساختارهای همگن روی سایر کلاس‌های گروه‌های لی لورنتسی از بعد چهار نیز قابل بررسی در مطالعات آتی است.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140637.1641

مراجع

[۱] ی. آریانژاد، چند خاصیت فضای شبه‌ریمانی همگن چهاربعدی با ایزوتروپی بدیهی، ریاضی و جامعه، ۷ no. ۱ (۱۴۰۱) ۷۳–۸۴.

[۲] ا. زعیم، ی. آریانژاد و م. قیطاسی، پیرامون برخی خمینه‌های همدیس اینشتین از بعد چهار، ریاضی و جامعه، ۷ no. ۲ (۱۴۰۱) ۱۹–۳۶.

[3] W. Ambrose and I. M. Singer, On homogeneous Riemannian manifolds, *Duke Math. J.*, **25** (1958) 647–669.

[4] E. binz and S. Pods, The Geometry of Heisenberg Groups With Applications in Signal Theory, Optics, Quantization, and Field Quantization, American Mathematical Society, 2008.

[5] N. Bokan, T. Sukilovic and S. Vukmirovic, Lorentz geometry of 4-dimensional nilpotent Lie groups, *Geom Dedicata*, **177** (2015) 83–102.

[6] G. Calvaruso, Homogeneous structures on three-dimensional Lorentzian manifolds, *J. Geom. Phys.*, **57** (2007) 1279–1291.

[7] G. Calvaruso and M. Castrillon-Lopez, *Pseudo-Riemannian Homogeneous Structures*, Developments in Math., Springer Nature, Switzerland, 2019.

[8] G. Calvaruso and M. Castrillon-Lopez, Cyclic Lorentzian Lie groups, *Geom Dedicata*, **181** (2016) 119–136.

[9] G. Calvaruso and A. Zaeim, Four-dimensional Lorentzian Lie groups, *Differential Geometry and its Applications*, **31** (2013) 496–509.

[10] P.M. Gadea and J. A. Oubina, Homogeneous pseudo-Riemannian structures and homogeneous almost para-Hermitian structures, *Houston J. Math.*, **18** (1992) 449–465.

[11] P. M. Gadea, J. C. Gonzalez-Davila and J. A. Oubiña, Cyclic metric Lie groups, *Monatsh. Math.*, **176** (2015) 219–239.

[12] P. M. Gadea, J. C. Gonzalez-Davila and J. A. Oubiña, Cyclic homogeneous Riemannian manifolds, *Ann. Mat. Pura Appl.*, **195** (2016) 1619–1637.

[13] P. M. Gadea and J.A. Oubiña, Homogeneous Lorentzian structures on the Oscillator groups, *Arch. Math.*, **73** (1999) 311–320.

[14] P. M. Gadea and J.A. Oubiña, Homogeneous Riemannian structures on Berger 3-spheres, *Proc. Edinb. Math. Soc.*, **48** no. 2 (2005) 375–387.

[15] L. Magnin, Sur les algebres de Lie nilpotents de dimension≤ 7, *J. Geom. Phys.*, **3** no. 1 (1986) 119–144.

[16] J. Milnor, Curvature of left invariant metrics on Lie groups, *Adv. Math.*, **21** (1976) 293–329.

[17] B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry*, New York: Academic Press, 1983.

[18] S. Rahmani, Maetriques de Lorentz sur les groupes de Lie unimodulaires de dimension trois, *J. Geom. Phys.*, **9** (1992) 295–302.

[19] F. Tricerri and L. Vanhecke, *Homogeneous Structures on Riemannian Manifolds*, Cambridge University Press, Cambridge, 1983.

[20] A. Tohidfar and A. Zaeim, On Pseudo-Riemannian Cyclic Homogeneous Manifolds of Dimension Four, *Journal of Lie Theory*, **31** no. 1 (2021) 169–187.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140637.1641

امیرحسام زعیم
گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه پیام‌نور، تهران، ایران
zaeim@pnu.ac.ir

امیرحسام زعیم در مرداد ماه ۱۳۶۱ در شهر اهواز متولد شد. وی تحصیلات دانشگاهی خود را در سال ۱۳۷۹ از دانشگاه شیراز آغاز کرد و پس از آن در دانشگاه صنعتی امیرکبیر و مرکز تحصیلات تکمیلی دانشگاه پیام نور ادامه داد. ایشان در سال ۱۳۹۱ به دریافت درجه دکتری نائل شد و به عنوان استادیار در دانشگاه پیام نور شروع به کار نمود. همچنین در سال ۱۳۹۸ به مرتبه دانشیاری ارتقا یافت. زمینه تحقیقاتی ایشان هندسه دیفرانسیل با زمینه هندسه شبه‌ریمانی است.

مهدی جعفری
گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه پیام‌نور، تهران، ایران
m.jafarii@pnu.ac.ir

مهدی جعفری متولد اردیبهشت ماه ۱۳۵۹ در شهر اصفهان است. وی در سال ۱۳۷۷ وارد مقطع کارشناسی رشته ریاضی محض دانشگاه صنعتی اصفهان شد و در سال ۱۳۸۲ وارد مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض، گرایش هندسه، دانشگاه صنعتی امیرکبیر شد. وی در سال ۱۳۸۷ وارد مقطع دکتری در رشته ریاضی محض گرایش هندسه گردید و در سال ۱۳۹۱ فارغ‌التحصیل گردید. او هم‌اکنون عضو هیات علمی دانشگاه پیام‌نور اصفهان می‌باشد. تخصص اصلی وی هندسه دیفرانسیل با رویکردهای فیزیکی، معادلات دیفرانسیل و هندسه شبه‌ریمانی است.

مسلم باغگلی
گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه پیام‌نور، تهران، ایران
mb334@student.pnu.ac.ir

مسلم باغگلی در سال ۱۳۶۱ در شهر کرمان متولد شد. وی مدرک کارشناسی ریاضی محض خود را درسال ۱۳۸۴ از دانشگاه پیام‌نور مرکز بم و کارشناسی ارشد ریاضی محض در گرایش هندسه (سیستم‌های دینامیکی) را در سال ۱۳۸۹ از دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرمان دریافت کردند. ایشان هم‌اکنون دانشجوی دکتری در گرایش هندسه در مرکز تحصیلات تکمیلی دانشگاه پیام‌نور تهران هستند. همچنین در حال‌حاضر به عنوان مدیر بودجه، تشکیلات و بهره‌وری با ۱۴ سال سابقه خدمت در مجتمع آموزش عالی شهرستان بم اشتغال دارند.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140637.1641