

GEODESIC VECTORS OF SQUARE METRICS ON 5- DIMENSIONAL GENERALIZED SYMMETRIC SPACES

DARIUSH LATIFI[✉]* AND MILAD L. ZEINALI[✉]

ABSTRACT. In this paper, we consider the (α, β) -metric $F = \frac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha}$ along with the function ϕ with the definition of $\phi(s) = 1 + 2s + s^2$, which is known as a square metric, on 5-dimensional generalized symmetric spaces. Then we investigate and study the homogeneous geodesics of 5-dimensional generalized symmetric spaces equipped with a left invariant square metric. We also obtain and categorize the homogeneous geodesics of these spaces in some special cases, which are of type (2), (3) and (7). Also we show that for a 5-dimensional generalized symmetric space of type (2) and (7) equipped with a left invariant square metric, the geodesic vectors of (M, F) are the same as the geodesic vectors of $(M, \tilde{a})$ and vice versa.

1. Introduction

Let M be a smooth n -dimensional C^∞ manifold and TM be its tangent bundle. A Finsler metric on M is a non-negative function $F : TM \rightarrow \mathbb{R}$ with the following properties [2]:

- (1) F is smooth on the slit tangent bundle $TM^0 := TM \setminus \{0\}$.
- (2) $F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y)$ for any $x \in M$, $y \in T_x M$ and $\lambda > 0$.

Keywords: (α, β) - metric, Geodesic vectors, Homogeneous geodesics, Homogeneous spaces, Square metric, Symmetric spaces.

Article Type: Research Paper.

Communicated by Mohamad Reza Pouryayevali.

*Corresponding author.

Received: 28-09-2023, Accepted: 15-05-2024, Published Online: 19-02-2024.

Cite this article: D. Latifi and M. L. Zeinali, Geodesic vectors of square metrics on 5- dimensional generalized symmetric spaces, *Journal of Mathematics and Society*, **10** no. 1 (2025) 1–30.

<http://dx.doi.org/110.22108/msci.2024.139056.1609> .

(3) The following bilinear symmetric form $g_y : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ is positive definite

$$g_y(u, v) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} F^2(x, y + su + tv) \Big|_{s=t=0}.$$

The (α, β) -metrics form an important class of Finsler metrics appearing iteratively in formulating physics, mechanics, seismology, biology, control theory, etc (see [1]). For the first time, in 1972, Matsumoto had introduced the concept of (α, β) -metric in Finsler geometry [14]. (α, β) -metrics are the generalizations of the Randers metric, introduced by G. Randers [16]. An (α, β) -metric is a Finsler metric of the form $F = \alpha \varphi(s)$, $s = \frac{\beta}{\alpha}$ where $\alpha = \sqrt{\tilde{a}_{ij}(x) y^i y^j}$ is induced by a Riemannian metric $\tilde{a} = \tilde{a}_{ij} dx^i \otimes dx^j$ on a connected smooth n -dimensional manifold M and $\beta = b_i(x) y^i$ is a 1-form on M . The important types of (α, β) -metrics happen when we have

$$\varphi(s) = 1 + 2s + s^2.$$

In this case we have

$$F = \frac{(\alpha + \beta)^2}{\alpha},$$

which called a square space.

The Riemannian metric $\tilde{a}$ induces an inner product on any cotangent space $T_x^* M$ such that

$$\langle dx^i(x), dx^j(x) \rangle = \tilde{a}^{ij}(x).$$

The induced inner product on $T_x^* M$ induced a linear isomorphism between $T_x^* M$ and $T_x M$. Then the 1-form β corresponds to a vector field $\tilde{X}$ on M such that

$$\tilde{a}(y, \tilde{X}(x)) = \beta(x, y).$$

Also, we have

$$\|\beta(x)\|_\alpha = \|\tilde{X}(x)\|_\alpha.$$

Therefore we can write (α, β) -metrics as follows:

$$(1.1) \quad F(x, y) = \alpha(x, y) \varphi\left(\frac{\tilde{a}(\tilde{X}(x), y)}{\alpha(x, y)}\right),$$

where for any $x \in M$,

$$\sqrt{\tilde{a}(\tilde{X}(x), \tilde{X}(x))} = \|\tilde{X}(x)\|_\alpha < b_0.$$

So any square metrics can be written as

$$F(x, y) = \frac{(\alpha(x, y) + \tilde{a}(\tilde{X}(x), y))^2}{\alpha(x, y)}.$$

Let $\pi^* TM$ be the pull-back of the tangent bundle TM by $\pi : TM^0 \rightarrow M$. Unlike the Levi-Civita connection in Riemannian geometry, there is no unique natural connection in the Finsler case. Among

these connections on π^*TM , we choose the Chern connection whose coefficients are denoted by Γ_{jk}^i [2]. This connection is almost g -compatible and has no torsion. Since, in general, the Chern connection coefficients Γ_{jk}^i in natural coordinates have a directional dependence, we must define a fixed reference vector.

Let $\sigma(t)$ be a smooth regular curve in M , with velocity field T . Let $W(t) := W^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i}$ be a vector field along σ . The expression

$$\left[\frac{dW^i}{dt} + W^j T^k (\Gamma_{jk}^i)_{(\sigma, T)} \right] \frac{\partial}{\partial x^i} |_{\sigma(t)},$$

would have defined the covariant derivative $D_T W$ with reference vector T . A curve $\sigma(t)$, with velocity $T = \dot{\sigma}(t)$ is a Finslerian geodesic if

$$D_T \left[\frac{T}{F(T)} \right] = 0, \quad \text{with reference vector } T,$$

that the constant speed geodesics are precisely the solution of

$$D_T T = 0, \quad \text{with reference vector } T.$$

Definition 1.1. A Finsler space (M, F) is called a homogeneous Finsler space if the group of isometries of (M, F) , $I(M, F)$ acts transitively on M .

Definition 1.2. Let $(G/H, F)$ be a homogeneous Finsler space and e be the identity of G . A non-zero vector $X \in \mathfrak{g}$ is called a geodesic vector if the curve $\exp(tX).eH$ is a geodesic of $(G/H, F)$.

Definition 1.3. A geodesic $\sigma(t)$ through the $o \in M$ is called a homogeneous geodesic if it is an orbit of a one-parameter subgroup of G , that is

$$\sigma(t) = \exp(tZ)(o), \quad t \in \mathbb{R},$$

where Z is a nonzero vector of $\mathfrak{g}$.

In 1965, Hermann showed that homogeneous geodesics which are orbits of a given one-parameter group of isometries $A(t)$ correspond to the critical points of the norm of Killing vector field X which generates $A(t)$. Kostant, Vinberg, Kowalski and Vanhecke found a simple condition that the orbit

$$\sigma(t) = A(t)(eH),$$

of an one-parameter subgroup $A(t) = \exp(tX) \subset G$ of the isometry group G of a homogeneous Riemannian manifold $M = G/H$, is a geodesic [6, 8, 18].

Let G be a connected Lie group with Lie algebra $\mathfrak{g}$ and let $\tilde{a}$ be a left invariant Riemannian metric on G . In [8], the author proved that the following result for Riemannian metrics.

Lemma 1.4. *a vector $Y \in \mathfrak{g}$ is a geodesic vector if and only if*

$$(1.2) \quad \tilde{a}(Y, [Y, Z]) = 0, \quad \forall Z \in \mathfrak{g}.$$

In [10], Latifi proved the following result that gives a criterion for a non-zero vector to be a geodesic vector in a homogeneous Finsler space.

Lemma 1.5. *A non-zero vector $Y \in \mathfrak{g}$ is a geodesic vector if and only if*

$$(1.3) \quad g_{Y_m}(Y_m, [Y, Z]_m) = 0, \quad \forall Z \in \mathfrak{g}.$$

We now recall some basic facts about generalized symmetric spaces. A generalized symmetric space is a connected Riemannian manifold $(M, \tilde{a})$ admitting a regular s-structure, that is, a family

$$\{s_x : x \in M\},$$

of symmetries on M , such that

$$s_x \circ s_y = s_z \circ s_x, \quad z = s_x(y),$$

for every points $x, y \in M$. As it is well-known, every generalized symmetric space is a homogeneous Riemannian space G/H . An s-structure $\{s_x : x \in M\}$ is said to be of order $k \geq 2$ if $(s_x)^k = id$ for all $x \in M$ and $(s_x)^i \neq id$ for $i < k$. A Riemannian manifold $(M, \tilde{a})$ is said to be k -symmetric if it admits a regular s-structure of order k . Each generalized symmetric space is k -symmetric for some k . The order of a generalized symmetric space is the least integer k such that $(M, \tilde{a})$ is k -symmetric. Low dimensional generalized symmetric spaces have been classified in [7].

2. Main Results

A five-dimensional generalized symmetric space M of type **(2)** is $\mathbb{R}^5(x, y, z, w, t)$, equipped with the Riemannian metric

$$\begin{aligned} \tilde{a} = & e^{-2\lambda_1 q} dx^2 + e^{2\lambda_1 q} dy^2 + e^{-2\lambda_2 q} dz^2 + e^{2\lambda_2 q} dw^2 + dq^2 \\ & + 2\alpha[e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)q} dx dz + e^{(\lambda_1 + \lambda_2)q} dy dw] \\ & + 2\beta[e^{(\lambda_1 - \lambda_2)q} dy dz - e^{(\lambda_2 - \lambda_1)q} dx dw], \end{aligned}$$

where either (2a) $\lambda_1 > \lambda_2 > 0, \alpha^2 + \beta^2 < 1$, or (2b) $\lambda_1 = \lambda_2 > 0, \alpha = 0$ and $0 \leq \beta < 1$, or (2c) $\lambda_1 < 0, \lambda_2 = 0, \alpha = 0$ and $0 < \beta < 1$. As homogeneous space, $M = G/H$, where G is the group of all matrices of the form

$$\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 q} & 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & e^{-\lambda_1 q} & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & e^{\lambda_2 q} & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\lambda_2 q} & w \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

For type (2) of these spaces we prove that the following Theorem for types (2a), (2b) and (2c):

Theorem 2.1. *Let (M, F) be a 5-dimensional generalized symmetric space of type (2a) equipped with a left invariant square metric defined by the Riemannian metric $\tilde{a}$ and vector field $X = x_5 e_5$. Then $Y \in \mathfrak{g}$ is a geodesic vector of (M, F) if and only if Y is a geodesic vector of $(M, \tilde{a})$.*

Theorem 2.2. *Let (M, F) be a 5-dimensional generalized symmetric space of type (2b) equipped with a left invariant square metric defined by the Riemannian metric $\tilde{a}$ and vector field $X = x_5 e_5$. Then $Y \in \mathfrak{g}$ is a geodesic vector of (M, F) if and only if Y is a geodesic vector of $(M, \tilde{a})$.*

Theorem 2.3. *Let (M, F) be a 5-dimensional generalized symmetric space of type (2c) equipped with a left invariant square metric defined by the Riemannian metric $\tilde{a}$ and vector field $X = x_5 e_5$. Then $Y \in \mathfrak{g}$ is a geodesic vector of (M, F) if and only if Y is a geodesic vector of $(M, \tilde{a})$.*

As homogeneous spaces, five-dimensional generalized symmetric spaces M of type (7) are real matrix groups

$$\begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & e^{-\lambda t} & 0 & 0 & y \\ te^{\lambda t} & 0 & e^{\lambda t} & 0 & u \\ 0 & -te^{-\lambda t} & 0 & e^{-\lambda t} & v \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

M is also $\mathbb{R}^5(x, y, u, v, t)$, equipped with a Riemannian metric

$$\tilde{a} = dt^2 + e^{-2\lambda t}(tdx - du)^2 + e^{2\lambda t}(tdy + dv)^2 + a^2(e^{-2\lambda t}dx^2 + e^{2\lambda t}dy^2) + 2\gamma(dydu - dx dv),$$

where $a > 0, \lambda \geq 0, \lambda, a, \gamma \in \mathbb{R}$ and $\gamma^2 < a^2$. We have two case for type (7) as follows:

- (7a) $\lambda \neq 0$,
- (7b) $\lambda = 0$.

For type (7) of these spaces we prove that the following Theorem for types (7a) and (7b):

Theorem 2.4. *Let (M, F) be a 5-dimensional generalized symmetric space of type (7a) equipped with a left invariant square metric defined by the Riemannian metric $\tilde{a}$ and vector field $X = x_5 e_5$. Then $Y \in \mathfrak{g}$ is a geodesic vector of (M, F) if and only if Y is a geodesic vector of $(M, \tilde{a})$.*

Theorem 2.5. Let (M, F) be a 5-dimensional generalized symmetric space of type (7b) equipped with a left invariant square metric defined by the Riemannian metric $\tilde{a}$ and vector field $X = x_5 e_5$. Then $Y \in \mathfrak{g}$ is a geodesic vector of (M, F) if and only if Y is a geodesic vector of $(M, \tilde{a})$.

Also we have the following corollary for type (3):

Corollary 2.6. Let (M, F) be a five-dimensional generalized symmetric spaces of type 3 equipped with a left invariant square metric defined by the Riemannian metric $\tilde{a}$ and the vector field X . Then geodesic vectors depending only on $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, t$ and y_5 .

We also categorize the geodesic vectors of these spaces. For example, we show that Y is a geodesic vector of a generalized symmetric space of type (2a) equipped with a left invariant square metric defined by the Riemannian metric $\tilde{a}$ and vector field X if and only if

$$Y = -\frac{1}{A} \sum_{i=1}^4 x_i e_i + y_5 e_5, \quad A \neq 0,$$

or $Y = \sum_{i=1}^4 y_i e_i$, $A \neq 0$, and the following equation is hold:

$$\begin{aligned} & y_1(-\lambda_1 y_1) + y_2\left(-\lambda_2 y_2 + \frac{\alpha(\lambda_1 - \lambda_2)}{\sqrt{1 - \alpha^2}} y_1\right) \\ & + y_3\left(\lambda_1 y_3 + \frac{\beta}{\sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}}\left((\lambda_1 + \lambda_2)y_2 + \frac{\alpha(\lambda_2 - \lambda_1)}{\sqrt{1 - \alpha^2}} y_1\right)\right) \\ & + y_4\left(\lambda_2 y_4 - \frac{\beta(\lambda_1 + \lambda_2)}{\sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}} y_1 - \frac{\alpha(\lambda_1 - \lambda_2)}{\sqrt{1 - \alpha^2}} y_3 - \frac{\alpha\beta(\lambda_1 - \lambda_2)}{\sqrt{1 - \alpha^2}\sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}} y_2\right) = 0. \end{aligned}$$

Also we show that Y is a geodesic vector of a generalized symmetric space of type (2b) equipped with a left invariant square metric defined by the Riemannian metric $\tilde{a}$ and vector field X if and only if

$$Y = -\frac{1}{A} \sum_{i=1}^4 x_i E_i + y_5 E_5 \quad \text{or} \quad Y = \sum_{i=1}^4 y_i E_i + tT, \quad A \neq 0,$$

or $Y = \sum_{i=1}^4 y_i e_i$, $A \neq 0$, and the following equation is hold:

$$y_1^2 + y_2^2 = y_3\left(y_3 + \frac{2\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} y_2\right) + y_4\left(y_4 - \frac{2\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} y_1\right).$$

3. Summary of Proofs/Conclusions

Conclusion of this article: In this paper, we consider five dimensional generalized symmetric spaces equipped with an invariant square metric. Square metrics are the important types of (α, β) -metrics. For a square metric we have $\varphi(s) = 1 + 2s + s^2$. In this case we have $F = \frac{(\alpha + \beta)^2}{\alpha}$. The study

of homogeneous geodesics in these homogeneous spaces is of particular interest. For 5-dimensional generalized symmetric space of type (2) and (7) equipped with an invariant square metric, the geodesic vectors of (M, F) are the same as the geodesic vectors of $(M, \tilde{a})$ and vice versa and the geodesic vectors of type (3) of these spaces depending only on $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, t$ and y_5 .

Dariush Latifi

Department of Mathematics, University of Mohaghegh Ardabili, P.O.Box 5619911367, Ardabil, Iran

Email: latifi@uma.ac.ir

Milad L. Zeinali

Department of Mathematics, University of Mohaghegh Ardabili, P.O.Box 5619911367, Ardabil, Iran

Email: miladzeinali@gmail.com

بردارهای ژئودزیک متریکی مربعی روی فضاهای متقارن تعمیم یافته ۵- بعدی

داریوش لطیفی^{ID}* و میلاد زینالی لکی^{ID}

چکیده. در این مقاله، (α, β) -متریک $F = \frac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha}$ همراه با تابع ϕ با ضابطه $\phi(s) = 1 + 2s + s^2$ ، که به متریک مربعی معروف است، را روی فضاهای متقارن تعمیم یافته ۵-بعدی در نظر می‌گیریم. سپس ژئودزیک‌های همگن فضاهای متقارن تعمیم یافته ۵-بعدی مجهز به یک متریک مربعی ناورد از چپ تعریف شده توسط یک متریک ریمانی ناورد و یک ۱-فرمی ناورد را بررسی و انواع آنرا مورد مطالعه قرار می‌دهیم. همچنین ژئودزیک‌های همگن این فضاها که از نوع (۲)، (۳) و یا (۷) هستند را در حالت‌های خاص به دست آورده و آنها را دسته بندی می‌کنیم. همچنین نشان می‌دهیم برای فضاهای متقارن تعمیم یافته ۵-بعدی از نوع (۲) و (۷) مجهز به یک متریک مربعی ناورد از چپ، بردارهای ژئودزیک (M, F) همان بردارهای ژئودزیک $(M, \tilde{\alpha})$ هستند و برعکس.

۱. مقدمه

هندسه فینسلری تعمیمی طبیعی از هندسه ریمانی است. هندسه فینسلری کاربردهای زیادی در فیزیک، مکانیک، بیولوژی، تئوری کنترل و غیره دارد [۱]. یکی از مهمترین خانواده‌ها از متریک‌های فینسلری، (α, β) -متریک‌ها هستند. این متریک‌ها برای اولین بار در سال ۱۹۷۲ توسط ماتسوموتو^۱ معرفی شدند [۱۴]. در واقع، (α, β) -متریک‌ها تعمیمی از متریک‌های راندرز^۲ هستند که توسط راندرز در سال ۱۹۴۱ معرفی شدند [۱۶]. منظور از یک (α, β) -متریک، متریک فینسلری

$$F = \alpha\phi(s), \quad s = \frac{\beta}{\alpha},$$

است که در آن $\alpha = \sqrt{\tilde{\alpha}_{ij}(x)y^i y^j}$ توسط متریک ریمانی $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}_{ij} dx^i \otimes dx^j$ روی یک خمینه n -بعدی هموار و همبند M اللقاء شده و $\beta = b_i(x)y^i$ یک ۱-فرمی روی M است. از مهمترین نوع (α, β) -متریک‌ها می‌توان به متریک‌های راندرز، کروپینا^۳، ماتسوموتو و مربعی^۴ اشاره کرد. خواننده می‌تواند برای مطالعه بیشتر در این زمینه و خواص این فضاها به مراجع

عبارات و کلمات کلیدی: (α, β) -متریک، ژئودزیک‌های همگن، بردارهای ژئودزیک، فضاهای متقارن تعمیم یافته، فضاهای همگن، متریک مربعی. نوع مقاله: پژوهشی

دبیرتخصصی رابط: محمد رضا پوریای ولی

* نویسنده مسئول مقاله تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۷/۰۶ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۲/۲۶ تاریخ انتشار آنلاین: ۱۴۰۳/۱۲/۰۱

ارجاع به مقاله: د. لطیفی و م. زینالی لکی، بردارهای ژئودزیک متریکی مربعی روی فضاهای متقارن تعمیم یافته ۵-بعدی، نشریه ریاضی و جامعه، ۱۰ شماره ۱ (۱۴۰۴) ۱-۳۰.

<http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.139056.1609>

[۲۰، ۱۹، ۱۳، ۱۲، ۱۱] مراجعه کند. اگر در تعریف (α, β) -متریک‌ها تابع ϕ به صورت $\phi(s) = 1 + 2s + s^2$ تعریف شود، آنگاه خواهیم داشت:

$$(1) \quad F = \frac{(\alpha + \beta)^2}{\alpha},$$

که آن را متریک مربعی می‌نامند.

در سال ۱۹۶۵، هرمان^۵ نشان داد که ژئودزیک‌های همگن، که مدارهای گروه ۱- پارامتری از ایزومتري های $a(t)$ هستند، متناظر با نقاط بحرانی از نرم میدان برداری کیلینگ X می‌باشند که $a(t)$ را تولید می‌کنند. کوستان^۶ [۶]، وینبرگ^۷ [۱۷] و کوالسکی و وان هکه^۸ [۸] ژئودزیک‌های همگن خمینه همگن ریمانی G/H را بررسی کردند. وجود حداقل یک ژئودزیک همگن در خمینه ریمانی همگن توسط کوالسکی و سنس^۹ نشان داده شده است [۹]. همچنین وجود حداقل یک ژئودزیک همگن در خمینه فینسلری توسط یان و هوآن^{۱۰} نشان داده شد [۱۸]. در سال ۲۰۰۷، لطیفی ژئودزیک‌های همگن را در فضاهای فینسلری همگن مورد مطالعه قرار داد [۱۰].

کلاس فضاهای متقارن تعمیم یافته در واقع بزرگتر از کلاس فضاهای متقارن معرفی شده توسط کارتان است. نظریه فضاهای متقارن تعمیم یافته برای اولین بار توسط لجر^{۱۱} در سال ۱۹۶۷ مورد مطالعه قرار گرفت. مطالب مربوط به تقارن برای اولین بار توسط کوالسکی در سال ۱۹۸۰ در کتاب [۷] انتشار یافت. این فضاها در واقع خمینه‌های ریمانی (M, g) هستند که در هر نقطه $x \in M$ تقارن s_x را به ازای نقطه ثابت x می‌پذیرند.

فضاهای فینسلری متقارن برای اولین بار توسط سابو و دنگ^{۱۲} معرفی شدند. تعریف این فضاها، تعمیمی طبیعی از تعریف فضاهای ریمانی متقارن است که توسط کارتان معرفی شده بودند. فضای فینسلری (M, F) را متقارن گویند هرگاه برای هر $p \in M$ ایزومتري s_p از (M, F) چنان موجود باشد به طوری که p یک نقطه ثابت تنها از s_p بوده و $s_p^2 = id$. در این مقاله متریک‌های مربعی ناورد از چپ F را در نظر می‌گیریم که توسط متریک ریمانی ناورد $\tilde{a}$ و میدان ۱-فرمی ناورد روی فضاهای متقارن تعمیم یافته ۵- بعدی تعریف شده‌اند و ژئودزیک‌های همگن آنها را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. جهت مشاهده جزئیات بیشتر به مراجع [۳، ۴، ۵، ۷، ۱۸، ۲۱] مراجعه کنید.

۲. تعاریف و مقدمات

در این بخش به صورت خلاصه مفاهیمی از فضاهای فینسلری یادآوری می‌شود. برای اطلاعات بیشتر به مرجع [۲] مراجعه کنید. فرض کنید M یک خمینه n -بعدی C^∞ و TM کلاف مماسی آن باشد. در این صورت منظور از یک متریک فینسلری روی خمینه M تابع نامنفی $F : TM \rightarrow \mathbb{R}$ همراه با خواص زیر می‌باشد:

- (۱) تابع F روی کلاف $TM \setminus \{0\} := TM^\circ$ هموار باشد.
- (۲) به ازای هر $x \in M$ ، $y \in T_x M$ و $\lambda > 0$ داشته باشیم: $F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y)$.
- (۳) فرم دو خطی متقارن زیر معین مثبت باشد:

$$g_y : T_x M \otimes T_x M \rightarrow \mathbb{R},$$

$$g_y(u, v) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} F^\vee(x, y + su + tv)|_{s=t=0}.$$

⁵Herman ⁶Kostant ⁷Vinberg ⁸Kowalski and Vanhecke ⁹Szenthe ¹⁰Yan and Huang ¹¹Ledger ¹²Szabo and Deng

تعریف ۱.۲. فرض کنیم $\alpha = \sqrt{\tilde{a}_{ij}(x) y^i y^j}$ نرم القائی توسط متریک ریمانی $\tilde{a}$ بوده و $\beta(x, y) = b_i(x) y^i$ یک ۱-فرمی روی یک خمینه n -بعدی مانند M باشد. همچنین فرض کنیم

$$b := \|\beta(x)\|_\alpha := \sqrt{\tilde{a}_{ij}(x) b^i(x) b^j(x)},$$

که $b^i := \tilde{a}^{ij} b_j$ و تابع F به صورت

$$(2) \quad F := \alpha \varphi(s), \quad s = \frac{\beta}{\alpha},$$

تعریف شود که در آن $\phi = \phi(s)$ یک تابع مثبت C^∞ روی $(-b_0, b_0)$ بوده و در شرط زیر صدق می‌کند:

$$\varphi(s) - s\varphi'(s) + (b^2 - s^2)\varphi''(s) > 0, \quad |s| \leq b < b_0.$$

در این صورت تابع F یک متریک فینسلری است هرگاه

$$\|\beta(x)\|_\alpha < b_0, \quad \forall x \in M.$$

متریک فینسلری به فرم (۲) را یک (α, β) -متریک می‌نامند.

شایان ذکر است که هر فضای فینسلری دارای تابع

$$F(x, y) = \frac{(\alpha + \beta)^2}{\alpha},$$

را فضای مربعی می‌گویند.

هر متریک ریمانی $\tilde{a}$ یک ضرب داخلی روی فضای کتانژانت $T_x^* M$ القاء می‌کند به طوری که

$$\langle dx^i(x), dx^j(x) \rangle = \tilde{a}^{ij}(x).$$

ضرب داخلی القاء شده روی $T_x^* M$ یک ایزومورفیسم بین $T_x^* M$ و $T_x M$ القاء می‌کند. در این صورت ۱-فرمی β متناظر با یک میدان برداری روی M مانند $\tilde{X}$ خواهد بود به طوری که

$$\tilde{a}(y, \tilde{X}(x)) = \beta(x, y).$$

همچنین خواهیم داشت:

$$\|\beta(x)\|_\alpha = \|\tilde{X}(x)\|_\alpha.$$

بنابراین می‌توان هر (α, β) -متریک را به صورت زیر نوشت:

$$(3) \quad F(x, y) = \alpha(x, y) \varphi\left(\frac{\tilde{a}(\tilde{X}(x), y)}{\alpha(x, y)}\right),$$

به طوری که به ازای هر x متعلق به M

$$\sqrt{\tilde{a}(\tilde{X}(x), \tilde{X}(x))} = \|\tilde{X}(x)\|_\alpha < b_0.$$

بنابراین می‌توان متریک مربعی $F(x, y) = \frac{(\alpha + \beta)^2}{\alpha}$ را به صورت زیر نوشت:

$$F(x, y) = \frac{(\sqrt{\tilde{a}(y, y)} + \tilde{a}(X_x, y))^2}{\sqrt{\tilde{a}(y, y)}}.$$

فرض کنیم π^*TM نگاشت برگردان از کلاف مماسی TM باشد به طوری که $M \rightarrow TM^\circ : \pi$. برخلاف التصاق لوی - چویتا در هندسه ریمانی، التصاق طبیعی منحصر بفردی برای هندسه فینسلری وجود ندارد. در بین التصاق‌های موجود روی π^*TM ، التصاق چرن ^{۱۳} با ضرایب Γ_{ij}^k را انتخاب می‌کنیم. این التصاق تقریباً سازگار با g بوده و بدون تاب است. چون در حالت کلی ضرایب التصاق چرن یعنی Γ_{ij}^k ‌ها در مختصات طبیعی به جهت بستگی دارند، لذا بایستی یک بردار مرجع ثابت انتخاب شود. فرض کنید $\sigma(t)$ یک منحنی منظم هموار در M با میدان سرعت T باشد. همچنین فرض کنیم $W(t) := W^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i}$ یک میدان برداری در طول σ باشد. در این صورت عبارت

$$\left[\frac{dW^i}{dt} + W^j T^k (\Gamma_{jk}^i)_{(\sigma, T)} \right] \frac{\partial}{\partial x^i} |_{\sigma(t)},$$

را مشتق کوواریانت $D_T W$ با بردار مرجع T می‌نامند.

تعریف ۲.۲. منحنی $\sigma(t)$ با سرعت $T = \dot{\sigma}(t)$ را یک ژئودزیک فینسلری گویند هرگاه به ازای بردار مرجع T داشته باشیم

$$D_T \left[\frac{T}{F(T)} \right] = 0.$$

توجه شود که ژئودزیک با سرعت ثابت به ازای بردار مرجع T جواب معادله زیر است

$$D_T T = 0.$$

چون $T = \frac{d\sigma^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i}$ ، لذا ژئودزیک‌های با سرعت ثابت را می‌توان با معادلات دیفرانسیل زیر توصیف کرد:

$$\frac{d^2 \sigma^i}{dt^2} + \frac{d\sigma^j}{dt} \frac{d\sigma^k}{dt} (\Gamma_{jk}^i)_{(\sigma, T)} = 0.$$

فرض کنیم (M, F) یک فضای فینسلری همگن و همبند باشد. همچنین فرض کنید G یک گروه همبند متعدی دلخواه از ایزومتري‌های M بوده و H زیرگروه ایزوتروپی در نقطه $o \in M$ باشد. در این صورت می‌توان M را به طور طبیعی به صورت فضای خارج قسمتی G/H با متریک فینسلری G -ناوردای F نوشت. جبر لی $\mathfrak{g}$ از G دارای تجزیه تحویل پذیر $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} + \mathfrak{h}$ است به طوری که $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$ یک زیرفضای برداری از $\mathfrak{g}$ و ایزومورف با فضای مماسی $T_o M$ بوده و $\mathfrak{h}$ جبر لی متناظر با H باشد.

تعریف ۳.۲. فرض کنیم $(G/H, F)$ یک خمینه فینسلری همگن با مبدأ o ، $\mathfrak{g}$ و $\mathfrak{h}$ به ترتیب جبرهای لی متناظر با G و H بوده و $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} + \mathfrak{h}$ یک تجزیه تحویل پذیر باشد. در این صورت منظور از یک ژئودزیک همگن در طول نقطه $o \in G/H$ ژئودزیکی مانند $\gamma(t)$ است به طوری که مداری از یک زیرگروه α -پارامتری از G باشد، به عبارتی

$$(4) \quad \gamma(t) = \exp(tZ)(o), \quad t \in \mathbb{R},$$

که در آن Z یک بردار ناصفر از $\mathfrak{g}$ است. بردار غیر صفر $Z \in \mathfrak{g}$ که به ازای هر $t \in \mathbb{R}$ در معادله $\gamma(t) = \exp(tZ)(o)$ صدق می‌کند را یک بردار ژئودزیک می‌نامند.

نتیجه‌ای که شرط معادل با بردارهای ژئودزیک برای هندسه ریمانی را مشخص می‌کند، توسط کوالسکی و وان هکه ثابت شد [۹]. آنها نشان دادند که بردار $Z \in \mathfrak{g} - \{0\}$ یک بردار ژئودزیک است اگر و تنها اگر

$$(5) \quad \langle [Z, X]_{\mathfrak{m}}, Z_{\mathfrak{m}} \rangle = 0, \quad \forall X \in \mathfrak{m}.$$

مشابه نتیجه بالا برای هندسه فینسلری نیز توسط لطیفی در سال ۲۰۰۷ ثابت شد که در لم زیر به آن می‌پردازیم [۱۰].

¹³Chern

لم ۴.۲. فرض کنیم $(G/H, F)$ یک فضای فینسلری همگن با تجزیه تحویل پذیر $g = h + m$ باشد. در این صورت بردار $X \in g - \{0\}$ یک بردار ژئودزیکی است اگر و تنها اگر

$$(6) \quad g_{X_m}(X_m, [X, Y]_m) = 0, \quad \forall Y \in m,$$

که در آن اندیس m نشانگر تصویر یک بردار از g به m است.

تعریف ۵.۲. فرض کنیم $(M, \tilde{a})$ یک خمینه ریمانی همبند باشد. در این صورت منظور از یک تقارن در $x \in M$ یک ایزومتري از $(M, \tilde{a})$ است به طوری که x یک نقطه ثابت و تنها باشد.

تعریف ۶.۲. فرض کنیم $(M, \tilde{a})$ یک خمینه ریمانی همبند باشد. منظور از یک s -ساختار روی $(M, \tilde{a})$ خانواده‌ای مانند $\{s_x\}_{x \in M}$ است به طوری که به ازای هر $s_x, x \in M$ یک تقارن در $x \in M$ باشد. s -ساختار را منظم گویند هرگاه برای هر دو نقطه $x, y \in M$ داشته باشیم

$$s_x \circ s_y = s_z \circ s_x, \quad z = s_x(y).$$

توجه شود که منظور از یک فضای متقارن تعمیم یافته، خمینه‌ی ریمانی و همبند مانند $(M, \tilde{a})$ است که یک s -ساختار منظم را می‌پذیرد. هر فضای متقارن تعمیم یافته در واقع فضای ریمانی همگن $(G/H, \tilde{a})$ می‌باشد. همچنین s -ساختار $\{s_x\}_{x \in M}$ را از مرتبه k گویند هرگاه به ازای هر $x \in M$ داشته باشیم

$$(s_x)^k = id_M,$$

و k کوچکترین مقداری باشد که دارای این خاصیت است.

۳. ژئودزیکی‌های همگن فضاهای متقارن تعمیم یافته از نوع ۲

فضای متقارن تعمیم یافته ۵-بعدی M از نوع ۲، فضای $\mathbb{R}^5(x, y, z, w, q)$ مجهز به متر ریمانی

$$\begin{aligned} \tilde{a} = & e^{-2\lambda_1 q} dx^2 + e^{2\lambda_1 q} dy^2 + e^{-2\lambda_2 q} dz^2 + e^{2\lambda_2 q} dw^2 + dq^2 + 2\alpha[e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)q} dx dz + e^{(\lambda_1 + \lambda_2)q} dy dw] \\ & + 2\beta[e^{(\lambda_1 - \lambda_2)q} dy dz - e^{(\lambda_2 - \lambda_1)q} dx dw], \end{aligned}$$

است که در آن یکی از روابط

$$(7) \quad (2a) \quad \lambda_1 > \lambda_2 > 0, \quad \alpha^2 + \beta^2 < 1,$$

$$(8) \quad (2b) \quad \lambda_1 = \lambda_2 > 0, \quad \alpha = 0, \quad 0 \leq \beta < 1,$$

$$(9) \quad (2c) \quad \lambda_1 < 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \alpha = 0, \quad 0 < \beta < 1,$$

برقرار است. به عنوان فضای همگن، $M = G/H$ که در آن G گروه تمام ماتریس‌های به فرم زیر است:

$$\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 q} & 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & e^{-\lambda_1 q} & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & e^{\lambda_2 q} & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\lambda_2 q} & w \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

طبق [۷]، زیرفضای خطی m از g ، پایه $\{X_1, X_2, Y_1, Y_2, W\}$ را چنان می‌پذیرد به طوری که به ازای هر $j = 1, 2$ ، داریم:

$$[X_j, W] = -\lambda_j X_j, \quad [Y_j, W] = \lambda_j Y_j.$$

توجه شود که بقیه ضرب‌ها صفر هستند. در ادامه به بررسی حالت‌های روابط (۷)-(۹) می‌پردازیم.

۱.۳. حالت (۲a): در این حالت داریم $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ ، $\alpha^2 + \beta^2 < 1$ که بنابر [۷] $\eta = 0$. براکت لی $[\cdot, \cdot]$ و متریک ریمانی $\tilde{a}$ به ترتیب توسط جدول‌های زیر مشخص می‌شوند:

جدول ۱. براکت لی حالت (۲a)

Table 1: Lie bracket of type (2a)

$[\cdot, \cdot]$	X_1	X_2	Y_1	Y_2	W
W	$\lambda_1 X_1$	$\lambda_2 X_2$	$-\lambda_1 Y_1$	$-\lambda_2 Y_2$	0

جدول ۲. متریک ریمانی حالت (۲a)

Table 2: Riemannian metric of type (2a)

$\tilde{a}(\cdot, \cdot)$	X_1	X_2	Y_1	Y_2	W
X_1	1	α	0	$-\beta$	0
X_2	α	1	β	0	0
Y_1	0	β	1	α	0
Y_2	$-\beta$	0	α	1	0
W	0	0	0	0	1

حال میدان قابی متعامد یکه $\{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5\}$ را با شرایط زیر در نظر می‌گیریم:

$$E_1 = X_1, \quad E_2 = \frac{X_2 - \alpha X_1}{\sqrt{1 - \alpha^2}}, \quad E_3 = \frac{(1 - \alpha^2)Y_1 - \beta X_2 + \alpha \beta X_1}{\sqrt{1 - \alpha^2} \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}}, \quad E_4 = \frac{Y_2 + \beta X_1 - \alpha Y_1}{\sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}}, \quad E_5 = W. \quad (10)$$

حال با استفاده از جدول براکت لی ۱ و معادلات (۱۰) به ازای هر i, j برای براکت لی $[E_i, E_j]$ داریم:

$$\begin{aligned} [E_1, E_5] &= -\lambda_1 E_1, & [E_2, E_5] &= -\lambda_2 E_2 - \frac{\alpha \lambda_2 E_1}{\sqrt{1 - \alpha^2}} + \frac{\alpha \lambda_1 E_1}{\sqrt{1 - \alpha^2}}, \\ [E_3, E_5] &= \lambda_1 E_3 + \frac{\beta E_2}{\sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}} (\lambda_1 + \lambda_2) + \frac{\alpha \beta E_1}{\sqrt{1 - \alpha^2} \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}} (\lambda_2 - \lambda_1), \\ [E_4, E_5] &= \lambda_2 E_4 - \frac{\beta E_1}{\sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}} (\lambda_1 + \lambda_2) - \frac{\alpha E_2}{\sqrt{1 - \alpha^2}} (\lambda_1 - \lambda_2) - \frac{\alpha \beta E_2}{\sqrt{1 - \alpha^2} \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}} (\lambda_1 - \lambda_2). \end{aligned}$$

در ادامه ژئودزیک‌های همگن از متریک‌های مربعی ناورد از چپ را در نظر می‌گیریم که توسط متریک ریمانی $\tilde{a}$ و میدان برداری $X = \sum_{i=1}^5 x_i E_i$ روی فضاهای متقارن تعمیم‌یافته ۵-بعدی از نوع (۲a) تعریف شده‌اند. با استفاده از رابطه

$$g_Y(U, V) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} F^2(x, Y + sU + tV)|_{s=t=0},$$

برای متریک مربعی F خواهیم داشت [۱۵]:

$$\begin{aligned}
 g_Y(U, V) = & \frac{\mathfrak{F}(\sqrt{\tilde{a}(Y, Y)} + \tilde{a}(X, Y))^{\mathfrak{F}}}{\tilde{a}(Y, Y)^{\frac{1}{\mathfrak{F}}}} \left\{ \tilde{a}(X, V)\tilde{a}(Y, U) - \tilde{a}(Y, V)\tilde{a}(X, U) \right\} \\
 & + \frac{\mathfrak{Y}(\sqrt{\tilde{a}(Y, Y)} + \tilde{a}(X, Y))^{\mathfrak{Y}}}{\tilde{a}(Y, Y)} \left\{ \tilde{a}(U, V) + \tilde{a}(X, U)\tilde{a}(X, V) \right. \\
 & - \frac{\tilde{a}(X, Y)\tilde{a}(Y, V)\tilde{a}(Y, U)}{\tilde{a}(Y, Y)^{\frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{Y}}}} + \frac{1}{\sqrt{\tilde{a}(Y, Y)}}(\tilde{a}(X, U)\tilde{a}(Y, V) \\
 & \left. + \tilde{a}(X, Y)\tilde{a}(U, Y) + \tilde{a}(X, V)\tilde{a}(Y, U)) \right\} + \frac{(\tilde{a}(Y, Y) + \tilde{a}(X, Y))^{\mathfrak{F}}}{\tilde{a}(Y, Y)^{\mathfrak{F}}} \\
 & \left\{ \mathfrak{F}\tilde{a}(Y, U)\tilde{a}(Y, V) - \tilde{a}(U, V)\tilde{a}(Y, Y) \right\} + \frac{\mathfrak{F}(\tilde{a}(Y, Y) + \tilde{a}(X, Y))^{\mathfrak{Y}}}{\tilde{a}(Y, Y)} \\
 & \left(\frac{\tilde{a}(Y, V)}{\sqrt{\tilde{a}(Y, Y)}} + \tilde{a}(X, V) \right) \left(\frac{\tilde{a}(Y, U)}{\sqrt{\tilde{a}(Y, Y)}} + \tilde{a}(X, U) - \frac{\mathfrak{Y}\tilde{a}(Y, U)}{\sqrt{\tilde{a}(Y, Y)}} \right. \\
 & \left. - \frac{\mathfrak{Y}\tilde{a}(X, Y)\tilde{a}(Y, U)}{\tilde{a}(Y, Y)} \right).
 \end{aligned}
 \tag{۱۱}$$

بنابراین به ازای هر $Z \in \mathfrak{g}$ خواهیم داشت:

$$g_Y(Y, [Y, Z]) = \phi(r)\phi'(r)\sqrt{\tilde{a}(Y, Y)}\tilde{a}(X + AY, [Y, Z]),
 \tag{۱۲}$$

که در آن $\phi(r) = 1 + \mathfrak{Y}r + r^{\mathfrak{Y}}$ و

$$A = \frac{\phi^{\mathfrak{Y}}(r) - r\phi(r)\phi'(r)}{\phi(r)\phi'(r)\sqrt{\tilde{a}(Y, Y)}}, \quad r = \frac{\tilde{a}(X, Y)}{\sqrt{\tilde{a}(Y, Y)}}.$$

حال بنابر لم ۴.۲ و معادله (۱۲) بردار $Y = \sum_{i=1}^5 y_i E_i$ از $\mathfrak{g}$ یک بردار ژنودزیکیتی از (M, F) است اگر و تنها اگر به ازای هر $j = 1, 2, 3, 4, 5$ داشته باشیم

$$\tilde{a}\left(\sum_{i=1}^5 x_i E_i + A \sum_{i=1}^5 y_i E_i, \left[\sum_{i=1}^5 y_i E_i, E_j\right]\right) = 0.
 \tag{۱۳}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{cases}
 j = ۱ \implies \lambda_1 y_5 (x_1 + Ay_1) = 0, \\
 j = ۲ \implies y_5 \left(\lambda_2 (x_2 + Ay_2) + \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} (x_1 + Ay_1) (\lambda_2 - \lambda_1) \right) = 0, \\
 j = ۳ \implies y_5 \left(\lambda_1 (x_3 + Ay_3) + \frac{\beta(\lambda_1 + \lambda_2)}{\sqrt{1-\alpha^2 - \beta^2}} (x_2 + Ay_2) + \frac{\alpha\beta(\lambda_2 - \lambda_1)}{\sqrt{1-\alpha^2} \sqrt{1-\alpha^2 - \beta^2}} (x_1 + Ay_1) \right) = 0, \\
 j = ۴ \implies y_5 \left(-\lambda_2 (x_4 + Ay_4) + \frac{\beta(\lambda_1 + \lambda_2)}{\sqrt{1-\alpha^2 - \beta^2}} (x_1 + Ay_1) \right. \\
 \quad \left. + \frac{\alpha(\lambda_1 - \lambda_2)}{\sqrt{1-\alpha^2}} \left((x_3 + Ay_3) + \frac{\beta}{\sqrt{1-\alpha^2 - \beta^2}} (x_2 + Ay_2) \right) \right) = 0, \\
 j = ۵ \implies y_1 \left(-\lambda_1 (x_1 + Ay_1) \right) + y_2 \left(-\lambda_2 (x_2 + Ay_2) + \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} (x_1 + Ay_1) (\lambda_1 - \lambda_2) \right) \\
 \quad + y_3 \left(\lambda_1 (x_3 + Ay_3) + \frac{\beta}{\sqrt{1-\alpha^2 - \beta^2}} \left((\lambda_1 + \lambda_2) (x_2 + Ay_2) + \frac{\alpha(\lambda_2 - \lambda_1) (x_1 + Ay_1)}{\sqrt{1-\alpha^2}} \right) \right) \\
 \quad + y_4 \left(\lambda_2 (x_4 + Ay_4) - \frac{\beta(\lambda_1 + \lambda_2)}{\sqrt{1-\alpha^2 - \beta^2}} (x_1 + Ay_1) - \frac{\alpha(\lambda_1 - \lambda_2)}{\sqrt{1-\alpha^2}} (x_3 + Ay_3) \right. \\
 \quad \left. - \frac{\alpha\beta(\lambda_1 - \lambda_2)}{\sqrt{1-\alpha^2} \sqrt{1-\alpha^2 - \beta^2}} (x_2 + Ay_2) \right) = 0.
 \end{cases}
 \quad (۱۴)$$

هرگاه در روابط (۱۴)، $y_5 \neq 0$ آنگاه به ازای $A \neq 0$ خواهیم داشت:

$$y_1 = -\frac{1}{A}x_1, \quad y_2 = -\frac{1}{A}x_2, \quad y_3 = -\frac{1}{A}x_3, \quad y_4 = -\frac{1}{A}x_4.$$

همچنین اگر $y_5 = 0$ و $X = x_5 E_5$ آنگاه روابط (۱۴)، فقط به معادله آخر محدود خواهد شد که خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
 & A \left[y_1 \left(-\lambda_1 y_1 \right) + y_2 \left(-\lambda_2 y_2 + \frac{\alpha(\lambda_1 - \lambda_2)}{\sqrt{1-\alpha^2}} y_1 \right) \right. \\
 & \quad + y_3 \left(\lambda_1 y_3 + \frac{\beta}{\sqrt{1-\alpha^2 - \beta^2}} \left((\lambda_1 + \lambda_2) y_2 + \frac{\alpha(\lambda_2 - \lambda_1)}{\sqrt{1-\alpha^2}} y_1 \right) \right) \\
 & \quad \left. + y_4 \left(\lambda_2 y_4 - \frac{\beta(\lambda_1 + \lambda_2)}{\sqrt{1-\alpha^2 - \beta^2}} y_1 - \frac{\alpha(\lambda_1 - \lambda_2)}{\sqrt{1-\alpha^2}} y_3 - \frac{\alpha\beta(\lambda_1 - \lambda_2)}{\sqrt{1-\alpha^2} \sqrt{1-\alpha^2 - \beta^2}} y_2 \right) \right] = 0.
 \end{aligned}$$

حال فرض کنید $\alpha = \beta = 0$. هرگاه $y_5 \neq 0$ آنگاه از روابط (۱۴)، خواهیم داشت:

$$y_1 = -\frac{1}{A}x_1, \quad y_2 = -\frac{1}{A}x_2, \quad y_3 = -\frac{1}{A}x_3, \quad y_4 = -\frac{1}{A}x_4.$$

بنابراین $Y = \sum_{i=1}^5 y_i E_i$ یک بردار ژئودزیکی است. حال به ازای $y_5 = 0$ و $X = x_5 E_5$ رابطه‌ی

$$\lambda_1 A(y_3^* - y_1^*) + \lambda_2 A(y_4^* - y_2^*) = 0,$$

به دست خواهد آمد. بنابراین $y_1 = \pm y_3$ و $y_2 = \pm y_4$.

$$Y = y_3(E_1 + E_3) + y_4(E_2 + E_4) = 0,$$

$$Y = y_3(-E_1 + E_3) + y_4(-E_2 + E_4) = 0.$$

اگر $\alpha = 0, \beta \neq 0$ یا $\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1$ و $\alpha \neq 0, \beta = 0$ آنگاه برای $y_5 \neq 0$ داریم $Y = \sum_{i=1}^5 y_i E_i$ و برای $y_5 = 0$ و $X = x_5 E_5$ همانند عبارت‌های قبل داریم $y_1 = \pm y_3$ و $y_2 = \pm y_4$ و لذا

$$Y = y_3(E_1 + E_3) + y_4(E_2 + E_4) = 0,$$

$$Y = y_3(-E_1 + E_3) + y_4(-E_2 + E_4) = 0.$$

توجه شود که طبق مطالبی که ارائه شد، نشان دادیم که در هر فضای متقارن تعمیم‌یافته ۵-بعدی از نوع (۲a) مجهز به متریک ناورد از چپ مربعی تعریف شده توسط متریک ریمانی $\tilde{a}$ و میدان برداری X ، بردار $Y \in \mathfrak{g}$ یک بردار ژئودزیکی از (M, F) است اگر و تنها اگر

$$Y = -\frac{1}{A} \sum_{i=1}^4 x_i E_i + y_5 E_5, \quad A \neq 0,$$

یا به ازای $Y = \sum_{i=1}^4 y_i E_i, A \neq 0$ و رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$$\begin{aligned} & y_1(-\lambda_1 y_1) + y_2\left(-\lambda_2 y_2 + \frac{\alpha(\lambda_1 - \lambda_2)}{\sqrt{1-\alpha^2}} y_1\right) \\ & + y_3\left(\lambda_1 y_3 + \frac{\beta}{\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}}\left((\lambda_1 + \lambda_2)y_2 + \frac{\alpha(\lambda_2 - \lambda_1)}{\sqrt{1-\alpha^2}} y_1\right)\right) \\ & + y_4\left(\lambda_2 y_4 - \frac{\beta(\lambda_1 + \lambda_2)}{\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}} y_1 - \frac{\alpha(\lambda_1 - \lambda_2)}{\sqrt{1-\alpha^2}} y_3 - \frac{\alpha\beta(\lambda_1 - \lambda_2)}{\sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}} y_2\right) = 0. \end{aligned}$$

قضیه ۱.۳. فرض کنید (M, F) یک فضای متقارن تعمیم‌یافته ۵-بعدی از نوع (۲a) مجهز به متریک مربعی ناورد از چپ تعریف شده با متریک ریمانی $\tilde{a}$ و میدان برداری $X = x_5 E_5$ باشد. در این صورت بردار $Y \in \mathfrak{g}$ یک بردار ژئودزیکی از (M, F) است اگر و تنها اگر Y یک بردار ژئودزیکی از $(M, \tilde{a})$ باشد.

اثبات. فرض کنید $Y = \sum_{i=1}^5 y_i E_i \in \mathfrak{g}$ یک بردار ژئودزیکی از $(M, \tilde{a})$ باشد. در نتیجه به ازای $i = 1, 2, 3, 4, 5$ و با استفاده از رابطه (۵) داریم $\tilde{a}(Y, [Y, E_i]) = 0$. بنابراین با استفاده از رابطه (۱۳)، $Y \in \mathfrak{g}$ یک بردار ژئودزیکی از (M, F) است.

برعکس، فرض کنید $Y = \sum_{i=1}^5 y_i E_i \in \mathfrak{g}$ یک بردار ژئودزیکی از (M, F) باشد. در نتیجه بنابر ۴.۲، به ازای هر $i = 1, 2, 3, 4, 5$ خواهیم داشت $\tilde{a}(X, [Y, E_i]) = 0$ که با استفاده از رابطه (۱۳) خواهیم داشت:

$$\tilde{a}(Y, [Y, E_i]) = 0.$$

□

۲.۳. حالت (۲b): در این حالت داریم $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, $\alpha = 0$, $\beta > 0$. بنابر [۷]، $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}(2) = \text{Span}(T)$ که در آن T توسط معادلات زیر مشخص می شود:

$$TX_1 = X_2, \quad TX_2 = X_1, \quad TY_1 = Y_2, \quad TY_2 = Y_1, \quad TW = 0.$$

همچنین براکت لی $[\cdot, \cdot]$ و متریکی ریمانی $\tilde{a}$ به ترتیب توسط جدول های ۳ و ۴ مشخص می شوند.

جدول ۳. براکت لی حالت (۲b)

Table 3: Lie bracket of type (2b)

$[\cdot, \cdot]$	X_1	X_2	Y_1	Y_2	W	T
W	$\lambda_1 X_1$	$\lambda_2 X_2$	$-\lambda_1 Y_1$	$-\lambda_2 Y_2$	0	0
T	X_2	$-X_1$	Y_2	$-Y_1$	0	0

جدول ۴. متریکی ریمانی حالت (۲b)

Table 4: Riemannian metric of type (2b)

$\tilde{a}(\cdot, \cdot)$	X_1	X_2	Y_1	Y_2	W
X_1	1	0	0	$-\beta$	0
X_2	0	1	β	0	0
Y_1	0	β	1	0	0
Y_2	$-\beta$	0	0	1	0
W	0	0	0	0	1

حال میدان قابی متعامد یکه $\{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5\}$ را با شرایط زیر در نظر می گیریم:

$$(15) \quad E_1 = X_1, \quad E_2 = X_2, \quad E_3 = \frac{Y_1 - \beta X_2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad E_4 = \frac{Y_2 + \beta X_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad E_5 = W.$$

با استفاده از جدول ۳ براکت لی و معادلات (۱۵) به ازای هر i, j برای براکت لی $[E_i, E_j]$ داریم:

$$[E_1, E_5] = -\lambda_1 E_1, \quad [E_2, E_5] = -\lambda_2 E_2,$$

$$[E_3, E_5] = \lambda_1 E_3 + \frac{\beta E_2}{\sqrt{1 - \beta^2}}(\lambda_1 + \lambda_2),$$

$$[E_4, E_5] = \lambda_2 E_4 - \frac{\beta E_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}(\lambda_1 + \lambda_2),$$

$$[E_1, T] = -E_2, \quad [E_2, T] = E_1, \quad [E_3, T] = -E_4, \quad [E_4, T] = E_3.$$

در ادامه ژئودزیک های همگن از متریکی های مربعی ناورد از چپ را در نظر می گیریم که توسط متریکی ریمانی $\tilde{a}$ و میدان برداری $X = \sum_{i=1}^5 x_i E_i$ روی فضاهای متقارن تعمیم یافته ۵- بعدی از نوع (۲b) تعریف شده اند. بنابر لم ۴.۲ و معادله

(۱۲) بردار $Y = \sum_{i=1}^5 y_i E_i$ از $\mathfrak{g}$ یک بردار ژنودزیکی از (M, F) است اگر و تنها اگر به ازای هر $j = 1, 2, 3, 4, 5$ و اسکالر t داشته باشیم:

$$(16) \quad \tilde{a} \left(\sum_{i=1}^5 x_i E_i + A \sum_{i=1}^5 y_i E_i, \left[\sum_{i=1}^5 y_i E_i + tT, E_j \right] \right) = 0.$$

پس:

$$(17) \quad \begin{cases} j=1 \Rightarrow \lambda_1 y_5 (x_1 + Ay_1) + t(x_2 + Ay_2) = 0, \\ j=2 \Rightarrow y_5 \lambda_1 (x_2 + Ay_2) - t(x_1 + Ay_1) = 0, \\ j=3 \Rightarrow y_5 \left(-\lambda_1 (x_3 + Ay_3) - \frac{\sqrt{2}\beta\lambda_1}{\sqrt{1-\beta^2}} (x_2 + Ay_2) \right) + t(x_4 + Ay_4) = 0, \\ j=4 \Rightarrow y_5 \left(-\lambda_1 (x_4 + Ay_4) + \frac{\sqrt{2}\beta\lambda_1}{\sqrt{1-\beta^2}} (x_1 + Ay_1) \right) - t(x_3 + Ay_3) = 0, \\ j=5 \Rightarrow -y_1 (x_1 + Ay_1) - y_2 (x_2 + Ay_2) + y_3 \left((x_3 + Ay_3) + \frac{\sqrt{2}\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} (x_2 + Ay_2) \right) \\ + y_4 \left((x_4 + Ay_4) - \frac{\sqrt{2}\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} (x_1 + Ay_1) \right) = 0. \end{cases}$$

هرگاه در روابط (۱۷)، $y_5 = 0$ و $t \neq 0$ آنگاه به ازای $A \neq 0$ خواهیم داشت:

$$y_1 = -\frac{1}{A}x_1, \quad y_2 = -\frac{1}{A}x_2, \quad y_3 = -\frac{1}{A}x_3, \quad y_4 = -\frac{1}{A}x_4.$$

بنابراین $Y = \sum_{i=1}^4 y_i E_i + tT$ یک بردار ژنودزیکی است. هرگاه در روابط (۱۷)، $y_5 \neq 0$ و $t = 0$ آنگاه به ازای $A \neq 0$ خواهیم داشت:

$$y_1 = -\frac{1}{A}x_1, \quad y_2 = -\frac{1}{A}x_2, \quad y_3 = -\frac{1}{A}x_3, \quad y_4 = -\frac{1}{A}x_4,$$

و هرگاه $t \neq 0$ و $y_5 \neq 0$ آنگاه از روابط (۱۷) به ازای $A \neq 0$ نتیجه می شود که

$$y_1 = -\frac{1}{A}x_1, \quad y_2 = -\frac{1}{A}x_2, \quad y_3 = -\frac{1}{A}x_3, \quad y_4 = -\frac{1}{A}x_4.$$

همچنین اگر $y_5 = t = 0$ و $X = x_5 E_5$ آنگاه روابط (۱۷)، فقط به معادله آخر محدود خواهد شد که خواهیم داشت:

$$A[y_1^2 + y_2^2] = A \left[y_3 \left(y_3 + \frac{\sqrt{2}\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} y_2 \right) + y_4 \left(y_4 - \frac{\sqrt{2}\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} y_1 \right) \right].$$

توجه شود که طبق مطالبی که ارائه شد، نشان دادیم که در هر فضای مقارن تعمیم یافته ۵-بعدی از نوع (۲b) مجهز به متریک ناورد از چپ مربعی تعریف شده توسط متریک ریمانی $\tilde{a}$ و میدان برداری X ، بردار $Y \in \mathfrak{g}$ یک بردار ژنودزیکی از (M, F) است اگر و تنها اگر

$$Y = -\frac{1}{A} \sum_{i=1}^4 x_i E_i + y_5 E_5 \quad \text{یا} \quad Y = \sum_{i=1}^4 y_i E_i + tT, \quad A \neq 0,$$

یا به ازای $Y = \sum_{i=1}^4 y_i E_i$ ، $A \neq 0$ و رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$$y_1^2 + y_2^2 = y_3(y_3 + \frac{2\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}y_2) + y_4(y_4 - \frac{2\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}y_1).$$

قضیه ۲.۳. فرض کنید (M, F) یک فضای متقارن تعمیم یافته ۵- بعدی از نوع $(2b)$ مجهز به متریک مربعی ناورد از چپ تعریف شده با متریک ریمانی $\tilde{a}$ و میدان برداری $X = x_5 E_5$ باشد. در این صورت بردار $Y \in \mathfrak{g}$ یک بردار ژئودزیکی از (M, F) است اگر و تنها اگر Y یک بردار ژئودزیکی از $(M, \tilde{a})$ باشد.

اثبات. اثبات مشابه اثبات حالت $(2a)$ است. $\square$

۳.۳. حالت $(2c)$: در این حالت داریم: $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0, \alpha = 0, 0 < \beta < 1$. همچنین بنابر مرجع [۷]، $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}(2) \oplus \mathfrak{so}(2) = \text{Span}(T_1, T_2)$ همانند حالت $2b$ و T_2 توسط معادلات زیر مشخص می‌شود:

$$T_2 X_1 = X_2, \quad T_2 X_2 = -X_1, \quad T_2 Y_1 = -Y_2, \quad T_2 Y_2 = Y_1, \quad T_2 W = 0.$$

همچنین بنابر [۷] براکت لی $[\cdot, \cdot]$ و متریک ریمانی $\tilde{a}$ به ترتیب توسط جدول‌های ۵ و ۶ مشخص می‌شوند.

جدول ۵. براکت لی حالت $(2c)$

Table 5: Lie bracket of type $(2c)$

$[\cdot, \cdot]$	X_1	X_2	Y_1	Y_2	W	T_1	T_2
W	$\lambda_1 X_1$	0	$-\lambda_1 Y_1$	0	0	0	0
T_1	X_2	$-X_1$	Y_2	$-Y_1$	0	-	-
T_2	X_2	$-X_1$	$-Y_2$	Y_1	0	-	-

جدول ۶. متریک ریمانی حالت $(2c)$

Table 6: Riemannian metric of type $(2c)$

$\tilde{a}(\cdot, \cdot)$	X_1	X_2	Y_1	Y_2	W
X_1	1	0	0	$-\beta$	0
X_2	0	1	β	0	0
Y_1	0	β	1	0	0
Y_2	$-\beta$	0	0	1	0
W	0	0	0	0	1

حال میدان قابی متعامد یکه $\{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5\}$ را با شرایط زیر در نظر می‌گیریم:

$$(18) \quad E_1 = X_1, \quad E_2 = X_2, \quad E_3 = \frac{Y_1 - \beta X_2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad E_4 = \frac{Y_2 + \beta X_1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad E_5 = W.$$

با استفاده از جدول ۵ براکت لی و معادلات (۱۸) به ازای هر i, j برای براکت لی $[E_i, E_j]$ داریم:

$$[E_1, E_5] = -\lambda_1 E_1, \quad [E_2, E_5] = 0, \quad [E_3, E_5] = \lambda_1 E_3 + \frac{\beta \lambda_1 E_2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad [E_4, E_5] = -\frac{\beta \lambda_1 E_1}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$[E_1, T_1] = -E_2, \quad [E_2, T_1] = E_1, \quad [E_3, T_1] = -E_4, \quad [E_4, T_1] = E_3.$$

$$[E_1, T_2] = -E_2, \quad [E_2, T_2] = E_1, \quad [E_3, T_2] = E_4 - \frac{2\beta E_1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad [E_4, T_2] = -E_3 - \frac{2\beta E_1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

در ادامه ژنودزیک‌های همگن از متریک‌های مربعی ناورد از چپ را در نظر می‌گیریم که توسط متریک ریمانی $\tilde{a}$ و میدان برداری $X = \sum_{i=1}^5 x_i E_i$ روی فضاها متقارن تعمیم‌یافته ۵-بعدی از نوع (۲c) تعریف شده‌اند. بنابر لم ۴.۲ و معادله (۱۲) بردار $Y = \sum_{i=1}^5 y_i E_i$ از $\mathfrak{g}$ یک بردار ژنودزیکی از (M, F) است اگر و تنها اگر به ازای هر $j = 1, 2, 3, 4, 5$ اسکالرهای t_1 و t_2 داشته باشیم:

$$(19) \quad \tilde{a}\left(\sum_{i=1}^5 x_i E_i + A \sum_{i=1}^5 y_i E_i, \left[\sum_{i=1}^5 y_i E_i + t_1 T_1 + t_2 T_2, E_j\right]\right) = 0.$$

پس:

$$\begin{cases} j=1 \implies \lambda_1 y_5 (x_1 + A y_1) + (t_1 + t_2)(x_2 + A y_2) = 0, \\ j=2 \implies (t_1 + t_2)(x_1 + A y_1) = 0, \\ j=3 \implies y_5 \left(-\lambda_1 (x_3 + A y_3) - \frac{\beta \lambda_1}{\sqrt{1-\beta^2}} (x_2 + A y_2) \right) + (t_1 - t_2)(x_4 + A y_4) + \frac{2\beta t_2}{\sqrt{1-\beta^2}} (x_1 + A y_1) = 0, \\ j=4 \implies \frac{\beta \lambda_1}{\sqrt{1-\beta^2}} y_5 (x_1 + A y_1) - (t_1 - t_2)(x_3 + A y_3) + \frac{2\beta t_2}{\sqrt{1-\beta^2}} (x_2 + A y_2) = 0, \\ j=5 \implies -y_1 (x_1 + A y_1) + y_3 (x_3 + A y_3) + \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} y_3 (x_2 + A y_2) - \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} y_4 (x_1 + A y_1) = 0. \end{cases}$$

فرض کنید $X = x_3(E_3 - E_2)$, $\lambda_1 = 1$, $\beta = \frac{\sqrt{F}}{F}$ و $A \neq 0$. در این صورت از روابط (۲۰) دستگاه معادلات زیر را خواهیم داشت:

$$(21) \quad A y_5 y_1 + (t_1 + t_2)(-x_3 + A y_2) = 0,$$

$$(22) \quad (t_1 + t_2)(A y_1) = 0,$$

$$(23) \quad -A y_5 (y_3 + y_2) + (t_1 - t_2) A y_4 + 2 t_2 A y_1 = 0,$$

$$(24) \quad A y_5 y_1 - (t_1 - t_2)(x_3 + A y_3) + 2 t_2 (-x_3 + A y_2) = 0,$$

$$(25) \quad A(-y_1(y_1 + y_4) + y_3(y_3 + y_2)) = 0,$$

هرگاه $t_1 \neq \pm t_2$ ، آنگاه از رابطه (۲۲) داریم $y_1 = 0$. لذا از رابطه (۲۱) خواهیم داشت $y_2 = \frac{1}{A} x_3$. همچنین از رابطه (۲۴) عبارت $x_3 = -\frac{1}{A} x_3$ و از رابطه (۲۳) عبارت $y_4 = 0$ به دست می‌آید. بنابراین خواهیم داشت:

$$Y = y_2(E_2 - E_3) + y_5 E_5 + t_1 T_1 + t_2 T_2.$$

هرگاه $t_1 = t_2 = 0$ آنگاه از رابطه (۲۱) خواهیم داشت $y_1 = 0$ یا $y_5 = 0$. همچنین از رابطه (۲۳) نتیجه می شود $y_5 = 0$ یا $y_3 = -y_2$. اگر $y_1 = 0$ خواهیم داشت:

$$Y = y_2(E_2 - E_3) + y_4E_4 + y_5E_5.$$

اگر $y_1 \neq 0$ آنگاه دستگاه معادلات بالا فقط به معادله آخر یعنی $-y_1(y_1 + y_4) + y_3(y_3 + y_2) = 0$ کاهش می یابد. بنابراین $Y = \sum_{i=1}^5 y_i E_i$ یک بردار ژئودزیک است و رابطه $-y_1(y_1 + y_4) + y_3(y_3 + y_2) = 0$ برقرار است. از روابط $a + b = 0, a - b = 0, b \neq 0$ و $y_5 \neq 0$ نتیجه می شود که $y_1 = 0$ و $y_3 = -y_2$. در نتیجه خواهیم داشت:

$$Y = y_2(E_2 - E_3) + y_4E_4 + t_1(T_1 + T_2).$$

همچنین به ازای $a + b = 0$ و $b \neq 0$ نتیجه می شود $y_1 \neq 0$ و $y_4 = y_1$. در نتیجه

$$Y = y_1(E_1 + E_4) + y_2(E_2 - E_3) + t_2(T_2 - T_1).$$

قضیه ۳.۳. فرض کنید (M, F) یک فضای متقارن تعمیم یافته ۵- بعدی از نوع (۲c) مجهز به متریکی مربعی ناوردا از چپ تعریف شده با متریکی ریمانی $\tilde{a}$ و میدان برداری $X = x_5E_5$ باشد. در این صورت بردار $Y \in \mathfrak{g}$ یک بردار ژئودزیک از (M, F) است اگر و تنها اگر Y یک بردار ژئودزیک از $(M, \tilde{a})$ باشد.

□

اثبات. اثبات مشابه اثبات حالت (۲a) و حالت (۲b) است.

۴. ژئودزیک های همگن فضاهای متقارن تعمیم یافته از نوع ۳

فضای همگن $SO(3, \mathbb{C})/SO(2)$ را فضای متقارن تعمیم یافته ۵- بعدی از نوع ۳ می نامند که در آن $SO(3, \mathbb{C})$ گروه متعامد مختلط خاص بوده و متریکی ریمانی از M توسط فرم نیمه معین مثبت ناوردا حقیقی از $GL(3, \mathbb{C})$ القاء می شود [۷].

در این حالت بنابر [۷] داریم $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}(2) = \text{Span}(T)$ که در آن T توسط معادلات زیر نسبت به پایه $\{X_1, X_2, Y_1, Y_2, W\}$ از $\mathfrak{m}$ مشخص می شود:

$$TX_1 = X_2, TX_2 = -X_1, TY_1 = Y_2, TY_2 = -Y_1, TW = 0.$$

براکت لی $[\cdot, \cdot]$ و متریکی ریمانی $\tilde{a}$ به ترتیب توسط جدول های ۷ و ۸ مشخص می شوند.

که در آن $a, b > 0$ و γ اعداد حقیقی و $a^2 > |\gamma|$. میدان قابی متعامد یک $\{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5\}$ را با شرایط زیر در نظر می گیریم:

$$(26) \quad E_1 = X_1/a, E_2 = X_2/a, E_3 = \frac{a^2 Y_1 - \gamma X_2}{a\sqrt{a^4 - \gamma^2}}, E_4 = \frac{a^2 Y_2 + \gamma X_1}{a\sqrt{a^4 - \gamma^2}}, E_5 = W/b.$$

با استفاده از جدول ۷ براکت لی و معادلات (۲۶) و فرض $b = 1$ به ازای هر i, j برای براکت لی $[E_i, E_j]$ داریم:

$$[E_1, E_4] = -\frac{E_5}{\sqrt{a^4 - \gamma^2}}, [E_2, E_3] = \frac{E_5}{\sqrt{a^4 - \gamma^2}}, [E_1, E_5] = -E_1, [E_2, E_5] = -E_2,$$

$$[E_3, E_5] = E_3 + \frac{2\gamma E_2}{\sqrt{a^4 - \gamma^2}}, [E_4, E_5] = E_4 - \frac{2\gamma E_1}{\sqrt{a^4 - \gamma^2}},$$

$$[E_1, T] = -E_2, [E_2, T] = E_1, [E_3, T] = -E_4, [E_4, T] = E_3.$$

جدول ۷. براکت لی از نوع ۳

Table 7: Lie bracket of type (3)

$[,]$	X_1	X_2	Y_1	Y_2	W	T
X_1	0	0	0	$-W$	$-X_1$	$-X_2$
X_2	0	0	W	0	$-X_2$	X_1
Y_1	0	$-W$	0	0	Y_1	$-Y_2$
Y_2	W	0	0	0	Y_2	Y_1
W	X_1	X_2	$-Y_1$	$-Y_2$	0	0
T	X_2	$-X_1$	Y_2	Y_1	0	0

جدول ۸. متریک ریمانی از نوع ۳

Table 8: Riemannian metric of type (3)

$\tilde{a}(,)$	X_1	X_2	Y_1	Y_2	W
X_1	a^2	0	0	$-\gamma$	0
X_2	0	a^2	γ	0	0
Y_1	0	γ	a^2	0	0
Y_2	$-\gamma$	0	0	a^2	0
W	0	0	0	0	b^2

در ادامه ژئودزیک‌های همگن از متریک‌های مربعی ناورد از چپ را در نظر می‌گیریم که توسط متریک ریمانی $\tilde{a}$ و میدان برداری $X = \sum_{i=1}^5 x_i E_i$ روی فضاهای متقارن تعمیم‌یافته ۵-بعدی از نوع (۳) تعریف شده‌اند. بنابر لم ۴.۲ و معادله (۱۲) بردار $Y = \sum_{i=1}^5 y_i E_i$ از $\mathfrak{g}$ یک بردار ژئودزیکی از (M, F) است اگر و تنها اگر به ازای هر $j = 1, 2, 3, 4, 5$ و اسکالر t داشته باشیم:

$$(27) \quad \tilde{a} \left(\sum_{i=1}^5 x_i E_i + A \sum_{i=1}^5 y_i E_i, \left[\sum_{i=1}^5 y_i E_i + tT, E_j \right] \right) = 0.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} j = 1 \Rightarrow y_5(x_1 + Ay_1) + \frac{y_4}{\sqrt{a^4 - \gamma^2}}(x_5 + Ay_5) + t(x_2 + Ay_2) = 0, \\ j = 2 \Rightarrow y_5(x_2 + Ay_2) - \frac{y_3}{\sqrt{a^4 - \gamma^2}}(x_5 + Ay_5) - t(x_1 + Ay_1) = 0, \\ j = 3 \Rightarrow \frac{y_2}{\sqrt{a^4 - \gamma^2}}(x_5 + Ay_5) - y_5 \left((x_3 + Ay_3) + \frac{2\gamma}{\sqrt{a^4 - \gamma^2}}(x_2 + Ay_2) \right) + t(x_4 + Ay_4) = 0, \\ j = 4 \Rightarrow -\frac{y_1}{\sqrt{a^4 - \gamma^2}}(x_5 + Ay_5) - y_5 \left((x_4 + Ay_4) + \frac{2\gamma}{\sqrt{a^4 - \gamma^2}}(x_1 + Ay_1) \right) - t(x_3 + Ay_3) = 0, \\ j = 5, \Rightarrow -y_1(x_1 + Ay_1) - y_2(x_2 + Ay_2) + y_3(x_3 + Ay_3) + y_4(x_4 + Ay_4) \\ + \frac{2\gamma}{\sqrt{a^4 - \gamma^2}} \left(y_3(x_2 + Ay_2) - y_4(x_1 + Ay_1) \right) = 0. \end{array} \right. \quad (28)$$

فرض کنید $X = x_2(E_2 - 2E_3)$ ، $\frac{\gamma}{\sqrt{a^4 - \gamma^2}} = 1$ و $A \neq 0$. در این صورت از روابط (۲۸) دستگاه معادلات زیر را خواهیم داشت:

$$(29) \quad Ay_5 \left(y_1 + \frac{y_4}{\sqrt{a^4 - \gamma^2}} \right) + t(x_2 + Ay_2) = 0,$$

$$(30) \quad y_5 \left(x_2 + Ay_2 - \frac{Ay_3}{\sqrt{a^4 - \gamma^2}} \right) - tAy_1 = 0,$$

$$(31) \quad A \left(y_5 \left(\frac{y_2}{\sqrt{a^4 - \gamma^2}} - y_3 - 2y_2 \right) + ty_4 \right) = 0,$$

$$(32) \quad Ay_5 \left(y_1 \left(\frac{1 + 2\sqrt{a^4 - \gamma^2}}{\sqrt{a^4 - \gamma^2}} \right) + y_4 \right) + t(-2x_2 + Ay_3) = 0,$$

$$(33) \quad -Ay_1^2 - Ay_2^2 + Ay_3^2 + Ay_4^2 + y_2(2Ay_3 - x_2) - 2Ay_1y_4 = 0.$$

هرگاه $y_5 \neq 0$ ، $t = 0$ ، آنگاه از روابط (۲۹) و (۳۲) خواهیم داشت $y_1 = y_4 = 0$. از طرفی از رابطه (۳۱) خواهیم داشت $y_3 = y_2 = -\frac{(a^4 - \gamma^2)x_2}{A((a^4 - \gamma^2) + 2\sqrt{a^4 - \gamma^2} - 1)}$. لذا با استفاده از آخرین رابطه به دست آمده و رابطه (۳۰) عبارت $y_2 = -\frac{(a^4 - \gamma^2)x_2}{A((a^4 - \gamma^2) + 2\sqrt{a^4 - \gamma^2} - 1)}$ به دست می‌آید. بنابراین خواهیم داشت:

$$Y = y_2E_2 + y_3E_3 + y_5E_5.$$

حال فرض کنید $t \neq 0$ ، $y_5 = 0$. آنگاه از رابطه (۲۹) خواهیم داشت $y_2 = -\frac{1}{A}x_2$. همچنین از روابط (۳۰) و (۳۱) نتیجه می‌شود $y_1 = y_4 = 0$ و از رابطه (۳۲) داریم $y_3 = \frac{1}{A}x_2 = -2y_2$. لذا خواهیم داشت:

$$Y = y_2(E_2 - 2E_3) + tT.$$

حال فرض کنید $X = x_1(E_1 + 2E_4)$ ، $\frac{\gamma}{\sqrt{a^4 - \gamma^2}} = 1$ و $A \neq 0$. در این صورت از روابط (۲۸) دستگاه معادلات زیر را خواهیم داشت:

$$(34) \quad y_5 \left(x_1 + Ay_1 + \frac{Ay_4}{\sqrt{a^4 - \gamma^2}} \right) + t(Ay_2) = 0,$$

$$(35) \quad Ay_5 \left(y_2 - \frac{y_3}{\sqrt{a^4 - \gamma^2}} \right) - t(x_1 + Ay_1) = 0,$$

$$(36) \quad Ay_5 \left(\frac{y_2}{\sqrt{a^4 - \gamma^2}} - y_3 - 2y_2 \right) + t(2x_1 + Ay_4) = 0,$$

$$(37) \quad y_5 \left(\frac{Ay_1}{\sqrt{a^4 - \gamma^2}} + 4x_1 + A(y_1 + y_4) \right) + tAy_3 = 0,$$

$$(38) \quad -Ay_1^2 - Ay_2^2 + Ay_3^2 + Ay_4^2 + 2Ay_3y_2 - y_1(x_1 + 2Ay_4) = 0.$$

هرگاه $y_5 \neq 0$ ، $t = 0$ ، آنگاه از روابط (۳۴) و (۳۷) به ترتیب خواهیم داشت:

$$y_1 = \frac{-x_1}{A} - \frac{y_4}{\sqrt{a^4 - \gamma^2}},$$

$$Ay_4 \left(1 - \frac{1 + \sqrt{a^4 - \gamma^2}}{a^4 - \gamma^2} \right) = x_1 \left(-4 + \frac{1 + \sqrt{a^4 - \gamma^2}}{\sqrt{a^4 - \gamma^2}} \right).$$

از طرفی از روابط (۳۵) و (۳۶) داریم $y_2 = y_3 = 0$. بنابراین

$$Y = y_1 E_1 + y_4 E_4 + y_5 E_5.$$

حال فرض کنید $t \neq 0$ ، $y_5 = 0$. آنگاه از روابط (۳۴) و (۳۷) خواهیم داشت $y_2 = y_3 = 0$. همچنین از روابط (۳۵) و (۳۶) نتیجه می شود $y_4 = -2y_1$ و لذا:

$$Y = y_1(E_1 + 2E_4) + tT.$$

حال فرض کنید $X = x_3 E_3$ ، $\frac{\gamma}{\sqrt{a^4 - \gamma^2}} = 1$ و $A \neq 0$. در این صورت از روابط (۲۸) دستگاه معادلات زیر را خواهیم داشت:

$$(39) \quad Ay_5 \left(y_1 + \frac{y_4}{\sqrt{a^4 - \gamma^2}} \right) + t(Ay_2) = 0,$$

$$(40) \quad Ay_5 \left(y_2 - \frac{y_3}{\sqrt{a^4 - \gamma^2}} \right) - tAy_1 = 0,$$

$$(41) \quad y_5 \left(\frac{Ay_2}{\sqrt{a^4 - \gamma^2}} - x_3 - Ay_3 - 2Ay_2 \right) + tAy_4 = 0,$$

$$(42) \quad Ay_5 \left(\frac{y_1}{\sqrt{a^4 - \gamma^2}} + y_1 + y_4 \right) + t(x_3 + Ay_3) = 0,$$

$$(43) \quad -Ay_1^2 - Ay_2^2 + Ay_3^2 + Ay_4^2 + y_3(x_3 + 2Ay_2) - 2Ay_1y_4 = 0.$$

هرگاه $y_5 \neq 0$ ، $t = 0$ ، آنگاه از روابط (۳۹) و (۴۲) خواهیم داشت: $y_1 = y_4 = 0$. از طرفی از روابط (۴۰) و (۴۱) به ترتیب داریم:

$$y_2 = \frac{y_3}{\sqrt{a^4 - \gamma^2}}, \quad y_3 = y_2 \left(\frac{1}{\sqrt{a^4 - \gamma^2}} - 2 \right) - \frac{x_3}{A}.$$

بنابراین

$$Y = y_2 E_2 + y_3 E_3 + y_5 E_5.$$

هرگاه $t \neq 0$ ، $y_5 = 0$ ، آنگاه

$$y_1 = y_2 = y_4 = y_5 = 0, \quad y_3 = -\frac{x_3}{A}.$$

و لذا

$$Y = y_3 E_3 + tT.$$

همچنین برای حالت $t \neq 0$ و $y_5 \neq 0$ مشابه حالت های قبل بعد از محاسبات داریم:

$$Y = \sum_{i=1}^5 y_i E_i + tT.$$

حال فرض کنید $X = x_4 E_4$ ، $\frac{\gamma}{\sqrt{a^4 - \gamma^2}} = 1$ و $A \neq 0$. در این صورت از روابط (۲۸) دستگاه معادلات زیر را خواهیم داشت:

$$(44) \quad Ay_5 \left(y_1 + \frac{y_4}{\sqrt{a^4 - \gamma^2}} \right) + t(Ay_2) = 0,$$

$$(45) \quad Ay_5 \left(y_2 - \frac{y_3}{\sqrt{a^4 - \gamma^2}} \right) - tAy_1 = 0,$$

$$(46) \quad Ay_5 \left(\frac{y_2}{\sqrt{a^4 - \gamma^2}} - y_3 - 2y_2 \right) + t(x_4 + Ay_4) = 0,$$

$$(47) \quad y_5 \left(\frac{Ay_1}{\sqrt{a^4 - \gamma^2}} + x_4 + A(y_1 + y_4) \right) + tAy_3 = 0,$$

$$(48) \quad -Ay_1^2 - Ay_2^2 + Ay_3^2 + Ay_4^2 + 2Ay_2y_3 + y_4(x_4 - 2Ay_1) = 0.$$

مشابه حالت های قبل از روابط (۴۴)-(۴۸) برای $y_5 \neq 0$ و $t = 0$ و $y_5 = 0$ و $t \neq 0$ به ترتیب نتیجه می شود:

$$Y = y_1 E_1 + y_4 E_4 + y_5 E_5,$$

$$Y = y_4 E_4 + tT.$$

نتیجه ۱.۴. فرض کنید (M, F) یک فضای متقارن تعمیم یافته ۵- بعدی از نوع ۳ مجهز به متریک مربعی ناورد از چپ تعریف شده با متریک ریمانی $\tilde{a}$ و میدان برداری X باشد. در این صورت بردارهای ژئودزیکی فقط به x_5, x_4, x_3, x_2, x_1 ، y_5 و t بستگی دارند.

۵. ژئودزیک‌های همگن فضاهای متقارن تعمیم‌یافته از نوع ۷

فضاهای همگن متقارن تعمیم‌یافته ۵- بعدی M از نوع ۷ در واقع گروه‌های ماتریسی حقیقی به‌فرم زیر هستند:

$$\begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & e^{-\lambda t} & 0 & 0 & y \\ te^{\lambda t} & 0 & e^{\lambda t} & 0 & u \\ 0 & -te^{-\lambda t} & 0 & e^{-\lambda t} & v \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

همچنین M به‌صورت $\mathbb{R}^5(x, y, u, v, t)$ مجهز به متریک ریمانی

$$\tilde{a} = dt^2 + e^{-2\lambda t}(tdx - du)^2 + e^{2\lambda t}(tdy + dv)^2 + a^2(e^{-2\lambda t}dx^2 + e^{2\lambda t}dy^2) + 2\gamma(dydu - dx dv),$$

است که در آن $\gamma^2 < a^2$ و $a > 0, \lambda \geq 0, \lambda, a, \gamma \in \mathbb{R}$

۱.۵. حالت (۷a): در این حالت داریم $\lambda \neq 0$.

همچنین بنابر [۷]، $\mathfrak{h} = 0$ و پایه $\{X_1, X_2, Y_1, Y_2, W\}$ از $\mathfrak{g}$ چنان موجود است به‌طوری‌که برای براکت لی $[\cdot, \cdot]$ داریم:

$$[W, X_1] = \lambda X_1 + X_2, \quad [W, X_2] = \lambda X_2, \quad [W, Y_1] = -\lambda Y_1 - Y_2, \quad [W, Y_2] = -\lambda Y_2, \quad [W, W] = 0,$$

و بقیه حاصلضرب‌ها صفر هستند. همچنین متریک ریمانی $\tilde{a}$ نیز به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{a}(X_1, X_1) = \tilde{a}(Y_1, Y_1) = a^2, \quad \tilde{a}(X_2, X_2) = \tilde{a}(Y_2, Y_2) = \tilde{a}(W, W) = 1, \quad \tilde{a}(X_1, Y_2) = -\gamma, \quad \tilde{a}(X_2, Y_1) = \gamma.$$

میدان قابی متعامد یکه $\{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5\}$ را با شرایط زیر در نظر می‌گیریم:

$$(49) \quad E_1 = \frac{X_1}{a}, \quad E_2 = X_2, \quad E_3 = \frac{Y_1 - \gamma X_2}{\sqrt{a^2 - \gamma^2}}, \quad E_4 = \frac{a^2 Y_2 + \gamma X_1}{a\sqrt{a^2 - \gamma^2}}, \quad E_5 = W.$$

با استفاده از تعریف براکت لی مذکور و معادله (۴۹) به ازای هر i, j برای براکت لی $[E_i, E_j]$ داریم:

$$[E_1, E_5] = -\lambda E_1 - \frac{E_2}{a}, \quad [E_2, E_5] = -\lambda E_2, \quad [E_3, E_5] = -\frac{\gamma E_1}{a\sqrt{a^2 - \gamma^2}} + \frac{2\gamma\lambda E_2}{\sqrt{a^2 - \gamma^2}} + \lambda E_3 + \frac{E_4}{a},$$

$$[E_4, E_5] = -\frac{2\gamma\lambda E_1}{\sqrt{a^2 - \gamma^2}} - \frac{\gamma E_2}{a\sqrt{a^2 - \gamma^2}} + \lambda E_4.$$

در ادامه ژئودزیک‌های همگن از متریک‌های مربعی ناوردا از چپ را در نظر می‌گیریم که توسط متریک ریمانی $\tilde{a}$ و میدان

بردار $X = \sum_{i=1}^5 x_i E_i$ روی فضاهای متقارن تعمیم‌یافته ۵- بعدی از نوع (۷a) تعریف شده‌اند. بنابر لم ۴.۲ و معادله

(۱۲) بردار $Y = \sum_{i=1}^5 y_i E_i$ از $\mathfrak{g}$ یک بردار ژئودزیکی از (M, F) است اگر و تنها اگر به ازای هر $j = 1, 2, 3, 4, 5$ داشته باشیم:

$$(50) \quad \tilde{a}\left(\sum_{i=1}^5 x_i E_i + A \sum_{i=1}^5 y_i E_i, \left[\sum_{i=1}^5 y_i E_i, E_j\right]\right) = 0.$$

پس:

$$\left\{ \begin{array}{l} j = 1 \Rightarrow a\lambda y_5(x_1 + Ay_1) + y_5(x_2 + Ay_2) = 0, \\ j = 2 \Rightarrow y_5\lambda(x_2 + Ay_2) = 0, \\ j = 3 \Rightarrow y_5\left(\lambda(x_3 + Ay_3) + \frac{2\gamma\lambda}{\sqrt{a^2 - \gamma^2}}(x_2 + Ay_2) + \frac{1}{a}(x_4 + Ay_4) - \frac{\gamma}{a\sqrt{a^2 - \gamma^2}}(x_1 + Ay_1)\right) = 0, \\ j = 4 \Rightarrow y_5\left(\lambda(x_4 + Ay_4) - \frac{2\gamma\lambda}{\sqrt{a^2 - \gamma^2}}(x_1 + Ay_1) - \frac{\gamma}{a\sqrt{a^2 - \gamma^2}}(x_2 + Ay_2)\right) = 0, \\ j = 5 \Rightarrow -y_1\left(\lambda(x_1 + Ay_1) + \frac{1}{a}(x_2 + Ay_2)\right) - \lambda y_2(x_2 + Ay_2) \\ + y_3\left(\lambda(x_3 + Ay_3) + \frac{2\gamma\lambda}{\sqrt{a^2 - \gamma^2}}(x_2 + Ay_2) + \frac{1}{a}(x_4 + Ay_4) - \frac{\gamma}{a\sqrt{a^2 - \gamma^2}}(x_1 + Ay_1)\right) \\ + y_4\left(\lambda(x_4 + Ay_4) - \frac{2\gamma\lambda}{\sqrt{a^2 - \gamma^2}}(x_1 + Ay_1) - \frac{\gamma}{a\sqrt{a^2 - \gamma^2}}(x_2 + Ay_2)\right) = 0. \end{array} \right. \quad (51)$$

هرگاه در روابط (۵۱)، $y_5 \neq 0$ آنگاه به ازای $A \neq 0$ خواهیم داشت:

$$y_1 = -\frac{1}{A}x_1, \quad y_2 = -\frac{1}{A}x_2, \quad y_3 = -\frac{1}{A}x_3, \quad y_4 = -\frac{1}{A}x_4.$$

بنابراین $Y = -\frac{1}{A} \sum_{i=1}^4 y_i E_i + y_5 E_5$ یک بردار ژئودزیکی است. هرگاه در روابط (۵۱)، $y_5 = 0$ و $X = x_5 E_5$ آنگاه به ازای $A \neq 0$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} y_1 A(\lambda y_1 + \frac{1}{a}y_2) + \lambda A y_2^2 &= y_3 A \left[\lambda y_3 + \frac{2\gamma\lambda}{\sqrt{a^2 - \gamma^2}}y_2 + \frac{1}{a}y_4 - \frac{\gamma}{a\sqrt{a^2 - \gamma^2}}y_1 \right] \\ &+ y_4 A \left[\lambda y_4 - \frac{2\gamma\lambda}{\sqrt{a^2 - \gamma^2}}y_1 - \frac{\gamma}{a\sqrt{a^2 - \gamma^2}}y_2 \right]. \end{aligned}$$

قضیه ۱.۵. فرض کنید (M, F) یک فضای متقارن تعمیم یافته ۵-بعدی از نوع (γa) مجهز به متریک مربعی ناورد از چپ تعریف شده با متریک ریمانی $\tilde{a}$ و میدان برداری $X = x_5 E_5$ باشد. در این صورت بردار $Y \in \mathfrak{g}$ یک بردار ژئودزیکی از (M, F) است اگر و تنها اگر Y یک بردار ژئودزیکی از $(M, \tilde{a})$ باشد.

□

اثبات. مشابه اثبات حالت های قبل است.

۲.۵. حالت (۷b): در این حالت داریم $\lambda = 0$.

بنابر [۷] داریم $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}(2) = \text{Span}(P)$ ، که در آن P توسط معادلات زیر مشخص می شود:

$$PX_1 = -Y_1, \quad PX_2 = Y_2, \quad PY_1 = X_1, \quad PY_2 = -X_2, \quad PW = 0.$$

بنابر [۷] پایه $\{X_1, X_2, Y_1, Y_2, W\}$ از $\mathfrak{g}$ چنان موجود است به طوری که براکت لی [۱] همانند جدول ۹ است. توجه می کنیم که بقیه حاصل ضرب ها صفر هستند. همچنین متریک ریمانی $\tilde{a}$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\tilde{a}(X_1, X_1) = \tilde{a}(Y_1, Y_1) = a^2, a > 0, \quad \tilde{a}(X_2, X_2) = \tilde{a}(Y_2, Y_2) = \tilde{a}(W, W) = 1.$$

جدول ۹. براکت لی از نوع (۷b)

Table 9: Lie bracket of type (7b)

$[,]$	X_1	X_2	Y_1	Y_2	W	P
W	X_2	0	$-Y_2$	0	0	0
P	$-Y_1$	Y_2	X_1	$-X_2$	0	0

میدان قابی متعامد یکه $\{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5\}$ را با شرایط زیر در نظر می‌گیریم:

$$(52) \quad E_1 = \frac{X_1}{a}, \quad E_2 = X_2, \quad E_3 = \frac{Y_1}{a}, \quad E_4 = Y_2, \quad E_5 = W.$$

با استفاده از تعریف براکت لی مذکور و معادله (۵۲) به ازای هر i, j برای براکت لی $[E_i, E_j]$ داریم:

$$[E_1, E_5] = -\frac{E_2}{a}, \quad [E_3, E_5] = \frac{E_4}{a}, \quad [E_1, P] = E_3, \quad [E_2, P] = -E_4, \quad [E_3, P] = -E_1, \quad [E_4, P] = E_2.$$

در ادامه ژئودزیک‌های همگن از متریک‌های مربعی ناورد از چپ را در نظر می‌گیریم که توسط متریک ریمانی $\tilde{a}$ و میدان برداری $X = \sum_{i=1}^5 x_i E_i$ روی فضاها متقارن تعمیم یافته ۵-بعدی از نوع (۷b) تعریف شده‌اند. بنابر لم ۴.۲ و معادله (۱۲) بردار $Y = \sum_{i=1}^5 y_i E_i$ از g یک بردار ژئودزیکی از (M, F) است اگر و تنها اگر به ازای هر $j = 1, 2, 3, 4, 5$ داشته باشیم:

$$(53) \quad \tilde{a} \left(\sum_{i=1}^5 x_i E_i + A \sum_{i=1}^5 y_i E_i, \left[\sum_{i=1}^5 y_i E_i + pP, E_j \right] \right) = 0.$$

پس:

$$(54) \quad \begin{cases} j=1 \implies y_5(x_2 + Ay_2) - ap(x_3 + Ay_3) = 0, \\ j=2 \implies p(x_4 + Ay_4) = 0, \\ j=3 \implies y_5(x_4 + Ay_4) - ap(x_1 + Ay_1) = 0, \\ j=4 \implies p(x_2 + Ay_2) = 0, \\ j=5 \implies y_1(x_2 + Ay_2) - y_3(x_4 + Ay_4) = 0. \end{cases}$$

هرگاه در روابط (۵۴)، $p \neq 0$ آنگاه به ازای $A \neq 0$ خواهیم داشت:

$$y_1 = -\frac{1}{A}x_1, \quad y_2 = -\frac{1}{A}x_2, \quad y_3 = -\frac{1}{A}x_3, \quad y_4 = -\frac{1}{A}x_4.$$

از طرفی هرگاه $y_5 \neq 0$ آنگاه $p = 0$ و $y_2 = -\frac{1}{A}x_2$ و $y_4 = -\frac{1}{A}x_4$. از طرفی هرگاه $y_5 = 0$ و $X = x_5 E_5$ آنگاه به ازای $A \neq 0$ خواهیم داشت:

$$Ay_1 y_2 - Ay_3 y_4 = 0,$$

قضیه ۲.۵. فرض کنید (M, F) یک فضای متقارن تعمیم یافته ۵-بعدی از نوع (۷b) مجهز به متریک مربعی ناورد از چپ تعریف شده با متریک ریمانی $\tilde{a}$ و میدان برداری $X = x_5 E_5$ باشد. در این صورت بردار $Y \in g$ یک بردار ژئودزیکی از (M, F) است اگر و تنها اگر Y یک بردار ژئودزیکی از $(M, \tilde{a})$ باشد.

□

اثبات. مشابه اثبات حالت‌های قبل است.

مراجع

- [1] P. L. Antonelli, A. Bona and M. A. Slawinski, Seismic rays as Finsler geodesics, *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, **4** no. 5 (2003) 711–722.
- [2] D. Bao, S. S. Chern and Z. Shen, *An introduction to Riemann-Finsler geometry*, Springer-Verlag, New York, 2000.
- [3] G. Calvaruso and R. A. Marinosci, Homogeneous geodesics in five-dimensional generalized symmetric spaces, *Balkan J. Geom. Appl.*, **8** no. 1 (2003) 1–19.
- [4] M. Ebrahimi and D. Latifi, Geodesic vectors of Randers metric on generalized symmetric spaces, *Glob. J. Adv. Res. Class. Mod. Geom.*, **2** no. 2 (2021) 153–165.
- [5] P. Habibi, Geodesic vectors of invariant square metrics on nilpotent Lie groups of dimension five, *J. Finsler Geom. Appl.*, **2** no.1 (2021) 131–140.
- [6] B. Kostant, *Holonomy and Lie algebra of motions in Riemannian manifolds*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1980.
- [7] O. Kowalski, *Generalized symmetric spaces Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1980.
- [8] O. Kowalski and L. Vanhecke, Riemannian manifolds with homogeneous geodesics, *Boll. Un. Mat. Ital. B (7)*, **5** no. 1 (1991) 189–246.
- [9] O. Kowalski and J. Szente, On the existence of homogeneous geodesics in homogeneous Riemannian manifolds, *Geom. Dedicata*, **81** no. 1-3 (2000) 209–214.
- [10] D. Latifi, Homogeneous geodesics in homogeneous Finsler spaces, *J. Geom. Phys.*, **57** no. 5 (2007) 1421–1433.
- [11] D. Latifi and M. Toomanian, Invariant naturally reductive Randers metrics on homogeneous spaces, *Math. Sci. (Springer)*, **6** (2012) 5 pp.
- [12] D. Latifi, Bi-invariant (α, β) -metrics on Lie groups, *Acta Univ. Apulensis Math. Inform.*, **65** (2021) 121–131.
- [13] D. Latifi, On generalized symmetric square metrics, *Acta Univ. Apulensis Math. Inform.*, **68** (2021) 63–70.
- [14] M. Matsumoto, On C -reducible Finsler spaces, *Tensor (N.S.)*, **24** (1972) 29–37.
- [15] M. Parhizkar and H. R. Salimi Moghaddam, Naturally reductive homogeneous (α, β) -metric spaces, *Arch. Math. (Brno)*, **57** no. 1 (2021) 1–11.
- [16] G. Randers, On an asymmetric metric in the four-space of general relativity, *Phys. Rev. (2)*, **59** (1941) 195–199.
- [17] E. B. Vinberg, Invariant linear connection in a homogeneous manifold, *Trudy Moskov. Mat. Obšč.*, **9** (1960) 191–210.
- [18] Z. Yan and L. Huang, On the existence of homogeneous geodesic in homogeneous Finsler spaces, *J. Geom. Phys.*, **124** (2018) 264–267.

- [19] M. L. Zeinali, On generalized symmetric Finsler spaces with some special (α, β) -metrics, *J. Finsler Geom. Appl.*, **1** no. 1 (2020) 45–53.
- [20] M. L. Zeinali, Flag curvature of invariant 3-power metrics on homogeneous spaces, *J. Finsler Geom. Appl.*, **4** no. 1 (2023) 124–132.
- [۲۱] ح. ر. سلیمی مقدم، رده‌ای از فضاها‌ی فینسلری متقارن تعمیم یافته، ریاضی و جامعه، جلد ۵، شماره ۳، (۱۳۹۹)، ۲۲–۱۵.

داریوش لطیفی

گروه ریاضیات و کاربردها، دانشگاه محقق اردبیلی، اردبیل، ایران

latifi@uma.ac.ir

داریوش لطیفی، عضو هیأت علمی دانشگاه محقق اردبیلی است. وی دانش آموخته دانشگاه صنعتی امیرکبیر است. علایق پژوهشی وی هندسه فینسلر، گروه‌های لی و فضاها‌ی همگن است.



میلاد زینالی لکی

گروه ریاضیات و کاربردها، دانشگاه محقق اردبیلی، اردبیل، ایران

miladzeinali@gmail.com

میلاد زینالی لکی متولد دیماه ۱۳۷۰ در شهرستان میان‌دوآب استان آذربایجان غربی است. وی در سال ۱۳۹۷ وارد مقطع دکتری رشته ریاضی محض گرایش هندسه دانشگاه محقق اردبیلی شد.

