

THE CONCEPT AND PROPERTIES OF QUASI-RIGID C_0 -SEMIGROUPS

MANSOOREH MOOSAPOOR^{}

ABSTRACT. In this paper, quasi-rigid C_0 -semigroups are introduced and their properties are investigated. Also, some sufficient conditions for quasi-rigidity are stated. It is proved that quasi-rigid C_0 -semigroups are recurrent. It is stated that if a C_0 -semigroup contains a quasi-rigid operator, then it is quasi-rigid. The concept of topologically quasi-rigid C_0 -semigroups is introduced. It is proved that topologically quasi-rigidity and quasi-rigidity are equivalent. The direct sum of quasi-rigid C_0 -semigroups is investigated. It is demonstrated that a C_0 -semigroup is quasi-rigid if and only if the direct sum of the C_0 -semigroup with itself is quasi-rigid. Moreover, the finite direct sum of a quasi-rigid operator with itself is recurrent. So, quasi-rigidity with respect to the recurrency is similar to the weakly-mixing with respect to the hypercyclicity.

1. Introduction

Let X be a Banach space. An operator T on X is called topologically transitive if for every non-empty open sets U and V of X , there exists a natural number n such that $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$ and it is called recurrent if for any non-empty open subset U of X , there exists a natural number n such that $T^n(U) \cap U \neq \emptyset$ [7]. If there exists $x \in X$ such that $\text{orb}(T, x) = \{x, Tx, T^2x, \dots\}$ is dense in X , then T is called hypercyclic. On separable Banach spaces hypercyclicity and topological transitivity

Keywords: Quasi-rigid C_0 -semigroups, Rigid C_0 -semigroups, Recurrent C_0 -semigroups, Direct sum

Article Type: Research Paper.

Communicated by Alireza Abdollahi.

Received: 03-10-2023, Accepted: 13-04-2024, Published Online: 24-11-2024.

Cite this article: M. Moosapoor, The concept and properties of quasi-rigid C_0 -semigroups, *Journal of Mathematics and Society*, 9 no. 3 (2024) 93-106.

<http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.139342.1611> .

are equivalent [10]. Also, an operator T on X is called rigid with respect to increasing sequence (n_k) of natural numbers if $T^{n_k}x \rightarrow x$ for any $x \in X$ [8].

The concept of quasi-rigid operators is recently introduced in [9]. An operator T on X is called quasi-rigid with respect to increasing sequence (n_k) of natural numbers if there exists a dense subset M of X such that $T^{n_k}x \rightarrow x$, for any $m \in M$.

A family $(T_t)_{t \geq 0}$ of operators on X is called a C_0 -semigroup on X if $T_0 = I$ and for every $x \in X$ and $t, s \geq 0$,

$$T_{t+s} = T_t T_s \quad \text{and} \quad \lim_{s \rightarrow t} T_s x = T_t x.$$

A C_0 -semigroup $(T_t)_{t \geq 0}$ on X is named topologically transitive if for every non-empty open sets U and V of X , there exists a real number $t > 0$ such that $T_t(U) \cap V \neq \emptyset$ and it is named hypercyclic if there exists $x \in X$ such that $\text{orb}((T_t)_{t \geq 0}, x) = \{x, Tx, T^2x, \dots\}$ is dense in X [4]. These two concepts are equivalent on separable Banach spaces [10].

The direct sum of two Banach spaces is defined by $X \oplus Y = \{x \oplus y : x \in X \text{ and } y \in Y\}$. A C_0 -semigroup $(T_t)_{t \geq 0}$ on X is called weakly-mixing if $(T_t \oplus T_t)_{t \geq 0}$ is hypercyclic on $X \oplus X$ [10].

Also, a C_0 -semigroup $(T_t)_{t \geq 0}$ on X is called recurrent if for every non-empty open subset U of X , there exists a real number $t > 0$ such that $T_t(U) \cap U \neq \emptyset$ [13]. Also, $(T_t)_{t \geq 0}$ is called rigid if there exists an increasing sequence (t_k) of positive real numbers such that $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$ and $\lim_{k \rightarrow \infty} T_{t_k}x = x$ for every $x \in X$ [8].

In this paper, quasi-rigid C_0 -semigroups are introduced and their properties are investigated. Also, the direct sum of these C_0 -semigroups and their relations with the recurrent C_0 -semigroups are investigated.

2. Main Results

Definition 2.1. Assume $(T_t)_{t \geq 0}$ is a C_0 -semigroup on a Banach space X and assume (t_k) is an increasing sequence of positive real numbers such that $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$. Then $(T_t)_{t \geq 0}$ is called quasi-rigid with respect to (t_k) , if there exists a dense subset Y of X such that for every $x \in Y$, $T_{t_k}x \rightarrow x$.

Two examples are presented in the following.

Example 2.2. Let $a \in \mathbb{R}$. Assume $(T_t)_{t \geq 0}$ is a C_0 -semigroup on $\mathbb{C}$ such that $T_t = e^{iat}I$ for any $t \geq 0$. Then by [8, Remark 2.7], $(T_t)_{t \geq 0}$ is rigid and so, it is quasi-rigid.

Example 2.3. Suppose $(T_t)_{t \geq 0}$ is a C_0 -semigroup on $\mathbb{C}$ such that $T_t = \lambda_t I$ for any $t \geq 0$ with this property that for any $t, s \geq 0$, $\lambda_s \lambda_t = \lambda_{t+s}$ and $|\lambda| = 1$. Hence, $(T_t)_{t \geq 0}$ is quasi-rigid; since for every $x \in \mathbb{C}$ and for every increasing sequence (t_k) , of positive real numbers such that $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$,

$$T_{t_k}x = \lambda_{t_k}x \rightarrow x.$$

The following lemma shows that the set of quasi-rigid C_0 -semigroups is a subset of the set of recurrent C_0 -semigroups.

Lemma 2.4. *If $(T_t)_{t \geq 0}$ is a quasi-rigid C_0 -semigroup, then it is recurrent.*

Theorem 2.5. *For a C_0 -semigroup $(T_t)_{t \geq 0}$ on a Banach space X , if (T_s) is quasi-rigid for some $s > 0$, then $(T_t)_{t \geq 0}$ is quasi-rigid.*

Corollary 2.6. *Assume $(T_t)_{t \geq 0}$ is a C_0 -semigroup on a Banach space X . If there exists $s > 0$ such that T_s is power bounded and*

$$X = \overline{\text{lin}}\{x \in X | Tx = \lambda x; \text{ for a scalar } \lambda \in \mathbb{C} \text{ with } |\lambda| = 1\},$$

then $(T_t)_{t \geq 0}$ is quasi-rigid.

Two C_0 -semigroup $(T_t)_{t \geq 0}$ on a Banach space X and $(S_t)_{t \geq 0}$ on a Banach space Y are called quasiconjugate if there exists an operator $\phi : X \rightarrow Y$ with dense range such that $S_t \circ \phi = \phi \circ T_t$ for any $t \geq 0$ [10, Definition 7.11].

Theorem 2.7. *Assume $(T_t)_{t \geq 0}$ is a C_0 -semigroup on a Banach space X and assume $(S_t)_{t \geq 0}$ is a C_0 -semigroup on a Banach space Y . If $(T_t)_{t \geq 0}$ and $(S_t)_{t \geq 0}$ are quasiconjugate, then quasi-rigidity of $(T_t)_{t \geq 0}$ implies that $(S_t)_{t \geq 0}$ is quasi-rigid.*

Definition 2.8. *Assume $(T_t)_{t \geq 0}$ is a C_0 -semigroup on a Banach space X and assume (t_k) is an increasing sequence of positive real numbers such that $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$. Then $(T_t)_{t \geq 0}$ is called topologically quasi-rigid with respect to (t_k) if for every non-empty open subset U of X , there exists $k_U > 0$ such that $T_{t_k}(U) \cap U \neq \emptyset$ for any $k \geq k_U$.*

Theorem 2.9. *Assume $(T_t)_{t \geq 0}$ is a C_0 -semigroup on a Banach space X and assume (t_k) is an increasing sequence of positive real numbers. Then the following are equivalent:*

- (i) $(T_t)_{t \geq 0}$ is quasi-rigid with respect to (t_k) .
- (ii) $(T_t)_{t \geq 0}$ is topologically quasi-rigid with respect to (t_k) .

Theorem 2.10. *Assume $(S_t)_{t \geq 0}$ is a C_0 -semigroup on a Banach space X and assume $(T_t)_{t \geq 0}$ is a C_0 -semigroup on a Banach space Y . Then if $(S_t \oplus T_t)_{t \geq 0}$ is quasi-rigid on $X \oplus Y$, then $(S_t)_{t \geq 0}$ is quasi-rigid on X and $(T_t)_{t \geq 0}$ is quasi-rigid on Y .*

Corollary 2.11. *Suppose $(T_t)_{t \geq 0}$ is a C_0 -semigroup on a Banach space X . If $(T_t \oplus T_t)_{t \geq 0}$ is a quasi-rigid C_0 -semigroup, then $(T_t)_{t \geq 0}$ is quasi-rigid. Especially, $(T_t)_{t \geq 0}$ is recurrent.*

Theorem 2.12. *If $(T_t)_{t \geq 0}$ is a quasi-rigid C_0 -semigroup on X , then $(T_t \oplus T_t)_{t \geq 0}$ is quasi-rigid. Especially, $(T_t \oplus T_t)_{t \geq 0}$ is recurrent.*

By Corollary 2.11 and Theorem 2.12, the consequence result is stated.

Corollary 2.13. *Suppose $(T_t)_{t \geq 0}$ is a C_0 -semigroup on a Banach space X . Then $(T_t)_{t \geq 0}$ is quasi-rigid if and only if $(T_t \oplus T_t)_{t \geq 0}$ is quasi-rigid.*

Theorem 2.14. *Assume $(T_t)_{t \geq 0}$ is a C_0 -semigroup on a Banach space X and assume $(S_t)_{t \geq 0}$ is a C_0 -semigroup on a Banach space Y . Suppose (t_k) is an increasing sequence of positive real numbers such that $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$. If $(T_t)_{t \geq 0}$ and $(S_t)_{t \geq 0}$ are quasi-rigid with respect to (t_k) , then $(T_t \oplus S_t)_{t \geq 0}$ is quasi-rigid with respect to (t_k) . Especially, $(T_t)_{t \geq 0}$ and $(S_t)_{t \geq 0}$ are recurrent.*

Theorem 2.15. *Assume $(T_t)_{t \geq 0}$ is a C_0 -semigroup on a Banach space X . Then the following are equivalent:*

- (i) $(T_t)_{t \geq 0}$ is quasi-rigid with respect to (t_k) .
- (ii) $(T_t \oplus T_t)_{t \geq 0}$ is recurrent.
- (iii) $(T_t \oplus T_t \oplus \cdots \oplus T_t)_{t \geq 0}$ is recurrent.

Using Theorem 2.9 and Theorem 2.15, lead to the following corollary.

Corollary 2.16. *Assume $(T_t)_{t \geq 0}$ is a C_0 -semigroup on a Banach space X . Then the following are equivalent:*

- (i) $(T_t)_{t \geq 0}$ is quasi-rigid with respect to (t_k) .
- (ii) $(T_t)_{t \geq 0}$ is topologically quasi-rigid with respect to (t_k) .
- (iii) $(T_t \oplus T_t \oplus \cdots \oplus T_t)_{t \geq 0}$ is recurrent.

3. CONCLUSIONS

The concept of the quasi-rigidity for C_0 -semigroups is a generalization of the concept of rigidity for C_0 -semigroups. As it is proved in this paper, this concept is equivalent to the concept of topologically quasi-rigid.

Quasi-rigid C_0 -semigroups are recurrent. Also, the finite direct sum of a quasi-rigid C_0 -semigroup with itself is recurrent. Quasi-rigidity with respect to recurrency is similar to weakly-mixing with respect to hypercyclicity. Moreover, it is proved that if the direct sum of two C_0 -semigroups is quasi-rigid, then any of them is quasi-rigid and under some conditions the converse is true. Consequently, a C_0 -semigroup is quasi-rigid if and only if the direct sum of it to itself is quasi-rigid.

REFERENCES

- [1] M. Amouch and O. Benchiheb, On a class of super-recurrent operators, *Filomat*, **36** no. 11 (2022) 3701–3708.

- [2] N. Bamerni, A. Kilicman and M. S. Md. Noorani, A review of some works in the theory of diskcyclic operators, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, **39** no. 2 (2016) 723–739.
- [3] F. Bayart and E. Matheron, *Dynamics of linear operators*, Cambridge Tracts in Mathematics, **179**, Cambridge University Press, Cambridge, 2009.
- [4] L. Bernal-Gonzalez and K.G. Grosse-Erdmann, Existence and nonexistence of hypercyclic semigroups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **135** no. 3 (2007) 755–766.
- [5] J. Bes, Q. Menet, A. Peris and Y. Puig, Strong transitivity properties for operators, *J. Differential Equations*, **266** no. 2-3 (2019) 1313–1337.
- [6] J. A. Conejero, V. Müller and A. Peris, Hypercyclic behaviour of operators in a hypercyclic C_0 -semigroup, *J. Funct. Anal.*, **244** no. 1 (2007) 342–348.
- [7] G. Costakis, A. Manoussos and I. Parissis, Recurrent linear operators, Recurrent linear operators, *Complex Anal. Oper. Theory*, **8** no. 8 (2014) 1601–1643.
- [8] T. Eisner and S. Grivaux, Hilbertian Jamison sequences and rigid dynamical systems, *J. Funct. Anal.*, **261** no. 7 (2011) 2013–2052.
- [9] S. Grivaux, A. Lopez-Martinez and A. Peris, Questions in linear recurrence: From the $T \oplus T$ -problem to lineability, (2022), arXiv:2212.03652.
- [10] K. G. Grosse-Erdmann and A. Peris Manguillot, *Linear Chaos*, Springer-Verlag London Ltd., London, 2011.
- [11] M. Moosapoor, Diskcyclic C_0 -Semigroups and diskcyclicity criteria, *Nonlinear Functional Analysis and Applications*, **27** no. 1 (2022) 111–119. <https://doi.org/10.22771/nfaa.2022.27.01.07>
- [12] M. Moosapoor, Supermixing and hypermixing of strongly continuous semigroups and their direct sum, *J. Taibah Univ. Sci.*, **15** no. 1 (2021) 953–959.
- [13] M. Moosapoor, On the Recurrent C_0 -Semigroups, Their Existence, and Some Criteria, *J. Math.*, **2021** (2021) 1–7.
- [14] T. K. S. Moothathu, Linear Independence of a Hypercyclic Orbit for Semigroups, *J. Math. Anal. Appl.*, **467** (2018) 704–710.

Mansooreh Moosapoor

Associate Professor, Department of Mathematics Education, Farhangian University, P.O.Box 14665-889, Tehran, Iran
Email: m.mosapourcfu.ac.ir

مفهوم و ویژگی‌های C -نیم‌گروه‌های شبه محکم

منصوره موسی‌پور^{ID}

چکیده. در این مقاله، مفهوم C -نیم‌گروه‌های شبه محکم معرفی می‌گردد و مثال‌هایی از آنها بیان می‌شود. همچنین خواص آن‌ها بررسی می‌شود و چند شرط لازم و کافی برای شبه محکم بودن یک C -نیم‌گروه ارائه می‌گردد. ثابت می‌شود که C -نیم‌گروه‌های شبه محکم، بازگشتی هستند و اگر یک C -نیم‌گروه شامل یک عملگر شبه محکم باشد، خود نیز شبه محکم است. مفهوم به‌طور توپولوژیکی شبه محکم بودن معرفی می‌شود و ثابت می‌شود که یک C -نیم‌گروه، شبه محکم است اگر و تنها اگر به‌طور توپولوژیکی شبه محکم باشد. جمع مستقیم C -نیم‌گروه‌های شبه محکم مورد مطالعه قرار می‌گیرد. نشان داده می‌شود اگر جمع مستقیم دو C -نیم‌گروه، شبه محکم باشد، آن‌گاه هر کدام از آن‌ها شبه محکم است. ثابت می‌شود که یک C -نیم‌گروه شبه محکم است اگر و تنها اگر جمع مستقیم آن با خودش شبه محکم باشد. به‌علاوه، ثابت می‌شود اگر C -نیم‌گروهی شبه محکم باشد، جمع مستقیم هر تعداد متناهی از آن با خودش، بازگشتی است. بنابراین شبه محکم بودن در مقایسه با بازگشتی بودن همانند به‌طور ضعیف آمیخته بودن در مقایسه با ابردوری بودن است.

۱. مقدمه

فرض کنیم X یک فضای باناخ^۱ باشد. برای عملگر خطی و کراندار T روی یک فضای باناخ در سامانه‌های پویا، مفاهیم گوناگونی مانند ترایای توپولوژیک^۲ بودن و بازگشتی^۳ بودن و ابردوری^۴ بودن تعریف شده است. عملگر خطی و کراندار T روی X را ترایای توپولوژیک می‌نامیم، هرگاه به ازای هر دو مجموعه باز و ناتهی U و V از X ، عدد طبیعی n وجود داشته باشد به‌قسمی که $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$ [۳]. همچنین T را بازگشتی می‌نامیم؛ اگر برای هر زیرمجموعه باز U از X ، عدد طبیعی n وجود داشته باشد به‌قسمی که $T^n(U) \cap U \neq \emptyset$ [۷].

عملگر خطی و کراندار T روی X را ابردوری می‌نامیم اگر بردار $x \in X$ وجود داشته باشد به‌قسمی که

$$\text{orb}(T, x) = \{x, Tx, T^2x, \dots\}$$

در X چگال باشد [۱۰]. روی فضاهای باناخ، مفهوم ترایای توپولوژیک بودن، با مفهوم ابردوری بودن معادل است. در کتاب‌های [۱۰] و [۳]، مفهوم ابردوری بودن و قضایای مرتبط با آن به تفصیل مورد بررسی قرار گرفته است. در [۱] نیز دسته جدیدی از عملگرها به نام عملگرهای زیر-بازگشتی^۵ تعریف شده است و چند شرط معادل برای آن بیان شده است.

عبارات و کلمات کلیدی: نیم‌گروه‌های شبه محکم، نیم‌گروه‌های محکم، نیم‌گروه‌های بازگشتی، جمع مستقیم.

نوع مقاله: پژوهشی

دبیرتخصصی رابط: علیرضا عبدالهی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۷/۱۱ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۱/۲۵ تاریخ انتشار آنلاین: ۱۴۰۳/۰۹/۰۴

ارجاع به مقاله: م. موسی‌پور، مفهوم و ویژگی‌های C -نیم‌گروه‌های شبه محکم، نشریه ریاضی و جامعه، ۹ شماره ۳ (۱۴۰۳) ۹۳-۱۰۶.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.139342.1611

¹Banach space ²topologically transitive ³recurrent ⁴hypercyclic ⁵super-recurrent operators

برای دیدن تاریخچه‌ای از موضوعات گفته شده، منابع [۲] و [۵] پیشنهاد می‌گردد. عملگرهای محکم^۶ نیز در [۸] معرفی شده‌اند. عملگر خطی و کراندار T روی X را نسبت به دنباله صعودی (n_k) از اعداد طبیعی، محکم می‌گوییم اگر برای هر $x \in X$ داشته باشیم $T^{n_k}x \rightarrow x$. همچنین در [۸] چند شرط کافی برای محکم بودن یک عملگر بیان شده است.

مفهوم شبه محکم بودن^۷ به تازگی در [۹] معرفی شده است. عملگر خطی و کراندار T روی X را نسبت به دنباله صعودی (n_k) از اعداد طبیعی شبه محکم می‌گوییم، اگر مجموعه‌ای چگال از X مانند M موجود باشد به‌قسمی که برای هر $m \in M$ داشته باشیم $T^{n_k}m \rightarrow m$. نویسندگان در [۹] چندین شرط معادل با شبه محکم بودن را ارائه نموده‌اند. یکی از ساختارهای مورد توجه در نظریه سامانه‌های پویا، C_0 -نیم‌گروه‌ها^۸ هستند. خانواده $(T_t)_{t \geq 0}$ از عملگرهای خطی و کراندار روی فضای باناخ X را یک C_0 -نیم‌گروه می‌نامیم اگر $T_0 = I$ و برای هر $s, t \geq 0$ و هر $x \in X$ داشته باشیم

$$T_{t+s} = T_t T_s \quad \text{و} \quad \lim_{s \rightarrow t} T_s x = T_t x.$$

C_0 -نیم‌گروه $(T_t)_{t \geq 0}$ را برای توپولوژیک می‌نامیم اگر برای هر دو مجموعه باز و ناتهی U و V از X ، عدد حقیقی و مثبت t وجود داشته باشد به‌قسمی که $T_t(U) \cap V \neq \emptyset$ و آن بازگشتی می‌نامیم اگر عدد حقیقی $t > 0$ وجود داشته باشد به‌قسمی که $T_t(U) \cap U \neq \emptyset$ [۱۳].

C_0 -نیم‌گروه $(T_t)_{t \geq 0}$ را ابردوری می‌نامیم اگر $x \in X$ موجود باشد به‌قسمی که $\{T_t x : t \geq 0\}$ چگال باشد [۴]. مفهوم برای توپولوژیک بودن یک C_0 -نیم‌گروه روی یک فضای باناخ X معادل با مفهوم ابردوری بودن است. در [۶] ثابت شده است که اگر C_0 -نیم‌گروهی ابردوری باشد، هر کدام از عملگرهای آن ابردوری هستند. همچنین C_0 -نیم‌گروه $(T_t)_{t \geq 0}$ روی فضای باناخ X را آمیخته می‌نامیم اگر برای هر دو مجموعه باز و ناتهی U و V از X عدد $t \geq 0$ موجود باشد به‌قسمی که برای هر $t \geq 0$ داشته باشیم $T_t(U) \cap V \neq \emptyset$ [۱۰]. منبع [۱۴] نیز برای مطالب جزئی‌تر درباره ویژگی‌های C_0 -نیم‌گروه‌ها توصیه می‌شود.

اگر X و Y دو فضای باناخ باشند، جمع مستقیم^۹ آن‌ها به‌صورت

$$X \oplus Y = \{x \oplus y : x \in X \text{ و } y \in Y\}$$

تعریف می‌شود. می‌گوییم $(T_t)_{t \geq 0}$ به‌طور ضعیف آمیخته^{۱۰} است اگر جمع مستقیم یک C_0 -نیم‌گروه با خودش، یعنی $(T_t \oplus T_t)_{t \geq 0}$ که برای هر $x \oplus y \in X \oplus X$ به‌صورت $(T_t \oplus T_t)(x \oplus y) = T_t x \oplus T_t y$ تعریف می‌شود، ابردوری باشد [۱۰]. اصل معروف ابردوری بودن^{۱۱} برای نیم‌گروه‌ها بیان می‌کند اگر $(T_t)_{t \geq 0}$ به‌طور ضعیف آمیخته باشد، آن‌گاه جمع مستقیم آن با خودش به هر تعداد متناهی، یعنی $(T_t \oplus T_t \oplus \dots \oplus T_t)_{t \geq 0}$ ، ابردوری است [۱۰]. منابع [۱۱] و [۱۲] نیز برای آشنایی با دسته‌های جدیدی از C_0 -نیم‌گروه‌ها مفید است.

همچنین ایده محکم بودن برای عملگرها در [۸] برای نیم‌گروه‌ها نیز تعمیم داده شده است. C_0 -نیم‌گروه $(T_t)_{t \geq 0}$ روی فضای باناخ X را محکم می‌نامیم اگر دنباله صعودی (t_k) از اعداد حقیقی مثبت وجود داشته باشد به‌قسمی که $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$ و برای هر $x \in X$ داشته باشیم $\lim_{k \rightarrow \infty} T_{t_k} x = x$. در [۸] مثال‌هایی از این نوع آورده شده و ویژگی‌های آن مورد بررسی قرار گرفته است.

در بخش دوم این مقاله، با ایده گرفتن از تعریف عملگرهای شبه محکم، C_0 -نیم‌گروه‌های شبه محکم را معرفی می‌کنیم و به بررسی ویژگی‌های آن می‌پردازیم. نشان می‌دهیم C_0 -نیم‌گروه‌های شبه محکم، بازگشتی هستند. همچنین ثابت می‌کنیم شبه محکم

^۶rigid operators ^۷quasi-rigid operators ^۸ C_0 -semigroups ^۹direct sum ^{۱۰}weakly-mixing ^{۱۱}Hypercyclicity Criterion

بودن تحت شبه مزدوج بودن^{۱۲} حفظ می‌شود. در این بخش C -نیم‌گروه‌های به‌طور توپولوژیکی شبه محکم را تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم که به‌طور توپولوژیکی شبه محکم بودن و شبه محکم بودن با هم معادلند. در بخش سوم، به بررسی جمع مستقیم C -نیم‌گروه‌های شبه محکم می‌پردازیم. نشان می‌دهیم که اگر جمع مستقیم دو C -نیم‌گروه، شبه محکم باشد، آن‌گاه هرکدام از آن‌ها شبه محکم است. به‌علاوه، نشان می‌دهیم که جمع مستقیم هر تعداد متناهی از یک C -نیم‌گروه شبه محکم با خودش، بازگشتی است.

۲. نتایج اصلی

این بخش را با تعریف C -نیم‌گروه‌های شبه محکم آغاز می‌کنیم.

تعریف ۱.۲. فرض کنیم $(T_t)_{t \geq 0}$ یک C -نیم‌گروه روی فضای باناخ X و (t_k) یک دنباله صعودی از اعداد حقیقی مثبت باشد به‌قسمی که $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$. می‌گوییم C -نیم‌گروه $(T_t)_{t \geq 0}$ نسبت به (t_k) شبه محکم است هرگاه زیرمجموعه چگال Y از X وجود داشته باشد به‌قسمی که برای هر $x \in Y$ داشته باشیم $T_{t_k}x \rightarrow x$.

از تعریف ۱.۲ نتیجه می‌شود که هر C -نیم‌گروه محکم، C -نیم‌گروهی شبه محکم نیز هست.

مثال ۲.۲. عدد حقیقی $a \in \mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $(T_t)_{t \geq 0}$ یک C -نیم‌گروه روی فضای اعداد مختلط $\mathbb{C}$ باشد که برای هر $t \geq 0$ با ضابطه $T_t = e^{iat}I$ تعریف شده باشد. در این صورت بنا به توجه ۷.۲ از [۸]، $(T_t)_{t \geq 0}$ محکم و در نتیجه شبه محکم است.

مثال ۳.۲. فرض کنیم $(T_t)_{t \geq 0}$ یک C -نیم‌گروه روی فضای اعداد مختلط^{۱۳} $\mathbb{C}$ باشد که برای هر $t \geq 0$ با ضابطه $T_t = \lambda_t I$ تعریف شده باشد به‌قسمی که برای هر $t \geq 0$ و $s \geq 0$ داشته باشیم $|\lambda_t| = 1$ و $\lambda_t \lambda_s = \lambda_{t+s}$. در این صورت $(T_t)_{t \geq 0}$ شبه محکم است چون برای هر $x \in \mathbb{C}$ و هر دنباله صعودی (t_k) از اعداد حقیقی مثبت که $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$ داریم،

$$T_{t_k}x = \lambda_{t_k}x \rightarrow x.$$

لم بعدی نشان می‌دهد که مجموعه C -نیم‌گروه‌های شبه محکم، زیرمجموعه‌ای از مجموعه C -نیم‌گروه‌های بازگشتی است.

لم ۴.۲. اگر $(T_t)_{t \geq 0}$ یک C -نیم‌گروه شبه محکم روی X باشد، آن‌گاه $(T_t)_{t \geq 0}$ بازگشتی است.

اثبات. فرض کنیم $(T_t)_{t \geq 0}$ یک C -نیم‌گروه شبه محکم روی X باشد. بنابراین زیرمجموعه چگالی مانند Y از X و دنباله‌ای صعودی مانند (t_k) از اعداد حقیقی مثبت با شرط $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$ وجود دارد به‌قسمی که برای هر $y \in Y$ داریم

$$T_{t_k}y \rightarrow y.$$

بنابراین هر $y \in Y$ یک بردار بازگشتی برای $(T_t)_{t \geq 0}$ است. در نتیجه $(T_t)_{t \geq 0}$ یک زیرمجموعه چگال از بردارهای بازگشتی دارد و بنا به قضیه ۳ از [۱۳] بازگشتی است. $\square$

با توجه به اینکه هر C -نیم‌گروه محکم، C -نیم‌گروهی شبه محکم است، لم ۴.۲ بیان می‌کند که C -نیم‌گروه‌های محکم، زیرمجموعه‌ای از C -نیم‌گروه‌های بازگشتی هستند.

قضیه بعدی نشان می‌دهد که شبه محکم بودن یک عملگر در یک نیم‌گروه می‌تواند باعث شبه محکم شدن نیم‌گروه شود.

قضیه ۵.۲. فرض کنیم $(T_t)_{t \geq 0}$ یک C -نیم‌گروه روی X باشد. اگر $s > 0$ ای موجود باشد که T_s شبه محکم باشد، آن‌گاه $(T_t)_{t \geq 0}$ یک C -نیم‌گروه شبه محکم است.

¹²quasiconjugacy ¹³complex numbers

اثبات. فرض کنیم $s > 0$ موجود باشد به‌قسمی که T_s عملگری شبه محکم باشد. بنابراین زیرمجموعه چگالی مانند Y از X و دنباله‌ای صعودی مانند (n_k) از اعداد طبیعی وجود دارد به‌قسمی که برای هر $y \in Y$ داریم

$$T_s^{n_k} y \rightarrow y.$$

اکنون با توجه به تعریف نیم‌گروه داریم $T_s^{n_k} = T_{sn_k}$. بنابراین اگر در نظر بگیریم $t_k := sn_k$ ، آنگاه برای هر $y \in Y$ داریم $T_{sn_k} y \rightarrow y$. بنابراین $(T_t)_{t \geq 0}$ یک C -نیم‌گروه شبه محکم است. $\square$

در نتیجه بعدی منظور از $\overline{\text{lin}}$ بستار ترکیب خطی اعضای مجموعه است.

نتیجه ۶.۲. فرض کنیم $(T_t)_{t \geq 0}$ یک C -نیم‌گروه روی X باشد. اگر $s > 0$ موجود باشد به‌قسمی که T_s توان کران‌دار باشد و $\lambda \in \mathbb{C}$ وجود داشته باشد به‌قسمی که $\lambda = 1$ ، $X = \overline{\text{lin}}\{x \in X | Tx = \lambda x; |\lambda| = 1\}$ ، آنگاه $(T_t)_{t \geq 0}$ شبه محکم است.

اثبات. بنا به

[۸، قضیه ۳.۲]، T_s عملگری محکم و در نتیجه شبه محکم است. بنابراین از قضیه ۵.۲ نتیجه می‌شود که $(T_t)_{t \geq 0}$ شبه محکم است. $\square$

بنا به [۱۰، تعریف ۱۱.۷] دو C -نیم‌گروه $(T_t)_{t \geq 0}$ روی فضای باناخ X و $(S_t)_{t \geq 0}$ روی فضای باناخ Y را شبه مزدوج می‌نامیم اگر عملگر پیوسته و با بُرد چگال $\varphi : X \rightarrow Y$ وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر $t \geq 0$ داشته باشیم $S_t \circ \varphi = \varphi \circ T_t$.

قضیه ۷.۲. فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ و $(T_t)_{t \geq 0}$ C -نیم‌گروهی روی X و $(S_t)_{t \geq 0}$ C -نیم‌گروهی روی Y باشد. اگر این دو نیم‌گروه، شبه مزدوج باشند و $(T_t)_{t \geq 0}$ شبه محکم باشد، آنگاه $(S_t)_{t \geq 0}$ نیز شبه محکم است.

اثبات. بنا به فرض شبه مزدوج بودن دو C -نیم‌گروه، عملگر پیوسته و با بُرد چگال $\varphi : X \rightarrow Y$ وجود دارد به‌طوری که برای هر $t \geq 0$ داریم $S_t \circ \varphi = \varphi \circ T_t$. فرض کنیم $(T_t)_{t \geq 0}$ نسبت به دنباله صعودی (t_k) از اعداد حقیقی مثبت، شبه محکم باشد. بنابراین زیرمجموعه چگال Z از X وجود دارد به‌طوری که برای هر $z \in Z$ ،

$$(۱) \quad T_{t_k} z \rightarrow z.$$

بنابراین برای هر $z \in Z$ از (۱) داریم

$$(۲) \quad S_{t_k} \varphi(z) = \varphi T_{t_k} z \rightarrow \varphi(z).$$

پس برای هر $y \in \varphi(Z)$ از (۲) داریم

$$S_{t_k} y \rightarrow y.$$

با توجه به چگال بودن Z در X و ویژگی‌های φ نتیجه می‌شود که $\varphi(Z)$ در Y چگال است. پس $(S_t)_{t \geq 0}$ ، C -نیم‌گروهی شبه محکم است. $\square$

اکنون مفهوم به‌طور توپولوژیکی شبه محکم بودن را تعریف می‌کنیم که در واقع مفهومی نزدیک به آمیخته بودن است.

تعریف ۸.۲. فرض کنیم $(T_t)_{t \geq 0}$ یک C -نیم‌گروه روی فضای باناخ X باشد و فرض کنیم (t_k) یک دنباله صعودی از اعداد حقیقی مثبت باشد به قسمی که $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$. می‌گوییم C -نیم‌گروه $(T_t)_{t \geq 0}$ نسبت به (t_k) به‌طور توپولوژیکی شبه محکم است اگر برای هر زیرمجموعه باز و ناتهی U ، از X عدد صحیح مثبت k_U وجود داشته باشد به قسمی که برای هر $k \geq k_U$ داشته باشیم

$$T_{t_k}(U) \cap U \neq \emptyset.$$

قضیه بعدی نشان می‌دهد که شبه محکم بودن و به‌طور توپولوژیکی شبه محکم بودن با هم معادلند.

قضیه ۹.۲. فرض کنیم $(T_t)_{t \geq 0}$ یک C -نیم‌گروه روی فضای باناخ X باشد و فرض کنیم (t_k) یک دنباله صعودی از اعداد حقیقی مثبت باشد به قسمی که $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$. در این صورت گزاره‌های زیر با هم معادلند:

(الف) $(T_t)_{t \geq 0}$ نسبت به (t_k) شبه محکم است.

(ب) $(T_t)_{t \geq 0}$ نسبت به (t_k) به‌طور توپولوژیکی شبه محکم است.

اثبات. فرض کنیم (الف) برقرار باشد. بنابراین زیرمجموعه چگالی مانند Y از X و دنباله‌ای صعودی مانند (t_k) از اعداد حقیقی مثبت وجود دارد به قسمی که برای هر $y \in Y$ داریم

$$(۳) \quad T_{t_k} y \rightarrow y.$$

فرض کنیم U زیرمجموعه‌ای باز و ناتهی از X باشد. از چگال بودن Y در X نتیجه می‌شود که $U \cap X \neq \emptyset$. بنابراین $x \in U \cap Y$ وجود دارد. چون $x_0 \in Y$ ، از (۳) نتیجه می‌شود که

$$T_{t_k} x_0 \rightarrow x_0.$$

پس عدد طبیعی k_U وجود دارد به قسمی که برای هر $k \geq k_U$ داریم $T_{t_k} x_0 \in U$. بنابراین برای هر $k \geq k_U$ داریم

$$x_0 \in T_{t_k}(U) \cap U.$$

حال چون x_0 یک عضو دلخواه از Y است، نتیجه می‌شود که $(T_t)_{t \geq 0}$ یک C -نیم‌گروه به‌طور توپولوژیکی شبه محکم است. اثبات (ب) به (الف) شبیه به برهان از [۹، گزاره ۲.۴] است. کافی است T_{t_k} را به جای T^{n_k} در نظر بگیریم. به این صورت که فرض کنیم d متر کاملی باشد که توپولوژی X را القا می‌کند. فرض کنیم $(U_s)_{s \in \mathbb{N}}$ پایه شمارایی از مجموعه‌های باز برای X باشد. برای هر $s \in \mathbb{N}$ تعریف می‌کنیم $V_{s,s} := U_s$. بنا به فرض، عدد صحیح مثبت t_1 وجود دارد به قسمی که

$$T_{t_1}(U_1) \cap U_1 = T_{t_1}(V_{1,1}) \cap V_{1,1} \neq \emptyset.$$

از پیوستگی T_{t_1} نتیجه می‌شود که زیرمجموعه باز و ناتهی $V_{1,2}$ از X وجود دارد به قسمی که قطر ۱۴ آن از $\frac{1}{3}$ کمتر است و

$$\overline{V_{1,2}} \subset V_{1,1} \quad \text{و} \quad T_{t_1}(\overline{V_{1,2}}) \subset V_{1,1}.$$

با ادامه این روند، دنباله صعودی (t_k) از اعداد صحیح مثبت ساخته می‌شود و برای هر $s \in \mathbb{N}$ دنباله $(V_{s,j})_{j=s}^{\infty}$ از زیرمجموعه‌های باز و ناتهی X به دست می‌آید به قسمی که قطر هر مجموعه $V_{s,j}$ از $\frac{1}{j}$ کمتر است و برای هر s و k عضو $\mathbb{N}$ با شرط $s \leq k$ داریم

$$\overline{V_{s,k+1}} \subset V_{s,k} \quad \text{و} \quad T_{t_k}(\overline{V_{s,k+1}}) \subset V_{s,k}.$$

^{۱۴}diameter

اکنون از قضیه رده بندی پیر^{۱۵} نتیجه می‌شود که برای هر $s \in \mathbb{N}$ ، بردار y_s عضو X وجود دارد به قسمی که

$$\{y_s\} = \bigcap_{k \geq s} \overline{V_{s,k}} \subset V_{s,s} = U_s.$$

در نظر می‌گیریم $Y := \{y_s : s \in \mathbb{N}\}$. مجموعه Y در X چگال است و برای هر s و k عضو $\mathbb{N}$ که $s \leq k$ داریم

$$T_{t_k} y_s \in T_{t_k}(\overline{V_{s,k+1}}) \subset V_{s,k}.$$

بنابراین

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} d(T_{t_k} y_s, y_s) \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \text{diam}_d(V_{s,k}) \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = 0.$$

پس برای هر $y_s \in Y$ داریم

$$T_{t_k} y_s \rightarrow y_s.$$

□

در نتیجه T نسبت به (t_k) به‌طور توپولوژیکی شبه آمیخته است.

۳. جمع مستقیم

در این بخش به بررسی ویژگی‌های جمع مستقیم نیم‌گروه‌های شبه محکم می‌پردازیم. بحث را با اثبات این موضوع آغاز می‌کنیم که اگر جمع مستقیم دو C -نیم‌گروه، شبه محکم باشد، آن‌گاه هر کدام از آن‌ها شبه محکم است.

قضیه ۱.۳. فرض کنیم $(S_t)_{t \geq 0}$ یک C -نیم‌گروه روی فضای باناخ X و $(T_t)_{t \geq 0}$ یک C -نیم‌گروه روی فضای باناخ Y باشد. اگر $(S_t \oplus T_t)_{t \geq 0}$ ، C -نیم‌گروهی شبه محکم روی $X \oplus Y$ باشد، آن‌گاه $(S_t)_{t \geq 0}$ نیم‌گروهی شبه محکم روی X و $(T_t)_{t \geq 0}$ نیم‌گروهی شبه محکم روی Y است.

اثبات. بنا به فرض $(S_t \oplus T_t)_{t \geq 0}$ روی $X \oplus Y$ ، C -نیم‌گروهی شبه محکم است. بنابراین دنباله صعودی (t_k) از اعداد حقیقی مثبت به قسمی که $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$ و زیرمجموعه چگال $M \oplus N$ از $X \oplus Y$ وجود دارد به قسمی که برای هر $m \in M$ و هر $n \in N$ داریم،

$$(4) \quad (S_{t_k} \oplus T_{t_k})(m \oplus n) \rightarrow m \oplus n.$$

از (۴) نتیجه می‌شود که برای هر $\varepsilon > 0$ عدد طبیعی k را می‌توان یافت به قسمی که برای هر $k \geq k_0$ ،

$$(5) \quad \|(S_{t_k} \oplus T_{t_k})(m \oplus n) - (m \oplus n)\|_{X \oplus Y} < \varepsilon.$$

همچنین با توجه به رابطه (۵) برای هر $m \in M$ و $n \in N$ داریم،

$$\|S_{t_k} m - m\|_X \leq \|(S_{t_k} \oplus T_{t_k})(m \oplus n) - (m \oplus n)\|_{X \oplus Y} < \varepsilon,$$

$$(6) \quad \|T_{t_k} n - n\|_Y \leq \|(S_{t_k} \oplus T_{t_k})(m \oplus n) - (m \oplus n)\|_{X \oplus Y} < \varepsilon.$$

بنابراین از (۶) نتیجه می‌شود که برای هر $m \in M$ و هر $n \in N$ ،

$$S_{t_k} m \rightarrow m \quad \text{و} \quad T_{t_k} n \rightarrow n.$$

□

پس $(S_t)_{t \geq 0}$ و $(T_t)_{t \geq 0}$ ، به ترتیب C -نیم‌گروه‌هایی شبه محکم روی X و Y هستند.

¹⁵Baire category theorem

اگر C -نیم‌گروه $(S_t)_{t \geq 0}$ همان C -نیم‌گروه $(T_t)_{t \geq 0}$ باشد، از قضیه ۱.۳، نتیجه بعدی به دست می‌آید.

نتیجه ۲.۳. فرض کنیم $(T_t)_{t \geq 0}$ یک C -نیم‌گروه روی فضای باناخ X باشد. اگر $(T_t \oplus T_t)_{t \geq 0}$ ، C -نیم‌گروهی شبه محکم باشد، آنگاه $(T_t)_{t \geq 0}$ نیم‌گروهی شبه محکم روی X است. به‌ویژه، $(T_t)_{t \geq 0}$ بازگشتی است.

قضیه ۳.۳. اگر $(T_t)_{t \geq 0}$ یک C -نیم‌گروه شبه محکم روی X باشد، آنگاه $(T_t \oplus T_t)_{t \geq 0}$ یک C -نیم‌گروه شبه محکم روی $X \oplus X$ است. به‌ویژه، $(T_t \oplus T_t)_{t \geq 0}$ بازگشتی است.

اثبات. C -نیم‌گروه $(T_t)_{t \geq 0}$ یک C -نیم‌گروه شبه محکم روی X است. بنابراین دنباله صعودی (t_k) و زیرمجموعه چگال M از X وجود دارد به‌قسمی که برای هر $x \in M$ داریم،

$$(۷) \quad T_{t_k} x \rightarrow x.$$

از (۷) می‌توان نتیجه گرفت که برای هر $x \oplus x \in M \oplus M$ داریم

$$(۸) \quad (T_{t_k} \oplus T_{t_k})(x \oplus x) \rightarrow x \oplus x.$$

با توجه به چگال بودن $M \oplus M$ در $X \oplus X$ ، نتیجه حاصل می‌شود.

رابطه (۸) همچنین نتیجه می‌دهد که برای هر $x \in M$ ، بردار $x \oplus x$ برداری بازگشتی برای $(T_t \oplus T_t)_{t \geq 0}$ است. بنابراین $(T_t \oplus T_t)_{t \geq 0}$ مجموعه‌ای چگال از بردارهای بازگشتی در $X \oplus X$ دارد و بنابراین بنا به [۱۳، قضیه ۳]، $(T_t \oplus T_t)_{t \geq 0}$ ، C -نیم‌گروهی بازگشتی است. $\square$

از نتیجه ۲.۳ و قضیه ۳.۳ شرط معادل بعدی به دست می‌آید.

نتیجه ۴.۳. فرض کنیم $(T_t)_{t \geq 0}$ یک C -نیم‌گروه روی فضای باناخ X باشد. در این صورت $(T_t)_{t \geq 0}$ شبه محکم است اگر و تنها اگر $(T_t \oplus T_t)_{t \geq 0}$ شبه محکم باشد.

سؤالی که در اینجا مطرح می‌شود این است که آیا می‌توان حالت کلی‌تری از قضیه ۳.۳ را اثبات کرد؟ یعنی اگر بدانیم $(T_t)_{t \geq 0}$ و $(S_t)_{t \geq 0}$ ، C -نیم‌گروه‌هایی شبه محکم باشند، آیا می‌توانیم نتیجه بگیریم که $(T_t \oplus S_t)_{t \geq 0}$ شبه محکم است؟ در قضیه بعدی می‌بینیم که اگر هر دو نیم‌گروه نسبت به دنباله یکسانی شبه محکم باشند، آنگاه پاسخ این سؤال، مثبت است.

قضیه ۵.۳. فرض کنیم $(T_t)_{t \geq 0}$ یک C -نیم‌گروه روی X و $(S_t)_{t \geq 0}$ یک C -نیم‌گروه روی Y باشد و (t_k) دنباله‌ای صعودی از اعداد حقیقی مثبت باشد به‌قسمی که $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$. در این صورت اگر $(T_t)_{t \geq 0}$ و $(S_t)_{t \geq 0}$ نسبت به (t_k) شبه محکم باشند، آنگاه $(T_t \oplus S_t)_{t \geq 0}$ نیز یک C -نیم‌گروه شبه محکم روی $X \oplus Y$ نسبت به (t_k) است. به‌ویژه، $(T_t \oplus S_t)_{t \geq 0}$ بازگشتی است.

اثبات. چون $(T_t)_{t \geq 0}$ نسبت به (t_k) شبه محکم است، بنابراین مجموعه چگال M از X وجود دارد به‌قسمی که برای هر $m \in M$ داریم،

$$(۹) \quad T_{t_k} m \rightarrow m.$$

از طرفی چون $(S_t)_{t \geq 0}$ نسبت به (t_k) شبه محکم است، بنابراین مجموعه چگال N از Y وجود دارد به‌قسمی که برای هر $n \in N$ داریم،

$$(۱۰) \quad S_{t_k} n \rightarrow n.$$

بنابراین برای هر $m \oplus n \in M \oplus N$ از (۹) و (۱۰) نتیجه می‌شود

$$(11) \quad (T_{t_k} \oplus S_{t_k})(m \oplus n) = T_{t_k}m \oplus S_{t_k}n \rightarrow m \oplus n.$$

حال چون $M \oplus N$ در $X \oplus Y$ چگال است، از (۱۱) نتیجه می‌شود که $(T_t \oplus S_t)_{t \geq 0}$ نسبت به (t_k) شبه محکم است. $\square$
در قضیه بعدی ثابت می‌کنیم که به‌طور توپولوژیکی شبه محکم بودن یک C -نیم‌گروه با بازگشتی بودن جمع مستقیم آن با خودش به تعداد متناهی با یکدیگر معادلند.

قضیه ۶.۳. فرض کنیم $(T_t)_{t \geq 0}$ یک C -نیم‌گروه روی فضای باناخ X باشد. در این صورت گزاره‌های زیر با هم معادلند:

(الف) $(T_t)_{t \geq 0}$ نسبت به (t_k) به‌طور توپولوژیکی شبه محکم است.

(ب) $(T_t \oplus T_t)_{t \geq 0}$ بازگشتی است.

(ج) برای هر $n \in \mathbb{N}$ $(T_t \oplus T_t \oplus \dots \oplus T_t)_{t \geq 0}$ بازگشتی است.

اثبات. فرض کنیم (الف) برقرار باشد. فرض کنیم U_1 و U_2 زیرمجموعه‌هایی باز و ناتهی از X باشند. از به‌طور توپولوژیکی شبه محکم بودن $(T_t)_{t \geq 0}$ نتیجه می‌شود که عددهای مثبت k_{U_1} و k_{U_2} وجود دارند به‌قسمی که برای هر $k \geq k_{U_1}$ و هر $k \geq k_{U_2}$ ،

$$(12) \quad T_{t_k}(U_1) \cap U_1 \neq \phi \quad \text{و} \quad T_{t_k}(U_2) \cap U_2 \neq \phi.$$

با توجه به رابطه (۱۲) اگر در نظر بگیریم $k^* = \max\{k_{U_1}, k_{U_2}\}$ ، آن‌گاه برای هر $k \geq k^*$ داریم،

$$(T_{t_k} \oplus T_{t_k})(U_1 \oplus U_2) \cap (U_1 \oplus U_2) \neq \phi.$$

بنابراین $(T_t \oplus T_t)_{t \geq 0}$ بازگشتی است.

حال فرض کنیم (ب) برقرار باشد. فرض کنیم U زیرمجموعه‌ای باز و ناتهی از X باشد. از بازگشتی بودن $(T_t)_{t \geq 0}$ و از [۱۳، لم ۱] نتیجه می‌شود که تعداد نامتناهی t وجود دارد که به ازای آن‌ها

$$T_t(U) \cap U \neq \phi.$$

بنابراین می‌توان دنباله صعودی (t_k) از اعداد حقیقی مثبت با شرط $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$ را یافت به‌قسمی که برای هر k داشته باشیم

$$T_{t_k}(U) \cap U \neq \phi.$$

بنابراین $(T_t)_{t \geq 0}$ به‌طور توپولوژیکی شبه محکم است.

• اثبات از (الف) به (ج)، مشابه اثبات از (الف) به (ب) است.

• اثبات از (ج) به (ب) واضح است. $\square$

نتیجه ۷.۳. فرض کنیم $(T_t)_{t \geq 0}$ یک C -نیم‌گروه روی فضای باناخ X باشد. در این صورت گزاره‌های زیر با هم معادلند:

(الف) $(T_t)_{t \geq 0}$ نسبت به (t_k) شبه محکم است.

(ب) $(T_t)_{t \geq 0}$ نسبت به (t_k) به‌طور توپولوژیکی شبه محکم است.

(ج) برای هر $n \in \mathbb{N}$ $(T_t \oplus T_t \oplus \dots \oplus T_t)_{t \geq 0}$ بازگشتی است.

همان‌طور که در مقدمه بیان شد اگر $(T_t)_{t \geq 0}$ به‌طور ضعیف آمیخته باشد، آن‌گاه $(T_t \oplus T_t \oplus \dots \oplus T_t)_{t \geq 0}$ ابردوری است. اکنون ثابت کردیم اگر $(T_t)_{t \geq 0}$ شبه محکم باشد، آن‌گاه $(T_t \oplus T_t \oplus \dots \oplus T_t)_{t \geq 0}$ بازگشتی است. بنابراین می‌توان گفت ویژگی شبه محکم بودن نسبت به بازگشتی بودن، همانند ویژگی به‌طور ضعیف آمیخته بودن برای ابردوری بودن است.

مراجع

- [1] M. Amouch and O. Benchiheb, On a class of super-recurrent operators, *Filomat*, **36** no. 11 (2022) 3701–3708.
- [2] N. Bamerni, A. Kilicman and M. S. Md. Noorani, A review of some works in the theory of diskcyclic operators, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, **39** no. 2 (2016) 723–739.
- [3] F. Bayart and E. Matheron, *Dynamics of linear operators*, Cambridge Tracts in Mathematics, **179**, Cambridge University Press, Cambridge, 2009.
- [4] L. Bernal-Gonzalez and K.G. Grosse-Erdmann, Existence and nonexistence of hypercyclic semigroups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **135** no. 3 (2007) 755–766.
- [5] J. Bes, Q. Menet, A. Peris and Y. Puig, Strong transitivity properties for operators, *J. Differential Equations*, **266** no. 2-3 (2019) 1313–1337.
- [6] J. A. Conejero, V. Müller and A. Peris, Hypercyclic behaviour of operators in a hypercyclic C_0 -semigroup, *J. Funct. Anal.*, **244** no. 1 (2007) 342–348.
- [7] G. Costakis, A. Manoussos and I. Parissis, Recurrent linear operators, Recurrent linear operators, *Complex Anal. Oper. Theory*, **8** no. 8 (2014) 1601–1643.
- [8] T. Eisner and S. Grivaux, Hilbertian Jamison sequences and rigid dynamical systems, *J. Funct. Anal.*, **261** no. 7 (2011) 2013–2052.
- [9] S. Grivaux, A. Lopez-Martinez and A. Peris, Questions in linear recurrence: From the $T \oplus T$ -problem to lineability, (2022), arXiv:2212.03652.
- [10] K. G. Grosse-Erdmann and A. Peris Manguillot, *Linear Chaos*, Springer-Verlag London Ltd., London, 2011.
- [11] M. Moosapoor, Diskcyclic C_0 -Semigroups and diskcyclicity criteria, *Nonlinear Functional Analysis and Applications*, **27** no. 1 (2022) 111–119. <https://doi.org/10.22771/nfaa.2022.27.01.07>
- [12] M. Moosapoor, Supermixing and hypermixing of strongly continuous semigroups and their direct sum, *J. Taibah Univ. Sci.*, **15** no. 1 (2021) 953–959.
- [13] M. Moosapoor, On the Recurrent C_0 -Semigroups, Their Existence, and Some Criteria, *J. Math.*, **2021** (2021) 1–7.
- [14] T. K. S. Moothathu, Linear Independence of a Hypercyclic Orbit for Semigroups, *J. Math. Anal. Appl.*, **467** (2018) 704–710.

منصوره موسی پور

گروه آموزش ریاضی، دانشگاه فرهنگیان، تهران، ایران

m.mosapour@cfu.ac.ir

منصوره موسی پور عضو هیات علمی دانشگاه فرهنگیان و دارای مرتبه علمی دانشیاری است. وی دوره کارشناسی ریاضی (گرایش دبیری) را در دانشگاه حکیم سبزواری، دوره کارشناسی ارشد ریاضی محض را در دانشگاه خوارزمی و دوره دکتری خود را در رشته ریاضی محض (گرایش آنالیز تابعی) در مرکز تحصیلات تکمیلی پیام نور تهران گذرانده است.

