

SOLITON AND ITS APPLICATION IN THE STUDY OF NONLINEAR DYNAMICS OF ACOUSTIC WAVES IN MULTI-PARTICLE FLUID

NORA NASSIRI-MOFAKHAM^{ORCID}

ABSTRACT. Solitons have many applications in pure and applied mathematics, especially in the fields such as nonlinear differential equations, Lie algebra, and algebraic geometry. Solitons are ubiquitous in nature and have many applications in nonlinear dynamics. The discovery of solitons made it possible to obtain analytical solutions for nonlinear differential equations. Among them Korteweg-de Vries equation is the most familiar one, which is the most canonical nonlinear wave equation. In an electrostatic fluid that is partially ionized, the collision of ions with each other and also with electrons cause the propagation and coupling of ionic electrostatic waves to behave nonlinear. The equations describing the dynamics of acoustic waves in this fluid are transformed into the Korteweg-de Vries equation by the reduction perturbation method, which analytical solutions are in the form of solitary waves, and their amplitude and speed depend on the properties of the fluid medium. A brief history of solitons and their applications are given. Then, the nonlinear propagation of the traveling ion electrostatic wave in a multi-particle fluid is obtained by taking into account the production-loss rate of ions. The analytical and numerical solution of the wave equations is obtained. The results show that the wave dispersion curves have bifurcation points and only high-frequency waves are propagated as solitary waves with complex modes. The results of this study can be used in the observation of ion acoustic waves in space plasmas and the presence of dust grains in laboratory plasma.

Keywords: non linear dynamics, bifurcation, complex dispersion equation, acoustic wave.

Communicated by Soghra Nobakhtian.

Article Type: Research Paper.

Received: 25-11-2023, Accepted: 12-03-2024, Published Online: 02-06-2024.

Cite this article: N. Nassiri-Mofakham, Soliton and its application in the study of nonlinear dynamics of acoustic waves in multi-particle fluid, *Journal of Mathematics and Society*, **9** no. 2 (2024) 71–85.

<http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.139913.1629> .

1. Introduction

The history of solitons or soliton waves backs to the early 19th century. It was first discovered by John Scott Russel, a young Scottish engineer in the Victorian shipbuilding industry, and he called them the great wave of translation [1]. He conducted experiments to find the most efficient channel design for ships and boats. Russell's observations in Hermiston Union Canal, near Riccarton campus, Heriot-Watt University, Edinburgh, led to a very important scientific discovery. He presented his achievement under the title "Report on Waves" at the 14th meeting of the British Association for the Advancement of Science in September 1844 [2]. Theoretical definitions of solitary waves were presented by Boussinesq in 1871 and Riley in 1876 [1]. Nevertheless, the debate about solitons continued until 1895 when Korteweg and de Vries presented their famous equation called KdV [3].

The importance of soliton waves was finally shown in 1965 by Zabusky and Kruskal, who numerically investigated the KdV equation and observed quasi-particle behavior in it. The special aspect that they observed was that the solitary waves retain their shape and speed after the collision, and they gave the name soliton to these waves [4, 5]. A series of integrable dynamical systems have soliton solutions obtained by the inverse scattering transform (IST), and it can be considered as the nonlinear equivalent of the Fourier transform method for linear differential equations.

One of the properties of the integrable equations with solitonary wave solution is that they have an infinite number of stability laws. Another feature is the existence of Hamiltonian structures that allow the system to be described without any need to obtain the exact solutions of the equations. Solitons in Hamilton's theory led to the emergence of new concepts and theories in many fields of mathematics and physical sciences [1]. In the field of fluid dynamics, plasma, nonlinear optics, astrophysics and molecular biology, soliton theory has many applications. In optical fibers, solitons play the role of transmitting digital signals over long distances. In biology, soliton theory is used to describe energy and signal propagation in biomembranes, the nervous system, and low-frequency motions in proteins and DNA [6]. The role of solitons is also seen in plasma physics studies, a substance that contains various charged particles [7].

In this article, the instability conditions and nonlinear behavior of ion acoustic waves in a fluid with partially ionized particles (different ion species and Boltzmann electrons) are investigated. Using the fluid equations, and converting it to the Korteweg-de Vries equation, soliton responses have been determined to describe the growth and propagation conditions of acoustic-ion modes.

2. Main Results

We consider an ion-electron multiparticle fluid medium where ions have low energy and electrons have a Boltzmann distribution. The basic equations to describe the dynamics of this ionic fluid in

one-dimensional coordinates are as follows

$$(2.1a) \quad \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_i u_i) = 0$$

$$(2.1b) \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} = -\frac{q_i}{m_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \nu_i \frac{u_i}{\rho_i}$$

$$(2.1c) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{e \rho_e}{\epsilon_0 m_e} - \frac{q_i \rho_i}{\epsilon_0 m_i}$$

where ρ_i , u_i , m_i , q_i , and ν_i are the density, fluid velocity, mass and electric charge of ion i , and the rate of ion production and loss due to ionization and particle collisions per unit volume, respectively. The presence of electrons in this environment is given by the Poisson's equation, where φ is the electrostatic potential.

By expanding the dependent variables in the equations (2.1a) to (2.1c) as follows

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \rho_i &= \rho_0 + \varepsilon \rho_{i1} + \varepsilon^2 \rho_{i2} + \varepsilon^3 \rho_{i3} + \cdots, \\ u_i &= u_{i0} + \varepsilon u_{i1} + \varepsilon^2 u_{i2} + \varepsilon^3 u_{i3} + \cdots, \\ \phi &= \varepsilon \phi_1 + \varepsilon^2 \phi_2 + \varepsilon^3 \phi_3 + \cdots, \\ \nu_i &= \varepsilon \nu_{i1} + \varepsilon^2 \nu_{i2}. \end{aligned}$$

and substituting the wave solution $\exp(jkx - j\omega t)$ in the equations, we can obtain the dispersion relation of the excited wave. In the linear regime, the standard method of linearization gives the dispersion equation of the form

$$(2.3) \quad k^2 \left(\frac{\mu_i^2 \rho_0^3}{(\omega - k u_{i0})^2 + \nu_{i1}^2} - 1 \right) = 1$$

For $u_0 \geq 2.0$ and long wavelengths, the slow mode (low frequency mode) bifurcates. This shows how the nature of the answers of the equations depends on the parameters of that equation [8]. Unlike high frequency modes, low frequency modes remain almost unchanged at $\delta = \nu_1/\nu_2 \geq 1.0$ and short wavelengths, $k \geq 2.5$. In this limit, although the high frequency modes increase with the wave number k , the low frequency modes tend to zero. High and low frequency modes are fast and slow modes respectively. Also, in the limit of short wavelengths, the value of δ does not affect the frequency of both modes. Also, unlike the fast mode, the speed u_0 has the effect of reducing the frequency of the slow modes.

Let us now to proceed with the nonlinear regime of the hydrodynamical equations (2.1a) to (2.1c). By introducing two new variables

$$(2.4) \quad \xi = \varepsilon^{1/2}(x - \lambda t), \quad \eta = \varepsilon^{3/2}x$$

and using the equation (2.2), after some algebra, the following variable-coefficient Kortweg-de Vries (vKdV) equation is obtained

$$(2.5) \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} + \left[\frac{\mu_i^2 \rho_0}{2\lambda(u_{i0} - \lambda)^4} \right] \phi_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} + \frac{1}{2\lambda^2} \frac{\partial^3 \phi_1}{\partial \xi^3} + \left[\frac{\mu_i^3 \nu_i}{2\lambda^3(u_{i0} - \lambda)^4} \right] \phi_1 = 0,$$

In general, this equation is not integrable and must be solved numerically. However, it is possible to obtain approximate analytical solutions for it [9]. To find the traveling solitary wave solutions, it is necessary that the wave profile is stationary with the form of $\phi(\zeta)$ with $\zeta = (\xi - \kappa\eta)$ and constant κ [10]. Therefore, equation (2.5) can be cast into the form

$$(2.6) \quad \frac{d^3 \phi_1}{d\zeta^3} + \alpha \frac{d\phi_1}{d\zeta} + \beta \phi_1 \frac{d\phi_1}{d\zeta} = 0,$$

where

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \alpha &= 2\kappa \lambda^2 \\ \beta &= \frac{\mu_i^2 \lambda \rho_0}{(u_{i0} - \lambda)^4} \exp \left(- \frac{\mu_i^3 \nu_i}{2\lambda^3(u_{i0} - \lambda)^4} \eta \right) \end{aligned}$$

An analytical solution of the wave equation takes the form,

$$(2.8) \quad \phi(\zeta) = \phi_1 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{1}{2} \zeta \sqrt{\frac{\phi_1}{3\beta}} \right),$$

This is the hyperbolic soliton. The results show that the amplitudes of solitons decrease with increasing values of λ and ν . With the propagation of soliton waves to the areas of higher density, the amplitude of the waves increases. In the case of both negative and positive ions, for $\lambda = 0.5$ there is a combination of solitons with positive and negative polarization in the response of the equation. For $\lambda \geq 1.0$ there are only solitons with negative polarization.

3. Conclusions

Nonlinear differential equations are the mathematical description of many phenomena and physical processes in nature. In this research, the application of solitons as a solution to nonlinear differential equations governing the physics of fluids was described. The nonlinear propagation of sound waves in a multiparticle fluid (consisting of electrons and several types of ion) was studied and investigated using hydrodynamic equations, accounting for the rate of production and loss of ions. The study on the stability condition showed that bifurcation in the frequency of wave modes occurs for nearly all values of fluid speed, u_0 , and production-loss contribution, δ .

With the reductive perturbation method, the nonlinear hydrodynamic equations with a static profile is converted into the Korteweg-de Vries equation with variable coefficients. The analytical solution of this wave equation shows that the disturbance in the medium of a multi-particle fluid is propagated as a soliton wave. Numerical studies show that for the fluid of two positive ions, the polarization of the solitary wave is positive, the amplitude of the solitons decreases with the wave speed while

its width increases. When a fluid contains both negative and positive ions, the polarization of the solitons becomes negative. Also, if the non-linear term of the wave equation becomes negligible, the combination of solitons with different polarizations is created. As the waves propagate towards areas with higher density, the amplitude of solitary waves increases and its speed decreases.

The obtained theoretical results can be used to observe electrostatic waves in space plasmas, as well as excitation of soliton waves, especially ion acoustic waves in laboratory plasmas. In addition, changing the phase velocity of ion acoustic waves is a diagnostic tool for observing dusty plasma state in laboratory plasmas.

REFERENCES

- [1] S. Manukure and T. Booker, A short overview of solitons and applications, *Partial Differ. Equations Appl. Math.* **4** (2021).
- [2] J. S. Russell, *Report on waves: made to the meetings of the British association in 1842-43*, Book from the collections of Harvard University, 1845.
- [3] D. J. Korteweg and G. de Vries, On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves, *Philos. Mag. (5)*, **39** (1895) 422–443.
- [4] N. J. Zabusky and M. D. Kruskal, Interaction of “solitons” in a collisionless plasma and the recurrence of initial states, *Phys. Rev. Lett.*, **15** (1965).
- [5] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal and R. M. Miura, Method for solving the Korteweg-de Vries equation, *Phys. Rev. Lett.*, **19** (1967).
- [6] H. Kuwayama and S. Ishida, Biological soliton in multicellular movement, *Sci Rep.*, **3** (2013).
- [7] N. J. Zabusky and M. A. Porter, Soliton, *Scholarpedia*, **5** (2010).
- [8] A. Lichtenberg and M. Lieberman, *Regular and stochastic motions*, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [9] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Mechanics*, Pergamon Press, Oxford, 1960.
- [10] E. M. Lifshitz and L. P. Pitaevskii, *Physical Kinetics*, Pergamon Press, Oxford, 1981.

Nora Nassiri-Mofakham

Fuel Cycle Research School, Nuclear Science and Technology Research Institute Tehran, Iran

Email:nnasiri aeoi.org.ir

سولیتون و کاربرد آن در مطالعه دینامیک غیرخطی امواج صوتی در سیال چند ذره‌ای

نورا نصیری مفخم^{id}

چکیده. سولیتون‌ها در ریاضیات محض و کاربردی، به‌ویژه در زمینه‌هایی چون معادلات دیفرانسیل غیرخطی، جبر لی و هندسه جبری کاربردهای فراوانی دارد. سولیتون‌ها در همه جای طبیعت هستند و کاربردهای بسیاری در دینامیک غیرخطی دارند. کشف سولیتون‌ها این امکان را فراهم کرد که برای معادلات دیفرانسل غیرخطی پاسخ‌های تحلیلی به‌دست آید. یکی از نام‌آشنا‌ترین آنها، معادله کورتوگ-دو وریس است که متعارف‌ترین معادله موج غیرخطی است. در یک سیال الکترواستاتیکی که تاحدودی یونیزه است، برخورد یونها با یکدیگر و همچنین با الکترون‌ها باعث می‌شود انتشار و جفت‌شدگی امواج الکترواستاتیکی یون‌ها رفتار غیرخطی داشته باشد. معادلات سیالی این امواج به روش اختلال کاهنده، تبدیل به معادله کورتوگ-دو وریس می‌شود، که پاسخ‌های تحلیلی آن به شکل امواج سولیتونی است و دامنه و سرعت آنها به خصوصیات محیط سیال بستگی دارد. در این مقاله نخست تاریخچه مختصری از سولیتون‌ها و کاربرد آنها بیان می‌شود. سپس انتشار غیرخطی موج متحرک الکترواستاتیکی یونی در یک سیال چندذره‌ای با در نظر گرفتن آهنگ تولید و اتلاف یون‌ها، بررسی گردیده و پاسخ تحلیلی و عددی معادلات امواج به‌دست می‌آید. نتایج نشان می‌دهد که منحنی‌های پاشندگی امواج دارای نقاط دوشاخگی هستند و فقط امواج با فرکانس بالا به‌صورت امواج سولیتونی با مدهای مختلط منتشر می‌شوند. نتایج این مطالعه می‌تواند در مشاهدات امواج صوتی-یونی در پلاسماهای فضایی و وجود دانه‌های ریزگرد در پلاسماهای آزمایشگاهی کاربرد داشته باشد.

۱. مقدمه

تاریخچه سولیتون‌ها^۱ یا امواج سولیتونی به اوایل قرن نوزدهم باز می‌گردد. نخستین بار یک مهندس عمران اسکاتلندی در نیروی دریایی بریتانیا به نام جان اسکات راسل^۲ آن‌را کشف کرد و ابتدا آنها را موج بزرگ حرکت انتقالی نامید [۱]. بیش از ۱۵۰ سال پیش، جان اسکات راسل که یک مهندس جوان اسکاتلندی در صنایع کشتی سازی عصر ویکتوریایی بود، آزمایش‌هایی را برای کارآمدترین طراحی کانال عبور کشتی‌ها و قایق‌ها انجام داد. مشاهدات راسل در کانال یونیون^۳ هرمیستون^۴، نزدیک به دانشکده ریکارتون^۵ دانشگاه هریوت-وات ادینبرو^۶، منجر به کشف علمی بسیار مهم و شایان توجه شد. وی دستاورد خود را با عنوان «گزارشی درباره امواج»، در چهاردهمین نشست انجمن توسعه علوم بریتانیا در سپتامبر ۱۸۴۴ ارائه کرد. راسل این‌گونه بیان داشت [۲]:

عبارات و کلمات کلیدی: دینامیک غیرخطی، دوشاخگی، معادله پاشندگی مختلط، موج صوتی.
دبیرتخصصی رابط: صغری نوبختیان
نوع مقاله: پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۹/۰۴ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۱۲/۲۴ تاریخ انتشار آنلاین: ۱۴۰۳/۰۳/۱۳
ارجاع به مقاله: ن. نصیری مفخم، سولیتون و کاربرد آن در مطالعه دینامیک غیرخطی امواج صوتی در سیال چندذره‌ای، نشریه ریاضی و جامعه، ۹ شماره ۲ (۱۴۰۳) ۷۱-۸۵.
<http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.139913.1629>

¹soliton ²John Scott Russell ³Union Canal ⁴Hermiston ⁵Riccarton campus ⁶Heriot-Watt University, Edinburgh

«من حرکت قایقی را که به وسیله دو اسب به سرعت در یک کانال باریک کشیده می‌شد نگاه می‌کردم، که ناگهان قایق متوقف شد. این باعث یک حالت آشفتگی شدید آب اطراف دماغه قایق، نه به اندازه جرم آبی که در کانال به حرکت درآورده بود، شد. سپس ناگهان این آشفتگی رها شد، با سرعت زیادی به جلو غلتید، و به شکل یک توده مرتفع منحصربه‌فرد، یک توده آب گرد، یک پشته آب صاف و هموار، ظاهراً بدون تغییر شکل یا کاهش سرعت به مسیر خود در کانال ادامه داد. من سوار بر اسب آن را تعقیب کردم و از آن سبقت گرفتم و همچنان با سرعتی حدود ۸ یا ۹ مایل در ساعت در حال غلتیدن بود و شکل اصلی خود را با حدود ۳۰ فوت طول و یک تا یک و نیم فوت ارتفاع حفظ کرد. ارتفاع آن به تدریج کاهش یافت و پس از یک یا دو مایل تعقیب، آن را در پیچ و خم کانال گم کردم. این چنین، در ماه آگوست ۱۸۳۴، اولین بخت من برای دیدن این پدیده زیبا و بی‌همتا به وجود آمد که من آن را موج انتقال نامیده‌ام.»

پس از این کشف، راسل تحقیقات بیشتری را، برای تعیین خصوصیات این امواج با آزمایش‌هایی بر روی ۳۰ ظرف آب در حیاط خانه خود، انجام داد و به مشاهدات ارزشمند بیشتری از خصوصیات موج سولیتون دست یافت. راسل کشف امواج سولیتونی را بسیار مهم می‌دانست و از این امواج به عنوان یک موجودیت دینامیکی یاد می‌کرد، اما از سوی دانشمندان قرن نوزده و اوایل قرن بیستم این کشف پذیرفته نشد. دانشمندان پیشرو نظیر جرج آیری^۷ و جرج استوکس^۸ برای توصیف نظری این امواج، تحقیقاتی را انجام دادند که موفقیت‌آمیز نبودند. جرج آیری به اشتباه معتقد بود موج سولیتونی نتیجه‌ای از نظریه خطی آب کم عمق خودش است و جرج استوکس در خصوص اینکه این امواج شکل خود را به طور دائمی حفظ می‌کنند تردید داشت. اولین تعاریف نظری از امواج سولیتونی توسط بوسنسک^۹ در ۱۸۷۱ و رایلی در ۱۸۷۶ ارائه شد [۱]. با این وجود بحث وجدل پیرامون سولیتون‌ها تا ۱۸۹۵ ادامه داشت تا اینکه کورتوگ و دو وریس^{۱۰} معادله مشهور خود به نام KdV را ارائه کردند [۲].

اهمیت امواج سولیتونی نهایتاً در ۱۹۶۵ توسط زابوسکی و کروسکال نشان داده شد که معادله KdV را به صورت عددی بررسی و رفتار شبه ذره‌ای را در آن مشاهده کردند. جنبه خاصی که آنها مشاهده کردند این بود که امواج سولیتونی شکل و سرعت خود را پس از برخورد حفظ می‌کنند و نام سولیتون را بر این امواج نهادند [۴]. بسیاری از سیستم‌های دینامیکی انتگرال‌پذیر پاسخ‌های سولیتونی دارند که از راه تبدیل پراکندگی معکوس^{۱۱} به دست می‌آید، و می‌توان آن را مشابه غیرخطی روش تبدیل فوریه برای معادلات دیفرانسیل خطی دانست. تبدیل پراکندگی معکوس توسط گاردنر، گرین، کروسکال و میورا بسط داده شد و مهمترین کشف در زمینه ریاضی فیزیک در قرن بیستم محسوب می‌شود [۵].

سولیتون‌ها پاسخ برخی معادلات دیفرانسیل غیرخطی هستند. از معادلات دو بعدی می‌توان به معادله برگر، معادله کورتوگ-دو وریس، معادله شرودینگر غیرخطی، معادله سینوسی گوردون، و معادله کاماسا-هولم اشاره کرد. برای معادلات چندبعدی نظیر کادومتسف-پتویاشویلی، معادله هیروتا-ساتسوما-ایتو و معادله دیوی-استوارتسون پاسخ‌های سولیتونی به دست آمده است. اخیراً به منظور ایجاد معادلات جدید و اغلب انتگرال‌ناپذیر برای دینامیک غیرخطی، بسیاری از معادلات انتگرال‌پذیر تعمیم یافته‌اند [۱].

یکی از ویژگی‌های معادلاتی که پاسخ سولیتونی دارند این است که تعداد نامتناهی از قوانین، پایستگی دارند که مربوط به انتگرال‌پذیری آنها است. دیگر ویژگی، وجود ساختارهای هامیلتونی است که اجازه می‌دهد بتوان سیستم را؛ بدون اینکه لازم باشد پاسخ واضح معادلات به دست آید؛ توصیف، تجزیه و تحلیل کرد. سولیتون‌ها در نظریه هامیلتونی انقلابی در فیزیک

⁷George Airy ⁸George G. Stokes ⁹Boussinesq ¹⁰Korteweg and de Vries (KdV) ¹¹inverse scattering transform (IST)

ریاضی به وجود آوردند که منجر به ظهور مفاهیم و نظریات جدید در بسیاری از حوزه‌ها نظیر مکانیک کلاسیک، مکانیک کوانتومی و نظریه لی شد [۱].

در حوزه دینامیک سیالات، پلاسما، اپتیک غیرخطی، اخترفیزیک و بیولوژی مولکولی، نظریه سولیتونی کاربردهای زیادی دارد. در فیبرهای نوری، سولیتون‌ها وظیفه انتقال سیگنال‌های دیجیتالی به فواصل دور را ایفا می‌کنند. در بیولوژی، نظریه سولیتون برای توصیف انتشار انرژی و سیگنال در زیست غشاها، سیستم عصبی و حرکات فرکانس پایین در پروتئین‌ها و دی‌ان‌ا (DNA) به کار می‌رود [۶]. در مطالعات فیزیک پلاسما، ماده‌ای که حاوی تعداد بیشماری از ذرات باردار است، نقش سولیتون‌ها نیز دیده می‌شود. به عنوان مثال، زمینه پلاسما ریزگردی که حاوی ذرات باردار بسیار ریز است، با زنجیره‌های نوسانگر غیرخطی مدل‌سازی می‌شود که انواع پاسخ‌های سولیتونی را به وجود می‌آورد [۷].

در این مقاله، شرایط ناپایداری و رفتار غیرخطی امواج الکترواستاتیک آکوستیک یونی در یک محیط سیالی که کاملاً یونیزه نیست، بررسی می‌شود. سیال متشکل از گونه‌های مختلف یون است و الکترون‌ها از توزیع بولتزمن پیروی می‌کنند. یون‌ها و الکترون‌ها از طریق معادله پواسون با یکدیگر جفت می‌شوند. با استفاده از معادلات سیالی، و تبدیل آن به معادله کورتوگ-دو وریس پاسخ‌های سولیتونی برای توصیف شرایط رشد و انتشار مدهای صوتی-یونی تعیین شده است.

۲. معادله موج امواج صوتی-یونی

یک محیط سیالی چند ذره‌ای یون-الکترون در نظر می‌گیریم که در آن یون‌ها انرژی کم و الکترون‌ها توزیع بولتزمن دارند. معادلات پایه برای توصیف دینامیک این سیال یونی در مختصات یک بعدی به صورت زیر است:

$$(۱.۲) \quad \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_i u_i) = 0,$$

$$(۱.۲) \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} = -\frac{q_i}{m_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \nu_i \frac{u_i}{\rho_i},$$

$$(۱.۲) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{e \rho_e}{\epsilon_0 m_e} - \frac{q_i \rho_i}{\epsilon_0 m_i},$$

که ρ_i ، u_i و m_i و q_i به ترتیب چگالی، سرعت سیال، جرم و بار الکتریکی یون i است. حضور الکترون‌ها ($m_e \ll m_i$) در این محیط با سومین معادله، یعنی معادله پواسون، داده می‌شود که در آن φ پتانسیل الکترواستاتیک است. پارامتر ν_i آهنگ تولید و اتلاف یون بر اثر یونیزاسیون محیط و برخورد ذره‌ای در واحد حجم را نشان می‌دهد. دسته معادلات (۱.۲) تا (۱.۲) با تغییر متغیرهای مناسب و نرمالیزه کردن کمیت‌های آن به مقادیر مرجع، به معادلات نرمالیزه زیر تبدیل می‌شوند:

$$(۲.۲) \quad \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_i u_i) = 0,$$

$$(۳.۲) \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} = -\mu_i \frac{\partial \phi}{\partial x} - \nu_i \frac{u_i}{\rho_i},$$

$$(۴.۲) \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = e^\phi - \mu_i \rho_i,$$

که e^ϕ نشان‌دهنده سهم الکترون‌های بولتزمنی از تعداد کل ذرات محیط با معادله $\rho_e = \rho_0 e^\phi$ هستند. چگالی، سرعت سیال و پتانسیل الکترواستاتیک به ترتیب برحسب مقادیر مرجع $\rho_0 m_i$ ، سرعت صوت یونی $V_a = \sqrt{T_e/m_i}$ و پتانسیل $K_B T_e/e$ نرمالیزه شده‌اند، که ρ_0 چگالی در حالت تعادل، k_B ثابت بولتزمن و T_e دمای جنبشی الکترون‌های بولتزمنی است. متغیرهای مکان (x) و زمان (t) به طول دیبای $\lambda_D = \sqrt{\epsilon_0 k_B T_e / \rho_0 e^2}$ و معکوس فرکانس پلاسما $\omega_p^{-1} = \sqrt{\epsilon_0 m_i / \rho_0 e^2}$ بهنجار

شده‌اند. برای آسانی کار، نسبت جرم و بار الکتریکی یون با پارامتر $\mu_i = q_i \rho_i / e m_i$ تعریف می‌شود به گونه‌ای که فقط این پارامتر ترکیبی برای هر یون در حل عددی معادلات در نظر گرفته می‌شود.

۳. رابطه پراگندگی موج

با بسط متغیرهای وابسته در معادلات (۲.۲) تا (۴.۲) به صورت زیر:

$$\begin{aligned}\rho_i &= \rho_0 + \varepsilon \rho_{i1} + \varepsilon^2 \rho_{i2} + \varepsilon^3 \rho_{i3} + \dots, \\ u_i &= u_{i0} + \varepsilon u_{i1} + \varepsilon^2 u_{i2} + \varepsilon^3 u_{i3} + \dots, \\ \phi &= \varepsilon \phi_1 + \varepsilon^2 \phi_2 + \varepsilon^3 \phi_3 + \dots, \\ \nu_i &= \varepsilon \nu_{i1} + \varepsilon^2 \nu_{i2}.\end{aligned}\quad (۱.۳)$$

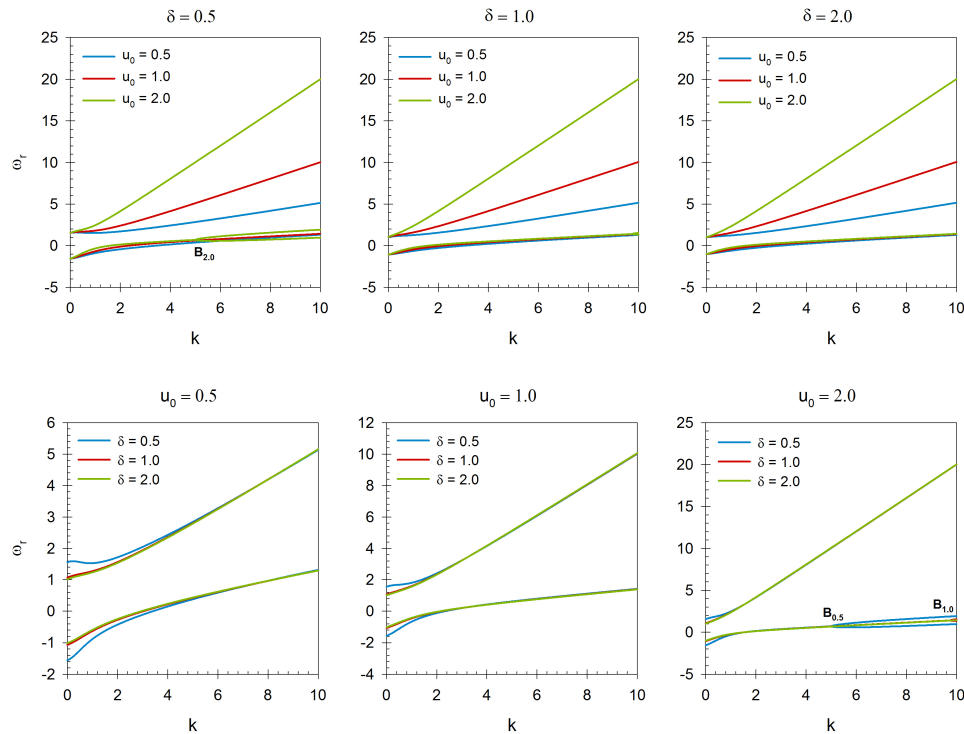
و جایگزینی پاسخ موجی $\exp(jkx - j\omega t)$ در معادلات و به کارگیری روش استاندارد خطی کردن پس از انجام عملیات ریاضی بر روی این معادلات، رابطه $\varphi = 0$ را به دست می‌دهد که $\varepsilon(\omega, k)$ پذیرفتاری ماده است. به این ترتیب معادله انتشار موج با معادله زیر داده می‌شود:

$$k^2 \left(\frac{\mu_i \rho_0^2}{(\omega - k u_{i0})^2 + \nu_{i1}^2} - 1 \right) = 1. \quad (۲.۳)$$

اکنون فرض می‌کنیم که عدد موج حقیقی و فرکانس موج مختلط است، یعنی $\omega = \omega_r + j\omega_i$ که در آن $j = \sqrt{-1}$ است. مقدار مثبت برای ω_i متناظر با رشد موج (مدهای ناپایدار) و ω_i منفی متناظر با میرایی موج (مدهای پایدار) است. با حل عددی معادله (۲.۳) تغییرات فرکانس موج مختلط بر حسب عدد موج k را برای مقادیر مختلف دسته پارامترهای $u_0 = u_{10}/u_{20}$ و $\delta = \nu_{11}/\nu_{21}$ برای یک سیال الکترواستاتیک دو ذره‌ای نشان می‌دهد. در محاسبات دو یون با نسبت‌های $\mu_1 = 4$ و $\mu_2 = 1/2$ در نظر گرفته شده است. هرگاه $\delta \geq 2/0$ ، آنگاه به ازای همه مقادیر k و u_0 پاسخ حقیقی داریم. برای $2/0 \leq \delta$ در بازه $9/7 \leq k \leq 2/6$ ، بسته به مقادیر u_0 و δ معادله پاشندگی (۲.۳) ریشه‌های همیوگ مختلط خواهد داشت. افزایش فرکانس هر دو مد با افزایش مقدار k نشان می‌دهد که سرعت فاز موج از سرعت صوت بیشتر است.

برخلاف مدهای فرکانس بالا، مدهای فرکانس پایین در مقادیر $\delta \geq 1/0$ و طول موج‌های کوتاه، $k \geq 2/5$ تقریباً بدون تغییر می‌ماند. در این حد، گرچه مدهای فرکانس بالا با عدد موج k افزایش می‌یابند، مدهای فرکانس پایین به صفر می‌گرایند. مدهای فرکانس بالا و پایین به ترتیب مدهای تند و کند هستند. همچنین در حد طول موج‌های کوتاه مقدار δ بر فرکانس هر دو مد تأثیر ندارد. همچنین برخلاف مدتند، سرعت u_0 اثر کاهش بر فرکانس مدهای کند دارد.

در شکل ۱ قسمت‌های حقیقی و موهومی فرکانس بر حسب عدد موج نشان داده شده است. در حالتی که فرکانس موهومی صفر باشد، مدها موجبر هستند. در حالتی که فرکانس موهومی ناصفر باشد، مدها را به اصطلاح موج نشت‌کننده می‌نامند. همان‌گونه که در شکل مشخص است، به ازای $u_0 \geq 2/0$ و طول موج‌های بلند، مد کند (مد فرکانس پایین) در نقطه B دوشاخه می‌شود که این دوشاخگی در نظریه کاتاستروفی مشاهده می‌شود. این نظریه نشان می‌دهد که چگونه ماهیت پاسخ‌های معادلات به پارامترهای آن معادله بستگی دارد و به کمک آن نواحی غیرمعمول نظیر نقاط دوشاخگی و تاشدگی تعیین می‌شود [۸]. در نقطه D پراکندگی مکانی امواج اهمیت می‌یابد. با افزایش عدد موج و پس از این نقطه، مسیرهای مدهای بالا و پایین به ازای مقادیر $\delta \leq 1/0$ یکی می‌شوند. با افزایش فرکانس و پس از نقاط دوشاخگی، در هر دو مسیر داریم $\omega_i \rightarrow 0$. بنابراین رابطه پراکندگی فقط پاسخ‌های پایدار دارد. پس از دوشاخگی در مسیرها، فقط مد کند وجود دارد.



شکل ۱. تغییرات فرکانس موج برحسب عدد موج (پاسخ‌های معادله پراکندگی موج) برای مقادیر مختلف پارامترهای u_0 و δ .

Figure 1: Variation of wave frequency with wavenumber (solutions of the wave dispersion relation) for different values of parameters u_0 and δ

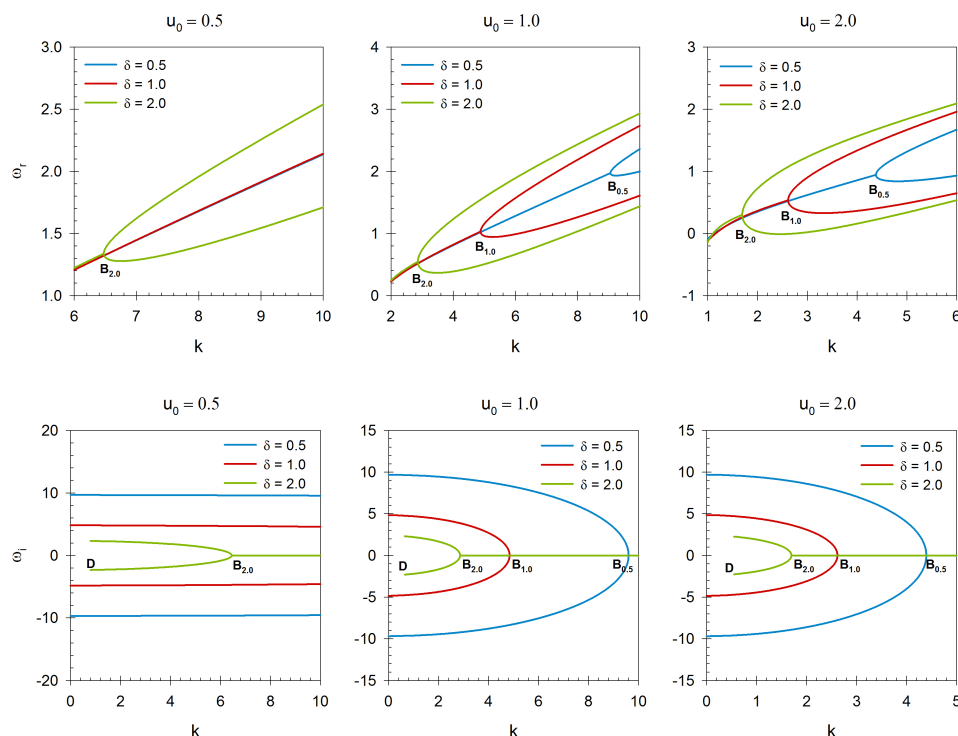
۴. معادله کورتوگ-دو وریس با ضرایب متغیر

برای یافتن پاسخ‌های سولیتونی الکترواستاتیک، دو متغیر مستقل جدید تعریف می‌کنیم

$$(۱.۴) \quad \xi = \varepsilon^{1/2}(x - \lambda t), \quad \eta = \varepsilon^{3/2}x,$$

که پارامتر کوچک ε معیاری برای شدت و ضعف اختلال است و λ سرعت غیرخطی موج، بهنجار شده به $V_a = \sqrt{T_e/m_i}$ است. با این متغیرهای جدید خواهیم داشت

$$(۲.۴) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= -\varepsilon^{1/2} \frac{\partial}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\varepsilon^{1/2}}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \xi} + \varepsilon^{3/2} \frac{\partial}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \frac{\varepsilon}{\lambda^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \varepsilon^2 \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{\lambda} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \xi} \right]. \end{aligned}$$



شکل ۲. تغییرات قسمت حقیقی فرکانس موج ω_r (نمودار بالا) و قسمت موهومی ω_i (نمودار پایین) حول نقطه دوشاخگی

Figure 2: The changes of the real part of the wave frequency, ω_r (upper plot) and the imaginary part, ω_i (lower plot) around the bifurcation point

با جای‌گذاری بسط متغیرهای معادله (۱.۳) در معادلات (۲.۲) تا (۴.۲)، و سپس با تجميع جملات مربوط به توان‌های مختلف ε^2 خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} (u_{i0} - \lambda) \frac{\partial \rho_{i2}}{\partial \xi} + \rho_0 \frac{\partial u_{i2}}{\partial \xi} + \lambda u_{i0} \frac{\partial \rho_{i1}}{\partial \eta} + \lambda \rho_0 \frac{\partial u_{i1}}{\partial \eta} &= 0, \\ (u_{i0} - \lambda) \frac{\partial u_{i2}}{\partial \xi} + u_{i1} \frac{\partial u_{i1}}{\partial \xi} + \lambda \frac{\partial u_{i1}}{\partial \eta} &= -\mu_i \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi} - \lambda \mu_i \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} - \lambda \nu_i \rho_0 u_{i1} + \lambda \nu_i u_{i0} \rho_1, \\ \phi_2 &= \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \xi^2} + \frac{\phi_1^2}{2} + \mu_i \rho_{i2}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

با حذف u_{i2} بین دو تساوی اول در معادله (۳.۴) و با استفاده از عبارت سوم در معادله (۳.۴) برای حذف ϕ_2 ، رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} + \left[\frac{\mu_i^2 \rho_0}{2\lambda(u_{i0} - \lambda)^2} \right] \phi_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} + \frac{1}{2\lambda^2} \frac{\partial^3 \phi_1}{\partial \xi^3} + \left[\frac{\mu_i^3 \nu_i}{2\lambda^3(u_{i0} - \lambda)^2} \right] \phi_1^2 = 0, \quad (4.4)$$

معادله (۴.۴)، معادله کورتوگ-دو وریس با ضرایب متغیر^{۱۲} است. در کل، این معادله انتگرال پذیر نیست و باید به صورت عددی حل شود. با این وجود می توان پاسخ های تحلیل تقریبی برای آن به دست آورد [۹]. در بخش بعد بررسی می شود آیا انتشار موج الکترواستاتیک یونی به شکل سولیتون است؟

۵. پاسخ سولیتونی

اکنون امکان وجود پاسخ معادله موج به صورت امواج سولیتونی را بررسی می کنیم. برای این منظور لازم است پروفایل موج به صورت ایستا و ساکن باشد. در چنین شرایطی تابع $\phi(\xi, \eta)$ فقط به $\zeta = (\xi - \kappa\eta)$ با κ ثابت بستگی دارد [۱۰]. بنابراین معادله (۴.۴) به صورت زیر به دست می آید:

$$(۱.۵) \quad \frac{d^3 \phi_1}{d\zeta^3} + \alpha \frac{d\phi_1}{d\zeta} + \beta \phi_1 \frac{d\phi_1}{d\zeta} = 0,$$

که

$$\alpha = 2\kappa\lambda^2$$

$$\beta = \frac{\mu_i^2 \lambda \rho_0}{(u_{i0} - \lambda)^4} \exp\left(-\frac{\mu_i^2 \nu_i}{2\lambda^3(u_{i0} - \lambda)^4} \eta\right),$$

معادله (۱.۵) دارای سه پاسخ ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 است و به شکل خلاصه زیر تبدیل می شود:

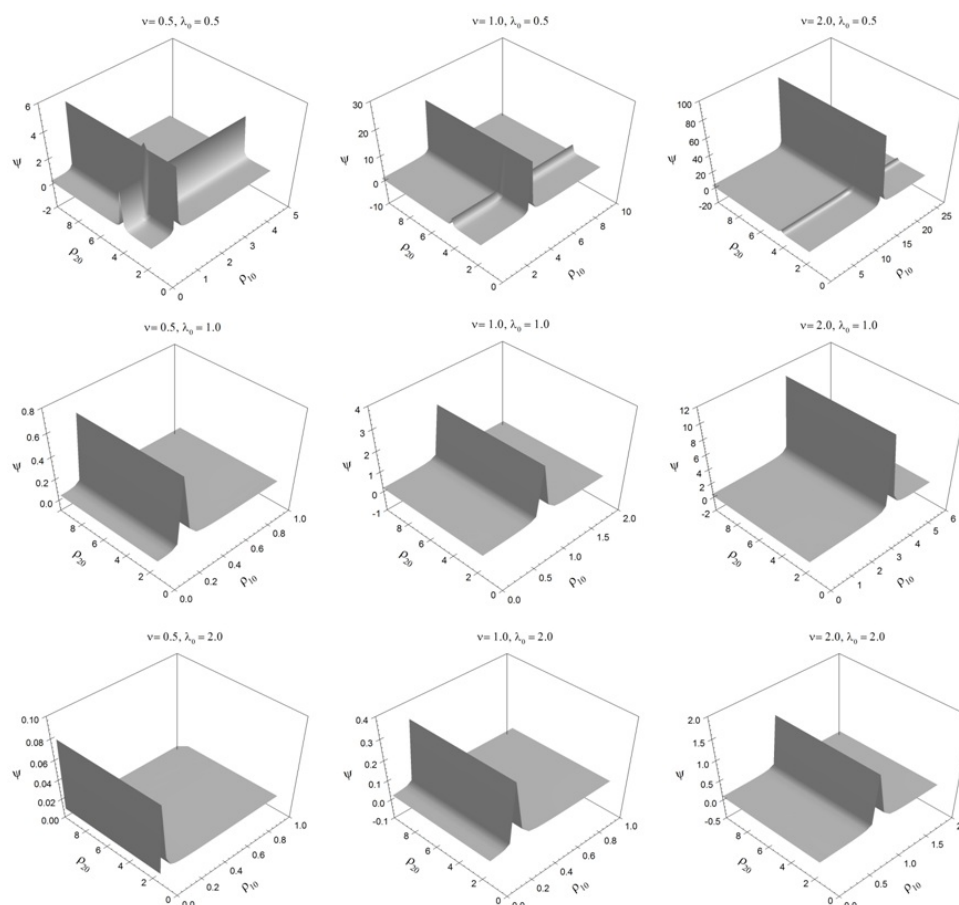
$$(۳.۵) \quad \left(\frac{d\phi}{d\xi}\right)^2 = -\frac{1}{3\beta}(\phi - \phi_1)(\phi - \phi_2)(\phi - \phi_3)$$

در حالتی که $\phi_1 > 0$ و $\phi_2 = \phi_3 = 0$ ، آنگاه پاسخ معادله (۳.۵) به صورت سولیتون هیپربولیکی است

$$(۴.۵) \quad \phi(\zeta) = \phi_1 \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}\zeta\sqrt{\frac{\phi_1}{3\beta}}\right),$$

تابع ψ_1 دامنه موج سولیتونی است و پهنای موج با افزایش دامنه به صورت $(\beta/\phi_1)^{1/2}$ کاهش می یابد [۱۰]. برای توضیح نتایج نظری، پاسخ های معادله vKdV، پروفایل دامنه سولیتون ها بر حسب تغییرات چگالی یون ها و به ازای مقادیر مختلف λ و ν در شکل های ۳ و ۴ نشان داده شده است. در این شکل ها از مقادیر پارامترهای شکل ۱ استفاده شده است. دامنه سولیتون ها با افزایش مقادیر λ و ν کاهش می یابد. با انتشار امواج سولیتونی به نواحی که چگالی در آنها زیاد می شود، دامنه امواج افزایش می یابد. اگر هم یون مثبت و هم یون منفی در سیال باشد، ساختار موج تغییر می کند. همان گونه که در شکل ۴ دیده می شود، برای $\lambda = 0.5$ ترکیب سولیتون های با قطبش مثبت و منفی در پاسخ معادله وجود دارد. به ازای $\lambda \geq 1.0$ فقط سولیتون با قطبش منفی وجود دارد. در نتیجه سولیتون انکساری است و در لایه های چگالی شکسته می شود. تغییر سرعت فاز امواج آکوستیک یونی می تواند ابزاری تشخیصی برای مشاهده ذرات ریزگردی باردار در پلاسماهای آزمایشگاهی باشد.

¹²variable Korteweg-de Vries (vKdV)

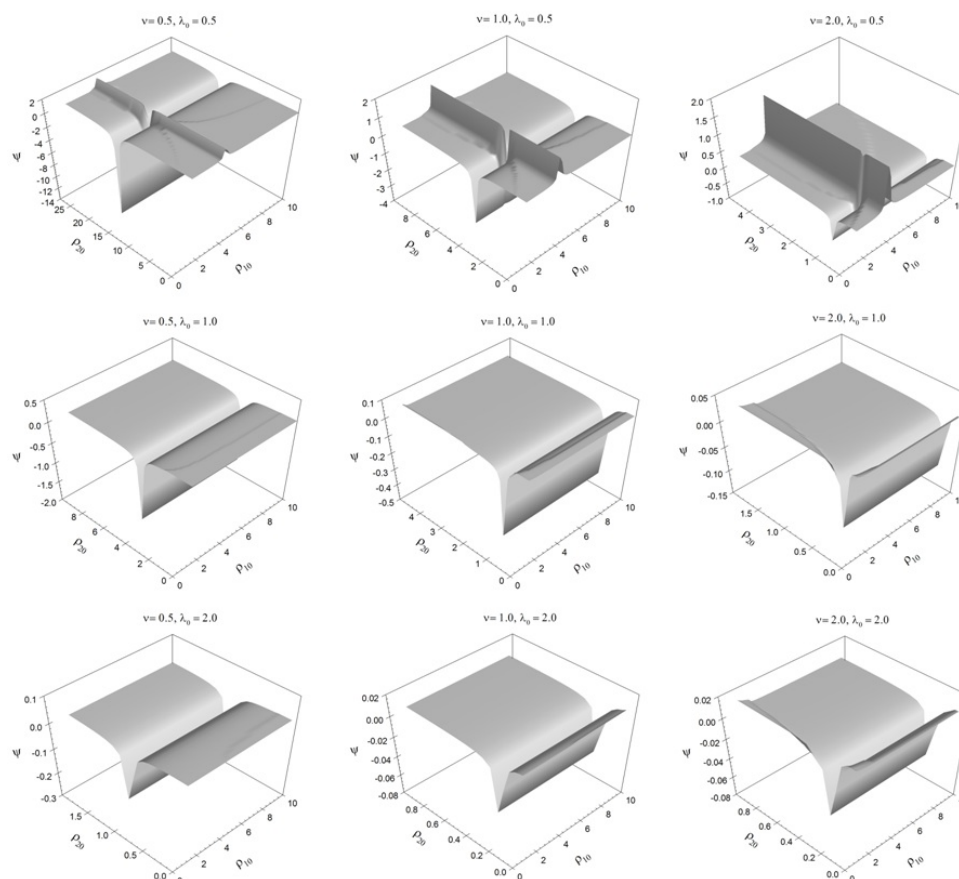


شکل ۳. اثر چگالی یون‌ها بر دامنه سولیتون معادله کورتوگ- دو وریس ضرایب متغیر برای سیال حاوی دو یون مثبت

Figure 3: Effect of ion mass density on the soliton width of variable coefficients Korteweg-de Vries for fluid medium containing positive ions

۶. نتیجه‌گیری

معادلات دیفرانسیل غیرخطی توصیف ریاضی بسیاری از پدیده‌ها و فرایندهای فیزیکی در طبیعت هستند. در این پژوهش، برای توصیف کاربرد سولیتون‌ها به‌عنوان پاسخ معادلات دیفرانسیل غیرخطی حاکم بر فیزیک سیالات، انتشار غیرخطی امواج صوتی در یک سیال چند ذره‌ای مطالعه و بررسی شد. یک سیال در حالت کلی که می‌تواند حاوی ذرات خنثی و یون‌ها باشد در نظر گرفته شد. معادله موج آکوستیک در سیال متشکل از الکترون و چندین نوع یون با در نظر گرفتن آهنگ تولید و اتلاف یون‌ها، با استفاده از معادلات هیدرودینامیک به‌دست آمد. از رابطه پاشندگی این موج شرایط ناپایداری تعیین شد. نتایج نشان داد که به ازای مقادیر مختلف u_0 و δ ، دو شاخگی در فرکانس مدهای موج اتفاق می‌افتد. با روش اختلال کاهشی، معادله غیرخطی امواج الکترواستاتیک با پروفایل ایستا، به معادله کورتوگ- دو وریس با ضرایب متغیر تبدیل می‌شود که پاسخ این معادله نشان می‌دهد اختلال در محیط این سیال چند ذره‌ای به‌صورت موج سولیتونی منتشر می‌شود. بررسی ویژگی‌های امواج سولیتونی نشان می‌دهد که برای دو یون مثبت، قطبش امواج مثبت است، دامنه سولیتون‌ها



شکل ۴. اثر چگالی یون‌ها بر دامنه سولیتون معادله کورتوگ- دو ورپس ضرایب متغیر برای سیال حاوی یک یون مثبت و یک یون منفی

Figure 4: Effect of ion mass density on the soliton width of variable coefficients Korteweg-de Vries for fluid medium containing both positive and negative ions

با سرعت موج کاهش می‌یابد در حالی‌که پهنای آن بیشتر می‌شود. در حالتی‌که یک یون منفی در کنار یک یون مثبت باشد، قطبش امواج منفی می‌شود. همچنین اگر جمله غیرخطی معادله موج ناچیز شود، ترکیب سولیتون‌ها با قطبش‌های متفاوت به وجود می‌آید. با انتشار امواج به سمت نواحی با چگالی بیشتر، دامنه امواج سولیتونی افزایش و سرعت آن کاهش می‌یابد. نتایج نظری به دست آمده می‌تواند برای مشاهده امواج الکترواستاتیک در پلاسماهای فضایی و همچنین برانگیختگی امواج سولیتونی، به ویژه امواج آکوستیک یونی در پلاسماهای آزمایشگاهی کاربرد داشته باشد. علاوه بر این، تغییر سرعت فاز امواج آکوستیک یونی ابزار تشخیصی برای مشاهده دانه‌های ریزگرد در پلاسماهای آزمایشگاهی است.

مراجع

- [1] S. Manukure and T. Booker, A short overview of solitons and applications, *Partial Differ. Equations Appl. Math.* 4 (2021).

- [2] J. S. Russell, *Report on waves: made to the meetings of the British association in 1842-43*, Book from the collections of Harvard University, 1845.
- [3] D. J. Korteweg and G. de Vries, On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves, *Philos. Mag. (5)*, **39** (1895) 422-443.
- [4] N. J. Zabusky and M. D. Kruskal, Interaction of "solitons" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states, *Phys. Rev. Lett.*, **15** (1965).
- [5] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal and R. M. Miura, Method for solving the Korteweg-de Vries equation, *Phys. Rev. Lett.*, **19** (1967).
- [6] H. Kuwayama and S. Ishida, Biological soliton in multicellular movement, *Sci Rep.*, **3** (2013).
- [7] N. J. Zabusky and M. A. Porter, Soliton, *Scholarpedia*, **5** (2010).
- [8] A. Lichtenberg and M. Lieberman, *Regular and stochastic motions*, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [9] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Mechanics*, Pergamon Press, Oxford, 1960.
- [10] E. M. Lifshitz and L. P. Pitaevskii, *Physical Kinetics*, Pergamon Press, Oxford, 1981.

نورا نصیری مفخم

پژوهشکده چرخه سوخت، پژوهشگاه علوم و فنون هسته ای، امیرآباد شمالی، تهران

nnasiri@aeoi.org.ir

نورا نصیری مفخم عضو هیأت علمی پژوهشگاه علوم و فنون هسته ای و دانش آموخته کارشناسی و کارشناسی ارشد فیزیک از دانشگاه صنعتی اصفهان و دکتری فیزیک از دانشگاه اصفهان است. زمینه های پژوهشی وی، دینامیک غیر خطی، آشوب، برهمکنش موج با محیط های پیچیده نظیر پلاسما، و مگنتو هیدرو دینامیک است.

