http://math-sci.ui.ac.ir

Journal of Mathematics and Society
ISSN (print): 2345-6493, ISSN (on-line): 2345-6507
Vol. 9 No. 2 (2024), pp. 87-105.

http://www.ui.ac.ir

GENERALIZED DERIVATIONS ON CERTAIN BANACH ALGEBRAS

MEHDI NEMATI*, ALI EBRAHIMZADEH ESFAHANI, SIMA SOLTANI RENANI AND SEYED MAHMOUD MANJEGANI

Abstract. In this paper, we apply the well-known results concerning derivations and generalized derivations of commutative Banach algebras and of prime rings to certain Banach algebras that are neither commutative Banach algebras nor prime rings. For example, we investigate the truth of Singer-Wermer conjecture and Posner's second theorem for this class of Banach algebras.

1. Introduction

A well-known theorem of Singer and Wermer states that every bounded derivation on a commutative Banach algebra has its image in the radical [14]. About 30 years later, Thomas extended the Singer-Wermer theorem to arbitrary, not necessarily bounded, derivations [15]. A number of authors have generalized this theorem in several ways on certain Banach algebras; see [11, 13]. For example, Posner [13] gave a noncommutative version of the Singer-Wermer theorem for prime rings. Also he proved that the zero map is the only centralizing derivation on a noncommutative prime ring (Posner's second theorem).

In harmonic analysis, some examples of Banach algebras have been discovered for which $\mathrm{rad}(\mathcal{A}) = \mathrm{rann}(\mathcal{A})$ and the algebra $\mathcal{A}/\mathrm{rad}(\mathcal{A})$ is commutative. The most notable cases are $L_0^\infty(G)^*$ when G is

Keywords: Banach algebra, derivation, generalized derivation, Singer-Wermer property, locally compact group.

Communicated by Majid Fakhar.

Article Type: Research Paper.

*Corresponding author.

Received: 03-12-2023, Accepted: 12-03-2024, Published Online: 10-06-2024.

Cite this article: M. Nemati, A. Ebrahimzadeh Esfahani, S. Soltani Renani and S. M. Manjegani, Generalized derivations on certain Banach algebras, *Mathematics and Society*, **9** no. 2 (2024) 87–105.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140007.1630 .

an abelian locally compact group and $L_0^\infty(G)$ is the subspace of $L^\infty(G)$ consisting of all functions $f \in L^\infty(G)$ vanishing at infinity [10] and $VN(G)^*$ when G is a discrete group and $VN(G)$ is the von Neumann algebra generated by the left regular representation of G [9]. Moreover, under the right conditions, all of the above examples are neither commutative Banach algebras nor prime rings. These motivated us to try to apply the well-known results concerning derivations of commutative Banach algebras and derivations of prime rings to this class of Banach algebras. For example, we prove that the Singer-wermer theorem and Posner's second theorem for derivations and general derivations hold on this class of Banach algebras. Our results generalize and unify most of the results of [1, 12] concerning the convolution algebra $L_0^\infty(G)^*$ over an abelian locally compact group G.

2. Main Results

Throughout this paper, $\mathcal{A}$ denotes a Banach algebra with the properties that $\mathrm{rad}(\mathcal{A}) = \mathrm{rann}(\mathcal{A})$ and the algebra $\mathcal{A}/\mathrm{rad}(\mathcal{A})$ is commutative.

Theorem 2.1. *Let d be a derivation of $\mathcal{A}$. Then $d(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{rad}(\mathcal{A})$.*

Before giving the following consequence of Theorem 2.1, let us recall that a linear mapping $T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ is called spectrally bounded if there exists $M \geq 0$ such that $r(T(a)) \leq Mr(a)$ for all $a \in \mathcal{A}$, where $r(a)$ denotes the spectral radius of $a \in \mathcal{A}$. In addition, if $M = 0$, T is called spectrally infinitesimal.

Corollary 2.2. *The following statements hold.*

(i) *The composition of two derivations of $\mathcal{A}$ is always a derivation of $\mathcal{A}$.*
(ii) *Every derivation of $\mathcal{A}$ is spectrally infinitesimal.*

Theorem 2.3. *If $\mathcal{A}$ has a right identity, then every generalized derivation of $\mathcal{A}$ is spectrally bounded.*

Theorem 2.4. *Let (δ, d) be a generalized derivation of $\mathcal{A}$. If $\mathcal{A}$ has a right identity, then the following statements are equivalent.*

(i) $\delta(\mathcal{A}) \subseteq rad(\mathcal{A})$.
(ii) *δ is spectrally infinitesimal.*
(iii) $\delta = d$.

We recall that the algebraic center of $\mathcal{A}$ is denoted by $Z(\mathcal{A})$. Let k be a fixed positive integer. A mapping $T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ is called k-centralizing (resp. k-commuting) if $[T(a), a^k] \in Z(\mathcal{A})$ (resp. $[T(a), a^k] = 0$) for all $a \in \mathcal{A}$. In the case $k = 1$, T is said to be centralizing (resp. commuting).

Theorem 2.5. *Let d be a derivation of $\mathcal{A}$ and let k be a positive integer. If $\mathcal{A}$ has a right identity, then the following statements are equivalent.*

 http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140007.1630

(i) $d = 0$.

(ii) d *is* k*-centralizing.*

(iii) d *is* k*-commuting.*

Theorem 2.6. *Let* (δ, d) *be a generalized derivation of* $\mathcal{A}$ *and* $k \in \mathbb{N}$. *If* $\mathcal{A}$ *has a right identity, then the following statements are equivalent.*

(i) δ *is* k*-commuting.*

(ii) δ *is* k*-centralizing.*

(iii) δ *is a right multiplier.*

(iv) *There exists* $b \in \mathcal{A}$ *such that* $\delta = R_b$.

The maps T and S from $\mathcal{A}$ into $\mathcal{A}$ are called orthogonal, denoted by $T \perp S$, if $T(a)cS(b) = S(b)cT(a) = 0$ for all $a, b, c \in \mathcal{A}$.

Theorem 2.7. *Let* (δ, d) *be a generalized derivation of* $\mathcal{A}$. *If* $\mathcal{A}$ *has a right identity, then the following statements are equivalent.*

(i) $[[\delta(a), a], \delta(a)] \in Z(\mathcal{A})$ *for all* $a \in \mathcal{A}$.

(ii) $d \perp \delta$.

(iii) (δ^2, d^2) *is a generalized derivation of* $\mathcal{A}$.

3. Conclusions

Let $\mathcal{A}$ be a Banach algebra with the properties that $\mathrm{rad}(\mathcal{A}) = \mathrm{rann}(\mathcal{A})$ and the algebra $\mathcal{A}/\mathrm{rad}(\mathcal{A})$ is commutative. We show that a derivation of $\mathcal{A}$ maps $\mathcal{A}$ into $\mathrm{rad}(\mathcal{A})$. Using this, we determine among other things when a generalized derivation of $\mathcal{A}$ maps $\mathcal{A}$ into $\mathrm{rad}(\mathcal{A})$. We also study k-centralizing generalized derivations of $\mathcal{A}$. Then, for a generalized derivation (δ, d) of $\mathcal{A}$ we obtain a necessary and sufficient condition for (δ^2, d^2) to be still a generalized derivation. The main applications are concerned with the algebras over locally compact groups. In particular, we deduce these results for bidual of Fourier algebras of discrete amenable groups as an application of our approach.

References

[1] M. H. Ahmadi Gandomani and M. J. Mehdipour, Generalized derivations on some convolution algebras, *Aequationes Math.*, **92** (2018) 223–241.

[2] F. F. Bonsall and J. Duncan, *Complete normed algebras*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973.

[3] H. G. Dales, *Banach algebras and automatic continuity*, London Mathematical Society Monographs. New Series, **24**, Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 2000.

[4] H. G. Dales and A. T.-M. Lau, The second duals of Beurling algebras, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **177** no. 836 (2005).

[5] A. Ebrahimzadeh Esfahani and M. Nemati, Generalized derivations on certain Banach algebras, (2022), arXiv:2201.06359.

[6] P. Eymard, L'algèbre de Fourier d'un groupe localement compact, *Bull. Soc. Math. France*, **92** (1964) 181–236.

[7] E. E. Granirer, On group representations whose C^*-algebra is an ideal in its von Neumann algebra, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **29** (1979) 37–52.

[8] A. T. -M. Lau, Uniformly continuous functionals on the Fourier algebra of any locally compact group, *Trans. Amer. Math. Soc.* **251** (1979) 39–59.

[9] A. T.-M. Lau, The second conjugate algebra of the Fourier algebra of a locally compact group, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **267** (1981) 53–63.

[10] S. Maghsoudi and R. Nasr-Isfahani, On the maximal and minimal left ideals of certain Banach algebras on locally compact groups, *Results Math.*, **62** (2012) 157–165.

[11] M. Mathieu and G. J. Murphy, Derivations mapping into the radical, *Arch. Math. (Basel)*, **57** (1991) 469–474.

[12] M. J. Mehdipour and Z. Saeedi, Derivations on group algebras of a locally compact abelian group, *Monatsh. Math.*, **180** (2016) 595–605.

[13] E. C. Posner, Derivations in prime rings, *Proc. Am. Math. Soc.*, **8** (1957) 1093–1100.

[14] I. M. Singer and J. Wermer, Derivations on commutative normed algebras, *Math. Ann.*, **129** (1955) 260–264.

[15] M. Thomas, The image of a derivation is contained in the radical, *Ann. Math.*, **128** (1988) 435–460.

[16] J. Zemanek, Spectral radius characterizations of commutativity in Banach algebras, *Stud. Math.*, **61** (1977) 257–268.

Mehdi Nemati

Department of Mathematical Sciences, Isfahan University of Technology, Isfahan 84156-83111, Iran

Email: m.nemati@iut.ac.ir

Ali Ebrahimzadeh Esfahani

Department of Mathematical Sciences, Isfahan University of Technology, Isfahan 84156-83111, Iran

Email: ali.ebrahimzadeh@math.iut.ac.ir

Sima Soltani Renani

Department of Mathematical Sciences, Isfahan University of Technology, Isfahan 84156-83111, Iran

Email: simasoltani@iut.ac.ir

Seyed Mahmoud Manjegani

Department of Mathematical Sciences, Isfahan University of Technology, Isfahan 84156-83111, Iran

Email: manjgani@iut.ac.ir

 http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140007.1630

ریاضی و جامعه
شاپا (چاپی): ۲۳۴۵-۶۴۹۳، شاپا(الکترونیکی): ۲۳۴۵-۶۵۰۷
جلد ۹، شماره ۲ (۱۴۰۳)، صص. ۸۷-۱۰۵

http://math-sci.ui.ac.ir
http://www.ui.ac.ir

مشتق‌های تعمیم‌یافته روی دسته خاصی از جبرهای باناخ

مهدی نعمتی*، علی ابراهیم‌زاده اصفهانی، سیما سلطانی رنانی و سید محمود منجگانی

چکیده. در این مقاله برخی از نتایج مربوط به مشتق‌ها و مشتق‌های تعمیم‌یافته برروی جبرهای باناخ جابجایی وحلقه‌های اول را به دسته مهمی از جبرهای باناخ در آنالیز هارمونیک، که الزاماً جابجایی و حلقه اول نیستند، بسط می‌دهیم. به‌عنوان مثال، نشان می‌دهیم که خاصیت سینگر–ورمر و قضیه دوم پوسنر برای مشتق‌ها و مشتق‌های تعمیم‌یافته، برروی این دسته از جبرهای باناخ نیز برقرار است.

۱. مقدمه

یک قضیه معروف از سینگر و ورمر بیان می‌کند که هر مشتق کران دار روی یک جبر باناخ جابجایی، این جبر را در رادیکال آن تصویر می‌کند [۱۴]. حدود سی سال بعد توماس، قضیه سینگر–ورمر را به مشتق‌های دلخواه و نه لزوماً کران دار گسترش داد [۱۵]. برخی از محققان، این قضیه را تحت شرایطی متفاوت روی جبرها و حتی حلقه‌های مختلف تعمیم دادند [۱۱، ۱۳]. به‌عنوان مثال، پوسنر [۱۳] حدس سینگر–ورمر را برای حلقه‌های اول ناجابجایی تعمیم داد ([۱۳، قضیه اول]). همچنین او ثابت کرد که نگاشت صفر تنها مشتق مرکزی روی یک حلقه اول ناجابجایی است ([۱۳، قضیه دوم]). در این مقاله، برخی از نتایج مربوط به مشتق‌ها و مشتق‌های تعمیم‌یافته برروی جبرهای باناخ جابجایی و حلقه‌های اول را به دسته نسبتاً بزرگی از جبرهای باناخ در آنالیز هارمونیک که جابجایی و حلقه اول نیستند، بسط می‌دهیم. به‌عنوان مثال، نشان می‌دهیم که خاصیت سینگر–ورمر و قضیه دوم پوسنر برای مشتق‌ها و مشتق‌های تعمیم‌یافته‌ای که بر این دسته از جبرهای باناخ تعریف شده‌اند نیز برقرار است. همچنین نتایج حاصل از این مقاله، نتایج اصلی مقاله‌های [۱، ۱۲] که برای یک جبر باناخ خاص بیان شده است را به دسته بزرگتری از جبرهای باناخ در آنالیز هارمونیک، بسط می‌دهد. در نهایت اشاره می‌کنیم که نتایج و مطالب بیان شده در این مقاله در مرجع (چاپ نشده) [۵] که توسط نویسندگان اول و دوم این مقاله انجام شده است نیز وجود دارند.

عبارات و کلمات کلیدی: جبر باناخ، مشتق، مشتق تعمیم‌یافته، خاصیت سینگر–ورمر، گروه فشرده موضعی.
دبیرتخصصی رابط: مجید فخار
نوع مقاله: پژوهشی
* نویسنده مسئول
تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۹/۱۲ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۱۲/۲۲ تاریخ انتشار آنلاین: ۱۴۰۳/۰۳/۲۱
ارجاع به مقاله: م. نعمتی، ع. ابراهیم‌زاده اصفهانی، س. سلطانی رنانی و م. منجگانی، مشتق‌های تعمیم‌یافته روی دسته خاصی از جبرهای باناخ، نشریه ریاضی و جامعه، ۹ شماره ۲ (۱۴۰۳) ۸۷–۱۰۵.
. http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140007.1630

۲. پیش‌نیازها و مفاهیم مقدماتی

در این بخش، سعی کردیم مفاهیم و پیش‌نیازهایی که در بخش‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند ارائه شوند.
فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ باشد. در این‌صورت $\mathcal{A}^*$ همراه با عمل‌های مدولی زیر یک $\mathcal{A}$– مدول باناخ دوطرفه است

$$\langle x\cdot a,b\rangle=\langle x,ab\rangle,\quad \langle a\cdot x,b\rangle=\langle x,ba\rangle\quad (x\in\mathcal{A}^*,a,b\in\mathcal{A}).$$

بنابراین می‌توان ضرب‌های آرنز اول و دوم، که به‌ترتیب با نمادهای $\Box$ و $\lozenge$ نشان داده می‌شوند، را روی فضای $\mathcal{A}^{**}$ به‌صورت زیر تعریف کرد:

$$\langle m\Box n,x\rangle=\langle m,n\cdot x\rangle,\quad \langle m\lozenge n,x\rangle=\langle n,x\cdot m\rangle\quad (x\in\mathcal{A}^*,m,n\in\mathcal{A}^{**})$$

که در آن تابعک‌های $n\cdot x,x\cdot m\in\mathcal{A}^*$ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\langle n\cdot x,a\rangle=\langle n,x\cdot a\rangle,\quad \langle x\cdot m,a\rangle=\langle m,a\cdot x\rangle\quad (a\in\mathcal{A}).$$

توجه کنیم که در این‌حالت $\mathcal{A}^{**}$ همراه با ضرب آرنز اول یا دوم، به یک جبر باناخ تبدیل می‌شود که جبر $\mathcal{A}$ را به‌عنوان یک زیر جبر شامل می‌شود.

فرض کنیم X یک $\mathcal{A}$–زیرمدول بسته از $\mathcal{A}^*$ باشد. در این‌صورت برای هر $x\in X$ و هر $m\in X^*$، مشابه آنچه در بالا به آن اشاره شد، می‌توان تابعک‌های $m\cdot x,\ x\cdot m\in\mathcal{A}^*$ را تعریف کرد. در این‌حالت X را درون‌گرای‌چپ نامیم، هرگاه $X^*\cdot X\subseteq X$. همچنین اگر $X\cdot X^*\subseteq X$، آنگاه X را درون‌گرای‌راست نامیم. به‌علاوه، X را درون‌گرا نامیم، هرگاه هم درون‌گرای‌راست و هم درون‌گرای‌چپ باشد. در این‌حالت، ضرب آرنز اول و دوم که از $\mathcal{A}^{**}$ به X^* به ارث رسیده‌اند، ضرب‌هایی هستند که X^* را به جبر باناخ تبدیل می‌کنند و باز هم آن‌ها را با نمادهای $\Box$ و $\lozenge$ نشان می‌دهیم. اگر فضای X^* را به توپولوژی ضعیف * $\sigma(X^*,X)$ مجهز کنیم، می‌توان نشان داد که برای هر $n\in X^*$، نگاشت‌های زیر

$$m\longmapsto m\Box n,\quad m\longmapsto n\lozenge m,$$

از X^* به X^* ضعیف*–ضعیف* پیوسته‌اند. برای اطلاعات بیشتر در این مورد می‌توانید مرجع [۴] را ببینید.
منظور از $\mathrm{rad}(\mathcal{A})$ ،رادیکال جیکبسن $\mathcal{A}$ است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{rad}(\mathcal{A})=\{a\in\mathcal{A}\ :\ ۱_{A^\#}-ba\in\mathrm{Inv}(\mathcal{A}^\#),\ (b\in\mathcal{A}^\#)\},$$

که در آن منظور از $A^\#$ یکدارساز $\mathcal{A}$ و $\mathrm{Inv}(A^\#)$ اعضای وارون‌پذیر $A^\#$ می‌باشد. در این‌صورت $\mathrm{rad}(\mathcal{A})$ یک ایدآل بسته در $\mathcal{A}$ است. جبر $\mathcal{A}$ را نیم‌ساده نامیم، هرگاه $\mathrm{rad}(\mathcal{A})=\{۰\}$. می‌توان نشان داد که جبر خارج قسمتی $A/\mathrm{rad}(A)$ یک جبر نیم‌ساده است. همچنین پوچ‌سازراست $\mathcal{A}$ را با نماد $\mathrm{rann}(\mathcal{A})$ نشان می‌دهیم و آن‌را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{rann}(\mathcal{A})=\{c\in\mathcal{A}\ :\ \mathcal{A}c=\{۰\}\}.$$

بر اساس [۲، قضیه ۱] می‌توان نتیجه گرفت که $\mathrm{rann}(\mathcal{A})\subseteq\mathrm{rad}(\mathcal{A})$. برای هر $a\in\mathcal{A}$ طیف آن‌را با نماد $\sigma(a)$ نشان می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\sigma(a)=\{\alpha\in\mathbb{C}:\ \alpha\,۱_{A^\#}-a\notin\mathrm{Inv}(\mathcal{A}^\#)\}.$$

همچنین، قرار می‌دهیم

$$r(a)=\sup\{|\alpha|:\ \alpha\in\sigma(a)\},$$

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140007.1630

و به آن شعاع طیفی a می‌گوییم. برای کسب اطلاعات بیشتر در این‌زمینه می‌توانید مراجع [۲، ۳] را ببینید. فرض کنیم $T:\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{A}$ یک نگاشت‌خطی باشد. در این‌صورت نگاشت T را یک ضربگر راست (چپ) روی $\mathcal{A}$ نامیم، هرگاه برای هر $a,b\in\mathcal{A}$، در رابطه زیر صدق کند:

$$T(ab)=aT(b)\quad (T(ab)=T(a)b).$$

برای هر $a\in\mathcal{A}$، فرض کنیم $\rho_a,\ell_a:\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{A}$ نگاشت‌های ضربی باشند که برای هر $b\in\mathcal{A}$، به‌صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\rho_a(b)=ba,\quad \ell_a(b)=ab.$$

در این‌صورت به سادگی بررسی می‌شود که ρ_a و ℓ_a به‌ترتیب ضربگرهای راست و چپ روی $\mathcal{A}$ می‌باشند. نگاشت خطی $d:\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{A}$ را یک مشتق روی $\mathcal{A}$ نامیم، هرگاه برای هر $a,b\in\mathcal{A}$، داشته باشیم

$$d(ab)=d(a)b+ad(b).$$

برای هر $a\in\mathcal{A}$، نگاشت $d_a:\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{A}$ با ضابطه زیر

$$d_a(b)=[b,a]=ba-ab\quad (b\in\mathcal{A}),$$

یک مشتق پیوسته روی $\mathcal{A}$ است که آن‌را مشتق داخلی القا شده توسط a می‌نامیم. فرض کنیم $\delta:\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{A}$ یک نگاشت خطی باشد به‌طوری که مشتق d روی $\mathcal{A}$ به‌گونه‌ای وجود داشته باشد که برای هر $a,b\in\mathcal{A}$، رابطه زیر برقرار باشد

$$\delta(ab)=a\delta(b)+d(a)b.$$

در این‌صورت جفت (δ,d) را یک مشتق تعمیم‌یافته روی $\mathcal{A}$ می‌نامیم.

اکنون فرض کنیم G یک گروه فشرده موضعی باشد. در این‌صورت یک اندازه‌ی هار چپ [۱] (راست) روی G وجود دارد که این اندازه در حد ضرب در اسکالرهای مثبت یکتا است. به‌عبارتی، یک اندازه‌ی رادون [۲] λ روی G وجود دارد که λ نسبت به ضرب از چپ (به‌ترتیب راست) پایا است. در واقع، برای هر $s\in G$ و هر مجموعه‌ی بورل E در G، رابطه‌ی زیر برقرار است

$$\lambda(sE)=\lambda(E)\quad (\lambda(Es)=\lambda(E)\ \text{به‌ترتیب}).$$

به این‌ترتیب فضاهایی به G می‌توان وابسته کرد که در آنالیز هارمونیک مجرد بسیار حائز اهمیت هستند. به‌عنوان نمونه، $L^{\infty}(G)$ به مجموعه‌ی تمام توابع به‌طور موضعی اساساً کران‌دار [۳] مختلط مقدار روی G که اندازه‌پذیر بورل هستند، اشاره می‌کند. همچنین جبر گروهی [۴] $L^{1}(G)$، مجموعه‌ی تمام توابع انتگرال‌پذیر [۵] روی G است. همچنین نشان داده می‌شود که تحت نگاشت زیر $L^{\infty}(G)$ با دوگان $L^{1}(G)$ یکریخت است،

$$\langle x,f\rangle=\int x(t)f(t)dt,\quad (f\in L^{1}(G),x\in L^{\infty}(G)).$$

منظور از $L^{2}(G)$، مجموعه‌ی تمام توابع مربع انتگرال‌پذیر [۶] روی G است که یک فضای هیلبرت است. همچنین فرض کنیم $B(L^{2}(G))$ فضای همه عملگرهای کرندار از $L^{2}(G)$ به $L^{2}(G)$ باشد. در این‌صورت نمایش منظم چپ [۷] G را برای هر $s,t\in G$ و $h\in L^{2}(G)$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\lambda_G:G\longrightarrow B(L^{2}(G)),\quad \lambda_G(s)(h)(t)=h(s^{-1}t).$$

[1]Left Haar measure [2]Radon measure [3]Essentially bounded [4]Group algebra [5]Integrable functions [6]square integrable
[7]left regular representation

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140007.1630

فرض کنیم $m : L^{\infty}(G) \longrightarrow \mathbb{C}$ یک نگاشت خطی و کران دار باشد. m را یک میانگین پایای چپ [۸] نامیم، هرگاه $\|m\| = \langle m, 1\rangle = 1$ و همچنین برای هر $s \in G$ و $f \in L^{\infty}(G)$ رابطه‌ی $\langle m, L_s f\rangle = \langle m, f\rangle$، برقرار باشد که در آن برای تابع $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$، منظور از $L_s f$، انتقال چپ [۹] برای $s \in G$ است که آن‌را برای هر $t \in G$ به‌صورت $(L_s f)(t) = f(st)$ تعریف می‌کنیم. در این‌حالت گروه G را میانگین‌پذیر نامیم هرگاه یک میانگین پایای‌چپ روی $L^{\infty}(G)$ وجود داشته باشد. به‌عنوان مثال هرگروه آبلی میانگین‌پذیر است جبر فون نویمان تولید شده توسط مجموعه

$$\{\lambda_G(s) \ : \ s \in G\} \subseteq B(L^2(G)),$$

را با $VN(G)$ نشان می‌دهیم. در واقع،

$$VN(G) = \{\lambda_G(s) \ : \ s \in G\}'' \subseteq B(L^2(G)).$$

$VN(G)$ را جبر فون نویمان گروهی [۱۰] می‌نامیم. فضای باناخ

$$\{f : G \longrightarrow \mathbb{C} \ : \ \exists\, \xi, \eta \in L^2(G);\ f(s) = \langle \lambda_G(s)\xi, \eta\rangle, \quad (s \in G)\},$$

که به نرم زیر مجهز شده است را می‌توان با پیش‌دوگان این جبر فون نویمان یکی گرفت که با $A(G)$ نشان می‌دهیم

$$\|f\| = \inf\{\|\xi\|\|\eta\| \ : \ \xi, \eta \in L^2(G);\ f(s) = \langle \lambda_G(s)\xi, \eta\rangle, \quad (s \in G)\}.$$

و $A(G)$ با حاصل‌ضرب نقطه‌ای، یک جبر باناخ جابجایی است که آن‌را جبر فوریه [۱۱] روی گروه G می‌نامیم [۶].
برای گروه فشرده‌ی‌موضعی G، زیرفضاهای درون‌گرای $C^*_\lambda(G)$ و $\mathrm{UCB}(\widehat{G})$ از $VN(G)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$C^*_\lambda(G) = \overline{\{\lambda_G(g) : g \in L^1(G)\}}^{\|\cdot\|}, \quad \mathrm{UCB}(\widehat{G}) = \overline{\mathrm{span}\{x \cdot a : x \in VN(G), a \in A(G)\}}^{\|\cdot\|}$$

که در آن $\lambda_G : L^1(G) \to B(L^2(G))$ برای هر $g \in L^1(G)$ و $h \in L^2(G)$ با ضابطه $\lambda_G(g)(h) = g * h$ تعریف می‌شود. برای کسب اطلاعات بیشتر در این‌مورد به [۸، گزاره ۵–۲] مراجعه شود. همچنین فرض کنیم $B_\lambda(G)$ فضای دوگان $C^*_\lambda(G)$ باشد؛ یعنی، $B_\lambda(G) = C^*_\lambda(G)^*$. در این‌صورت بر اساس نتایج بیان شده در مراجع [۸، ۶]، می‌توان گزاره‌های زیر را بیان کرد:

- $A(G)$ و $B_\lambda(G)$ با عمل ضرب نقطه‌ای، جبرهای باناخ نیم‌ساده و جابجایی‌اند.
- $A(G)$ در $B_\lambda(G)$، یک ایدآل بسته است.
- فضای خطی تولید شده توسط مجموعه $C^*_\lambda(G) \cdot A(G)$، در $C^*_\lambda(G)$ چگال است.
- $A(G)$ همانی تقریبی کران دار دارد اگر و تنها اگر G میانگین‌پذیر باشد.

۳. حدس سینگر–ورمر برای مشتق‌های تعمیم‌یافته

در این مقاله همواره فرض می‌کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ با خواص زیر باشد:

- $\mathrm{rad}(\mathcal{A}) = \mathrm{rann}(\mathcal{A})$.
- جبر خارج قسمتی $\mathcal{A}/\mathrm{rad}(\mathcal{A})$ جابجایی است.

[8] left invariant mean [9] left translation [10] group von Neumann algebra [11] Fourier algebra

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140007.1630

جبر باناخ $\mathcal{A}$ با خاصیت‌های فوق را جبر باناخ صادق در شرط $\star$ می‌نامیم. در ادامه چند مثال بسیار مهم از جبرهای باناخ در آنالیز هارمونیک را بیان می‌کنیم که در شرط $\star$ صدق می‌کنند. برای معرفی چنین مثال‌هایی نیاز به معرفی مفاهیم و مقدماتی داریم که در ادامه به آنها می‌پردازیم.

فرض کنیم G یک گروه فشرده موضعی باشد. در این‌صورت همان‌طور که در بخش قبل بیان شد، $A(G)^{**} = VN(G)^*$ همراه با هرکدام از ضرب‌های آرنز اول و دوم، یک جبر باناخ است. توجه کنیم که $A(G)$ را می‌توان یک زیرجبر بسته از $VN(G)^*$ در نظر گرفت. همچنین اگر $\iota : C^*_\lambda(G) \hookrightarrow VN(G)$ را نگاشت شمول در نظر بگیریم، آنگاه به وضوح

$$\pi := \iota^* : VN(G)^* \longrightarrow C^*_\lambda(G) = B_\lambda(G),$$

همان نگاشت تحدید است. به‌راحتی می‌توان دید که $\pi|_{A(G)} = \mathrm{id}_{A(G)}$. همچنین اگر $VN(G)^*$ و $C^*_\lambda(G)^*$ به ضرب آرنز اول یا دوم مجهز شده باشند، آنگاه π یک همریختی جبری ضعیف*ـ‌ضعیف* پیوسته است. به‌علاوه، بنابر [۸، قضیه ۵۰۳] ضرب‌های آرنز روی $C^*_\lambda(G)^* = B_\lambda(G)$ با ضرب نقطه‌ای منطبق است.

مثال ۱.۳. فرض کنیم G یک گروه گسسته و نامتناهی باشد. در این‌صورت بر اساس [۷، قضیه ۳]، داریم

$$VN(G) \neq C^*_\lambda(G) = UCB(\widehat{G}).$$

در ادامه نشان می‌دهیم

$$\mathrm{rad}(VN(G)^*) = \mathrm{rann}(VN(G)^*).$$

در واقع، فرض کنیم $\pi : VN(G)^* \longrightarrow C^*_\lambda(G)^* = B_\lambda(G)$ نگاشت تحدید باشد. در این‌صورت به‌کمک تعریف و با استفاده از اینکه $VN(G) \cdot A(G) \subseteq UCB(\widehat{G}) = C^*_\lambda(G)$، به دست می آوریم

$$\begin{aligned}
\mathrm{rann}(VN(G)^*) &= \{m \in VN(G)^* \ : \ n\Box m = \circ, \quad (n \in VN(G)^*)\} \\
&= \{m \in VN(G)^* \ : \ \langle n, m \cdot x\rangle = \circ, \quad (n \in VN(G)^*,\ x \in VN(G))\} \\
&= \{m \in VN(G)^* \ : \ m \cdot x = \circ, \quad (x \in VN(G))\} \\
&= \{m \in VN(G)^* \ : \ \langle m, x \cdot a\rangle = \circ, \quad (x \in VN(G),\ a \in A(G))\} \\
&= \{m \in VN(G)^* \ : \ \langle \pi(m), x \cdot a\rangle = \circ, \quad (x \in VN(G),\ a \in A(G))\}.
\end{aligned}$$

اکنون باتوجه به اینکه فضای خطی تولید شده توسط $C^*_\lambda(G) \cdot A(G)$، در $C^*_\lambda(G)$ چگال است، داریم

$$\mathrm{rann}(VN(G)^*) = \{m \in VN(G)^* \ : \ \langle \pi(m), x\rangle = \circ, \quad (x \in C^*_\lambda(G))\} = \ker \pi.$$

از طرفی، با توجه به اینکه نگاشت π از $VN(G)^*$ به‌روی جبر باناخ نیم‌ساده‌ی $B_\lambda(G)$ یک بروریختی جبری است، با استفاده از [۲، قضیه ۱۰]،

$$\mathrm{rad}(VN(G)^*) \subseteq \ker \pi = \mathrm{rann}(VN(G)^*).$$

عکس رابطه شمول فوق نیز به وضوح برقرار است و بنابراین $\mathrm{rad}(VN(G)^*) = \mathrm{rann}(VN(G)^*)$. پس جبر خارج قسمتی

$$VN(G)^*/\mathrm{rad}(VN(G)^*) = VN(G)^*/\ker \pi \cong B_\lambda(G),$$

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140007.1630

جابجایی است و درنتیجه جبر باناخ $(VN(G)^*, \Box)$ در رابطه $\star$ صدق می‌کند. همچنین اگر G میانگین‌پذیر نیز باشد، آن‌گاه بنابر [۹، گزاره ۳–۳] جبر $VN(G)^*$ جابجایی نیست. همچنین در این‌حالت، بنابر [۹، گزاره ۲–۳]، جبر $VN(G)^*$ یک همانی‌راست نیز دارد.

مثال ۲.۳. فرض کنیم G یک گروه فشرده‌ی موضعی ناگسسته و آبلی باشد. همچنین فرض کنیم $L^\infty_\circ(G)$ زیرفضایی از $L^\infty(G)$ شامل همه‌ی توابع $f \in L^\infty(G)$ باشد که در بی‌نهایت به صفر میل می‌کنند. آنگاه بنابر نتایج بیان شده در [۱۰]، $L^\infty_\circ(G)^*$ همراه با ضرب آرنز اول به یک جبر باناخ تبدیل می‌شود که خواص زیر را دارد:

$$\mathrm{rad}(L^\infty_\circ(G)^*) = \mathrm{rann}(L^\infty_\circ(G)^*),$$

و همچنین $L^\infty_\circ(G)^*/\mathrm{rad}(L^\infty_\circ(G)^*) = M(G)$ که باتوجه به آبلی بودن G یک جبر جابجایی است. به این‌ترتیب در این‌حالت $L^\infty_\circ(G)^*$ همراه با ضرب آرنز اول یک جبر باناخ است که در شرط $\star$ نیز صدق می‌کند. به‌علاوه، این جبر همواره یک همانی‌راست دارد و با توجه به غیرگسسته بودن G جابجایی نیز نیست.

قضیه ۳.۳. [۱۶، صفحه ۲۵۹] فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ باشد. در این‌صورت شرایط زیر معادل‌اند.

الف) شعاع طیفی روی $\mathcal{A}$ زیرجمعی است؛ یعنی، عدد مثبت α وجود دارد به‌طوری‌که

$$r(a+b) \leq \alpha(r(a)+r(b)) \quad (a,b \in \mathcal{A}).$$

ب) شعاع طیفی روی $\mathcal{A}$ زیرضربی است؛ یعنی، عدد مثبت β وجود دارد به‌طوری‌که

$$r(ab) \leq \beta(r(a)r(b)) \quad (a,b \in \mathcal{A}).$$

ج) جبر خارج قسمتی $\mathcal{A}/\mathrm{rad}(\mathcal{A})$ جابجایی است.

قضیه ۴.۳. [۲، قضیه ۱] فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ باشد. در این‌صورت گزاره‌های زیر برقرارند:

الف) اگر $q \in \mathrm{rad}(\mathcal{A})$، آن‌گاه برای هر $a \in \mathcal{A}$، $r(q) = r(aq) = r(qa) = \circ$.

ب) اگر برای هر $a \in \mathcal{A}$، $r(aq) = \circ$ یا $r(qa) = \circ$، آن‌گاه $q \in \mathrm{rad}(\mathcal{A})$.

نتیجه زیر به کمک دو قضیه قبلی به‌سادگی حاصل می‌شود.

نتیجه ۵.۳. فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ صادق در شرط $\star$ باشد. آنگاه

$$\mathrm{rad}(\mathcal{A}) = \{a \in \mathcal{A} \;:\; r(a) = \circ\}.$$

قضیه ۶.۳. [۱۵، صفحه ۴۵۹] فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ جابه‌جایی و d یک مشتق روی $\mathcal{A}$ باشد. در این‌صورت $d(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{rad}(\mathcal{A})$.

در ادامه همواره فرض می‌کنیم جبر باناخ $\mathcal{A}$ در شرط $\star$ صدق می‌کند. بنابراین از بیان این جمله پرهیز می‌کنیم.

قضیه ۷.۳. فرض کنیم d یک مشتق روی $\mathcal{A}$ باشد. در این‌صورت $d(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{rad}(\mathcal{A})$.

اثبات. فرض کنیم $c \in \mathrm{rad}(\mathcal{A}) = \mathrm{rann}(\mathcal{A})$ و $a \in \mathcal{A}$. آنگاه

$$0 = d(ac) = ad(c) + d(a)c = ad(c).$$

بنابراین $d(\mathrm{rad}(\mathcal{A})) \subseteq \mathrm{rad}(\mathcal{A})$ و در نتیجه نگاشت زیر یک مشتق روی جبر نیم‌ساده‌ی $\mathcal{A}/\mathrm{rad}(\mathcal{A})$ می‌باشد

$$\widehat{d} : \mathcal{A}/\mathrm{rad}(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}/\mathrm{rad}(\mathcal{A}) \quad a + \mathrm{rad}(\mathcal{A}) \longmapsto d(a) + \mathrm{rad}(\mathcal{A}).$$

همچنین طبق فرض، $\mathcal{A}/\mathrm{rad}(\mathcal{A})$ جابجایی است. از این‌رو طبق قضیه ۶.۳، داریم $\widetilde{d} = 0$ که رابطه‌ی $d(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{rad}(\mathcal{A})$ را نتیجه می‌دهد. □

نگاشت خطی $T : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ را کران دار طیفی نامیم، هرگاه عدد $M \geq 0$ وجود داشته باشد که برای هر $a \in \mathcal{A}$، $r(T(a)) \leq Mr(a)$. به‌علاوه، اگر $M = 0$، آن‌گاه T کران دار طیفی بی‌نهایت کوچک نامیده می‌شود. از قضیه ۷.۳، نتیجه زیر به‌سادگی حاصل می‌شود.

نتیجه ۸.۳. گزاره های زیر برقراراند.

(الف) ترکیب دو مشتق روی $\mathcal{A}$، همواره یک مشتق روی $\mathcal{A}$ است.
(ب) هر مشتق روی $\mathcal{A}$، کران دار طیفی بی‌نهایت کوچک است.

اثبات. (الف) با توجه به قضیه ۷.۳ و رابطه‌ی $\mathrm{rad}(\mathcal{A}) = \mathrm{rann}(\mathcal{A})$ به‌سادگی حاصل می‌شود.
(ب) فرض کنیم d یک مشتق روی $\mathcal{A}$ باشد. در این‌صورت $d(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{rad}(\mathcal{A})$. از طرفی طبق نتیجه ۵.۳، داریم

$$\mathrm{rad}(\mathcal{A}) = \{a \in \mathcal{A} \;:\; r(a) = 0\}.$$

در نتیجه d کران دار طیفی بی‌نهایت کوچک است. □

قضیه ۹.۳. اگر $\mathcal{A}$ یک همانی راست داشته باشد، آن‌گاه هر مشتق تعمیم‌یافته روی $\mathcal{A}$، کراندار طیفی است.

اثبات. فرض کنیم (δ, d) یک مشتق تعمیم‌یافته روی $\mathcal{A}$ باشد. با توجه به جابجایی بودن جبر باناخ $\mathcal{A}/\mathrm{rad}(\mathcal{A})$، طبق قضیه ۳.۳ شعاع طیفی روی $\mathcal{A}$ زیرجمعی و زیرضربی است. فرض می‌کنیم $e \in \mathcal{A}$ یک همانی راست برای $\mathcal{A}$ باشد. در این‌صورت اعداد مثبت α و β وجود دارند که برای هر $a \in \mathcal{A}$، داریم:

$$\begin{aligned} r(\delta(a)) &= r(\delta(ae)) \\ &= r(a\delta(e) + d(a)) \\ &\leq \alpha[r(a\delta(e)) + r(d(a))] \\ &\leq \alpha[\beta r(\delta(e))r(a) + r(d(a))]. \end{aligned}$$

بر اساس نتیجه ۸.۳، برای هر $a \in \mathcal{A}$، $r(d(a)) = 0$. از این‌رو برای هر $a \in \mathcal{A}$، داریم

$$r(\delta(a)) \leq \alpha\beta r(\delta(e))r(a).$$

در نتیجه δ کراندار طیفی است. □

قضیه ۱۰.۳. فرض کنیم (δ, d) یک مشتق تعمیم‌یافته روی $\mathcal{A}$ باشد. اگر $\mathcal{A}$ یک همانی راست داشته باشد، آن‌گاه عبارت‌های زیر معادل‌اند.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140007.1630

(الف) $\delta(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{rad}(\mathcal{A})$.

(ب) δ کران دار طیفی بی‌نهایت کوچک است.

(ج) $\delta = d$.

اثبات. (الف) $\Longleftarrow$ (ب). فرض کنیم $\delta(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{rad}(\mathcal{A})$. در این‌صورت از قضیه ۵.۳، به‌سادگی نتیجه می‌شود δ کران دار طیفی بی‌نهایت کوچک است.

(ب) $\Longleftarrow$ (ج). ابتدا به این نکته توجه کنیم که جبر باناخ $\mathcal{A}/\mathrm{rad}(\mathcal{A})$ جابه‌جایی است. بنابراین طبق قضیه ۳.۳، شعاع طیفی روی $\mathcal{A}$ زیرضربی است. بنابراین $\beta \geq 0$ وجود دارد که برای هر $a \in \mathcal{A}$، داریم

$$r(a\delta(e)) \leq \beta r(a) r(\delta(e)) = 0,$$

که در آن $e \in \mathcal{A}$ یک همانی راست برای $\mathcal{A}$ است. پس با استفاده از قضیه ۴.۳ داریم

$$\delta(e) \in \mathrm{rad}(\mathcal{A}) = \mathrm{rann}(\mathcal{A}).$$

بنابراین برای هر $a \in \mathcal{A}$، داریم

$$\delta(a) = \delta(ae) = a\delta(e) + d(a)e = d(a).$$

به این‌ترتیب $\delta = d$.

(ج) $\Longleftarrow$ (الف). بر اساس قضیه ۷.۳ به‌سادگی حاصل می‌شود. □

فرض کنیم $T : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ یک ضربگر راست روی $\mathcal{A}$ باشد. همچنین فرض می‌کنیم 0 به مشتق صفر روی $\mathcal{A}$ اشاره داشته باشد. به آسانی مشاهده می‌شود که $(T, 0)$ یک مشتق تعمیم‌یافته روی $\mathcal{A}$ است. اکنون به بیان نتیجه زیر که از قضیه ۱۰.۳ حاصل می‌شود، می‌پردازیم.

نتیجه ۱۱.۳. فرض کنیم T یک ضربگر راست روی $\mathcal{A}$ باشد. اگر $\mathcal{A}$ همانی راست داشته باشد، آن‌گاه گزاره های زیر معادل‌اند.

الف) $T(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{rad}(\mathcal{A})$.

ب) T کران دار طیفی بی‌نهایت کوچک است.

ج) T یک مشتق روی $\mathcal{A}$ است.

د) $T = 0$.

۴. مشتق‌های تعمیم‌یافته‌ی kـ مرکزی

در این بخش، برای جبر باناخ $\mathcal{A}$ که در شرط $\star$ نیز صدق می‌کند، به بررسی قضیه دوم پوسنر می‌پردازیم و نشان می‌دهیم که تنها مشتق مرکزی روی $\mathcal{A}$، نگاشت صفر است. همچنین نتایج خود را برای مشتق‌های تعمیم‌یافته‌ی مرکزی بررسی کرده و به اثبات نتایج مشابه می‌پردازیم. یادآوری می‌کنیم که مرکز جبری $\mathcal{A}$ را با $Z(\mathcal{A})$ نشان می‌دهیم.

فرض کنیم k یک عدد صحیح مثبت ثابت باشد. نگاشت $T : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ را kـ مرکزی (kـ جابجایی) می‌نامیم، هرگاه برای هر $a \in \mathcal{A}$، $[T(a), a^k] \in Z(\mathcal{A})$ ($[T(a), a^k] = 0$). در حالتی‌که $k = 1$، آن‌گاه T را مرکزی (جابجایی) می‌نامیم.

قضیه ۱.۴. فرض کنیم d یک مشتق روی $\mathcal{A}$ و k یک عدد صحیح مثبت باشد. اگر $\mathcal{A}$ یک همانی راست داشته باشد، آن‌گاه شرایط زیر معادل‌اند.

(الف) $d = 0$.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140007.1630

(ب) d، k–مرکزی است.
(ج) d، k–جابجایی است.

اثبات. (الف) $\Longleftarrow$ (ب). بدیهی است.
(ب) $\Longleftarrow$ (ج). فرض کنیم (ب) برقرار باشد. بر اساس فرض و طبق قضیه ۷.۳، رابطه‌ی زیر برقرار است

$$[d(a), a^k] = d(a)a^k = d(a^{k+1}) \in \mathrm{rann}(\mathcal{A}) \cap Z(\mathcal{A}).$$

حال از اینکه $\mathcal{A}$ یک همانی راست دارد، نتیجه می‌شود $[d(a), a^k] = 0$.
(ج) $\Longleftarrow$ (الف). فرض کنیم d، k–جابجایی و e یک همانی راست برای $\mathcal{A}$ باشد. آنگاه

$$d(e) = [d(e), e] = [d(e), e^k] = 0. \tag{1}$$

اکنون برای هر $c \in \mathrm{rann}(\mathcal{A}) = \mathrm{rad}(\mathcal{A})$، داریم $(c+e) = (c+e)^k$. بنابراین

$$d(c) = [d(c+e), (c+e)] = [d(c+e), (c+e)^k] = 0. \tag{2}$$

از طرفی، برای هر $a \in \mathcal{A}$، به آسانی می‌توان ملاحظه کرد که $a - ea \in \mathrm{rann}(\mathcal{A}) = \mathrm{rad}(\mathcal{A})$ و به این ترتیب

$$d(a) = d(ea) + d(a - ea) = d(e)a + d(a - ea) = 0.$$

در نتیجه $d = 0$. □

قضیه ۲.۴. اگر $\mathcal{A}$ یک همانی راست داشته باشد، آن‌گاه شرایط زیر معادل‌اند.
(الف) $\mathcal{A}$ عضو همانی دارد.
(ب) هر مشتق روی $\mathcal{A}$، صفر است.
(ج) هر مشتق داخلی روی $\mathcal{A}$، صفر است.
(د) $\mathcal{A}$ جابجایی است.

اثبات. (الف) $\Longleftarrow$ (ب). فرض کنیم e عضو همانی $\mathcal{A}$ و d یک مشتق روی $\mathcal{A}$ باشد. آنگاه طبق قضیه ۷.۳، برای هر $a \in \mathcal{A}$، داریم $d(a) = ed(a) = 0$.
(ب) $\Longleftarrow$ (ج). بدیهی است.
(ج) $\Longleftarrow$ (د). فرض کنیم هر مشتق داخلی تعریف شده روی $\mathcal{A}$، صفر باشد. پس برای هر $a, b \in \mathcal{A}$، داریم $d_a(b) = ba - ab = 0$ و این رابطه نشان می‌دهد که $\mathcal{A}$ جابجایی است.
(د) $\Longleftarrow$ (الف). واضح است. □

لم ۳.۴. فرض کنیم $a, b, c \in \mathcal{A}$. در این‌صورت $[a, b] \in \mathrm{rann}(\mathcal{A})$ و $cab = cba$.

اثبات. فرض کنیم $d_b : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ مشتق داخلی متناظر با b باشد. در این‌صورت بنابر قضیه ۷.۳، داریم

$$[a, b] = d_b(a) \in \mathrm{rann}(\mathcal{A}).$$

پس

$$cab - cba = cd_b(a) = 0,$$

در نتیجه $cab = cba$. □

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140007.1630

لم ۴.۴. زیر فضای $Z(\mathcal{A})$ یک ایدآل بسته در $\mathcal{A}$ است.

اثبات. به سادگی مشاهده می‌شود که $Z(\mathcal{A})$ یک زیرفضای بسته از $\mathcal{A}$ است. برای تکمیل اثبات، کافی است نشان دهیم $Z(\mathcal{A})$ در $\mathcal{A}$ یک ایدآل است. با استفاده از لم ۳.۴، برای هر $z \in Z(\mathcal{A})$ و $a, b \in \mathcal{A}$، داریم

$$(zb)a = zab = a(zb).$$

به‌طور مشابه، برای هر $z \in Z(\mathcal{A})$ و $a, b \in \mathcal{A}$، رابطه‌ی زیر برقرار است

$$(bz)a = zba = zab = azb = a(bz).$$

لذا $Z(\mathcal{A})$ در $\mathcal{A}$ یک ایدآل است. □

قضیه ۵.۴. فرض کنیم d یک مشتق روی $\mathcal{A}$ باشد. اگر $\mathcal{A}$ یک همانی راست داشته باشد، آن‌گاه گزاره های زیر معادل‌اند.

(الف) d یک مشتق داخلی است.

(ب) $b_\circ \in \mathcal{A}$ وجود دارد که برای هر $k \in \mathbb{N}$، نگاشت $a \longmapsto d(a) + b_\circ a$، k–جابجایی است.

(ج) $b_\circ \in \mathcal{A}$ و $k \in \mathbb{N}$ وجود دارند به‌طوری‌که نگاشت $a \longmapsto d(a) + b_\circ a$، k–جابجایی است.

(د) $b_\circ \in \mathcal{A}$ و $k \in \mathbb{N}$ وجود دارند به‌طوری‌که نگاشت $a \longmapsto d(a) + b_\circ a$، k–مرکزی است.

اثبات. (الف) $\Longleftarrow$ (ب). فرض کنیم d یک مشتق داخلی باشد. در این‌صورت $b_\circ \in \mathcal{A}$ وجود دارد که برای هر $a \in \mathcal{A}$، داریم $d(a) = ab_\circ - b_\circ a$. بنابراین طبق لم ۳.۴، برای هر $k \in \mathbb{N}$، داریم

$$\begin{aligned}[d(a) + b_\circ a, a^k] &= [ab_\circ, a^k] \\ &= ab_\circ a^k - a^k ab_\circ \\ &= aa^k b_\circ - a^k ab_\circ \\ &= a^{k+1} b_\circ - a^{k+1} b_\circ = \circ.\end{aligned}$$

(ب) $\Longleftarrow$ (ج). بدیهی است.

(ج) $\Longleftarrow$ (د). بدیهی است.

(د) $\Longleftarrow$ (الف). فرض کنیم(د) برقرار باشد. در این‌صورت نگاشت $D : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ را با ضابطه‌ی زیر در نظر می‌گیریم

$$D(a) = d(a) - [a, b_\circ] \quad (a \in \mathcal{A}).$$

به‌سادگی مشاهده می‌شود که D یک مشتق روی $\mathcal{A}$ است. بنابراین

$$[D(a), a^k] = D(a)a^k = [d(a) + b_\circ a, a^k] \in Z(\mathcal{A}).$$

اکنون با استفاده از قضیه ۱.۴، نتیجه می‌شود $D = \circ$. بنابراین d یک مشتق داخلی است. □

قضیه ۶.۴. فرض کنیم (δ, d) یک مشتق تعمیم‌یافته روی $\mathcal{A}$ باشد و $k \in \mathbb{N}$. اگر $\mathcal{A}$ یک همانی راست داشته باشد، آن‌گاه شرایط زیر معادل‌اند.

(الف) δ، k–جابجایی است.

(ب) δ، k–مرکزی است.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140007.1630

(ج) δ یک ضربگر راست است.
(د) $b \in \mathcal{A}$ به‌گونه‌ای وجود دارد که $\delta = \rho_b$.

اثبات. (الف) $\Longleftarrow$ (ب). بدیهی است.
(الف) $\Longleftarrow$ (الف). به‌کمک استقرا و با توجه به این حقیقت که برای هر $a, b \in \mathcal{A}$، $[a,b] \in \operatorname{rann}(\mathcal{A})$، رابطه‌ی زیر برقرار است

$$[\delta(a), a^k] \in Z(\mathcal{A}) \cap \operatorname{rann}(\mathcal{A}).$$

بنابراین برای هر $a \in \mathcal{A}$، $[\delta(a), a^k] = 0$. در نتیجه δ، k–جابجایی است. (الف) $\Longleftarrow$ (ج). فرض کنیم e یک همانی راست برای $\mathcal{A}$ باشد و همچنین $c \in \operatorname{rann}(\mathcal{A})$. با توجه به اینکه برای هر $i \in \mathbb{N}$، $(e+c)^i = e + c$، داریم

$$\begin{aligned}\delta(e+c) &= \delta(e+c)(e+c)^k = (e+c)^k\delta(e+c)\\ &= \delta((e+c)^{k+1}) - d((e+c)^k)(e+c)\\ &= \delta(e+c) - d(e+c).\end{aligned}$$

از این‌رو $d(c) = -d(e)$. به‌علاوه

$$\delta(e) = e\delta(e) + d(e) = \delta(e)e + d(e) = \delta(e) + d(e).$$

بنابراین $d(e) = 0$. به این ترتیب $d(c) = 0$، که نشان می‌دهد برای هر $a \in \mathcal{A}$، $d(a - ea) = 0$. بنابراین برای هر $a \in \mathcal{A}$، داریم

$$d(a) = d(ea) = d(e)a + ed(a) = 0.$$

از این‌رو برای هر $a, b \in \mathcal{A}$، داریم

$$\delta(ab) = a\delta(b) + d(a)b = a\delta(b),$$

و این نتیجه می‌دهد δ یک ضربگر راست است.
ج) $\Longleftarrow$ د). فرض کنیم δ یک ضربگر راست و e یک همانی راست برای $\mathcal{A}$ باشد. به‌سادگی می‌توان دید که $\delta = \rho_{\delta(e)}$.
(د) $\Longleftarrow$ (الف). با استفاده از لم ۳.۴، برای هر $a \in \mathcal{A}$، داریم

$$\begin{aligned}[\delta(a), a^k] &= \delta(a)a^k - a^k\delta(a)\\ &= aba^k - a^kab\\ &= a^{k+1}b - a^{k+1}b = 0.\end{aligned}$$

در نتیجه δ، k–جابجایی است. $\square$

نگاشت‌های T و S از $\mathcal{A}$ به‌توی $\mathcal{A}$ را متعامد نامیم و با نماد $T \perp S$ نشان می‌دهیم، هرگاه برای هر $a, b, c \in \mathcal{A}$، رابطه‌ی زیر برقرار باشد

$$T(a)cS(b) = S(b)cT(a) = 0.$$

قضیه ۷.۴. فرض کنیم (δ, d) یک مشتق تعمیم‌یافته روی $\mathcal{A}$ باشد. اگر $\mathcal{A}$ همانی راست داشته باشد، آن‌گاه عبارت‌های زیر معادل‌اند.

(الف) برای هر $a \in \mathcal{A}$، $[[\delta(a), a], \delta(a)] \in Z(\mathcal{A})$.
(ب) $d \perp \delta$.
(ج) $(\delta^{۲}, d^{۲})$ یک مشتق تعمیم‌یافته از $\mathcal{A}$ است.

اثبات. (الف) $\Longleftarrow$ (ب). فرض کنیم $a \in \mathcal{A}$ دلخواه باشد. در این‌صورت بر اساس فرض و طبق لم ۳.۴، رابطه‌ی زیر برقرار است

$$[[\delta(a), a], \delta(a)] = ۰.$$

همچنین، واضح است که اگر e یک همانی راست برای $\mathcal{A}$ باشد، آن‌گاه $\delta(a) = a\delta(e) + d(a)$. حال با به‌کار بردن قضیه ۷.۳ و با استفاده از لم ۳.۴، داریم

$$[[\delta(a), a], \delta(a)] = d(a)a^{۲}\delta(e). \tag{۳}$$

بنابراین

$$d(a)a^{۲}\delta(e) = ۰. \tag{۴}$$

در رابطه‌ی (۴)، قرار می‌دهیم $a := e$. به این‌ترتیب رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید

$$d(e)\delta(e) = ۰. \tag{۵}$$

در رابطه‌ی (۴)، قرار می‌دهیم $a := a + e$. حال با استفاده از رابطه‌ی (۵)، داریم

$$d(a)\delta(e) + ۲d(a)a\delta(e) = ۰. \tag{۶}$$

در رابطه‌ی بالا، به‌جای a، $-a$ را قرار داده و به این ترتیب رابطه‌ی زیر را به‌دست می‌آوریم

$$-d(a)\delta(e) + ۲d(a)a\delta(e) = ۰. \tag{۷}$$

از رابطه‌های (۶) و (۷)، نتیجه می‌گیریم که $d(a)\delta(e) = ۰$. لذا برای هر $a, b \in \mathcal{A}$، داریم

$$d(a)\delta(b) = d(a)b\delta(e) = d(a)\delta(e)b = ۰.$$

به این ترتیب نتیجه می‌شود که برای هر $a, b, c \in \mathcal{A}$، داریم

$$d(a)c\delta(b) = d(a)\delta(b)c = ۰. \tag{۸}$$

با توجه به اینکه $d(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{rann}(\mathcal{A})$، برای هر $a, b, c \in \mathcal{A}$، داریم

$$\delta(b)cd(a) = ۰. \tag{۹}$$

اکنون با به‌کار بردن رابطه‌های (۸) و (۹)، می‌توان نتیجه گرفت (ب) برقرار است.
(ب) $\Longleftarrow$ (ج). فرض می‌کنیم d و δ متعامد باشند. در این‌صورت برای هر $a, b \in \mathcal{A}$،

$$\begin{aligned}\delta^{۲}(ab) &= \delta(\delta(ab)) = \delta(a\delta(b) + d(a)b)\\ &= a\delta^{۲}(b) + ۲d(a)\delta(b) + d^{۲}(a)b\\ &= a\delta^{۲}(b) + d^{۲}(a)b.\end{aligned}$$

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140007.1630

لذا $(\delta^۲, d^۲)$ یک مشتق تعمیم‌یافته است.

(ج) $\Longleftarrow$ (الف). فرض کنیم $(\delta^۲, d^۲)$ یک مشتق تعمیم‌یافته روی $\mathcal{A}$ باشد. در این‌صورت برای هر $a, b \in \mathcal{A}$، داریم

$$\delta^۲(ab) = a\delta^۲(b) + d^۲(a)b. \tag{۱۰}$$

همچنین

$$\begin{aligned} \delta^۲(ab) &= \delta(\delta(ab)) = \delta(a\delta(b) + d(a)b) \\ &= a\delta^۲(b) + d(a)\delta(b) + d(a)\delta(b) + d^۲(a)b \\ &= a\delta^۲(b) + ۲d(a)\delta(b) + d^۲(a)b. \end{aligned} \tag{۱۱}$$

با مقایسه رابطه‌های (۱۰) و (۱۱)، نتیجه می‌شود که برای هر $a, b \in \mathcal{A}$،

$$d(a)\delta(b) = ۰. \tag{۱۲}$$

اکنون رابطه‌های (۳) و (۱۲) را به‌کار برده و برای هر $a \in \mathcal{A}$، رابطه‌ی زیر را به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} [[\delta(a), a], \delta(a)] &= d(a)a^۲\delta(e) \\ &= d(a)\delta(e)a^۲ = ۰. \end{aligned}$$

از این‌رو (الف) برقرار است. □

روشن است که ترکیب دو ضربگر راست روی جبر $\mathcal{A}$، یک ضربگر راست روی $\mathcal{A}$ است و همچنین ترکیب هر دو مشتق روی $\mathcal{A}$، یک مشتق خواهد بود. مثال بعدی نشان می‌دهد که این حقیقت در مورد همه‌ی مشتق‌های تعمیم‌یافته روی $\mathcal{A}$ برقرار نیست.

مثال ۸.۴. فرض کنیم $G = \mathbb{Z}$. در این‌صورت G یک گروه میانگین‌پذیر گسسته و نامتناهی است. بنا به مثال ۱.۳، $VN(G)^*$ یک جبر باناخ ناجابجایی با یک همانی راست، مانند e است. به‌آسانی مشاهده می‌شود که (δ, d) که در آن $d = d_e$ و $\delta = \rho_e + d_e$، یک مشتق تعمیم‌یافته روی $VN(G)^*$ است. حال با استفاده از [۹، قضیه ۳–۴]، می‌دانیم جبر $VN(G)^*$ نیم‌ساده نیست. در نتیجه $c \in \mathrm{rad}(VN(G)^*) = \mathrm{rann}(VN(G)^*)$ وجود دارد که $c \neq ۰$. به این ترتیب رابطه‌های زیر به‌دست می‌آید

$$\delta^۲(c) = ۴c, \quad c\delta^۲(e) + d^۲(c)e = ۲c. \tag{۱۳}$$

اما $(\delta^۲, d^۲)$ نمی‌تواند یک مشتق تعمیم‌یافته باشد. در واقع، اگر $(\delta^۲, d^۲)$ یک مشتق تعمیم‌یافته باشد، آن‌گاه با استفاده از رابطه‌ی (۱۳)، داریم $c = ۰$؛ که این یک تناقض است.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140007.1630

مراجع

[1] M. H. Ahmadi Gandomani and M. J. Mehdipour, Generalized derivations on some convolution algebras, *Aequationes Math.*, **92** (2018) 223–241.

[2] F. F. Bonsall and J. Duncan, *Complete normed algebras*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973.

[3] H. G. Dales, *Banach algebras and automatic continuity*, London Mathematical Society Monographs. New Series, **24**, Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 2000.

[4] H. G. Dales and A. T.-M. Lau, The second duals of Beurling algebras, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **177** no. 836 (2005).

[5] A. Ebrahimzadeh Esfahani and M. Nemati, Generalized derivations on certain Banach algebras, (2022), arXiv:2201.06359.

[6] P. Eymard, L'algèbre de Fourier d'un groupe localement compact, *Bull. Soc. Math. France*, **92** (1964) 181–236.

[7] E. E. Granirer, On group representations whose C^*-algebra is an ideal in its von Neumann algebra, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **29** (1979) 37–52.

[8] A. T. -M. Lau, Uniformly continuous functionals on the Fourier algebra of any locally compact group, *Trans. Amer. Math. Soc.* **251** (1979) 39–59.

[9] A. T.-M. Lau, The second conjugate algebra of the Fourier algebra of a locally compact group, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **267** (1981) 53–63.

[10] S. Maghsoudi and R. Nasr-Isfahani, On the maximal and minimal left ideals of certain Banach algebras on locally compact groups, *Results Math.*, **62** (2012) 157–165.

[11] M. Mathieu and G. J. Murphy, Derivations mapping into the radical, *Arch. Math. (Basel)*, **57** (1991) 469–474.

[12] M. J. Mehdipour and Z. Saeedi, Derivations on group algebras of a locally compact abelian group, *Monatsh. Math.*, **180** (2016) 595–605.

[13] E. C. Posner, Derivations in prime rings, *Proc. Am. Math. Soc.*, **8** (1957) 1093–1100.

[14] I. M. Singer and J. Wermer, Derivations on commutative normed algebras, *Math. Ann.*, **129** (1955) 260–264.

[15] M. Thomas, The image of a derivation is contained in the radical, *Ann. Math.*, **128** (1988) 435–460.

[16] J. Zemanek, Spectral radius characterizations of commutativity in Banach algebras, *Stud. Math.*, **61** (1977) 257–268.

مهدی نعمتی
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ایران.
m.nemati@iut.ac.ir

مهدی نعمتی متولد تیرماه ماه ۱۳۶۱ در شهرستان سمیرم است. وی مقطع کارشناسی خود را در رشته ریاضی محض در دانشگاه کاشان و مقاطع کارشناسی ارشد و دکترای خود را در رشته ریاضی محض در دانشگاه صنعتی اصفهان گذرانده است.

علی ابراهیم‌زاده اصفهانی
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ایران.
ali.ebrahimzadeh@math.iut.ac.ir

علی ابراهیم‌زاده اصفهانی متولد اردیبهشت ماه ۱۳۶۹ در شهر اصفهان است. وی مقطع کارشناسی خود را در رشته ریاضی محض در دانشگاه پیام نور اصفهان، مقطع کارشناسی ارشد را در دانشگاه اصفهان و مقطع دکترا را در رشته ریاضی محض در دانشگاه صنعتی اصفهان گذرانده است.

سیما سلطانی رنانی
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ایران.
simasoltani@iut.ac.ir

سیما سلطانی رنانی متولد شهریور ماه ۱۳۵۹ در شهر اصفهان است. وی مقاطع کارشناسی، کارشناسی ارشد و دکترای خود را در رشته ریاضی محض در دانشگاه صنعتی اصفهان گذرانده است.

سید محمود منجگانی
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ایران.
manjgani@iut.ac.ir

سید محمود منجگانی متولد شهریور ماه ۱۳۴۵ در شهرستان بیرجند است. وی مقطع کارشناسی خود را در رشته ریاضی محض در دانشگاه فردوسی مشهد، مقاطع کارشناسی ارشد را در دانشگاه صنعتی اصفهان و مقطع دکترای خود را در رشته ریاضی محض در دانشگاه رجینا کانادا گذرانده است.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140007.1630