

THE TEACHER'S ROLE IN THE INTERACTION BETWEEN SOFTWARE AND MATHEMATICS EDUCATION THEORIES AND ITS EFFECT ON THE CREATIVITY OF SAMPAD STUDENTS

SEYED MOSTAFA HAMIDI^{✉*}, ALI ZAEEMBASHI[✉], MEHRDAD NAMDARI[✉], ASHRAF KARAMZADEH[✉]

ABSTRACT. Mathematical Challenge is one of the main components in mathematics education, which aims to improve the ability of learners in the field of mathematics. Also, creativity is a personal and social characteristic that leads to the development of people at all levels and in all historical periods. In fact, applying information and knowledge and using creativity in solving problems is very important. In between, for a mathematics teacher, in addition to having good techniques and knowledge, the use of software and theories of mathematics education is also effective on the flourishing of students' talent and creativity and helps them to solve a higher-level problem. In geometric concepts, using Euclid's principles and mastering them gives the teacher a better perspective for the problem solving process. In this article, a geometrical problem suitable for the 8th and 9th grade level has been proposed for the 7th grade in Sampad school, and while expressing the importance of Euclid's principles, both the dynamic environment of mathematics and the paper-pencil environment have been used. By using the Van Hiele's Theory in mathematical education, by designing an educational scaffold and dialogue between the teacher and students and with the help of Variation Theory, the answer of the problem was guessed by several students and a creative student gave a complete answer. Finally, we stated the problem as if and only if. In the meantime, Dimensional Deconstruction of Shapes was also used in the dynamic environment and paper-pencil environment.

Keywords: theories of math education - scaffolding - creativity - math software - if and only if.

Article Type: Research Paper.

Communicated by Alireza Abdollahi.

Received: 14-09-2023, Accepted: 09-03-2024, Published Online: 29-11-2024.

Cite this article: S. M. Hamidi, A. Zaeembashi, M. Namdari, A. Karamzadeh, The teacher's role in the interaction between software and mathematics education theories and its effect on the creativity of Sampad students, *Journal of Mathematics and Society*, 9 no. 3 (2024) 125–151.

<http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.139103.1605> .

1. Introduction

Undoubtedly, one of the most important pillars of mathematics is Euclid's axioms. Designing and solving many geometrical problems can be based on these axioms. In 1980, the National Council of Mathematics Teachers published a statement entitled "Agenda for Action" and in it, it was emphasized the need to revise school mathematics curricula and it was realized that the knowledge of teachers is a key element in education. In the training of teachers to teach mathematics in the framework of TPACK, content knowledge and technology are two important pillars, and the interaction of these two components with pedagogy has a strong effect on teaching design. Based on this framework, content knowledge of teachers is one of the most key factors in the developing students' creativity. Also, improving knowledge for teachers is one of the important recommendations of Karamzadeh in [23] and also Polya in the book "How to solve it?". On the one hand, researchers in the field of mathematics education have various theories that the teacher, while using them as a theoretical background for research, can apply these theories to solve problems and on the other hand, the use of technology in teaching and learning mathematics is useful in many mathematical fields at different educational levels, especially in fields which are based on Dynamic Geometry Software. It is somehow difficult for an elementary student to go from solving intuitive and experimental problems to abstract problems to achieve a deep understanding, and we believe that this is the transition from a Van Hiele level to its higher levels, makes it difficult especially the transition from level 3 to level 4. In Iran, students are introduced to the basic concepts of geometry in elementary school, and out of a large number of 6th grade students, a small number (about 60 to 100 people) of creative and intelligent students are accepted in a Sampad center. In order to allow these mathematically interested students to use their intelligence, we must pose challenging problems for them [22].

2. Discussion

In football, sometimes 1 minute from the referee is enough time to change the result, and in real-time math education, 1 minute is enough time for students to solve a problem. We believe that one of the proper ways to design a good math problem is to combine several simple and basic problems and design a challenging problem for students. Leikin used a similar idea and a stepped task as a math activity involving a complex math problem called the target problem, along with scaffolding paths that include steps of different levels of math challenge. In this research, in the geometry classroom, we have used stepped problems, such as bottom-up rich problems and its converse. From Karamzadeh's point of view, mathematics education consists of two important parts, teaching and learning, and all other components should be used to facilitate these two, for teachers and students. The application of mathematics education theories in teachers' classrooms and researchers' research shows that they care about the most important topics of mathematics education, namely teaching and learning. It is

important for teachers to understand how these theories can be used to improve teaching using an example as a case study. Marton and Lo call such an approach (case study) a learning study [20]. When we can choose several theories of mathematics education for a research, usually none of them is the best choice, because each one has its own strengths and weaknesses. And we believe that the teacher should apply the theories of mathematics education to solve the problems. In this research, we use Van Hiele's theory and the Variation theory. Every object or phenomenon has several aspects such as shape, size and function. The way in which a person experiences a phenomenon can be according to certain aspects of that phenomenon, which the person simultaneously focuses on and recognizes. We commonly use the term scaffolding when describing teaching and learning interactions in mathematics classrooms. Wood et al. [1] defined scaffolding as: an interactive system in which the teacher acts according to the actions of the learner to gain his attention. Due to how the teacher focuses on the nature of what is to be learned, it engages the students in interactions and discourse in the classroom. And for this reason, one of the key mechanisms that can make scaffolding constructive is dialogue. Stone also states that if we are to use the subject of richer discourse, we need to focus clearly on the dynamics of communication within a successful framework for children's learning. Creativity is a personal and social characteristic that nurtures human beings at all levels and in all historical periods. Karamzadeh suggests that individuals who possess creativity and can approach problem-solving with various methods tend to be more successful. In the context of school mathematics, students' creativity can be harnessed to generate novel ideas and solutions for unfamiliar mathematical problems or to devise alternative solutions for problems they have already learned. This approach, as highlighted by Leikin and Pita-Pantazi [17, 18], allows students to develop their mathematical thinking and problem-solving skills. Additionally, Barbeau [4] argues that presenting challenging mathematical tasks in the classroom can equip students with valuable qualities such as patience, persistence, and resilience, which are essential for overcoming future challenges in life. According to Sheffield, it is crucial for teachers to push high-achieving students and support those who may be facing challenges, especially in gifted center classes. This article presents a theoretical research study utilizing a descriptive-analytical research approach. The study began with an extensive review of literature, including articles, Olympiad and geometry textbooks, authoritative journals, and other pertinent sources. The research commenced by introducing a geometric problem to Sampad students, with a focus on investigating creativity and the teacher's impact on stimulating students' creative abilities. In this research, the classical problem and the target problem are identified as two separate issues that students address independently. The classical problem, which involves geometry, presents a greater level of difficulty for seventh-grade students in their first year of secondary school compared to the target problem. Despite the delayed realization of solutions for the classical problem, Karamzadeh

emphasizes the importance of establishing a connection between the two problems using an “if and only if” approach.

3. Conclusions

The research conducted revealed that utilizing scaffolding not only offers a clear direction but also establishes a suitable framework for the application of mathematics education theories in a given problem. The teacher’s role has transitioned from a mere demonstrator to a facilitator and guide, potentially influencing the development of students’ cognitive processes from their current abilities to their potential abilities in constructing mathematical concepts and knowledge, particularly in the context of constructing isosceles triangles. The analysis of this research underscores the significance of geometry teachers and mathematics education researchers having a firm grasp of Euclid’s axioms, the TPACK framework, the integration of mathematics education theories in problem-solving scenarios, and the adept handling of challenging problems for gifted students.

we believe that mathematical creativity should be developed in all students. The findings indicate that teachers play a crucial role in presenting students with challenging problems and encouraging them to think critically, thereby nurturing their imagination throughout their educational journey. The examples presented in Section 6 show that by incorporating various mathematical proofs of students and interaction between dynamic and pencil-paper learning environments [8], a teacher can modify the level of mathematical challenge and guide students through Van Hiele’s levels, especially from level 1 to level 3. Van Hiele’s theory adopts a restricted perspective on the significance of language in the progression of geometry concepts. In this study, the geometry instructor managed to enhance the influence of language to a certain degree by effectively employing problem-solving techniques and fostering meaningful exchanges between herself and the students. Since students have to mentally manipulate the images to identify similarities and differences, the teacher’s role is clear after Variation Theory is introduced and changes in students’ perspectives are made. and the students were able to understand more deeply the two geometric views, i.e. angle and side, in the definition of an isosceles triangle. One of the most important parts of our results was the importance of posing problems in the form of “if and only if” from Karamzadeh’s point of view (his lecture in Mashhad, September 2001). After stating the paper-pencil proof of the classical problem, Karamzadeh says that, like many theorems, if we express the challenging problems as “if and only if” (Theorem 1 (gc-theorem)), we change the nature of the problem and difficult and relatively complex solutions become comprehensible and expressible proofs in the first secondary level and even in the elementary level. In fact, if the teacher presents a challenging problem to the students as “P if and only if Q” instead of “If P then Q”, one side of the problem and sometimes both sides will become obvious. And it conveys the truth and depth of the material to the student faster and easier [23].

Seyed Mostafa Hamidi

Faculty of science, Shahid Rajaei Teacher Training University Tehran, Iran

Email: s.mostafa.hamidi@yahoo.com

Ali Zaeembashi

Department of Mathematics, Faculty of science, Shahid Rajaei Teacher Training University Tehran, Iran

Email: azaeembashi@sru.ac.ir

Mehrdad Namdari

Department of Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences and Computer, Shahid Chamran University of Ahvaz
Ahvaz, Iran

Email: namdari@scu.ac.ir

Ashraf Karamzadeh

Department of Mathematics, Faculty of science, Shahid Rajaei Teacher Training University Tehran, Iran

Email: karamzadehmath@gmail.com

نقش معلم در تعامل نرم افزار و نظریه های آموزش ریاضی و تأثیر آن بر خلاقیت دانش آموزان سمپادی

سید مصطفی حمیدی^۱، علی زعیم باشی^۲، مهرداد نامداری^۳ و اشرف کرمزاده^۴

چکیده. چالش ریاضی یکی از اجزای اصلی در آموزش ریاضی است که هدف آن تکمیل توانایی یادگیرندگان در زمینه ریاضیات است. همچنین خلاقیت یک ویژگی شخصی و اجتماعی است، که موجب پیشرفت افراد در همه ی سطوح و در تمام مقاطع تاریخی می شود. در واقع به کارگیری اطلاعات و دانسته ها و استفاده از خلاقیت در حل مسأله بسیار حائز اهمیت می باشد. در این بین برای یک معلم ریاضیات علاوه بر داشتن روش مناسب و دانش خوب، استفاده از نرم افزار و نظریه های آموزش ریاضی نیز بر شکوفایی استعداد و خلاقیت دانش آموزان مؤثر بوده و به آنها برای حل یک مسأله ی سطح بالاتر کمک می کند. همچنین استفاده از اصول اقلیدس و تسلط بر آنها، به معلم دیدگاه بهتری برای فرآیند حل مسائل هندسی می دهد. در این مقاله، یک مسأله ی هندسی متناسب با سطح کلاس هشتم و نهم برای کلاس هفتم در مدرسه ی سمپاد طرح شده است و ضمن بیان اهمیت اصول اقلیدس، هر دو محیط پویای ریاضیات و محیط کاغذ-مداد، به کار گرفته شده است. با استفاده از نظریه ی آموزش ریاضی فن هیلی، با طراحی یک داربست آموزشی و گفتگوی بین معلم و دانش آموزان و با کمک نظریه ی تنوع، پاسخ مسأله توسط چند دانش آموز حدس زده شده است، و یک دانش آموز خلاق به آن پاسخ کامل داده است. در نهایت مسأله را به صورت اگر و تنها اگر بیان کردیم. در این میان در محیط پویا و محیط کاغذ-مداد، تجزیه ی ابعادی اشکال نیز به کار برده شد.

۱. مقدمه

بی شک یکی از ارکان مهم ریاضیات، اصول اقلیدس می باشد. طرح و حل بسیاری از مسائل هندسی می تواند بر پایه ی این اصول باشد. مسائل، قلب ریاضیات هستند و این قلب از دیرباز در حال تپیدن بوده و از این به بعد هم می تپد و هرگز نخواهد ایستاد و به پروفیسور بارنارد^۱ هم نیازی ندارد [۲۳]. همچنین شورای ملی معلمان ریاضیات^۲ در سال ۱۹۸۰ بیانیه ای با عنوان “دستور کار برای عمل” منتشر کرد و در آن، بر لزوم دوباره نگری در برنامه های درسی ریاضی مدرسه ای تأکید شد و حل مسأله، قلب تپنده ی ریاضیات نامیده شد، و برای تحقق این موضوع دانش معلمان یک عنصر کلیدی است. در آموزش معلمان برای تدریس ریاضی در چارچوب *TPACK*^۳ (یک چارچوب جامع که به آن فناوری، پداگوژی و دانش محتوایی

عبارات و کلمات کلیدی: نظریه های آموزش ریاضی - داربست زنی - خلاقیت - نرم افزارهای ریاضی - اگر و تنها اگر.
دبیر تخصصی رابط: علیرضا عبدالمی
نوع مقاله: پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۶/۲۳ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۱۲/۱۹ تاریخ انتشار آنلاین: ۱۴۰۳/۰۹/۰۹
ارجاع به مقاله: س. م. حمیدی، ع. زعیم باشی، م. نامداری و ا. کرمزاده، نقش معلم در تعامل نرم افزار و نظریه های آموزش ریاضی و تأثیر آن بر خلاقیت دانش آموزان سمپادی، نشریه ریاضی و جامعه، ۹ شماره ۳ (۱۴۰۳) ۱۵۱-۱۲۵.

<http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.139103.1605>

¹C. N. Barnard ²national council of teachers of mathematics ³technology, pedagogy and content knowledge

گفته می شود)، دانش محتوایی و فناوری، دو رکن مهم می باشند که تعامل این دو مؤلفه با پداگوژی بر طراحی تدریس بسیار مؤثر است. براساس این چارچوب، دانش محتوایی معلمان یکی از کلیدی ترین عوامل بروز و شکوفایی خلاقیت دانش آموزان است و همچنین برای معلمان ریاضی تسلط بر دانش یکی از توصیه های مهم کرم زاده در کتاب نتایج باورنکردنی در ریاضیات و همچنین پولیا در کتاب چگونه مسأله را حل کنیم، می باشد. از یک سو، پژوهشگران در حوزه آموزش ریاضی، نظریه های مختلفی در دست دارند که معلم ضمن استفاده از آن ها به عنوان زمینه ی نظری برای تحقیق، می تواند این نظریه ها را برای حل مسأله، به کار گیرد و از سوی دیگر، استفاده از فناوری در یاددهی و یادگیری ریاضیات در بسیاری از حوزه های ریاضی در سطوح مختلف آموزشی، به ویژه در محیط هندسه ی پویا،^۴ مفید می باشد. برای دانش آموز ابتدایی گذار از حل تکالیف شهودی و تجربی به مسائل انتزاعی، برای دستیابی به یک درک عمیق، تا حدودی مشکل است و به اعتقاد ما این مشکل، گذار از یک سطح فن هیلی به سطوح بالاتر آن؛ به ویژه گذار از سطح ۳ به سطح ۴؛ را دشوار می کند. در ایران دانش آموزان در دوره ی ابتدایی با مفاهیم اولیه ی هندسه آشنا می شوند و از میان تعداد زیادی دانش آموز پایه ی ششم تعداد کمی (نزدیک به ۶۰ تا ۱۰۰ نفر) دانش آموز خلاق و باهوش در یک مرکز استعداد درخشان پذیرفته می شوند. برای این که به این دانش آموزان با استعداد ریاضی و علاقمند اجازه دهیم تا هوش خود را به کار گیرند، باید مسائل چالش برانگیزی برای آنها طرح کنیم [۲۳]. سه رکن اصلی کلاس درس ریاضی عبارتند از: ریاضی، معلم و دانش آموز. و با ورود به قرن بیست و یکم توجه ویژه ای به این سه رکن شده است. محققان معتقدند که همه ی دانش آموزان در کلاس درس روی تکالیف یا مجموعه ای از مسائل یکسان کار می کنند. برای اینکه حل مسأله، رویکرد اصلی در کلاس درس باشد، باید تکالیف و مسائل از نظر دشواری متنوع بوده تا حل آن ها برای دانش آموزان با توانایی های مختلف امکان پذیر باشد. به ویژه، توجه به طرح این نوع تکالیف و مسائل در مدارس سمپاد برای رشد خلاقیت دانش آموزان بسیار مهم است. تامس کیرن^۵ تدریس را به عنوان بازی فکری پینگ پونگ توصیف می کند، که در این بازی هدف، برنده شدن نیست، بلکه حفظ بازیکنان در زمین است. در این راستا تکلیف های غنی یادگیری، راهی برای جلب علاقه و اشتیاق دانش آموزان برای ماندن در بازی است. همچنین پیگت^۶ به معلمان ریاضیات، طرح تکالیف غنی را پیشنهاد می کند. تکالیف غنی^۷، تکالیفی هستند که از چندین سؤال یا مسأله ی مرتبط تشکیل شده اند. یک مسأله غنی با سؤالات اساسی یکسان برای همه ی دانش آموزان شروع می شود، بر مطالب کلیدی برای یادگیری تمرکز می کند و با سؤالات پیچیده و چالش برانگیز ادامه می یابد.

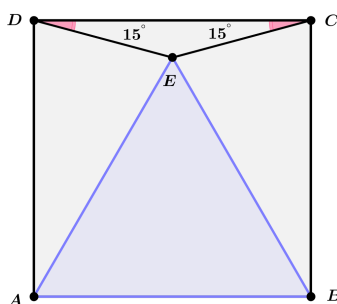
۲. بیان مسأله

در فوتبال گاهی ۱ دقیقه وقت از سوی داور کافی است تا نتیجه تغییر کند و در آموزش لحظه ای ریاضی نیز ۱ دقیقه وقت کافی است تا دانش آموزان با نبوغ خود یک مسأله را حل کنند. ما اعتقاد داریم یکی از روش های مناسب طرح یک مسأله ی ریاضی خوب این است که چند مسأله ی ساده تر و اساسی را پیوند بزنیم و مسأله ای چالش برانگیز را به نوعی یک تکلیف غنی برای دانش آموزان طرح کنیم. لیکن^۸ یک ایده ی مشابه و یک تکلیف پلکانی^۹ را به عنوان یک فعالیت ریاضی شامل یک مسأله ی پیچیده ی ریاضی به نام مسأله ی هدف^{۱۰}، همراه با مسیرهای داربست که شامل مراحل سطوح مختلف چالش ریاضی است، به کار برد. هر مرحله شامل تعدادی مسأله با سطح پیچیدگی کمتر است که براساس مسأله های مرحله ی قبل طراحی شده اند. بنابراین، تکالیف پله ای، تکالیفی از بالا به پایین هستند، زیرا شروع به بیان یک سؤال دشوار می کنند، که فقط تعداد کمی از دانش آموزان در کلاس می توانند به آن پاسخ دهند، و با ارائه ی سرنخ هایی برای دانش آموزان ادامه می یابد تا اگر نتوانند تکالیف را با اطلاعات خود حل کنند یا اگر نمی توانند درگیر حل شوند، از این سرنخ ها استفاده کنند. ما در این پژوهش، در

⁴dynamic geometry software ⁵Thomas Kieren ⁶Piggott ⁷rich tasks ⁸Roza Leikin ⁹stepped task ¹⁰target problem

کلاس درس هندسه، همانند تکالیف غنی از پایین به بالا و مسیر عکس تکالیف پله‌ای را به‌کار برده‌ایم. یک مسأله‌ی قدیمی کلاسیک در هندسه به شکل زیر داریم:

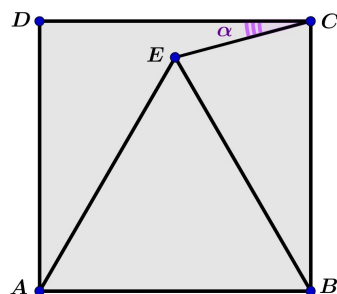
مسأله ۱.۲ (مسأله‌ی کلاسیک). اگر در مربع $ABCD$ از دو رأس C و D دو زاویه‌ی 15° درجه رسم کنیم آن‌گاه مثلث ABE متساوی‌الاضلاع خواهد بود (شکل ۱۵). حال در اینجا مسأله‌ی هدف را قبل از طرح و حل چند مسأله، به‌صورت زیر بیان می‌کنیم.



شکل ۱. مسأله‌ی کلاسیک

Figure 1: classic problem

مسأله ۲.۲ (مسأله‌ی هدف). مربع $ABCD$ مفروض است. مثلث متساوی‌الاضلاع ABE را روی ضلع AB بنا می‌کنیم. نقطه‌ی E را به نقطه C وصل می‌کنیم. زاویه‌ی α را به‌دست آورید؟ (شکل ۲).



شکل ۲. مسأله‌ی هدف

Figure 2: target problem

برای برخی از معلمان و محققان آموزش ریاضی رسم شکل مسأله‌ی هدف در محیط پویای ریاضی و دیدن پاسخ مسأله برای دانش‌آموزان می‌تواند بسیار آموزنده و سودمند باشد. در واقع برای حل این مسأله، معلم می‌تواند بدون اینکه تفکری ایجاد کند مسأله را در محیط نرم‌افزار رسم کند و دانش‌آموزان با صرف ۱ دقیقه وقت، مقدار زاویه‌ی خواسته شده را ببینند و بعد شروع به حل در محیط مداد-کاغذ نمایند. اما کرمزاده معتقد است که "این شیوه‌ی استفاده از نرم‌افزار به پرورش خلاقیت دانش‌آموزان کمک نمی‌کند و چندان کارساز نیست" و تجربه‌ی ما نیز این موضوع را تأیید می‌کند. در واقع معلم می‌تواند در کلاس درس با کمک نرم‌افزار و به‌کارگیری نظریه‌های آموزش ریاضی، داریست‌هایی برای دانش‌آموزان ایجاد کند به‌طوری‌که دانش‌آموز به تدریج، به‌طور مستقل و در مسیر داریست بدون حمایت معلم، مسأله را با استفاده از هوش خود حل کند.

۳. چارچوب نظری

۱.۳. نظریه های آموزش ریاضی. آموزش ریاضی از دیدگاه کرمزاده، “از دو موضوع مهم یاددهی و یادگیری^{۱۱} تشکیل می شود” و تمام مفاهیم و موضوعات دیگر باید در جهت تسهیل این دو موضوع برای معلمان و دانش آموزان به کار گرفته شوند. به کارگیری نظریه های آموزش ریاضی در کلاس درس معلمان و پژوهش های محققان، نشان می دهد که آن ها به مهم ترین موضوعات آموزش ریاضی، یعنی یاددهی و یادگیری اهمیت می دهند. برخی معلمان بدون توجه به ماهیت پیچیده یادگیری و وجود تفاوت های فردی، تدریس را تنها به عنوان یک وظیفه نسبتاً ساده که به معنای ارائه اطلاعات است، در نظر می گیرند ولی این موضوع نباید مانعی برای معرفی نظریه های آموزش ریاضی سودمند باشد که می توانند یادگیری دانش آموزان را تقویت کنند. مهم است، معلمان بدانند که چگونه می توان از این نظریه ها برای بهبود آموزش با استفاده از یک مثال به عنوان یک مطالعه موردی، استفاده کرد. مارتون^{۱۲} و لو^{۱۳} چنین رویکردی (مطالعه موردی) را مطالعه یادگیری می نامند [۲۰]، و استدلال این است که معلمان اغلب در به کار بستن نظریه ها مشکل دارند و بنابراین استفاده از یک درس و یک مسأله به عنوان نقطه شروع می تواند به معلمان کمک کند تا تجسم کنند که چگونه می توان نظریه ها را در کلاس درس به کار برد. وقتی چند نظریه آموزش ریاضی را می توانیم برای یک تحقیق انتخاب کنیم، معمولاً هیچ یک از آن ها بهترین انتخاب نیستند، زیرا هر یک دارای نقاط قوت و ضعف خاص خود هستند. و به اعتقاد ما این معلم است که باید با تلفیق درست نظریه های آموزش ریاضی آن ها را در حل مسأله به کار گیرد. استفاده از شبکه سازی نظریه ها در آموزش ریاضی^{۱۴} یک روش تحقیقی است که هدف آن برقراری ارتباط بین بخش هایی از نظریه های مختلف، با حفظ هویت هر نظریه است و تلاش برای اصلاح یا ادغام نظریه ها نیست. در این پژوهش نظریه فن هیله و نظریه تنوع را به کار می بریم و به صورت مختصر به بیان آنها می پردازیم.

۲.۳. نظریه فن هیله. ^{۱۵} این نظریه براساس رویکرد ساخت گرایی^{۱۶} و عمدتاً براساس خطوط فکری نظریه رشد شناختی پیاژه^{۱۷} است. فن هیله یک نظریه ی ترتیبی برای توضیح نحوه یادگیری مفاهیم هندسی به وجود آورده است. پیشرفت فراگیران در هر سطح به تجربه، دانش و تسلط آنها در سطح قبلی بستگی دارد. به عبارت دیگر، آموزش سلسله مراتبی در چند سطح متفاوت منجر به یادگیری تفکر هندسی می شود. فراگیران با توجه به تجربه ی آموزشی مقدماتی مناسب، از طریق پنج سطح فکر متوالی و یک سطح صفر یا پیش شناخت در مسیر رشد خود پیشرفت می کنند. سطوح فن هیله (VH) انواع مختلف استدلال ریاضی^{۱۸} را مشخص می کند که دانش آموزان با سنین و توانایی های متفاوت، در هنگام حل مسائل هندسی از آنها استفاده می کنند. این سطوح تفکر عبارتند از:

• سطح ۱ (تجسم^{۱۹}، VH۱): در این سطح به مفاهیم هندسی، به عنوان ماهیت هایی کلی نگریسته می شود و نه به عنوان مفاهیمی که در بردارنده اجزاء هستند. دانش آموز شکل ها را می بیند و اغلب با مقایسه و شناخت اولیه ای که از اشکال مختلف دارد آن ها را از یکدیگر تمیز می دهد و تصمیم می گیرد که براساس ادراک^{۲۰} خود بسازد نه آن که دلیل بیاورد. در این سطح، تمرکز اصلی دانش آموز روی ظاهر اشکال است. وقتی که دانش آموز شکلی را مربع می داند در واقع او به جای توجه به اضلاع و زاویه های قائمه به کلیت شکل واکنش نشان می دهد و ممکن است از تشابه با یک جعبه کمک بگیرد. در این سطح، دانش آموز نمی تواند از شکل یک لوزی، یک متوازی الاضلاع را ببیند و این دو شکل کاملاً متفاوت هستند (شکل ۳).

¹¹teaching and learning ¹²Marton ¹³Lo ¹⁴networking theories in mathematics education ¹⁵Van Hiele's theory (1959/1985) ¹⁶constructivism approach ¹⁷Piaget ¹⁸mathematical reasoning ¹⁹visualization ²⁰perception

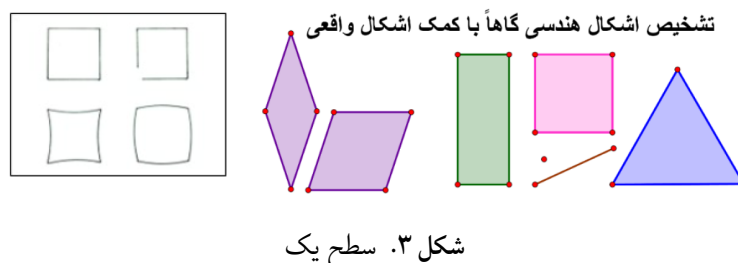
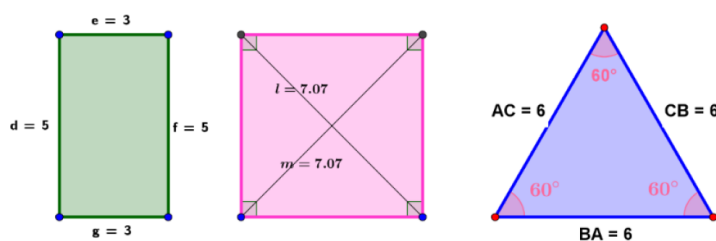


Figure 3: First Level

• سطح ۲ (تجزیه و تحلیل ^{۲۱}، $VH2$): نقطه‌ی شروع تحلیل مفاهیم هندسی سطح دو است. در این سطح دانش‌آموز، اشکال را به کمک ویژگی‌هایشان شناخته و توصیف می‌کند. دانش‌آموز مستطیل را یک شکل هندسی با چهار زاویه‌ی قائمه و اندازه ضلع‌های روبه‌روی برابر، می‌بیند. در واقع این ویژگی‌ها را به‌صورت تجربی، مثلاً از روش مشاهده و اندازه‌گیری، تشخیص داده و نام‌گذاری می‌کند و یا مثلاً با تا کردن می‌تواند برابری و عمود بودن قطرهای مربع را مشاهده کند. اما در این سطح روابط بین ویژگی‌های یک شکل و روابط بین اشکال را متوجه نمی‌شود (دید نمی‌شود). به‌عنوان مثال دانش‌آموز می‌گوید مثلث متساوی‌الاضلاع، مثلثی است که سه ضلع برابر و سه زاویه‌ی برابر دارد، ولی نمی‌داند که برابری سه ضلع یا سه زاویه، هریک به تنهایی برای متساوی‌الاضلاع بودن یک مثلث کافی است. میسون ^{۲۲} می‌گوید که شخص ممکن است در توصیف یک شکل، همه‌ی ویژگی‌هایی را که درباره‌ی آن شکل می‌داند، فهرست کند بی‌آنکه بتواند تعیین کند کدام ویژگی‌ها لازم و کدام یک برای توصیف شکل، کافی هستند (شکل ۴).



شکل ۴. سطح دو

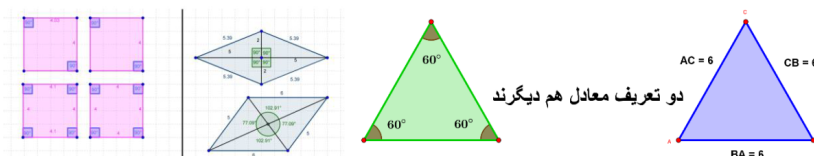
Figure 4: Second Level

• سطح ۳ (استنتاج غیررسمی ^{۲۳}، $VH3$): در این سطح، روابط میان ویژگی‌های یک شکل و نیز روابط میان اشکال درک می‌شوند. به‌طور مثال در چهارضلعی‌ها، موازی بودن ضلع‌های روبه‌رو ایجاب می‌کند که زاویه‌های روبه‌رو برابر باشند (ارتباط میان ویژگی‌های یک شکل). همچنین مربع یک مستطیل است چون همه‌ی ویژگی‌های مستطیل را دارد (ارتباط میان اشکال). در واقع، اینجاست که دانش‌آموز تعاریف با معنی ^{۲۴} ایجاد می‌کند و بحث‌هایی مطرح می‌کند که دلایل خود را اثبات کند. او می‌تواند استدلال‌های منطقی ^{۲۵} را درک کند و گاه حتی خود نیز چنین استدلال‌هایی بیاورد ولی استنتاج‌های ^{۲۶} او در این مرحله غیررسمی ^{۲۷} هستند. مثلاً مجموع زوایای داخلی مثلث را بدون نوشتن روابط ریاضی می‌داند. همچنین مجموع زوایای داخلی یک چهارضلعی را با ایجاد دو مثلث به‌دست می‌آورد، بدون اینکه با نمادها و روابط ریاضی به صورت رسمی اثبات ^{۲۸} کند. تعاریف ریاضی از اجسام هندسی برای دانش‌آموزان معنادار است و آنها می‌توانند از تعاریف مختلف برای یک

²¹analysis ²²Mason ²³informal deduction ²⁴meaningful definitions ²⁵logical reasonings ²⁶inferences ²⁷informal

²⁸proof

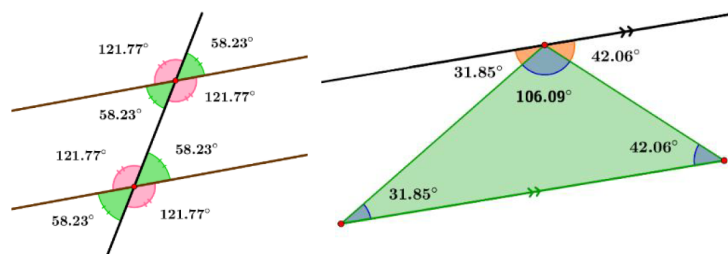
مفهوم استفاده کنند و به عنوان مثال مشکل تعریف مثلث متساوی الاضلاع در سطح ۲ فن هیله براساس زاویه و ضلع برطرف می شود. با اینکه اثبات های رسمی^{۲۹} ممکن است قابل فهم باشند ولی فرد هنوز نمی داند که چگونه می توان ترتیب منطقی اثبات را تغییر داد و یا چگونه با استفاده از فرض هایی متفاوت اقدام به اثبات نمود. به گفته ی فن هیله، افرادی که در این سطح قرار دارند هنوز نمی توانند اثباتی ارائه بدهند، مگر آنکه گام های اثبات بسیار اندک باشند. او ادعا می کند اگر اثباتی در سطوح پایین تر از سطح سوم ارائه شود، صرفاً اثباتی خواهد بود که فقط به خاطر سپرده شده و نمی تواند توسط فرد تولید شده باشد (شکل ۵).



شکل ۵. سطح سه

Figure 5: Third Level

• سطح ۴ (استنتاج رسمی^{۳۰}، $VH4$): در این سطح، تفکر با مفهوم استنتاج، عکس یک قضیه^{۳۱}، اصول موضوع^{۳۲} و شرایط لازم و کافی درآمیخته است. در سطح چهارم روش های گوناگون اثبات پذیرفتنی است و اثبات ها تنها به خاطر سپرده نمی شوند بلکه می توانند تولید شوند. میسون خاطر نشان می کند کسی که در این سطح از تفکر هندسی قرار دارد، به طور معمول از عهده ی اثبات های مسائل کتاب های هندسه ی دبیرستان برمی آید. در واقع در این سطح باید دانش آموزان قادر به ارائه ی یک اثبات به عنوان یک فعالیت کلاسی^{۳۳} درس هندسه باشند. به عنوان مثال اثبات این که مجموع زوایای داخلی هر مثلث برابر با 180° درجه (اندازه زاویه نیم صفحه) است (شکل ۶). و یا همچنین اثبات قضیه ی تثلیث مثلث مورلی^{۳۴} که نه تنها اثبات هندسی قابل فهم برای دانش آموز متوسطه ی اول (توسط کرم زاده، نامداری و گرجیان)، بلکه اثبات های سخت جبری و مثلثاتی هم دارد.



شکل ۶. سطح چهار

Figure 6: Fourth level

• سطح ۵ (سختی، دقت موشکافانه^{۳۵}، $VH5$): در این سطح قضیه ها در دستگاه های اصل موضوعی گوناگون مطرح می شوند و شخص قادر است این دستگاه های متفاوت را تجزیه، تحلیل و مقایسه^{۳۶} کند. نمونه های مختلف استنتاج را برای

²⁹formal proofs ³⁰deduction ³¹backwards ³²postulatees or axioms ³³class activity ³⁴Frank Morley ³⁵Statement, Rigor ³⁶Analysis and comparison

به‌کارگیری دستگاه‌های ریاضیات^{۳۷} انجام می‌دهد و با استفاده از اثبات‌های غیرمستقیم^{۳۸} و برهان خلف^{۳۹} دستگاه‌های غیراقلیدسی^{۴۰} را درک می‌کند. هندسه در این سطح به شدت انتزاعی^{۴۱} است. به‌عنوان مثال دانش‌آموز یا دانشجویی که می‌تواند فقط با استفاده از اصول موضوع وقوع^{۴۲} (سه اصل از اصول هیلبرت^{۴۳}) با الگوهای آشنا شود که در آن الگوها، هر خط می‌تواند نقاط متناهی^{۴۴} داشته باشد (حتی فقط دو نقطه). و یا در یک الگوی خاص همه‌ی خطوط متقاطع باشند و دو خط موازی^{۴۵} اصلاً وجود نداشته باشند و یا اینکه الگویی را ببینند که از یک نقطه خارج یک خط بیش از یک خط به موازات آن خط رسم می‌شود (هندسه‌ی هذلولوی^{۴۶}). همچنین در این سطح دانش‌آموز یا دانشجو می‌تواند با اضافه کردن اصول دیگر ثابت کند که مجموع اندازه‌ی زوایای داخلی یک مثلث کمتر یا مساوی با 180° درجه است. اما در تمام این الگوها فقط از اصول استفاده می‌کند و لازم نیست از شکل استفاده کند. همچنین دانش‌آموز یا دانشجو می‌تواند با استفاده از همین سه اصل نشان دهد که از هر نقطه حداقل دو خط متمایز می‌گذرد و برای هر نقطه حداقل یک خط وجود دارد که از آن نقطه نمی‌گذرد و در واقع می‌توان گزاره‌های^{۴۷} دیگری نیز به‌دست آورد. • سطح صفر (پیش‌شناخت^{۴۸}، VH): در سال ۱۹۹۲ کلمنتس و باتیستا^{۴۹} سطح صفر را با عنوان سطح پیش‌شناخت نیز معرفی کردند. دانش‌آموز در این سطح به یک زیرمجموعه از کاراکترهای (نویسه‌های) دیداری^{۵۰} توجه می‌کند و به‌طور ضعیف تصاویر را شناسایی می‌کند. در واقع درک او از جهان شامل ادراکات اشیایی است که با آنها تجربه مستقیم دارد. در این سطح قدرت شکل‌گیری تصاویر ذهنی^{۵۱} اولیه افزایش می‌یابد. به اصطلاح پیازه کودک در نیم‌دوره‌ای به نام پیش‌عملیاتی^{۵۲} قرار دارد که هنوز نمی‌تواند به‌طور منطقی فکر کند و پیازه آن‌را سن کنجکاو^{۵۳} می‌نامد.

۳.۳. نظریه‌ی تنوع. در تحقیقات آموزش ریاضیات در دو دهه‌ی گذشته، یک عنصر کلیدی که محبوبیت پیدا کرده است، استفاده از تنوع و ثبات^{۵۴} در یاددهی و یادگیری ریاضیات است [۲۰]. به گفته‌ی گو، هوانگ و مارتون^{۵۵} [۲۰]، معلمان چینی به‌طور نظام‌مند مثال‌ها، تکالیف و مسائلی^{۵۶} را که از منظرهای^{۵۷} مهم متفاوت هستند، کنار هم قرار می‌دهند تا به دانش‌آموزان کمک کنند محتوای ریاضی را درک کرده و یاد بگیرند. پدیدارنگاری^{۵۸} به شیوه‌های کیفی متفاوتی که مردم از جهان آگاه می‌شوند و شیوه‌هایی که از طریق آن، پدیده‌ها و موقعیت‌های مختلف پیرامون خود را تجربه می‌کنند، اشاره دارد [۲۰]. نظریه‌ی تنوع^{۵۹} (VT) از مفهوم پدیدارنگاری نشأت می‌گیرد. از زمان ظهور آن در اواخر دهه ۱۹۹۰ (مارتون و بوث^{۶۰}، [۲۰])، این نظریه به سرعت به یکی از مشهورترین رویکردهای آموزشی تبدیل شد (ادی، چنگ^{۶۱}؛ [۲۰]). این نظریه در آموزش مفید است زیرا به معلمان کمک می‌کند تا یاد بگیرند که از دیدگاه‌های مختلف، یادگیری را تشخیص دهند (تعریف مثلث متساوی‌الاضلاع در $VH2$ و $VH3$ را ببینید). و می‌توان از آن برای بررسی تفاوت‌های فردی در کلاس استفاده کرد و به دانش‌آموزان اجازه داد تا از تجربیات شخصی خود استفاده کنند و آنها را در یادگیری خود به کار گیرند. بر این اساس، نظریه‌ی تنوع می‌تواند به طراحی برنامه‌های آموزشی برای تدریس در کلاس‌های بزرگ کمک کند، زیرا متناسب با توانایی‌های متفاوت دانش‌آموزان کمک می‌کند و یک موضوع مهم در آموزش است. [۲۰]. در نظریه‌ی تنوع یادگیری، مؤلفه‌ی اساسی برای تدریس، تغییر^{۶۲} است. و این مؤلفه‌ی تغییر با توجه به تجزیه و تحلیل مطالب کلاس و تعامل بین معلم و دانش‌آموزان، دانش‌آموزان را متوجه می‌کند که چه چیزی را باید یاد بگیرند. باید بگوییم که نظریه‌ی تنوع یادگیری، با توجه به دیدگاه پداگوژیکی، نظریه‌ی ارتباط بین یادگیری و شرایط یادگیری است. هر شی‌ی یا پدیده، دارای چند منظر مانند شکل، اندازه

³⁷mathematics systems ³⁸indirect proofs ³⁹reductio ad absurdum ⁴⁰non-euclidean system ⁴¹abstract ⁴²incidence axioms ⁴³Hilbert ⁴⁴finite ⁴⁵two parallel lines ⁴⁶hyperbole geometry ⁴⁷proposition ⁴⁸Pre-recognition ⁴⁹Clements, Batista ⁵⁰visual characters ⁵¹mental images ⁵²preoperative ⁵³age of curiosity ⁵⁴variation & noninvariance ⁵⁵Gu, Huang & Marton ⁵⁶examples, tasks & problems ⁵⁷aspects ⁵⁸phenomenology ⁵⁹variation theory ⁶⁰Marton & Booth ⁶¹Cheng ⁶²change

و عملکردها است. مسیری که یک فرد پدیده را تجربه می کند، می تواند با توجه به منظرهای خاصی از آن پدیده باشد، که فرد به طور همزمان تمرکز می کند و تشخیص دهد. اگر دو نفر که همان پدیده را تجربه می کنند، تمرکز داشته باشند و به همین ترتیب منظرهای مختلف آن را تشخیص دهند، دو روش متفاوت برای تجربه ی یک پدیده مشابه را نشان می دهند. در این پژوهش اشکال هندسی از دو منظر مهم یعنی زاویه و ضلع مورد توجه بودند.

۴.۳. داربست زنی و گفتگو. استفاده از اصطلاح داربست ^{۶۳} هنگام توصیف تعاملات آموزشی و یادگیری در کلاس های درس ریاضی رایج شده است. این اصطلاح از آثار ادبی ویگوتسکی ^{۶۴} (۱۹۷۸، ۱۹۸۶) و برونر (۱۹۹۰، ۱۹۹۶) گرفته شده است. وود، برونر و راس ^{۶۵} (۱۹۷۶)، مجله روان شناسی و روان پزشکی کودک، ۱۷، ۸۹-۱۰۰ [۱]. ایده ی داربست را برای نشان دادن روشی که می توان از یادگیری کودکان حمایت کرد، معرفی کردند. تحقیقات در مورد داربست در آموزش ریاضیات به سرعت در حال رشد است، علاوه بر این، داربست به عنوان یک مفهوم یکپارچه مطرح شده است [۱]. داربست را می توان به عنوان فرآیندی که کودک یا فرد تازه کار را قادر می سازد تا یک مسأله را حل کند، تکلیفی را انجام دهد یا به هدفی دست یابد که فراتر از تلاش های بدون کمک اوست، تعریف کرد. وود و همکاران [۱]. داربست را به عنوان: یک سیستم تعاملی ^{۶۶} که در آن معلم با توجه به اعمال یادگیرنده عمل می کند تا توجه او را جلب کند. همچنین، جهت را در حل مسأله حفظ می کند، ویژگی های مهم را نشان می دهد، ناامیدی را کنترل می کند و زمانی که یادگیرنده بتواند آنها را تشخیص دهد راه حل ها را نشان می دهد. در واقع استعاره ی داربست به عنوان پشتیبانی موقت، جذاب و مورد انتقاد ^{۶۷} است. با توجه به اینکه معلم چگونه ماهیت چیزی را که باید یاد بگیرد، مورد توجه قرار می دهد، از این رو دانش آموزان را درگیر تعاملات و گفتمان در کلاس درس می کند. و به همین منظور یکی از ساز و کارهای کلیدی که می تواند داربست را سازنده کند، گفتگو ^{۶۸} است. استون ^{۶۹} نیز بیان می کند که اگر می خواهیم از موضوع گفتمان غنی تر استفاده کنیم، باید به وضوح بر پویایی ارتباطات ^{۷۰} در درون داربست موفقیت آمیز، برای یادگیری کودکان تمرکز کنیم. ارتباط بین داربست و آموزش گفتگو توسط افرادی مانند (بل و پ، بلیس و همکاران، گونزالس و دوژارنت ^{۷۱} [۱]) مورد توجه قرار گرفته است. هم آموزش داربستی و هم آموزش گفتگو ^{۷۲} شامل پاسخ متناسب با حرکات انجام شده توسط دانش آموز است و منشأ خود را در جنبش های فرهنگی اجتماعی در روان شناسی تربیتی دارند که به ویگوتسکی ^{۷۳} و گاهی به معاصر او، باختین ^{۷۴} نیز برمی گردد و یکی از مهم ترین سنت های ساخت گرایی اجتماعی ایده ی داربست در یادگیری عملی ^{۷۵} است. با این حال تفاوت های جالبی وجود دارد. ما پیش بینی کردیم که گفتگو بین این دو دیدگاه می تواند به شفاف تر کردن مفاهیم و رویکردهای مفید برای داربست و آموزش گفتگو کمک کند. و تمرکز بر هر دو موضوع توسط معلم هنده در کلاس درس وجود داشت.

۵.۳. خلاقیت و چالش ریاضی. خلاقیت ^{۷۶} یک ویژگی شخصی و اجتماعی ^{۷۷} است که انسان را در همه ی سطوح و در تمام مقاطع تاریخی پرورش ^{۷۸} می دهد. به گفته ی کرم زاده «افرادی در حل مسأله موفق تر هستند که با خلاقیت خود بتوانند یک مسأله را با روش های مختلف حل کنند». در ریاضیات مدرسه، خلاقیت دانش آموزان می تواند در تولید ایده ها و راه حل های ریاضی در یک موقعیت جدید مثلاً برای یک مسأله ی جدید ریاضی که قبلاً آموخته نشده بود یا تولید راه حل هایی برای مسائلی که قبلاً یاد گرفته شده، به کار گرفته شود (لیکین و پیتا-پانتازی ^{۷۹} [۱۷، ۱۸]). خلاقیت یکی از ساز و کارهای اساسی توسعه ی دانش ^{۸۰} و مبتنی بر استدلال ویگوتسکی (۱۹۳۰/۱۹۸۲، ۱۹۳۰/۱۹۸۴) است، که اجازه می دهد دانش جدید توسعه یابد. ارزش تفکر خلاق در انسان نیز توسط سازمان های حاکمیتی و آموزشی بین المللی، مانند مجلس (پارلمان) و

⁶³scaffold ⁶⁴Vygotsky ⁶⁵Wood, Bruner, Ross ⁶⁶interactive system ⁶⁷temporary, attractive & criticized ⁶⁸dialogic

⁶⁹Stone ⁷⁰communication ⁷¹Bell, Pape, Bliss, Gonzalez, DeJarnette ⁷²dialogic teaching ⁷³Vygotsky ⁷⁴Bakhtin

⁷⁵practical learning ⁷⁶creativity ⁷⁷Personal and social ⁷⁸training ⁷⁹Pitta-Pantazi ⁸⁰mechanisms of knowledge

شورای اروپا (۲۰۰۶) ^{۸۱} و شورای ملی معلمان ریاضیات (۲۰۰۰) ^{۸۲} به رسمیت شناخته شده است، که بر اهمیت توسعه‌ی ظرفیت دانش‌آموزان، در تمام مقاطع تحصیلی، برای فکر کردن خلاقانه و انعطاف‌پذیر ^{۸۳} در ریاضیات تاکید دارند. کودک هنگام اتصال مفاهیم جدید و شناخته شده‌ی قبلی، هنگام توضیح مفاهیم شناخته شده و هنگام ایجاد مفاهیم انتزاعی، تخیل ^{۸۴} خود را فعال می‌کند. بنابراین، تخیل جزء اساسی ساخت دانش ^{۸۵} است. اثبات‌ها و ابطال‌های لاکاتوش ^{۸۶} (۱۹۷۶) نمونه‌ای برای خلاقیت در ریاضیات است که روند خلاقانه‌ی حدس و گمان ^{۸۷} را نشان می‌دهد، که در آن حتی تعاریف باید با تلاش مشترک معلم و گروهی از فراگیران ایجاد شوند و ماهیت خلاقیت در ریاضیات را توانایی حدس زدن، فراتر رفتن از دانسته‌ها، داشتن دیدگاه شخصی و درگیر شدن در کاوش، پرسش، استدلال، توضیح و رد ^{۸۸} می‌داند. در مقاله‌ی لاکاتوش، مسأله‌ای که به نظر می‌رسید قبلاً در صفحه‌ی اول حل شده بود، منجر به بحثی خلاقانه و غنی از نظر ریاضی شد. در کتاب‌های «نتایج باورنکردنی در ریاضیات» و تکمله‌ی این کتاب به نام «اثبات‌های فراموش نشدنی» از امیدعلی شهنی کرمزاده نیز مسائل چالش‌برانگیزی برای خلاقیت معلمان و دانش‌آموزان وجود دارد.

یک چالش ریاضی، ^{۸۹} یک مسأله‌ی ریاضی جالب و انگیزشی است که فرد می‌تواند آن را حل کند [۱۷]. اهمیت سازه‌ی چالش، ریشه در مفهوم ویگوتسکی (۱۹۷۸) درباره ZPD ^{۹۰} (منطقه‌ی توسعه‌ی پروگزیمال (مبدایی)) و نظریه‌ی فعالیت لئونتیف ^{۹۱} (۱۹۸۳) و اصول توسعه‌ی آموزش داویدوف ^{۹۲} (۱۹۹۶) دارد. باربو [۴] استدلال می‌کند که «چالش ریاضی ^{۹۳} در کلاس می‌تواند دانش‌آموزان را برای رویارویی با چالش‌های آینده‌ی زندگی با پرورش ویژگی‌های مطلوبی مانند صبر، پایداری و انعطاف‌پذیری آماده کند». اهمیت چالش‌های ریاضی در آموزش ریاضیات تمایز معنی‌دار بین مسائل و تمرینات ریاضی را تقویت می‌کند. شفیلد (۲۰۰۹) اظهار داشت که معلمان باید دانش‌آموزانی را که آماده‌اند به سطح بالاتری بروند، به چالش بکشند و به دانش‌آموزانی که ممکن است ناامید شوند نکاتی را ارائه دهند و این نکته در کلاس‌های مراکز استعداد درخشان اهمیت ویژه‌ای دارد. یک مسأله‌ی چالش‌برانگیز باید چهار شرط را داشته باشد:

اول. شخصی که تکلیف را انجام می‌دهد باید انگیزه ^{۹۴} پیدا کند تا یک راه‌حل ^{۹۵} پیدا کند.

دوم شخص مجبور نیست روش‌هایی که به آسانی در دسترس هستند را برای یافتن راه‌حل داشته باشد.

سوم. فرد باید تلاش کند و برای رسیدن به یک راه‌حل پافشاری کند.

چهارم. این تکلیف یا موقعیت چندین ^{۹۶} روش حل دارد [۱۷، ۲۳]

به چالش کشیدن تکالیف ریاضی می‌تواند به حل مسائل ریاضی، اثبات، طرح سؤالات و مسائل جدید و بررسی موضوعات و موقعیت‌های ^{۹۷} ریاضی نیاز داشته باشد (باربو و تیلور ^{۹۸}، [۴]).

۴. روش و ابزار پژوهش

این مقاله یک پژوهش نظری است. روش پژوهش توصیفی-تحلیلی است. در واقع ابتدا با مراجعه به مقالات، کتاب‌های المپیاد و هندسه، مجلات معتبر و سایر منابع مرتبط، مطالعات گسترده‌ای انجام شد و نقطه‌ی شروع پژوهش طرح یک مسأله‌ی هندسی برای دانش‌آموزان سمپاد و بررسی موضوع خلاقیت و نقش معلم در برانگیختن خلاقیت دانش‌آموزان بوده است. ضمن مشورت با کرمزاده و استفاده از ایده‌های ایشان، نظریه‌ی آموزش ریاضی ون‌هیله و نظریه‌ی تنوع و تجزیه‌ی ابعادی اشکال مطالعه و به کار گرفته شده‌اند، و با ایده گرفتن از یک مقاله در زمینه‌ی شبکه‌سازی نظریه‌ها، قصد ما به‌کارگیری همزمان این

⁸¹council of europe, parliament ⁸²NCTM ⁸³flexible ⁸⁴Imagination ⁸⁵a basic component of knowledge construction

⁸⁶proofs and refutations by Lakatos ⁸⁷conjecturing ⁸⁸exploring, question, reasoning, explanation & rejection

⁸⁹mathematical challenge ⁹⁰zone of proximal development ⁹¹leontiev's theory of activity ⁹²Davydov's principles of

developing education ⁹³Mathematical Challenge ⁹⁴motivation ⁹⁵solution ⁹⁶several ⁹⁷situation ⁹⁸Barbeau and Taylor

نظریه ها در کنار نرم افزار جئوجبرا برای حل مسأله ای هدف بوده است. ضمناً داربست آموزشی مورد تایید مهشید مرادی شلال معلم مدرسه ی نمونه ی ایلام و دانش آموخته ی هر دو مقطع مدارس سمپاد اهواز و دانشگاه شهید چمران اهواز (با سابقه ی تدریس در هر دو دوره ی ابتدایی و متوسطه و تجربه ی تدریس ۱۲ سال در دانشگاه ایلام) بود. همچنین بررسی و طرح مسأله ی هدف برای کلاس هشتم و نهم را با فرهاد درویشی دبیر ریاضی در سمپاد ایلام انجام دادیم. برای انجام پژوهش و طراحی داربست، چند زیرمسأله با توجه به نظریه ها و نرم افزار جئوجبرا و اصول اقلیدس طراحی شدند. ابزارهای پژوهش لپ تاپ شخصی و دو کلاس درس مجهز به ویدئو پروژکتور و تخته هوشمند بودند.

۵. جامعه ی پژوهش

در ایران سمپاد^{۹۹} نهادی است که بر امور تحصیلی دانش آموزان مستعد و با بهره ی هوشی بالا نظارت می کند که نظارت بر مدارس تیزهوشان را بر عهده دارد. سمپاد دارای مدرسه های دبیرستان پسرانه و دخترانه در شهرهای پرجمعیت است و دانش آموزان خود را در دوره ی متوسطه ی اول و دوم از طریق آزمون هماهنگ کشوری که عمدتاً مبتنی بر ارزیابی هوش، و دروس ریاضی، علوم و فارسی است انتخاب می کند. دو آزمون ورودی به مدارس سمپاد وجود دارد که یکی آزمون ورودی ششم به هفتم و دیگری تکمیل ظرفیت مدارس سمپاد یعنی نهم به دهم می باشد. معمولاً گروه های المپیاد نیز از دانش آموزان سمپاد هستند که کرم زاده نیز سال ها عضو تیم سرپرستی علمی المپیاد ریاضی کشور بود و در هر مدرسه ی استعداد درخشان در ایران یک گروه از دانش آموزان در حوزه ی المپیاد مشغول به فعالیت می باشند. جامعه ی مورد پژوهش در این مقاله، دانش آموزان ورودی پایه ی هفتم مرکز استعدادهای درخشان شهید بهشتی استان ایلام در دو کلاس هفتم الف و ب بودند. حمیدی معلم هردو کلاس بود و تدریس درس های هندسه ی ۱ و ۲ در دوره ی دوم سمپاد را نیز همزمان انجام می داد. تعداد دانش آموزان در یک کلاس ۳۰ نفر و در کلاس دیگر ۲۶ نفر بود. دانش آموزان هیچ دستورالعمل قبلی در مورد هندسه و نرم افزار دریافت نکرده بودند. در دوره ی ابتدایی خصوصاً دوره ی دوم آن، آشنایی اولیه با هندسه را داشتند. ارزیابی اولیه ی حمیدی در کلاس نشان داد که دانش آموزان با نرم افزار جئوجبرا آشنا نبودند و از اصول اقلیدس کاملاً بی اطلاع بوده و مفاهیم هندسی را یاد گرفته اند اما نفهمیده اند (ماهیت آن مفاهیم را درک نکرده بودند).

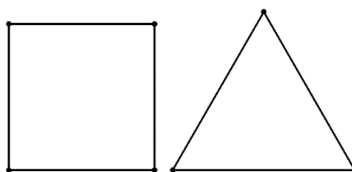
۶. زیر مسأله ها و حل مسأله ی هدف

برای ایجاد تفکر و بیان یک ایده ی خوب می توان برای دانش آموزان یک مسأله ی چالش برانگیز طرح کرد. اما ما پیشنهاد می کنیم ابتدا باید زیرمسأله های این مسأله طراحی شوند و آن ها را برای دانش آموزان حل کرد و مفاهیم مرتبط با آن را به خوبی برای دانش آموزان بیان نمود و سپس دانش آموزان را برای حل مسأله به چالش کشید. ما برای حل مسأله ی هدف از ابتدای سال تحصیلی با در نظر گرفتن سرفصل کتاب و مسائل طرح شده برای داربست پیش رفتیم. برای شروع با توجه به نظریه ی ون هیله مسأله ی زیر را طرح کردیم:

مسأله ۱.۶. یک مثلث متساوی الاضلاع و یک مربع رسم کنید. اندازه ی زاویه های آنها را بنویسید (شکل ۷).

دانش آموزان هردو کلاس این دو تصویر را تشخیص دادند و از سطح VH_1 عبور کردند و با توجه به آموزش دوره ابتدایی مثلث متساوی الاضلاع و مربع را رسم کردند. در اینجا برخلاف تحقیق شفیلد، [۲۱] در هر دو کلاس دانش آموزان می دانستند که یک مثلث با سه ضلع برابر، سه زاویه ی برابر دارند، هرچند برخی اثبات را نمی دانستند اما از سطح VH_2 عبور کردند و برای حل این مسأله مشکل نداشتند. و برای گذار از سطح VH_2 به سطح VH_3 با رسم قطره های مربع مسأله ی دوم را مطرح

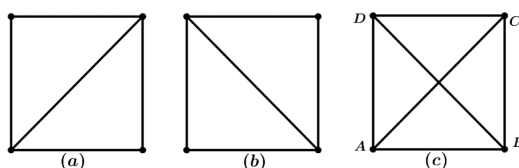
^{۹۹} سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان



شکل ۷

کردیم. در این بخش اندازه‌ی زاویه‌های خواسته شده را گفتند. برخی از دانش‌آموزان از چرایی مجموع اندازه زوایا مطمئن نبودند. منظور ما اندک دانش‌آموزانی هستند که بدون اینکه بدانند مجموع زوایای داخلی مثلث 180° درجه و مجموع زوایای داخلی مربع 360° درجه هستند، می‌دانستند هر زاویه‌ی مثلث متساوی‌الاضلاع 60° درجه و هر زاویه‌ی مربع 90° درجه است. در بخش ارائه با نرم‌افزار جئوجبرا بسیاری از بدفهمی‌ها روشن شدند و دانش‌آموزان به راحتی بین سطوح $VH1$ تا $VH3$ حرکت می‌کردند.

مسئله ۲۰۶. در مربع مسأله‌ی ۱۰۶ قطرهای آن را رسم کنید و اندازه تمام زاویه‌ها را به‌دست آورید (شکل ۸).



شکل ۸

برای حل این مسأله دانش‌آموزان در سطح $VH2$ درک مناسبی از قطرهای مربع داشتند و با توجه به آموزش دوره‌ی ابتدایی موارد جدول ۱ را یاد گرفته بودند؛ اما معلم با کمک نرم‌افزار و تجزیه‌ی ابعادی اشکال برای دانش‌آموزان، آنها را به خوبی بیان نمود.

جدول ۱. درک در سطح دوم

Table 1: perception at the second level

هر مربع چهار ضلع مساوی دارد.	در هر مربع اندازه تمام زوایا 90° درجه است.
زاویه‌ی نیم صفحه 180° درجه است.	هر قطر زاویه را نصف می‌کند.
مجموع زوایای مثلث 180° درجه است.	قطرها همدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند.
مجموع زوایای چهارضلعی 360° درجه است.	قطرها ۴ زاویه در داخل مربع می‌سازند.

اما برای ما نکات مهمی در این مسأله وجود داشت که باید دانش‌آموزان را متوجه آن می‌کردیم. و آنها را در جدول ۲ خلاصه کردیم. متأسفانه برخی دانش‌آموزان درک درستی از این‌که مجموع زاویه‌های داخلی یک مثلث برابر با نیم‌صفحه است، را نداشتند و برخی هم این حقیقت را فراموش کرده بودند و به این موضوع توجهی نداشتند. اینجا تنها نقطه‌ای بود که با کمک نرم‌افزار برای دانش‌آموزان در سطح $VH4$ اثبات و درک این‌که مجموع زاویه‌های داخلی یک مثلث برابر نیم‌صفحه است را نشان دادیم. همچنین موارد جدول ۲ را بدون اثبات با تعامل کاغذ-مداد و جئوجبرا در سطح $VH3$ نشان دادیم. تجزیه و

تحلیل برخی پاسخ های دانش آموزان به برخی موارد در جدول ۲ جالب بود. مانند اینکه برای دانش آموزان رسم یک قطر، مربع را به دو مثلث مساوی تقسیم می کند. برخی دانش آموزان در سطح $VH1$ و برخی دیگر در سطح $VH2$ این موضوع را درک کرده بودند. لازم به ذکر است در کلاس های مختلف ممکن است نتایجی متناسب با سطح هوش و یادگیری دانش آموزان و روش های یاددهی معلمان علاوه بر مطالب به دست آمده برای هر محقق به دست آید.

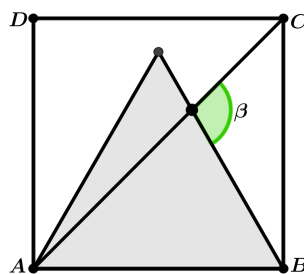
جدول ۲. درک در سطح سوم و چهارم

Table 2: perception at the third and fourth level

مربع با یک قطر به دو مثلث مساوی تقسیم می شود.	هر چهار زاویه ی برخورد قطرها 90° درجه هستند.
مربع با دو قطر به چهار مثلث مساوی تقسیم می شود.	یک قطر مربع، دو مثلث قائم الزاویه می سازد.
زاویه ی برخورد دو قطر 90° درجه است.	دو قطر مربع، چهار مثلث قائم الزاویه می سازند.

در یک بخش جداگانه، آموزش ۴۵ دقیقه ای هندسه ی اقلیدسی مقدماتی را در محیط جئوجبرا انجام دادیم (هیجان انگیز). بعد از توضیح و ترسیم در محیط ریاضیات پویا، کار معلم ساده تر شد. در واقع بدفهمی های برخی دانش آموزان به این دلیل بود که آن ها درک درستی از نقطه، خط، مثلث و مفاهیم هندسه ی اقلیدسی مقدماتی را نداشتند. در اینجا با صرف زمان مناسب برای دانش آموزان این مفاهیم و اصول اقلیدس و اهمیت ۴ اصل اول را بیان کردیم و بسیاری از دانش آموزان ضمن اینکه خوشحال شدند، با انگیزه ادامه دادند. با ترکیب دو مسأله ی ۱.۶ و ۲.۶ مسأله ی زیر را مطرح کردیم.

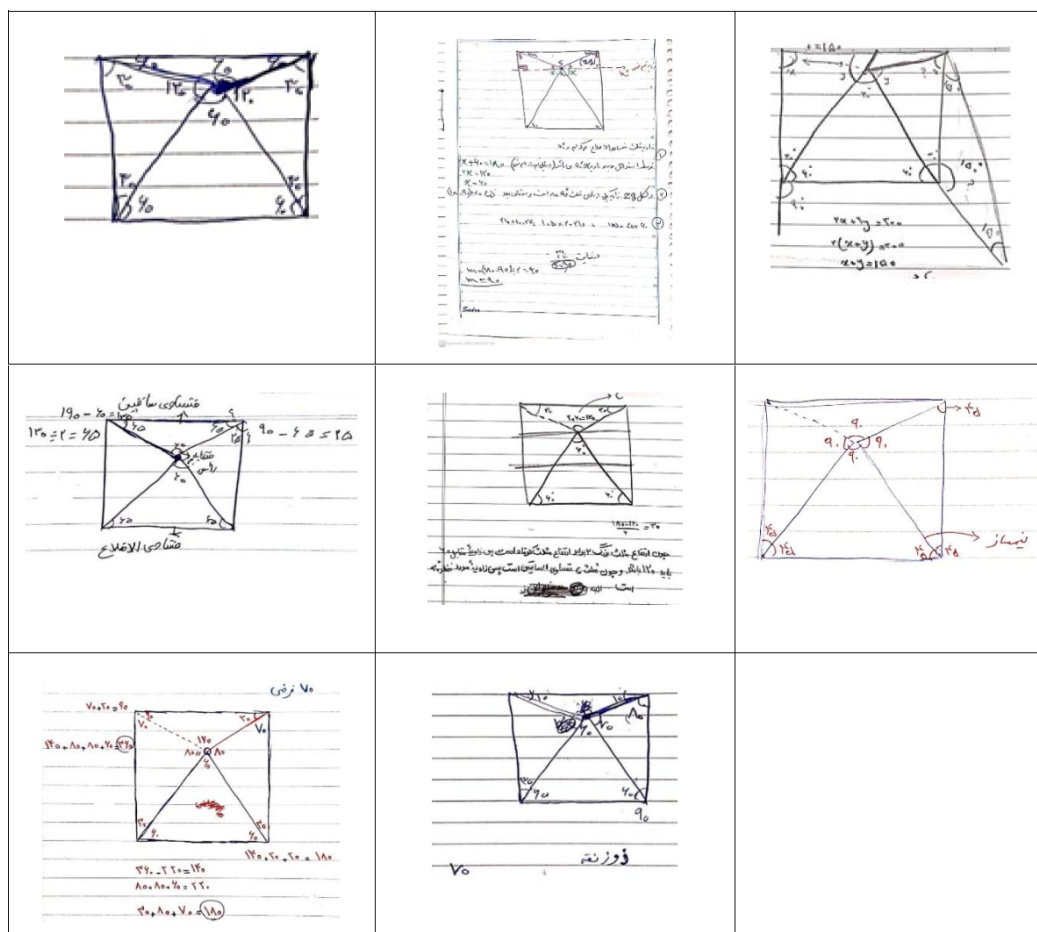
مسأله ۳.۶. مثلث متساوی الاضلاعی را در داخل و روی ضلع مربع بنا کردیم. اندازه ی $\angle \beta$ را به دست آورید (شکل ۹).



شکل ۹

هدف از طرح این مسأله به چالش کشیدن دانش آموزان بود. طرح و حل این مسأله از دو جنبه برای ما مهم بود. یکی اینکه داده های این مسأله به داده های مسأله ی هدف نزدیک بود و دوم این که در مسأله ی هدف، رأس مثلث متساوی الاضلاع به رأس C در مربع و در این مسأله دو رأس مربع یعنی A و C به هم متصل شدند، هرچند در حل مسأله ی هدف خواهیم گفت که قطر مربع برای دانش آموزان بدفهمی ایجاد کرد اما بعد از رفع این بدفهمی و همچنین حل این مسأله و تعامل بین محیط پویا و مداد-کاغذی با کمک نظریه ی تنوع، حدس های دانش آموزان را به هم نزدیک کردیم و در نهایت یک دانش آموز سمپادی پاسخ درست مسأله ی هدف را داد.

۱.۶. حل مسأله‌ی هدف. بعد از حل تمام مسأله‌های بالا، مسأله‌ی هدف را طرح کردیم. به دانش‌آموزان هر دو کلاس در دو زمان کاملاً جدا فرصت ۶۰ دقیقه‌ای دادیم. معلم در ابتدا مسأله‌ی هدف را بر روی وایت‌برد با مائیک رسم کرد. در اینجا این بدفهمی ایجاد شد که ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع همانند قطر مربع نیمساز است. علم‌الهدایی [۲۷] بیان می‌کند که «بدفهمی‌ها به‌عنوان یک غلط یا اشتباه اتفاقی مطرح نیستند، بلکه در قالب یک ساختار ذهنی خوب شکل‌یافته از ایده‌های ناقص قابل توجیه می‌باشند». علم‌الهدایی معتقد است که پس از شناسایی بدفهمی‌ها، باید آن‌ها را اصلاح کرد تا یادگیری مطالب جدید با مشکل مواجه نشود. در واقع رسم شکل در محیط کاغذ-مداد این بدفهمی را برای دانش‌آموزان به‌وجود آورد که AEC مشابه مسأله‌ی ۳ قطر مربع است (شکل ۹ و ۱۱ را مقایسه کنید). و پاسخ دانش‌آموزان با توجه به این بدفهمی، بدفهمی دیگری را به‌وجود آورد. یکی از دانش‌آموزان استدلال کرد (AEC) قطر مربع است و چند نفر دیگر نیز با او هم‌نظر بودند و پاسخ‌های آن‌ها را پس از نوشتن با گفتگوی بین دانش‌آموزان بررسی می‌کردیم. بعد از اینکه این بدفهمی را برطرف کردیم پاسخ‌های دیگری داده شد و شکل ۱۰ با توجه به تمام پاسخ‌های نادرست تنظیم شد. با توجه به نظریه‌ی تنوع تمام پاسخ‌های مرتبط از منظر زاویه بود. در واقع تمام دانش‌آموزان قصد داشتند فقط با اندازه‌گیری زاویه، مسأله‌ی هدف را حل کنند و توجهی به منظر ضلع در دو شکل منتظم و ارتباط آنها با هم و ساخت یک مفهوم هندسی مهم به نام مثلث متساوی‌الساقین نداشتند. در اینجا گذار از سطح VH_2 به سطح VH_3 سخت شده بود. برخی از دانش‌آموزان در سطح VH_2 با توجه به منظر زاویه می‌خواستند این پاسخ را بدهند که زاویه‌ی $\angle BCE$ برابر ۷۵ درجه است. پاسخ آنها فقط یک حدس بدون استدلال بود و در واقع موفق به گذار از سطح VH_2 به سطح VH_3 از منظر ضلع نشدند و اینجا بهترین نقطه‌ی حل مسأله بود. در سطح VH_3 تعاریف ریاضی از اجسام هندسی برای دانش‌آموزان معنادار می‌شود و آن‌ها می‌توانند از تعاریف مختلف برای یک مفهوم استفاده کنند و آن‌را درک نمایند. دانش‌آموزان باید مفهوم مثلث متساوی‌الساقین را به جای دو زاویه‌ی مساوی با دو ضلع مساوی تعریف کنند، همان‌طور که در کتاب‌های ابتدایی تعریف شده است. همچنین باید ارتباط بین ضلع‌های مربع و مثلث متساوی‌الاضلاع را درک کنند، که این موضوع تا اینجا اتفاق نیفتاد. در اینجا در دل یک داریست آموزشی مسأله‌ها به ترتیب با همراهی و استفاده از خلاقیت دانش‌آموزان حل شدند. در مسأله‌ی ۳، کمک معلم بسیار کم و به‌گونه‌ای بود که دانش‌آموزان به‌طور مستقل پاسخ خود را بررسی می‌کردند و معلم تقریباً حمایت خود را از دانش‌آموزان کم کرد. وقت زیادی صرف پاسخ‌های دانش‌آموزان و تجزیه و تحلیل آن‌ها شد. هر دانش‌آموز که پاسخی می‌داد، همه با هم پاسخ او را بررسی می‌کردیم و براساس این پاسخ، پاسخ‌های دیگر داده می‌شد و گاهی اصرار بر یکی از پاسخ‌های قبلی می‌شد. در یک جمع‌بندی مناسب بیشتر دانش‌آموزان به نتیجه‌ی درست $\angle B_1 = 30^\circ$ و $\angle B_2 = 60^\circ$ رسیدند. و از اینجا به بعد نمی‌دانستند پاسخ مسأله‌ی هدف را چگونه پیدا کنند. این کار تا جایی ادامه داشت که دیگر پاسخی برای مسأله نداشتیم و همه سکوت کردند. من تا این لحظه به همه‌ی مسأله‌ها و راه‌حل‌های داده شده فکر کردم، اصول اقلیدس، جئوجبرا، نظریه‌ی فن‌هیلی، تجزیه‌ی ابعادی اشکال را به‌کار گرفتیم. از ابتدا تصمیم داشتیم در دو کلاس دو شیوه به کار بگیریم. در کلاس (ب)، بعد از طرح مسأله و قبل از به‌کارگیری نظریه‌ی تنوع با گفتگو بین معلم و دانش‌آموزان پاسخ مسأله را با توضیح کامل ارائه کردیم. و بسیاری از دانش‌آموزان بیان کردند که نوع مثلث BCE را درک نکرده بودند و به‌همین دلیل موفق به حل مسأله‌ی هدف نشدند. در کلاس (الف) وضعیت متفاوت بود و با توجه به تجزیه و تحلیل پاسخ‌های دانش‌آموزان و گفتگوی آن‌ها با همدیگر حدس‌های آن‌ها را بر روی تخته سفید نوشتیم ولی نتیجه‌ای نگرفتیم. پولیا می‌گوید «هرگاه دانش‌آموزان مسأله‌ای را حل نکردند، تغییر ایجاد کنید و دوباره بپرسید» ([۶]). همچنین علم‌الهدایی معتقد است که «نظریه‌ها و سبک‌های تدریس باید بیان‌کننده، پیش‌بینی‌کننده و کنترل‌کننده‌ی وضعیتی باشند که در آن عملکرد معلم، موجب تغییر رفتار و پیشرفت ریاضی و توسعه‌ی تفکر شاگردان گردد». معلم در حال قدم زدن، به تغییر و نظریه‌ی تنوع و تفاوت در درک دانش‌آموزان، با توجه به پاسخ‌ها فکر می‌کرد. حدود ۳ دقیقه طول کشید.



شکل ۱۰

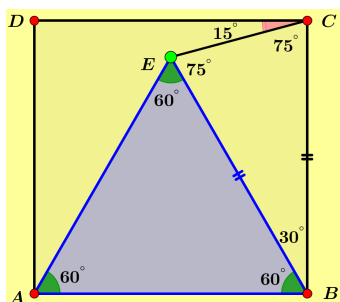
لازم به ذکر است که برای تجزیه و تحلیل یک شکل، از نظر ریاضی، دانش آموزان به پیکربندی های فرعی در شکل ها نیاز دارند، که دو آل^{۱۰۰} (۲۰۱۷) آن را تجزیه ای ابعادی می نامد. تجزیه ای ابعادی اشکال^{۱۰۱} یا ساختار شکنی ابعادی امکان شناسایی و مقایسه ای بخش هایی از شکل ها را فراهم می کند، به عنوان مثال، با در نظر گرفتن طول اضلاع مثلث برای تعیین نوع مثلث وقتی که مثلث ها با توجه به طول اضلاع آن ها طبقه بندی می شوند. به گفته ی دو آل، تجزیه ای ابعادی برای دانش آموزان به معنای جهش شناختی است، زیرا به آن ها اجازه می دهد تا این تصاویر را به صورت ریاضی ببینند. تجزیه ای ابعادی به معنای شناخت ویژگی های یک شکل و شناسایی موارد مشترک در شکل های مختلف است. معلم روی وایت برد نوشت: ”هر شیء یا پدیده، دارای چند منظر (جنبه) است“؛ به عنوان مثال شکل، اندازه، عملکردها^{۱۰۲} و در شکل های هندسی زاویه و ضلع^{۱۰۳} مهم هستند و به دانش آموزان با صدای بلند گفت که چرا فکر می کنید فقط زاویه و اندازه گیری آن می تواند این مسأله را حل کند؟ دیدگاه خود را تغییر دهید و در مثلث و مربع شکل ها را بشکنید و به اجزای دیگر این دو شکل به غیر از زاویه فکر کنید. معلم با تجزیه ای ابعادی اشکال، دیدگاه خوبی به دانش آموزان داد. بعد از توجه دانش آموزان از منظر ضلع، علاوه بر زاویه، بی درنگ محمد یکی از دانش آموزان گفت زاویه ی کناری این زاویه یعنی $\angle BCE$ برابر ۷۵ درجه است. طبق چارچوب میسن

¹⁰⁰Duval ¹⁰¹dimensional deconstruction of shapes ¹⁰²Shape, size, performance ¹⁰³Angle and side

یک حدس بی‌نظیر اتفاق افتاد و معلم بسیار خوشحال شد. از محمد پرسیدیم چرا؟ گفت نمی‌دانم. هرچند پولیا می‌گوید هرکس بد بفهمد بد جواب می‌دهد، اما جواب بد دانش‌آموز نقطه‌ی بی‌نظیری بود که گذار از سطح $VH2$ به سطح $VH3$ اتفاق نیفتاد و دلیل اصلی آن توجه به زاویه بود. جالب این بود که چند دانش‌آموز دیگر با این حدس موافق بودند و همه‌ی دانش‌آموزان هم دلیل آن را نمی‌دانستند (حدس بدون استدلال). معلم متوجه شد دانش‌آموزان منظورش را نفهمیدند. در واقع این‌جا به جمله‌ای از کرمزاده در کلاس هندسه می‌رسیم که “نه تنها برخی دانش‌آموزان و معلمان بلکه حتی برخی ریاضی‌دانان و برندگان مدال فیلدز؛ در برخی از قسمت‌های ریاضی، مانند قضیه‌ی تثلیث مورلی، ریاضی را یاد گرفته اما نفهمیده‌اند”. برخی دیگر از پاسخ‌ها به این دلیل بود که دانش‌آموزان نمی‌دانستند مثلث BCE چه نوع مثلثی است و درک درستی از آن را نداشتند. در واقع هر دو کلاس این نکته را نمی‌دانستند که مثلث BCE متساوی‌الساقین است و کلید حل مسأله فهمیدن همین موضوع بود (شکل ۵). همان‌طور که گفته شد، یک موضوع دیگر که به شدت بدفهمی^{۱۰۴} ایجاد کرد رسم قطرهای مربع بود. یکی از پاسخ‌های اشتباه این بود که پاره‌خط (BE) نیمساز^{۱۰۵} است و این بدفهمی در اندک دانش‌آموزانی ایجاد شده بود که دو ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع و غیرواقع بر مربع را نیمساز مربع دیده بودند. این بدفهمی تا دقایقی دانش‌آموزان را از مسأله‌ی هدف و تشخیص اینکه مثلث BCE متساوی‌الساقین است، دور کرد. هرچند برخی دانش‌آموزان می‌دانستند اما با کمک جنوگیرا^{۱۰۶} فهمیدند که قطرهای نیمساز هستند. در اینجا باید فهم در سطح $VH3$ و گذار بین سطوح $VH2$ و $VH3$ اتفاق می‌افتاد. معلم در داریست آموزشی، دانش‌آموزان را بعد از هر پاسخ اشتباه حمایت می‌کرد و نه تنها آن‌ها را رها نمی‌کرد بلکه به‌صورت مداوم با گفتگوی بین خود و دانش‌آموزان زمینه را برای تحلیل پاسخ‌هایشان فراهم می‌کرد. همان چیزی که پولیا می‌گوید در کمک کردن به دانش‌آموز چیزی برای خود دانش‌آموز باقی بماند (کمک نه بسیار، نه کم). معلم در تمام مراحل بالا طبق گفته‌ی پولیا تأکید داشت که دانش‌آموز هر گام را که برداشته است امتحان کند. به‌همین دلیل تا اینجای حل مسأله خوب پیش رفت. یک حدس خوب و دقیق با یک تغییر دیدگاه مناسب، کلید حل مسأله‌ی هدف شد. در این لحظه، معلم مجدداً به دانش‌آموزان گفت به‌جای استفاده از زاویه با استفاده از ویژگی‌های اضلاع بحث کنید. در یک دقیقه‌ی فوتبالی اتفاق خوبی افتاد و طبق گفته‌ی پولیا بخت با ما یار بود و یک دانش‌آموز با ابتکار خود در گذار بین سطوح $VH2$ و $VH3$ موفق به ساخت مفهوم مثلث متساوی‌الساقین در ذهن خود از منظر هندسی ضلع شد. رضا با خوشحالی اجازه گرفت و گفت چون ضلع مربع و مثلث متساوی‌الاضلاع با هم برابر و هر سه ضلع مثلث برابرند پس در مثلث BCE دو ضلع برابرند و این مثلث متساوی‌الساقین است، پس هر دو زاویه‌ی آن با هم برابر هستند و چون $\angle CBE$ برابر با 30° درجه است پس هر کدام از این زاویه‌ها 75° درجه است و زاویه‌ی مربع 90° درجه است بنابراین زاویه‌ی خواسته شده 15° درجه است (یک پاسخ بی‌نظیر و کامل، شکل ۱۱). معلم با صدای بلند و با ذوق گفت آها! سمپادی یعنی همین، عالی بود (حس احترام و امید).

دانش‌آموزان و به‌خصوص چند نفری که حدس بدون استدلال زده بودند، با خوشحالی گفتند پاسخ درست است و معلم همه را تحسین کرد. این پاسخ همان چیزی است که پولیا در مورد مسائل یافتنی آن را اندیشه‌ی رسیدن به هدف می‌نامد و می‌گوید هر جا اراده باشد راه هم هست. پولیا در کتاب چگونه مسأله را حل کنیم بیان می‌کند که هنگامی که به یک مسأله نگاه می‌کنیم فرصتی طبیعی برای آن داریم که درباره‌ی ارتباط‌های آن به تحقیق بپردازیم. و دانش‌آموزان جواب و راه حل مسأله را پس از تمام شدن آن جالب توجه خواهند یافت. سپس مشتاق آن می‌شوند که ببینند با این تلاش چه کار دیگری را می‌توانند انجام دهند و بار دیگر به این عمل بپردازند. اینجا بود که معلم حل مسأله را تمام نکرد و ضمن بیان مرحله‌ی چهارم الگوی پولیا برای دانش‌آموزان، بازگشت به عقب در مسأله را مجدداً با کمک دانش‌آموزان این دو کلاس بررسی کرد و یک هفته فرصت داد تا بر روی این مسأله فکر کنند و آن‌را با روش‌های دیگر حل کنند. در واقع به دانش‌آموزان اجازه داده شد تا با نبوغ خود راه حل‌های

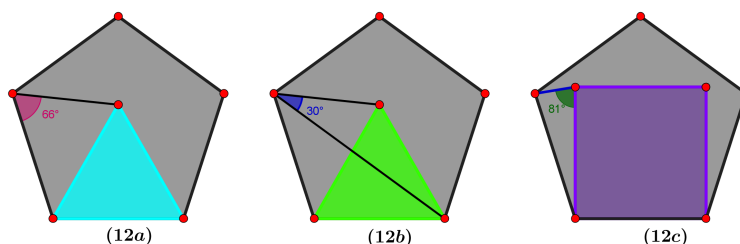
¹⁰⁴misconception ¹⁰⁵bisector ¹⁰⁶GeoGebra



شکل ۱۱. حل مسأله ی هدف

Figure 11: Solving the target problem

درست برای مسأله را بنویسند و از این مسأله، یک مسأله با راه حل چندگانه ^{۱۰۷} بسازند. اما بعد از اینکه معلم این مسأله را با دانش آموزان به عنوان یک *MST* بررسی کرد، برای آن ها مسأله های مشابهی طرح کرد تا متوجه شود در داریست آموزشی، دانش آموزان حل ”مسأله ی هدف“ را علاوه بر یادگیری، حتماً آن را فهمیدند. ولی این بار بدون اینکه به دانش آموزان کمک کند پاسخ هایشان را بررسی کرد و مشاهده کرد که بیشتر سمپادی ها پاسخ درست را دادند (شکل ۱۲). البته در حل این مسأله ها اندازه گیری زاویه ی چندضلعی منتظم براساس ضلع آن آموزش داده شده بود و حل مسأله ی شکل ۱۲b چالش برانگیز بود. طرح این مسأله ها تجزیه ی ابعادی اشکال را از پایین به بالا پیش می گرفت و معلم این موضوع را برای دانش آموزان توضیح داد. ضمناً مسأله ی کلاسیک مرتبط با مسأله ی هدف، با بیان اهمیت ”اگر و تنها اگر“ ^{۱۰۸} برای دانش آموزان بیان شد.

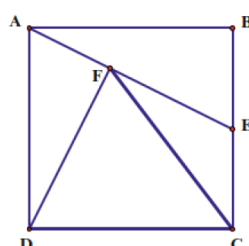


شکل ۱۲. طرح چند مسأله ی مرتبط با مسأله ی هدف

Figure 12: Plan some problems related to the target problem

لازم به ذکر است که مسأله ی هدف از سوی چندین دانش آموز پایه ی هشتم و نهم به صورت تصادفی حل شد. زیباترین نتیجه گیری بعد از یک هفته، ایده ی ناب یک دانش آموز به نام عرشیا بود که چند قدم از همه بالاتر رفت و بدون اینکه ما چیزی بگوییم به سمت طرح یک مسأله از رزا لیکین ^{۱۰۹} رفت. البته معلم حل این مسأله را با او ادامه نداد اما در نهایت تعجب یک راه حل طولانی برای مسأله ی کلاسیک براساس قضیه ی فیثاغورس و منطق ریاضی داد. مسأله ی لیکین (شکل ۱۳) و مسأله ی کلاسیک به عنوان یک *MST* در کلاس دهم و یازدهم برای درس هندسه ۱ و ۲ مطرح و بررسی ریاضیاتی ^{۱۱۰} شدند. شبکه سازی ^{۱۱۱} نظریه ی فن هیلیه ها و نظریه ی تنوع با پاسخ درست رضا به ما این ایده را می دهد که یک دانش آموز سمپادی با حل یک مسأله ی چالش برانگیز از یک طرف سطوح تفکر خود را تقویت می بخشد و با تجزیه ی ابعادی مناسب از

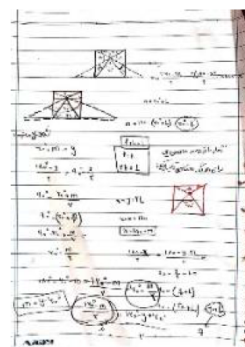
¹⁰⁷MST: Multiple Solution Task ¹⁰⁸if and only if ¹⁰⁹Roza Leikin ¹¹⁰mathematical investigation ¹¹¹Networked



Given $ABCD$ —square;
 E —middle of BC ;
 $DF \perp AE$

Prove in as many ways as you can:

$$FC = DC$$



شکل ۱۳. مسأله‌ی لیکن

Figure 13: Leikin problem

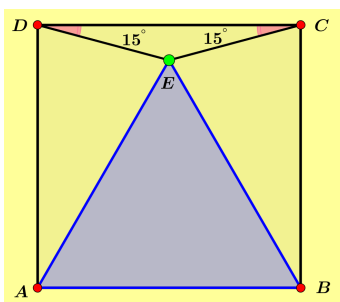
سوی معلم، و به کمک نرم‌افزار و به‌کارگیری درست اصول اقلیدس، مفهوم شکل‌های هندسی را قدم‌به‌قدم درک می‌کند و از طرف دیگر به‌صورت مداوم دیدگاه خود را تغییر می‌دهد. انجام تمام این کارها به داربست آموزشی طراحی شده توسط معلم همراه با گفتگوی بین معلم و دانش‌آموزان و تسلط معلم بر نظریه‌ها و رویکردهای و سازه‌های آموزش ریاضی و بیان مناسب آن‌ها در کلاس ضمن به‌کارگیری در حضور دانش‌آموزان بستگی دارد. در واقع نقش معلم، که هدف انجام این پژوهش بود در اینجا روشن می‌شود.

۷. پیوند مسأله‌ی کلاسیک و مسأله‌ی هدف و بیان آن به‌صورت «اگر و تنها اگر»

مسأله‌ی کلاسیک و مسأله‌ی هدف دو مسأله‌ی کاملاً جدا هستند که هر دانش‌آموز با حل آن‌ها تنها یک مسأله‌ی مشخص حل می‌کند، هرچند که مسأله‌ی کلاسیک یک مسأله‌ی هندسی است که برای دانش‌آموز دوره‌ی متوسطه‌ی اول و به‌ویژه پایه‌ی هفتم به مراتب سخت‌تر از مسأله‌ی هدف است و ممکن است دانش‌آموز دیرتر متوجه راه‌حل‌های آن شود. به‌بیان کرمزاده «تنها راه نجات این دو مسأله این است که آن‌ها را با «اگر و تنها اگر» پیوند بزنیم» و به‌صورت قضیه‌ی ۱۰۷ بیان کنیم.

قضیه ۱۰۷ (gc —theorem)^(۱۱۲). مربع $ABCD$ مفروض است. از دو رأس C و D خطوط متقارب CE و DE را رسم می‌کنیم. نشان دهید که مثلث ABE متساوی‌الاضلاع است اگر و تنها اگر اندازه‌ی $\angle DCE$ و $\angle CDE$ برابر با ۱۵° درجه باشند (شکل ۱۴).

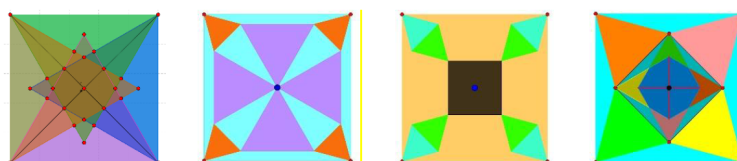
¹¹² good complete theorem of Karamzadeh



شکل ۱۴. قضیه-gc-کرمزاده

Figure 14: gc-theorem-karamzadeh

در پایان این پژوهش با توجه به مطالعه‌ی سؤالات المپیاد در کنار حل مسائل مرتبط با این مسأله که دیدیم از مسأله‌ی هدف و با کمک نرم‌افزار، نتایج جالبی برای دانش‌آموزان با استعداد نمایش داده شد. در واقع با رسم شکل و با استفاده از مفهوم نقطه‌ی وسط و تبدیلات هندسی سه‌ضلعی و چهارضلعی‌های منتظم دیگری درون شکل به صورت کاملاً متقارن ایجاد شد (شکل ۱۵).



شکل ۱۵. تقارن در پیوند دو مسأله

Figure 15: Symmetry in the linking of two problems

۸. یافته‌ها و نتایج پژوهش

انجام این پژوهش نشان داد که داربست، جهت روشنی را ارائه می‌دهد و دستورالعمل‌های گام‌به‌گام را برای توضیح آن‌چه دانش‌آموزان برای دستیابی به فعالیت‌های یادگیری خود باید انجام دهند، ارائه می‌دهد. داربست آموزشی زمینه‌ی مناسبی را برای به کارگیری نظریه‌های آموزش ریاضی در دل یک مسأله فراهم می‌کند. نقش معلم از نشان دادن و گفتن صرف، به سمت تسهیل‌کننده و راهنما تغییر کرد که این موضوع می‌تواند به رشد فرآیندهای تفکر دانش‌آموزان که از توانایی واقعی به توانایی بالقوه برای ساختن مفهوم و دانش ریاضی (در این مقاله به ویژه ساخت مثلث متساوی الساقین) پاسخگو باشد. ما معتقدیم که فعالیت‌های فردی که منجر به بحث‌های مشترک و گفتگوی بین معلم و دانش‌آموزان و به ویژه گفتگوی بین خود دانش‌آموزان می‌شود، برای شرکت دانش‌آموزان در حل تکالیف و مسائل به صورت گروهی مفید است.

تجزیه و تحلیل تحقیق انجام شده نشان می‌دهد که برای یک معلم هندسه و محقق آموزش ریاضی، تسلط بر اصول اقلیدس، سازه‌ی TPACK، شبکه‌سازی نظریه‌های آموزش ریاضی حین حل مسأله و تسلط نسبی بر طرح مسائل چالش برانگیز برای دانش‌آموزان با استعداد امری مهم و ضروری است. معتقدیم که خلاقیت ریاضی باید در همه‌ی دانش‌آموزان گسترش یابد. نتایج نشان می‌دهد که نقش معلم در طرح مسائل چالش برانگیز برای دانش‌آموزان و به چالش کشیدن آن‌ها برای این‌که بتوانند

قوهی تخیل خود را با روند روبه رشد پرورش دهند، مؤثر است. در این تحقیق هم دیده شد که حتی دانش‌آموزان باهوش با یک حدس اولیه موفق به پاسخ بدون استدلال می‌شوند. اما معلم در داربست طراحی شده با حمایت نسبی خود می‌تواند حدس‌های دانش‌آموزان را به سوی پاسخ صحیح هدایت کند و همچنین با استفاده از محیط‌های پویا، این فعالیت‌ها را می‌توان در مرحله‌ای به دانش‌آموزان معرفی کرد که هنوز یک مفهوم آموخته نشده است و می‌توان از آن‌ها خواست تعریفی جدید برای مفهوم ارائه دهند (دی ویلیرز^{۱۱۳}، [۱۴]). مثال‌های ارائه شده در بخش ۶ نشان می‌دهد که با تغییر و تنوع در اثبات‌های ریاضی توسط دانش‌آموزان و تعامل بین محیط‌های یادگیری پویا و مداد-کاغذی (کوماتسو، جونز^{۱۱۴}؛ [۸])، یک معلم می‌تواند چالش ریاضی را تغییر دهد و در گذار از سطوح فن‌هیله به‌خصوص از سطح ۱ تا ۳ دانش‌آموزان را هدایت کند. نظریه‌ی فن‌هیله رویکرد محدودی را به نقش زبان^{۱۱۵} در توسعه‌ی مفاهیم هندسه اتخاذ می‌کند. اما فن‌هیله‌ها تأکید زیادی بر نقش آموزش و اهمیت کسب تجربه توسط یادگیرنده، برای سهولت عبور از یک سطح به سطح دیگر دارند که این امر با نقش‌آفرینی معلم و از طریق طراحی داربست مناسب برای یادگیرنده‌های سطوح مختلف، امکان‌پذیر است (ریحانی، [۲۱]). و معلم هنگام برخورد با مسائل مربوط به یک موضوع ریاضی، به دانش‌آموزان مختلف اجازه می‌دهد تا در سطوح مختلف با چالش‌ها کنار بیایند و در این تحقیق معلم هندسه توانست در حین حل مسئله و با شبکه‌سازی نظریه‌ها با گفتگوی مناسب بین خود و دانش‌آموزان تا حدودی نقش زبان را تقویت نماید.

موضوع دیگری که در این پژوهش متوجه شدیم این بود که دانش‌آموزان عادت کرده بودند هر مثلث متساوی‌الساقینی را به این شکل ببینند که راس مثلث بالا باشد و قاعده‌ی آن پایین و به همین دلیل مثلث متساوی‌الساقینی که در مسئله‌های هدف و کلاسیک وجود دارد (مثلث *BEC* شکل ۱۴) توجه آن‌ها را جلب نمی‌کند، زیرا در این مثلث رأس در پایین قرار دارد و ساق‌ها رو به بالا هستند. از آن‌جا که دانش‌آموزان باید تصاویر را به‌صورت ذهنی دستکاری کنند تا شباهت‌ها و تفاوت‌ها را شناسایی کنند، نقش معلم پس از اینکه نظریه‌ی تنوع به میان آمد و تغییر در دیدگاه دانش‌آموزان ایجاد شد، کاملاً مشخص بود و دانش‌آموزان توانستند در تعریف مثلث متساوی‌الساقین دو منظر هندسی یعنی زاویه و ضلع را به‌صورت عمیق‌تر درک کنند، از این‌رو در تعریف مثلث متساوی‌الساقین، توجه به هر دو منظر زاویه و ضلع را اساسی می‌دانیم، و به‌طور خاص در این تحقیق توجه به منظر ضلع برای ساخت مفهوم کلیدی مثلث متساوی‌الساقین در سطح $VH3$ برای حل مسئله‌ی هدف، نمایش یافت. در این تحقیق نظریه‌ی تنوع توضیح می‌دهد که دانش‌آموزان جهان را از دیدگاه خود می‌بینند، درک می‌کنند و تجربه می‌کنند (اورگیل^{۱۱۶}، [۲۰]). به اعتقاد ما، اگر دانش‌آموزان دقیقاً مانند معلم از مفاهیم و تعاریف آگاه نباشند، ممکن است به‌طور مؤثر یاد نگیرند و یادگیری زمانی اتفاق می‌افتد که دانش‌آموز بتواند به‌طور هم‌زمان و قانونی از منظرهای دیگر یا منظرهای بیشتری از یک پدیده آگاه باشد (مارتون و بوث^{۱۱۷}، [۱]، ص ۱۴۲). در داربست آموزشی، معلم نقش کلیدی در معرفی و ارتباط این منظرهای مختلف داشت و در اینجا دو منظر مهم از هندسه یعنی زاویه و ضلع در درون نظریه‌ی تنوع مهم بوده و صبوری معلم در لحظاتی کوتاه با کمک نظریه‌ی تنوع دیدگاه دانش‌آموزان را از منظر زاویه به ضلع تغییر داد. در نهایت به لزوم توجه به ارتباط بین نظریه‌ی تنوع و تجزیه‌ی ابعادی اشکال در حل مسائل هندسی در پژوهش‌های آینده، تأکید داریم. یکی از بخش‌های کوتاه، اما تأثیرگذارِ نتایج ما اهمیت طرح مسائل به‌صورت “اگر و تنها اگر” از دیدگاه کرمزاده بود (سخنرانی ایشان در مشهد (شهریور ۱۳۸۱)). کرمزاده پس از بیان اثبات کاغذ-مدادی از مسئله‌ی کلاسیک می‌گوید که همانند بسیاری از قضایا، اگر مسائل چالش‌برانگیز را نیز به صورت “اگر و تنها اگر” بیان کنیم، ماهیت مسئله را تغییر می‌دهیم و راه‌حل‌های سخت و نسبتاً پیچیده، به اثبات‌های قابل‌فهم و قابل‌بیان در مقطع متوسطه‌ی اول و حتی مقطع ابتدایی تبدیل می‌شوند. در واقع اگر معلم یک مسئله‌ی چالش‌برانگیز را به جای آن‌که به‌صورت اگر P آنگاه Q طرح کند، به‌صورت P اگر

¹¹³De Villiers ¹¹⁴Komatsu & Jones ¹¹⁵linguistic ¹¹⁶Orgill ¹¹⁷Marton and Booth

و تنها اگر Q برای دانش آموزان مطرح کند یک طرف مسأله و گاهی هر دو طرف، بدیهی می شوند و حقیقت و عمق مطلب را سریع تر و ساده تر به دانش آموز می رساند.

۹. تقدیر و تشکر

در پایان از پروفسور امیدعلی شهنی کرمزاده به صورت ویژه تشکر می کنیم که با بیان اهمیت اگر و تنها اگر و نقش اصول اقلیدس در آموزش هندسه، زمینه ی مناسبی را برای انجام این تحقیق فراهم آوردند. از خانم مهشید مرادی شلال، دانشجوی دکتری دانشگاه شهید مدنی آذربایجان، و فرهاد درویشی، دبیر ریاضی سمپاد ایلام، برای بازبینی مسائل هندسه سپاسگزاریم. و از آقایان رضا جمشیدیان و مرتضی دشتی، در مدیریت مرکز استعدادهای درخشان شهید بهشتی ایلام، برای هماهنگی در برگزاری کلاس و فراهم نمودن امکانات تشکر می کنیم.

مراجع

- [1] A. Bakker, J. Smit and R. Wegerif, Scaffolding and dialogic teaching in mathematics education: introduction and review, *ZDM Mathematics Education*, **47** (2015) 1047–1065. <https://doi.org/10.1007/s11858-015-0738-8>
- [2] A. Gutierrez, A. Jaime and P. Gutierrez, Networked Analysis of a Teaching Unit for Primary School Symmetries in the Form of an E-Book, *Mathematics*, **9** no. 8 (2021) 30 pp. <https://doi.org/10.3390/math9080832>
- [3] C. Hoyles and K. Jones, *Proof in dynamic geometry contexts*, In: C. Mammana and V. Villani (Eds), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*, Dordrecht: Kluwer, (1998) 121–128.
- [4] E. Barbeau, P. Taylor (Eds.), *ICMI study-16 volume: Mathematical challenge in and beyond the classroom*, New York, Springer, 2009.
- [5] E. Swoboda and P. Vighi, *Early geometrical thinking in the environment of patterns, mosaics and isometries*, Springer: Cham, Switzerland, 2016.
- [6] G. Polya, *How to solve it*, Princeton, NJ: Princeton University Press, 1957.
- [7] J. Piggott, Rich tasks and contexts; NRICH, University of Cambridge: Cambridge, UK, (2011). Available online: <https://nrich.maths.org/5662>
- [8] K. Komatsu and K. Jones, Interplay between paper-and-pencil activity and dynamic-geometry-environment use during generalisation and proving, *Digital Experiences in Mathematics Education*, **6** (2020) 123–143.
- [9] L. B. Resnick and C. Zurawsky, Do the math: cognitive demand makes a difference, *Res. Points*, **4** no. 2 (2006) 1–4.
- [10] M. Fahlgren and M. Brunström, A model for task design with focus on exploration, explanation, and generalization in a dynamic geometry environment, *Technol. Knowl. Learn.*, **19** (2014) 287–315.
- [11] M. S. Smith and M. K. Stein, Reflections on practice: selecting and creating mathematical tasks: from research to practice, *Math. Teach. Middle Sch.*, **3** (1998) 344–350.

- [12] M. Yerushalmy, *Educational technology and curricular design: promoting mathematical creativity for all students*, In R. Leikin, A. Berman, B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students*, 2009 101–113.
- [13] National Council of Teachers of Mathematics, *Principles and standards for school mathematics*, NCTM: Reston, VA, USA, 2000.
- [14] N. Sinclair, M. Cirillo and M. de Villiers, *The learning and teaching of geometry*, In *Compendium for Research in Mathematics Education*, J. Cai, Ed., National Council of Teachers of Mathematics: Reston, VA, USA, 2017 457–489.
- [15] R. Duval, *The first crucial point in geometry learning: Visualization, How to see figures mathematically and not perceptually for becoming able to solve problems by oneself?*, *The Plenary Lecture presented at the 7th Mediterranean Conference on Mathematics Education - Section of the East-Meets-West on Innovation and Entrepreneurship - Congress and Exhibition*, Nicosia, Cyprus, 2012.
- [16] R. Huang and Y. Li, *Teaching and Learning Mathematics through Variation*, Part of the book series: *Mathematics Teaching and Learning (MTAL)*, Sense Publishers. All rights reserved, 2017 43–67.
- [17] R. Leikin, *Challenging mathematics with multiple solution tasks and mathematical investigations in geometry*, Part of the book series: *Advances in Mathematics Education ((AME))*, In Y. Li, E. Silver, S. Li (Eds.), *Transforming mathematics instruction*, Cham, Switzerland: Springer, 2014 59–80.
- [18] R. Leikin, *Stepped tasks: Top-down structure of varying mathematical challenge*, Part of the book series: *Research in Mathematics Education ((RME))*, In *Problem Solving in Mathematics Instruction and Teacher Professional Development*, P. Felmer, P. Liljedahl, B. Koichu, Eds., Springer: Cham, Switzerland, 2019 167–184.
- [19] S. Sharma, *Use of theories and models in geometry education research: A critical review*, *Waikato Journal of Education*, **24** no. 1 (2019) 43–54. <https://doi.org/10.15663/wje.v24i1.644>
- [20] W. Eddie and L. Cheng, *Learning through the Variation Theory: A Case Study*, *Int. J. Teach. Learn. High. Educ.*, **28** (2016) no. 2 283–292.
- [۲۱] ا. ریحانی، معرفی نظریه‌ی پیازه و نظریه‌ی فن‌هیلی - فن‌هیلی در مورد یادگیری هندسه، رشد آموزش ریاضی، ۲۲ شماره ۲ (۱۳۸۴).
- [۲۲] ا. غیور نجف‌آباد، اثبات‌های فراموش نشدنی (تکمله‌ی کتاب نتایج باور نکردنی در ریاضیات، مجموعه‌ی سخنرانی‌های امیدعلی شهینی کرم‌زاده)، انتشارات دانشگاه شهید چمران اهواز، ۱۳۸۳.
- [۲۳] ا. ممتحن، نتایج باور نکردنی در ریاضیات (گزیده‌ی مقالات و گفتگوهای همگانی امیدعلی شهینی کرم‌زاده، دانشگاه شهید چمران اهواز، ۱۳۸۰.
- [۲۴] ز. گویا، آموزش ریاضی چه نیست؟، دو فصلنامه‌ی نظریه و عمل در برنامه‌ی درسی، ۲ شماره ۳ (۱۳۹۳) ۵–۲۴.
- [۲۵] ز. گویا، یار در خانه و ماگرد جهان می‌گردیم، رشد آموزش ریاضی، ۳۱ شماره ۳ (۱۳۹۳).
- [۲۶] ز. گویا و ف. حاج‌عزیزی، استانداردهای *TPACK* آموزش معلمان و مدل توسعه، رشد آموزش ریاضی، ۳۶ شماره ۱ (۱۳۹۷).
- [۲۷] س. ح. علم‌الهدایی، اصول آموزش ریاضی، انتشارات نما، چاپ چهارم، ۱۳۹۷.
- [۲۸] س. حق‌جو و ا. ریحانی، نظریه‌ی تنوع (*VT*) و کاربردهای آن در طراحی و اجرای یادگیری پژوهی در کلاس درس ریاضی، یازدهمین همایش ملی آموزش، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، ۱۳۹۸.
- [۲۹] س. غلام‌آزاد، طراحی و ارزیابی تکلیف‌های غنی برای یادگیری، رشد آموزش ریاضی، ۳۶ شماره ۲ (۱۳۹۷).
- [۳۰] س. م. حمیدی، تأثیر نرم‌افزار بر یادگیری مطالب ریاضیات (هندسه)، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه شهید چمران اهواز، ۱۳۹۰.
- [۳۱] م. مرادی شلال، پیوند جبر و هندسه، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه شهید چمران اهواز، ۱۳۹۰.
- [۳۲] ن. یافتیان و ا. صفابخش چکوسری، آموزش و یادگیری هندسه: معرفی نظریه فن‌هیلی، نشریه ریاضی و جامعه، ۴ شماره ۳ (۱۳۹۸) ۹–۲۲.

سید مصطفی حمیدی

گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی تهران، تهران، ایران
s.mostafa_hamidi@yahoo.com



سید مصطفی حمیدی متولد ۱۳۶۵ در شهر ایلام است. وی کارشناسی ریاضی کاربردی خود را در سال ۱۳۸۷ از دانشگاه پیام نور مرکز ایلام و کارشناسی ارشد آموزش ریاضی را در سال ۱۳۸۸ از دانشگاه شهید چمران اهواز اخذ نمود. از مهر ۱۳۹۹ مشغول به تحصیل در مقطع دکتری رشته ریاضی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی تهران است. همچنین به مدت ۱۲ سال مدرس درس آموزش ریاضی در دانشگاه ایلام و مشغول به تدریس در هر دو مقطع متوسطه اول و متوسطه دوم در مدرسه تیزهوشان استان ایلام است. تجربه تدریس در مقطع ابتدایی را نیز داشتند. زمینه های پژوهش و علاقه وی آموزش ریاضی، نرم افزار، هندسه اقلیدسی و یاددهی و یادگیری ریاضیات در دوره های ابتدایی و متوسطه است.

علی زعیم باشی

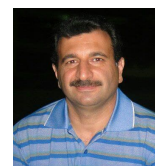
گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی تهران، تهران، ایران
azaeembashi@sru.ac.ir



علی زعیم باشی متولد ۱۳۴۶ است. وی در سال ۱۳۷۰ کارشناسی خود را در رشته ریاضی از دانشگاه شهید باهنر کرمان دریافت نمود و در سال ۱۳۷۳ کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض را از دانشگاه امیرکبیر تهران و در سال ۱۳۸۱ از همین دانشگاه دکتری تخصصی خود را در گرایش جبر اخذ نمودند. هم اکنون دانشیار دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی تهران است.

مهرداد نامداری

گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، خوزستان، ایران
namdari@scu.ac.ir



مهرداد نامداری دانش آموخته کارشناسی مهندسی مکانیک (طراحی جامدات) از دانشگاه شهید چمران اهواز است که مقطع کارشناسی ارشد خود را در رشته ریاضی محض (گرایش جبر) در دانشگاه تهران گذرانده است. وی مدرک دکتری خود را در گرایش توپولوژی از دانشگاه شهید چمران دریافت کرده است. هم اکنون به عنوان دانشیار دانشگاه شهید چمران اهواز در حال فعالیت است. زمینه های پژوهشی مورد علاقه وی حلقه های توابع پیوسته، نظریه های حلقه ها، آموزش ریاضی، هندسه های اقلیدسی و نااقلیدسی و نظریه های مجموعه ها می باشند.

اشرف کرمزاده

گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی تهران، تهران، ایران
karamzadehmath@gmail.com



اشرف کرمزاده متولد ۱۳۶۳ شهرستان کهگیلویه می باشد. وی کارشناسی ریاضی محض خود را در سال ۱۳۸۷ از دانشگاه دولتی یاسوج، کارشناسی ارشد ریاضی (جبر) خود را در سال ۱۳۹۰ از دانشگاه شهید چمران اهواز و دکتری ریاضی (جبر-گراف و ترکیبیات) خود را در سال ۱۳۹۹ از دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی تهران اخذ نموده است. در حال حاضر به عنوان مدرس در دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی تهران و دانشگاه فرهنگیان مشغول می باشد.