

RELATIONS BETWEEN THE DISTINGUISHING NUMBER AND SOME OTHER GRAPH PARAMETERS

BAHMAN AHMADI^{✉*} AND SEYED ALIREZA TALEBPOUR SHIRAZI FARD[✉]

ABSTRACT. A distinguishing coloring of a simple graph G is a vertex coloring of G which is preserved only by the identity automorphism of G . In other words, this coloring “breaks” all symmetries of G . The distinguishing number $D(G)$ of a graph G is defined to be the smallest number of colors in a distinguishing coloring of G . This concept of “symmetry breaking” was first proposed by Babai in 1977 and after the publication of a seminal paper by Albertson in 1996, it attracted the attention of many mathematicians. In this paper, along with studying some relations between $D(G)$ and some other important graph parameters, we introduce the concept of a (D, α) -ordinary graph which displays the comparison between $D(G)$ and the independence number $\alpha(G)$. Then we consider the classification of (D, α) -ordinary graphs in various families of graphs such as forests, cycles, generalized Johnson graphs, Cartesian products of graphs and line graphs of connected claw-free graphs. We also propose some conjectures and discuss about some future research directions in this topic.

1. Introduction

The graphs in the paper are assumed to be undirected, simple and finite. For a graph G , we denote by $V(G)$ and $\text{Aut}(G)$, the vertex set and the automorphism group of G , respectively. Let G be a graph and c be a vertex (respectively, edge) coloring of G . We say that an $\alpha \in \text{Aut}(G)$ preserves the

Keywords: graph, distinguishing number, independence number, line graph

Article Type: Research Paper.

Communicated by Alireza Abdollahi.

*Corresponding author.

Received: 02-07-2023, Accepted: 09-03-2024, Published Online: 26-08-2024.

Cite this article: B. Ahmadi and S. A. Talebpour Shirazi Fard, Relations between the distinguishing number and some other graph parameters, *Journal of Mathematics and Society*, **9** no. 3 (2024) 73–92.

<http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.138274.1590> .

coloring c if for any pair of vertices u and v in $V(G)$ (respectively, any pair of edges e and f), for which $\alpha(u) = v$ (respectively, $\alpha(e) = f$), the vertices u and v (respectively, the edges e and f) have the same color. For a graph G , a *distinguishing coloring* (respectively, *distinguishing edge coloring*) is a vertex coloring (respectively, edge coloring) of G such that the only automorphism which preserves the coloring, is the identity automorphism. Then the *distinguishing number* (respectively, *distinguishing index*) of G , denoted by $D(G)$ (respectively, $D'(G)$), is defined to be the smallest number of colors for a distinguishing coloring (respectively, distinguishing edge coloring) of G . It is easy to see that $D(K_n) = n$, $D(K_{n,n}) = n + 1$, $D(P_n) = 2$ for $n \geq 2$, $D(C_3) = D(C_4) = D(C_5) = 3$, while $D(C_n) = 2$, for $n \geq 6$. Note also that, for any asymmetric graph G , we have $D(G) = D'(G) = 1$ and, as mentioned in [2], $D'(K_{n,n}) = 2$, for $n \geq 4$. This symmetry breaking concept was first introduced by Babai in 1977, and after 1996, it attracted the attention of many mathematicians. For detailed studies on this topic, we refer the reader to [1], [3]-[15].

In [1], along with some new parameters related to distinguishing colorings, the authors introduced the *distinguishing threshold* $\theta(G)$ as the minimum number k of colors such that any coloring of the graph G with k colors is distinguishing. Obviously $D(G) \leq \theta(G) \leq |V(G)|$. They also showed that

$$\theta(K_n) = \theta(\overline{K_n}) = n, \theta(K_{m,n}) = m + n, \theta(P_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1, \text{ for } n \geq 2,$$

and $\theta(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2$, for $n \geq 3$.

It has been shown that the distinguishing number of “almost” all connected graphs is at most 2. On the other hand, the independence number of a graph G is at least 2 unless G is a complete graph on more than 1 vertices. It follows that for almost all connected graphs G , $D(G) \leq \alpha(G)$. This is a motivation for us to define the concept of (D, α) -ordinary graphs: a graph is called (D, α) -ordinary if it satisfies the above inequality. In this paper, we consider this concept and determine families of graphs which are ordinary or non-ordinary. In particular we analyse the complete multipartite graphs, Cartesian product of graphs and some line graphs.

2. Main Results

In this section, we list the main results of the paper without proofs. We start by the following two general results in which we use the notation $\text{Fix}(G)$ for the *fixing number* of a graph G , i.e. the smallest size of a *fixing set* of G , where a fixing set of G is a subset of vertices of G which is point-wise preserved only by the identity automorphism.

Proposition 2.1. *For each graph G , we have $D(G) \leq \text{Fix}(G) + 1 \leq \theta(G)$.*

For the next result, we also recall the notion of $\beta(G)$, the *vertex cover number* of a graph G and recall that $\alpha(G) + \beta(G) = |V(G)|$.

Theorem 2.2. For any graph G , if $\theta(G) \neq |V(G)|$ then $\text{Fix}(G) < \beta(G)$.

Also, for the next result, we use the notion of Cartesian products and powers of graphs.

Theorem 2.3. Let G be a connected graph. If $G \not\cong K_2^2, K_2^3, K_3^2$, then for each $r \geq 2$, $D(G^r) = 2$, otherwise $D(G) = 3$.

For example, for any $n \geq 3$ and $r \geq 3$, we have that $D(K_n^r) = 2$.

Throughout the paper, we also use the notation $L(G)$ of the line graph of a graph G and denote the graph obtained from the graph K_4 by removing two non-adjacent edges (respectively, one edge) by Q (respectively, R). See Figure 1. Note that $L(Q) = R$.

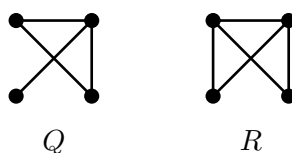


FIGURE 1. the graph Q and the graph R

In this part of the paper, we start investigating the ordinariness property of graphs. It is straightforward to see that, for $n \geq 6$, the graphs $\overline{K_n}$ and C_n , and for $n \geq 3$, the graph P_n , and for $m \neq n$, the graph $K_{m,n}$ are ordinary. The same is true for all asymmetric graphs, while the graphs such as K_n and C_4 are non-ordinary. We also observe that the set of all ordinary graphs are closed under the union operation while the set of non-ordinary graphs are closed under the “join” operation. Therefore there are infinite families of ordinary and non-ordinary graphs. This is an insight that the problem of determining such graphs is an interesting one.

Let $|V(G)| = n$. We note that, according to Proposition 2.2, for any graph G with $\theta(G) \neq n$, if $\alpha(G)$ is large, then $\text{Fix}(G)$ must be small. Another consequence of Proposition 2.2 is the following which provides a necessary condition for a graph to be non-ordinary.

Proposition 2.4. If G is non-ordinary, then $\theta(G) = n$ or $\alpha(G) \leq \frac{n-1}{2}$.

Corollary 2.5. For a graph G , if it holds that $\theta(G) \neq n$ and $\alpha(G) > \frac{n-1}{2}$, then $D(G) \leq \alpha(G)$.

In what follows, we study some families of graphs from view-point of ordinariness. We start with forests, cycles and bipartite graphs.

Proposition 2.6. Every forest with more than two vertices is ordinary.

Proposition 2.7. The cycle C_n is ordinary if and only if $n \geq 6$.

Proposition 2.8. All bipartite graphs are ordinary except the graphs $K_{n,n}$.

We Also present necessary and sufficient conditions of ordinariness for the more general family of complete multipartite graphs.

Theorem 2.9. Assume $G = K_{n_1^{j_1}, n_2^{j_2}, \dots, n_r^{j_r}}$, in which $n_1 > n_2 > \dots > n_r$ and, for any $i = 1, 2, \dots, r$, there are j_i parts of size n_i in G . Then G is non-ordinary if and only if $j_1 > 1$, or there is an $i > 1$ in such a way that $\binom{n_1}{n_i} < j_i$.

Furthermore, we can classify the ordinary generalized Johnson graphs as follows.

Theorem 2.10. The graph $J(n, k, i)$ is ordinary if and only if (n, k, i) is neither $(4, 2, 1)$ nor $(5, 2, 1)$.

We next consider the Cartesian products of graphs and start with the following observation.

Proposition 2.11. Assume G and H are two relatively prime ordinary connected graphs which are not asymmetric. Then $G \square H$ is ordinary.

In addition, we show that, except for some small cases, the Cartesian powers of connected graphs, with exponents at least 2, are ordinary.

Corollary 2.12. For any graph G and any number $r \geq 2$, the graph G^r is ordinary unless $G^r \cong K_2^2$.

Corollary 2.13. Assume $G = G_1^{\alpha_1} \square \dots \square G_r^{\alpha_r}$ to be the prime factorization of the graph G , where

- (1) all G_i s are connected;
- (2) if $\alpha_i = 1$, then G_i is ordinary but not asymmetric, and
- (3) $G \not\cong K_2^2$.

Then G is ordinary.

We now consider the main question of the paper for the line graphs.

Proposition 2.14. The graph $L(K_n)$ is ordinary if and only if $n \geq 6$ or $n = 2$.

For what follows, we define the family $\mathcal{A} = \{P_3, K_3, R, K_4, C_4, C_5, K_5\}$. One easily observes the following.

Lemma 2.15. The graphs in $\mathcal{A}$ are non-ordinary.

We now classify the line graphs of claw-free graphs with respect to the property of ordinariness. More precisely, we show that the members of $\mathcal{A}$ are the only connected claw-free graphs whose line graphs are non-ordinary.

Theorem 2.16. Assume G to be a connected claw-free graph. The graph $L(G)$ is non-ordinary if and only if $G \in \mathcal{A}$.

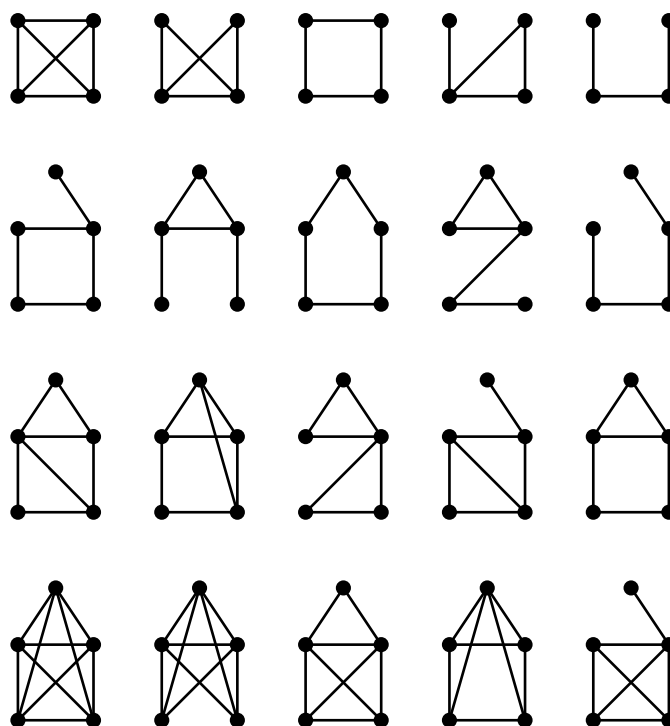


FIGURE 2. The twenty graphs discussed in the proof of theorem 2.16

In the next result, we make use of the concept of *iterated* line graphs. More clearly, we use the notation $L^1(G) = L(G)$ and $L^r(G) = L(L^{r-1}(G))$, for $r \geq 2$.

Corollary 2.17. *Let G be a connected graph for which $L(G) \notin \{K_3, Q, R, C_4, K_4, C_5, K_5\}$. Then for any $r \geq 2$, the graph $L^r(G)$ is ordinary unless $L(G) = P_n$, in which case the corollary holds for $n \leq 3 + r$. $\square$*

We finally, consider the line graphs of complete multipartite graphs.

Theorem 2.18. *Let $G = K_{n_1^{j_1}, n_2^{j_2}, \dots, n_r^{j_r}}$, where $n_1 > n_2 > \dots > n_r$ and, for each $i = 1, 2, \dots, r$, there are j_i parts of size n_i in G . Assume $\Sigma = \sum_{i=2}^r j_i n_i + (j_1 - 1)n_1$. Then $L(G)$ is ordinary if and only if $n_1 \leq \Sigma$, unless $G \cong R$, in which case $L(G)$ is non-ordinary.*

3. Conclusions

We investigated some families of graphs; including complete multipartite graphs, Cartesian products and some line graphs; to see under which conditions they are ordinary. These are only some small portion of graphs and it seems an interesting problem to consider other families of graphs and find necessary and/or sufficient conditions for their ordinarieness.

REFERENCES

- [1] B. Ahmadi, F. Alinaghipour and M. H. Shekarriz, Number of distinguishing colorings and partitions, *Discrete Math.*, **343** no. 9 (2020) 13 pp.
- [2] S. Alikhani and S. Soltani, The distinguishing number and the distinguishing index of line and graphoidal graph(s), *AKCE Int. J. Graphs Comb.*, **17** no. 1 (2020) 1–6.
- [3] B. Bogstad, and L. J. Cowen, The distinguishing number of the hypercube, *Discrete Math.*, **283** no. 1-3 (2004) 29–35.
- [4] K. L. Collins and A. N. Trenk, The distinguishing chromatic number, *Electron. J. Combin.*, **13** no. 1 (2006) 19 pp.
- [5] M. N. Ellingham and J. Z. Schroeder, Distinguishing partitions and asymmetric uniform hypergraphs, *Ars Math. Contemp.*, **4** no. 1 (2011) 111–123.
- [6] R. L. Hemminger, The group of an X -join of graphs, *J. Combinatorial Theory*, **5** (1968) 408–418.
- [7] W. Imrich and S. Klavžar, Distinguishing Cartesian powers of graphs, *J. Graph Theory*, **53** no. 3 (2006) 250–260.
- [8] W. Imrich, J. Jerebic and S. Klavžar, The distinguishing number of Cartesian products of complete graphs, *European J. Combin.*, **29** no. 4 (2008) 922–929.
- [9] W. Imrich, R. Kalinowski, F. Lehner and M. Pilśniak, Endomorphism breaking in graphs, *Electron. J. Combin.*, **21** no. 1(2014) 13 pp.
- [10] W. Imrich, S. Klavžar and V. Trofimov, Distinguishing infinite graphs, *Electron. J. Combin.*, **14** no. 1 (2007) 12 pp.
- [11] R. Kalinowski M. Pilśniak, Distinguishing graphs by edge-colourings, *European J. Combin.*, **45** (2015) 124–131.
- [12] R. Kalinowski, M. Pilśniak and M. Woźniak, Distinguishing graphs by total colourings, *Ars Math. Contemp.*, **11** no. 1 (2016) 79–89.
- [13] S. Klavžar, T.-L. Wong and X. Zhu, Distinguishing labellings of group action on vector spaces and graphs, *J. Algebra*, **303** no. 2 (2006) 626–641.
- [14] C. Laflamme, L. Thé and N. Sauer, Distinguishing number of countable homogeneous relational structures, *Electron. J. Combin.*, **17** no. 1 (2010) 17 pp.
- [15] T. W. Tucker, Distinguishing maps, *Electron. J. Combin.*, **18** no. 1 (2011) 21 pp.

Bahman Ahmadi

Department of Mathematics, Shiraz University, P.O.Box 71964-84334, Shiraz, Iran

Email: bahman.ahmadishirazu.ac.ir

Seyed Alireza Talebpour Shirazi Fard

Department of Mathematics, Shiraz University, P.O.Box 71964-84334, Shiraz, Iran

Email: seyed.alireza.talebpour@gmail.com

روابطی بین عدد تشخیص و پارامترهای دیگر گراف‌ها

بهمن احمدی*^{ID} و سید علیرضا طالب‌پور شیرازی فرد^{ID}

چکیده. یک رنگ‌آمیزی تشخیص از گرافی ساده مانند G ، عبارت است از یک رنگ‌آمیزی رئوس G به طوری که تنها خودریختی‌ای از G که این رنگ‌آمیزی را حفظ می‌کند، خودریختی همانی باشد. به عبارت دیگر، این رنگ‌آمیزی همه‌ی تقارن‌های G را «می‌شکند». عدد تشخیص یک گراف مانند G ، که با $D(G)$ نمایش داده می‌شود، کوچک‌ترین تعداد رنگ مورد نیاز برای یک رنگ‌آمیزی تشخیص G است. در این مقاله، علاوه بر مطالعه‌ی برخی از روابط موجود بین $D(G)$ و پارامترهای مهم گرافی، مفهوم (D, α) -عادی بودن یک گراف را تعریف می‌کنیم که بیانگر مقایسه‌ی بین $D(G)$ و عدد استقلال $\alpha(G)$ است. سپس طیف وسیعی از گراف‌ها را از دیدگاه (D, α) -عادی بودن مطالعه و رده‌بندی‌هایی را برای گراف‌های دوبخشی، چندبخشی کامل، گراف‌های جانسون تعمیم‌یافته و حاصل‌ضرب‌های دکارتی و گراف‌های خط برخی از گراف‌ها ارائه می‌کنیم.

۱. مقدمه

همه‌ی گراف‌ها در این مقاله، ساده (بدون جهت و طوقه) و متناهی فرض می‌شوند. برای مفاهیم پایه و نمادگذاری‌های مرسوم از کتاب [۴] پیروی می‌کنیم. مجموعه‌ی رئوس یک گراف G را با $V(G)$ و گروه خودریختی‌های آن را با $\text{Aut}(G)$ نمایش می‌دهیم. اگر $\text{Aut}(G)$ فقط همانی باشد، گوییم G گرافی نامتقارن است. فرض کنیم c یک رنگ‌آمیزی رأسی (متناظر، یالی) از گراف G باشد. در این صورت می‌گوییم یک $\alpha \in \text{Aut}(G)$ ، رنگ‌آمیزی c را حفظ می‌کند هرگاه برای هر جفت از رئوس G مانند u و v (متناظر، هر جفت از یال‌های G مانند e و f)، که $\alpha(u) = v$ (متناظر، $\alpha(e) = f$)، رئوس u و v (متناظر، یال‌های e و f) دارای یک رنگ تحت c باشند. برای گراف G ، یک رنگ‌آمیزی تشخیص (متناظر، رنگ‌آمیزی یالی تشخیص) عبارت است از یک رنگ‌آمیزی رأسی (متناظر، یالی) از G به طوری که تنها خودریختی‌ای از G که آن را حفظ می‌کند، خودریختی همانی باشد. همچنین عدد تشخیص (متناظر، عدد تشخیص یالی) G که با $D(G)$ (متناظر، $D'(G)$) نمایش داده می‌شود، کوچک‌ترین تعداد رنگ مورد نیاز در یک رنگ‌آمیزی تشخیص (متناظر، رنگ‌آمیزی یالی تشخیص) از G است. همان‌طور که در [۲] بیان شده است، به راحتی دیده می‌شود که $D(K_n) = n$ ، $D(K_{n,n}) = n + 1$ ، برای هر $n \geq 2$ ، $D(P_n) = 2$ ، $D(C_3) = D(C_4) = D(C_5) = 3$ ، درحالی‌که، به ازای $n \geq 6$ ، $D(C_n) = 2$. همچنین توجه داریم که

عبارات و کلمات کلیدی: گراف، عدد تشخیص، عدد تثبیت‌کننده، گراف خط، گراف چندبخشی

نوع مقاله: پژوهشی

دبیرتخصصی رابط: علیرضا عبدالمی

*نویسنده مسئول

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۴/۱۱ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۱۲/۱۹ تاریخ انتشار آنلاین: ۱۴۰۳/۰۸/۲۶

ارجاع به مقاله: ب. احمدی و ع. طالب‌پور، روابطی بین عدد تشخیص و پارامترهای دیگر گراف‌ها، نشریه ریاضی و جامعه، ۹، شماره ۳ (۱۴۰۳)، ۷۳-۹۲.

<http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.138274.1590>

گراف G نامتقارن است اگر و تنها اگر $D(G) = 1$. این مفهوم «شکستن تقارن» ابتدا در سال ۱۹۷۷ توسط بابای^۱ مطرح شد و پس از انتشار مقاله‌ی [۲] در سال ۱۹۹۶، توجه خیلی از ریاضی‌دانان را به خود جلب نمود. برای مطالعات بیشتر در این زمینه، خواننده را به منابع [۱، ۵، ۶، ۷، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۲۰، ۲۷] ارجاع می‌دهیم. این مقاله ادامه‌ای است بر مطالعه‌ی عدد تشخیص گراف‌ها و روابطی که این پارامترها با سایر پارامترها و خاصیت‌های گراف‌ها دارند. در بخش ۲، به مرور نتایج پایه‌ای و نیز موردنیاز در طول مقاله با محوریت عدد تشخیص خواهیم پرداخت. در [۲۴] نشان داده شده است که عدد تشخیص «تقریباً» همه‌ی گراف‌های همبند، حداکثر ۲ است. از سویی دیگر، عدد استقلال هر گراف غیرکامل حداقل ۲ است. بنابراین تقریباً برای همه‌ی گراف‌های همبند مانند G ، داریم $D(G) \leq \alpha(G)$. این مشاهده، انگیزه‌ای است تا در بخش ۳، مفهوم گراف (D, α) -عادی را تعریف کنیم: گرافی را (D, α) -عادی می‌نامیم هرگاه در نامساوی $D(G) \leq \alpha(G)$ صدق کند. در بخش ۳، علاوه بر معرفی این ویژگی، به بررسی خانواده‌های معروفی از گراف‌ها از دیدگاه عادی بودن می‌پردازیم و می‌بینیم که بررسی برقرار بودن این خاصیت می‌تواند مسئله‌ی جالب‌توجهی باشد. بررسی این خاصیت برای حاصل‌ضرب‌های دکارتی بعضی از گراف‌ها و نیز برای گراف‌های خط برخی از خانواده‌های گراف‌ها، به‌ترتیب، موضوع بخش‌های ۴ و ۵ می‌باشد. نهایتاً در بخش ۶، مباحثی برای ادامه‌ی این مطالعه پیشنهاد خواهیم کرد.

۲. مطالب پایه

در این بخش به ارائه‌ی برخی مطالب پایه درباره‌ی خاصیت‌های عدد تشخیص (یالی) و ارتباط آن با برخی از پارامترهای گراف‌ها می‌پردازیم. ابتدا رابطه‌ی بین عدد تشخیص و عدد تثبیت‌کننده‌ی یک گراف را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. عدد تثبیت‌کننده‌ی که در [۸] معرفی شده است، همانند عدد تشخیص، با مفهوم «شکستن تقارن‌ها» ارتباط عمیقی دارد. یک زیرمجموعه مانند $A \subseteq V(G)$ را یک مجموعه‌ی تثبیت‌کننده از G می‌نامند هرگاه تنها خودریختی G که رئوس موجود در A را به‌طور نقطه‌به‌نقطه ثابت نگه می‌دارد، خودریختی همانی باشد. اگر G نامتقارن باشد، آنگاه برای راحتی، قرارداد می‌کنیم که مجموعه‌ی تهی یک مجموعه‌ی تثبیت‌کننده‌ی G است. عدد تثبیت‌کننده‌ی گراف G که با $\text{Fix}(G)$ نمایش داده می‌شود، کوچک‌ترین اندازه‌ی یک مجموعه‌ی تثبیت‌کننده از G تعریف می‌شود. بنابراین برای هر گراف نامتقارن داریم $\text{Fix}(G) = 0$. در [۸] نشان داده شده است که برای هر $n \geq 2$ ، $\text{Fix}(K_n) = n - 1$ و $\text{Fix}(P_n) = 1$ و اینکه برای هر $n \geq 3$ ، $\text{Fix}(C_n) = 2$. در راستای محاسبه‌ی عدد تشخیص برخی از گراف‌ها، در [۱] پارامتر جدیدی به نام عدد آستانه‌ی تشخیص گراف G با نماد $\theta(G)$ تعریف شده است که عبارت است از کوچک‌ترین عددی طبیعی مانند k به‌طوری‌که هر رنگ‌آمیزی G با k رنگ، یک رنگ‌آمیزی تشخیص باشد. سپس در [۲۵] تعریف معادل زیر از آن ارائه شده است:

$$(۱.۲) \quad \theta(G) = \max\{c(\alpha) \mid \alpha \in \text{Aut}(G) \setminus \{\text{id}\}\} + 1,$$

که در آن، $c(\alpha)$ برابر است با تعداد دورهای α به‌عنوان یک جایگشت که هر نقطه‌ی ثابت این جایگشت، یک دور به حساب می‌آید، id جایگشت همانی است و قرارداد می‌کنیم $c(\text{id}) = 0$. نتیجه‌ی زیر به‌راحتی با توجه به تعاریف این پارامترها اثبات می‌شوند.

□

گزاره ۱.۲. برای هر گراف G داریم $D(G) \leq \text{Fix}(G) + 1 \leq \theta(G)$.

¹Babai

برای نتیجه‌ی بعدی، یادآوری می‌کنیم که برای هر گراف G ، مجموعه‌ای مانند $A \subseteq V(G)$ را یک پوشش رأسی G می‌نامند هرگاه هر یال G حداقل یک رأس در A داشته باشد و اینکه عدد پوشش رأسی G که با $\beta(G)$ نمایش داده می‌شود، کوچک‌ترین اندازه‌ی یک پوشش رأسی G است. توجه داریم که $\alpha(G) + \beta(G) = |V(G)|$.

قضیه ۲.۲. برای هر گراف G اگر $|V(G)| \neq \theta(G)$ ، آنگاه $\text{Fix}(G) < \beta(G)$.

اثبات. فرض کنیم $A \subseteq V(G)$ یک مجموعه‌ی مستقل باشد با $|A| = \alpha(G)$. در این صورت $B = V(G) \setminus A$ یک پوشش رأسی با $|B| = \beta(G)$ است. شرط ذکر شده روی $\theta(G)$ ، طبق (۱.۲) نتیجه می‌دهد که در $\text{Aut}(G)$ هیچ ترانهشی وجود ندارد و اینکه $|B| > 1$. فرض کنیم z عضوی از B باشد. کافی است نشان دهیم $\tilde{B} = B \setminus \{z\}$ یک مجموعه‌ی تثبیت‌کننده از G است. فرض کنیم این چنین نباشد و $\sigma \in \text{Aut}(G) \setminus \{\text{id}\}$ خودریختی دلخواهی باشد که $\tilde{B}$ را نقطه‌به‌نقطه ثابت نگه می‌دارد. طبق تعریف $\alpha(G)$ ، رأس z حداقل به یک رأس از A وصل است. اگر σ ، رأس z را ثابت نگه ندارد، چون A یک مجموعه‌ی مستقل است z باید فقط به یک رأس در A مانند v وصل باشد. همچنین، نتیجه می‌گیریم که $\sigma(z) = v$ و $\sigma(v) = z$ ، که تناقض است زیرا $\text{Aut}(G)$ فاقد ترانهش است. پس $\sigma(z) = z$ و بنابراین σ باید کل B را ثابت نگه دارد. از طرفی، چون σ غیرهمانی است، دو رأس v_i و v_j در $A - \{v\}$ وجود دارند به‌طوری‌که $\sigma(v_i) = v_j$. بنابراین، با توجه به اینکه σ ، $\tilde{B}$ را ثابت نگه می‌دارد، v_i و v_j می‌بایست همسایه‌های یکسانی داشته باشند. این نیز، به‌نوبه‌ی خود، نتیجه می‌دهد که ترانهش (v_i, v_j) ، در $\text{Aut}(G)$ است که یک تناقض است. در نتیجه σ کل A را ثابت نگه می‌دارد؛ یعنی σ همانی است و این تناقض اثبات را کامل می‌کند. $\square$

یادآوری می‌کنیم که برای هر گراف G ، عدد تطابق G که با $\nu(G)$ نمایش داده می‌شود، بزرگ‌ترین اندازه‌ی یک تطابق در G است. قضیه‌ی زیر، عدد تطابق گراف‌های چندبخشی کامل را محاسبه می‌کند.

قضیه ۳.۲. [۲۶] فرض کنیم گراف چندبخشی کامل $G = K_{m_1, m_2, \dots, m_n}$ به‌گونه‌ای باشد که $m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_n$.

(آ) اگر $m_n \geq m_1 + m_2 + \dots + m_{n-1}$ ، آنگاه $\nu(G) = m_1 + m_2 + \dots + m_{n-1}$ ؛

(ب) اگر $m_n < m_1 + m_2 + \dots + m_{n-1}$ ، آنگاه $\nu(G) = \lfloor \frac{|V(G)|}{2} \rfloor$. $\square$

توجه داریم که اگر G دوبخشی باشد، آنگاه $\nu(G) = \beta(G)$. علاوه بر آن، مطلب زیر هم به‌آسانی مشاهده می‌شود.

لم ۴.۲. اگر T یک درخت فراگیر از گراف G باشد، آنگاه $\nu(T) \leq \nu(G)$. $\square$

قضیه‌ی بعد ارتباطی مهم بین عدد تشخیص یک گراف همبند و بیشینه درجه‌ی آن برقرار می‌کند.

قضیه ۵.۲. [۶] اگر G گرافی همبند با بیشینه درجه‌ی Δ باشد، آنگاه $\Delta + 1 \leq D(G)$. علاوه بر آن، تساوی رخ می‌دهد اگر و تنها اگر G یکریخت با $K_{\Delta+1}$ ، $K_{\Delta, \Delta}$ یا C_5 باشد. $\square$

در ادامه، تعریف حاصل ضرب دکارتی گراف‌ها را یادآوری می‌کنیم. حاصل ضرب دکارتی دو گراف G و H ، که با $G \square H$ نمایش داده می‌شود، گرافی با مجموعه‌ی رئوس $V(G \square H) = V(G) \times V(H)$ است که در آن، رأس (u_1, v_1) با رأس (u_2, v_2) مجاور است هرگاه $u_1 = u_2$ و $v_1 \sim v_2$ یا $v_1 = v_2$ و $u_1 \sim u_2$. گوییم G و H عوامل گراف $G \square H$ هستند. پس طبیعتاً گرافی که قابل تجزیه به عوامل کوچک‌تر نیست، یک گراف اول (تحت این ضرب) نامیده می‌شود. همچنین دو گراف را نسبت به هم اول می‌نامند هرگاه عامل مشترکی نداشته باشند. در ادامه از نمادگذاری $G^1 = G$ ، و برای هر $r \geq 2$ ،

استفاده خواهیم کرد. جهت مطالعه‌ی مباحث مربوط به ضرب دکارتی و سایر ضرب‌های گرافی، خواننده را به کتاب [۱۰] ارجاع می‌دهیم. دو قضیه‌ی زیر درباره‌ی عدد تشخیص حاصل ضرب‌های دکارتی، به ترتیب در [۱۹] و [۱۲] اثبات شده‌اند.

قضیه ۶.۲. فرض کنیم G و H دو گراف همبند باشند و $2 \leq D(G) \leq D(H)$. اگر G و H نسبت به هم اول باشند، آنگاه

$$D(G \square H) \leq \max\{D(G), D(H) - 2^{D(G)} + D(G) + 1\}. \quad \square$$

قضیه ۷.۲. فرض کنیم G گرافی همبند باشد. اگر $K_2^r, K_3^r, K_4^r, G \not\cong K_2^r$ ، آنگاه، برای هر $r \geq 2$ ، داریم $D(G^r) = 2$ ؛ در غیر این صورت $D(G) = 3$.

به عنوان مثال، برای هر $n \geq 3$ و $r \geq 3$ داریم $D(K_n^r) = 2$. از سویی دیگر، قضیه‌ی زیر کران‌های پایین و بالایی برای عدد استقلال حاصل ضرب‌های دکارتی گراف‌ها ارائه می‌کند.

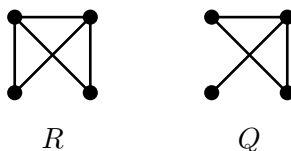
قضیه ۸.۲. [۲۱] برای گراف‌های دلخواه G و H داریم

$$\begin{aligned} \alpha(G)\alpha(H) + \min\{|V(G)| - \alpha(G), |V(H)| - \alpha(H)\} &\leq \alpha(G \square H) \\ &\leq \min\{\alpha(G)|V(H)|, \alpha(H)|V(G)|\}. \quad \square \end{aligned}$$

حال مفهوم مهم گراف خط را مرور می‌کنیم. منظور از گراف خطِ گراف G که با $L(G)$ نمایش داده می‌شود، گرافی است که با اختصاص دادن یک رأس به هر یال G ساخته می‌شود که در آن، دو رأس با هم مجاورند اگر و تنها اگر یال‌های متناظر با آن دو رأس، در G هم‌جوار باشند (یعنی یک رأس مشترک داشته باشند). در [۱۶] نشان داده شده است که، به جز در موارد کمی، عدد تشخیص گراف خطِ گراف‌های کامل برابر با ۲ است:

گزاره ۹.۲. برای هر $n \geq 6$ داریم $D(L(K_n)) = 2$.

در این مقاله، گراف به دست آمده از گراف کامل K_4 با حذف دو یال هم‌جوار را با Q و با حذف یک یال را با R نمایش می‌دهیم. شکل ۱ را ببینید. توجه داریم که $L(Q) = R$.



شکل ۱. گراف Q و گراف R

Figure 1: the graph Q and the graph R

همانند مبحث رنگ‌آمیزی رأسی و یالی سره‌ی متداول، ارتباطی بین عدد تشخیص یالی یک گراف و عدد تشخیص گراف خط آن گراف وجود دارد. قضیه‌ی بعد این ارتباط را بیان می‌کند.

قضیه ۱۰.۲. [۳] اگر G گرافی همبند و متفاوت از R باشد، آنگاه $D(L(G)) = D'(G)$.

همچنین مطلب زیر در [۲۲] نشان داده شده است. یادآوری می‌کنیم که منظور از یک گراف پنجه‌آزاد^۲، گرافی است که گراف $K_{1,3}$ را به‌عنوان یک زیرگراف القایی ندارد.

قضیه ۱۱.۲. اگر G یک گراف همبند پنجه‌آزاد باشد، آنگاه $D'(G) \leq 3$.

□

این بخش را با قضیه‌ای از [۹] به پایان می‌بریم.

قضیه ۱۲.۲. فرض کنیم G و H گراف‌های همبندی باشند به‌طوری‌که $\{K_2^*, K_3^*, K_4^*\} \not\subseteq G \square H$ و

$$|V(G)| \leq |V(H)| \leq 2^{|V(G)|} - |V(G)| + 1.$$

در این صورت $D(G \square H) \leq 2$.

□

۳. گراف‌های (D, α) -عادی

در این بخش به تعریف و مطالعه‌ی گراف‌هایی می‌پردازیم که در آنها عدد تشخیص گراف از بالا توسط عدد استقلال کراندار است. گوییم گراف G ، (D, α) -عادی است هرگاه $D(G) \leq \alpha(G)$ و گراف G را (D, α) -غیرعادی می‌نامیم هرگاه (D, α) -عادی نباشد. می‌توان دید که به ازای $n \geq 6$ و C_n و $\overline{K_n}$ ، به ازای $n \geq 3$ ، P_n ، برای $m \neq n$ ، $K_{m,n}$ و همچنین همه‌ی گراف‌های نامتقارن (D, α) -عادی هستند، حال آنکه گراف‌هایی از قبیل K_n و C_4 گراف‌هایی (D, α) -غیرعادی هستند. علاوه‌برآن می‌توان دید که خانواده‌ی همه‌ی گراف‌های (D, α) -عادی نسبت به عمل اجتماع و خانواده‌ی همه‌ی گراف‌های (D, α) -غیرعادی نسبت به عمل الحاق^۳ بسته‌اند و در نتیجه خانواده‌ای نامتناهی از این نوع گراف‌ها به‌دست می‌دهند. بنابراین جستجوی شرایطی (لازم یا کافی) که تحت آنها گرافی (D, α) -عادی باشد، مسئله‌ی جالب‌توجهی به نظر می‌رسد. در این مقاله، به‌منظور سادگی، قسمت (D, α) را حذف کرده صرفاً از واژه‌ی عادی یا غیرعادی استفاده می‌کنیم. فرض کنیم $|V(G)| = n$. توجه داریم که بنا بر گزاره ۲.۲، برای گراف‌هایی مانند G که $\theta(G) \neq n$ ، اگر $\alpha(G)$ بزرگ باشد، آنگاه $\text{Fix}(G)$ باید کوچک باشد. نتیجه‌ی دیگری از گزاره ۲.۲، گزاره‌ی زیر است که شرطی لازم برای غیرعادی بودن یک گراف معرفی می‌کند.

گزاره ۱.۳. اگر G گرافی غیرعادی باشد، آنگاه $\theta(G) = n$ یا $\alpha(G) \leq \frac{n-1}{4}$.

اثبات. اگر $\theta(G) \neq n$ ، آنگاه بنا بر قضیه ۲.۲ و اینکه $\alpha(G) < D(G)$ داریم

$$\alpha(G) < D(G) \leq \text{Fix}(G) + 1 \leq \beta(G).$$

بنابراین $\alpha(G) \leq \beta(G) - 1$ و در نتیجه $\alpha(G) \leq \frac{n-1}{4}$.

□

نتیجه ۲.۳. اگر برای گراف G داشته باشیم $\theta(G) \neq n$ و $\alpha(G) > \frac{n-1}{4}$ ، آنگاه $D(G) \leq \alpha(G)$.

□

در ادامه‌ی این بخش، برخی از خانواده‌های مهم گراف‌ها را از منظر عادی یا غیرعادی بودن مطالعه می‌کنیم و در این راستا، ابتدا درخت‌ها را در نظر می‌گیریم. قضیه‌ی زیر در [۲۸] اثبات شده است.

قضیه ۳.۳. برای هر درخت T به‌جز K_2 داریم، $D(T) \leq \Delta(T)$.

□

^۲claw-free ^۳join

برای اثبات گزاره‌ی بعد، علاوه بر قضیه ۳.۳، از لم زیر استفاده می‌کنیم که اثبات آن ساده است.

لم ۴.۳. اگر F جنگلی متشکل از a_i نسخه از درخت T_i باشد که در آن، برای هر $i = 1, \dots, m$ ، a_i عددی طبیعی است، آنگاه

$$D(F) \leq \max_i \{D(T_i) + a_i - 1\}. \quad \square$$

به خاطر داریم که K_2 گرافی غیرعادی است. حال نشان می‌دهیم هر جنگلی به جز K_2 گرافی عادی است.

گزاره ۵.۳. هر جنگل با بیش از دو رأس، عادی است.

اثبات. از آنجایی که برای هر درخت T ، داریم $\Delta(T) \leq \alpha(T)$ ، لذا طبق قضیه ۳.۳، برای هر درخت T با بیش از ۲ رأس داریم $D(T) \leq \alpha(T)$ ، که صحت گزاره را برای درخت‌ها نشان می‌دهد. لذا فرض می‌کنیم F جنگلی متشکل از a_i نسخه از درخت T_i باشد که در آن، برای هر $i = 1, \dots, m$ ، a_i عددی طبیعی است. بدون کاستن از کلیت و با استفاده از لم ۴.۳، فرض می‌کنیم $D(F) \leq D(T_1) + a_1 - 1$. توجه داریم که $\alpha(F) = \sum_i a_i \alpha(T_i)$. بنابراین، می‌توان نوشت

$$D(F) \leq D(T_1) + a_1 - 1 \leq a_1 D(T_1) \leq a_1 \alpha(T_1) \leq \alpha(F),$$

که اثبات را تکمیل می‌کند. $\square$

علاوه بر آن، در خانواده‌ی دورها مشاهده می‌کنیم که $D(C_2) = 3 > 1 = \alpha(C_2)$ ، $D(C_4) = 3 > 2 = \alpha(C_4)$ و $D(C_5) = 3 > 2 = \alpha(C_5)$ ؛ درحالی‌که، در ابتدای بخش گفته شد، برای هر $n \geq 6$ ، گراف C_n عادی است. بنابراین، گزاره‌ی زیر برقرار است.

گزاره ۶.۳. دور C_n گرافی عادی است اگر و تنها اگر $n \geq 6$. $\square$

همان‌طور که در ابتدای بخش گفتیم، اگر $m \neq n$ ، آنگاه $K_{m,n}$ گراف‌هایی عادی هستند. این مطلب را به صورت زیر تکمیل می‌کنیم.

گزاره ۷.۳. همه‌ی گراف‌های دوبخشی عادی هستند به جز گراف‌های $K_{n,n}$.

اثبات. اگر $m < n$ ، آنگاه $D(K_{m,n}) = \alpha(K_{m,n}) = n$ و حکم برقرار است. لذا فرض می‌کنیم G گرافی دوبخشی باشد که دوبخشی کامل نیست و یک افزاز دوبخشی مانند (X, Y) از G را در نظر می‌گیریم که در آن $|X| \leq |Y|$. نتیجه می‌گیریم که $|Y| \leq \alpha(G)$ و $\Delta(G) \leq |Y|$. از سویی دیگر، طبق قضیه ۵.۲، $D(G) \leq \Delta(G)$ که نشان می‌دهد $D(G) \leq \alpha(G)$. $\square$

اکنون خانواده‌ی کلی‌تر گراف‌های چندبخشی کامل را بررسی کرده، شرطی لازم و کافی برای عادی بودن آنها ارائه می‌کنیم.

قضیه ۸.۳. فرض کنید $G = K_{n_1^{j_1}, n_2^{j_2}, \dots, n_r^{j_r}}$ ، که در آن $n_1 > n_2 > \dots > n_r$ و برای هر $i = 1, 2, \dots, r$ ، به تعداد j_i بخش از اندازه‌ی n_i وجود دارد. در این صورت G غیرعادی است اگر و تنها اگر $j_1 > 1$ ، یا یک $i > 1$ چنان وجود داشته باشد که $\binom{n_1}{n_i} < j_i$.

اثبات. چون $\alpha(G) = n_1$ ، پس G غیرعادی است اگر و تنها اگر $D(G) > n_1$. حال فرض کنید $j_1 > 1$ ، یعنی G حداقل دو بخش از اندازه‌ی n_1 دارد. در این صورت، برای رنگ‌آمیزی کردن تشخیصی G ، می‌بایست دو مجموعه‌ی رنگ متفاوت از اندازه‌ی n_1 به این دو بخش اختصاص دهیم و این به آن معناست که $D(G) > n_1$. علاوه بر آن، در هر رنگ‌آمیزی

تشخیص G باید مجموعه‌های متفاوتی از رنگ‌ها به بخش‌های هم‌اندازه اختصاص داده شود. بنابراین، اگر برای یک $i > 1$ ، داشته باشیم $j_i < \binom{n_1}{n_i}$ ، آنگاه n_1 برای رنگ‌آمیزی بخش‌های از اندازه‌ی j_i کافی نخواهد بود؛ این دوباره نتیجه می‌دهد $D(G) > n_1$. بالعکس، اگر $j_1 = 1$ و برای هر $i > 1$ داشته باشیم $\binom{n_1}{n_i} \geq j_i$ ، آنگاه می‌توان G را با n_1 رنگ، رنگ‌آمیزی کرد؛ زیرا از آنجایی که $n_r > \dots > n_2 > n_1$ ، اگر بخش n_1 عضوی، به تعداد n_1 رنگ مختلف دریافت کند، آنگاه رئوس موجود در آن، نمی‌توانند به رئوس دیگری نگاشت شوند و برای هر $i > 1$ ، به تعداد کافی زیرمجموعه‌های n_i عضوی متفاوت از مجموعه‌ی $\{1, \dots, n_1\}$ جهت رنگ‌آمیزی رئوس موجود در بخش‌های n_i وجود خواهد داشت. بنابراین $D(G) \leq n_1$ و G عادی خواهد بود. $\square$

این بخش را با مطالعه‌ی خانواده‌ی دیگری از گراف‌ها به پایان می‌بریم که عدد تشخیص آنها به‌خوبی مطالعه شده است. این خانواده به خانواده‌ی گراف‌های جانسون تعمیم‌یافته^۴ شهرت دارند. فرض کنید n و k اعدادی طبیعی با شرط $2 \leq 2k \leq n$ باشند. برای هر $i = 1, \dots, k$ ، گراف جانسون تعمیم‌یافته‌ی $J(n, k, i)$ ، گرافی است که مجموعه‌ی رئوسش مجموعه‌ی همه‌ی k -زیرمجموعه‌های $\{1, \dots, n\}$ است و در آن، رئوس A و B مجاورند هرگاه $|A \cap B| = k - i$. گراف‌های خاص $J(n, k, k)$ و $J(n, k, 1)$ ، به‌ترتیب، گراف کنسر^۵ با نماد $K(n, k)$ و گراف جانسون^۶ نامیده می‌شوند. قضیه‌ی زیر منتسب به کیم^۷ و سایرین است که ما در اینجا، نسخه‌ی مطلوب‌تر آن را بیان می‌کنیم.

قضیه ۹.۳. [۲۵] فرض کنید $2 \leq k \leq n/2$ و قرار دهید $e = \frac{1}{4} \binom{n}{k}$.

(آ) اگر $n = 5$ و $k = 2$ ، آنگاه $D(J(n, k, 1)) = D(J(n, k, 2)) = 3$.

(ب) اگر $n \neq 5$ و $2 \leq k < \frac{n}{2}$ ، آنگاه برای هر $i = 1, \dots, k$ داریم $D(J(n, k, i)) = 2$.

(ج) اگر $k = \frac{n}{2}$ و $i \notin \{\frac{k}{2}, k\}$ ، آنگاه $D(J(n, k, i)) = 2$.

(د) اگر $k = \frac{n}{2}$ و $i = \frac{k}{2}$ ، آنگاه $D(J(n, k, i)) = 3$.

(ه) اگر $k = \frac{n}{2}$ و $i = k$ ، آنگاه $D(J(n, k, i)) = \lceil \frac{1 + \sqrt{1 + 4e}}{4} \rceil$.

$\square$

با استفاده از قضیه ۹.۳، می‌توانیم ببینیم کدام گراف‌های جانسون تعمیم‌یافته عادی هستند. نتیجه در قضیه‌ی زیر آورده شده است.

قضیه ۱۰.۳. گراف $J(n, k, i)$ عادی است اگر و تنها اگر (n, k, i) برابر با $(4, 2, 1)$ یا $(5, 2, 1)$ نباشد.

اثبات. حالت‌های مختلف در قضیه ۹.۳ را بررسی می‌کنیم. در حالت (آ)، $J(5, 2, 2)$ و $J(5, 2, 1)$ ، به‌ترتیب، گراف پترسن و مکمل آن هستند. توجه داریم که عدد استقلال آنها، به‌ترتیب، ۴ و ۲ است؛ بنابراین $J(5, 2, 2)$ عادی است درحالی‌که $J(5, 2, 1)$ غیرعادی می‌باشد. فرض کنید $J = J(n, k, i)$. در حالت‌های (ب) و (ج) بدیهی است که J گرافی عادی است. در حالت (د)، اگر $k \geq 3$ ، آنگاه مجموعه‌ی

$$\{\{1, \dots, k\}, \{k+1, 2, \dots, k\}, \{k+2, 2, \dots, k\}\}$$

در J مستقل است؛ لذا $\alpha(J) \geq 3$ و در نتیجه J گرافی عادی است. اگر $k = 2$ ، آنگاه J متمم $K_2 \cup K_2 \cup K_2$ است. $J(4, 2, 2) \cong K_2 \cup K_2 \cup K_2$ است. بنابراین $\alpha(J) = 2$ و $D(J) = 3$ که بدین معناست که J غیرعادی است. در نهایت، در حالت (ه)، $J(n, k, i)$ اجتماع مجزای e نسخه از K_2 است. توجه داریم که $e \geq 3$ و در نتیجه $\alpha(J) = e$ و $D(J) = \lceil \frac{1 + \sqrt{1 + 4e}}{4} \rceil \leq e$ که نتیجه می‌دهد J گرافی عادی است. $\square$

⁴generalized Johnson graphs ⁵Kneser graph ⁶Johnson graph ⁷Kim

۴. حاصل ضرب‌های دکارتی

در این بخش، توجه خود را به حاصل ضرب‌های دکارتی گراف‌ها معطوف می‌کنیم. در بخش ۳ دیدیم که خاصیت «عادی بودن» با عمل اجتماع‌گیری حفظ می‌شود. در اینجا ابتدا نشان می‌دهیم که، تحت شرایطی، در مورد عمل ضرب دکارتی نیز این‌گونه است.

گزاره ۱.۴. اگر G و H دو گراف همبند عادی نسبت به هم اول باشند که نامتقارن نیستند، آنگاه $G \square H$ عادی است.

اثبات. از آنجایی که $G \square H$ با $H \square G$ یکرخت است، بدون کاستن از کلیت، فرض می‌کنیم $2 \leq D(G) \leq D(H)$. در این صورت، طبق قضیه ۶.۲ داریم

$$D(G \square H) \leq \max\{\alpha(G), \alpha(H) - 2^{D(G)} + \alpha(G) + 1\} \leq \max\{\alpha(G), \alpha(H) + \alpha(G) + 1\} \\ = \alpha(H) + \alpha(G) + 1 \leq \alpha(H)\alpha(G) \leq \alpha(G \square H). \quad \square$$

همچنین، نشان می‌دهیم که به‌جز حالت‌های کوچک، توان‌های دکارتی گراف‌های همبند با توان حداقل ۲، عادی‌اند.

نتیجه ۲.۴. برای هر گراف G و هر عدد $r \geq 2$ ، گراف G^r عادی است، به‌جز زمانی که $G^r \cong K_2^r$.

اثبات. اگر G^r با هیچ‌یک از گراف‌های K_2^r و K_3^r یکرخت نباشد، آنگاه طبق قضیه ۷.۲، از اینکه $D(G^r) = 2$ و $\alpha(K_2^r) = 2$ و $D(K_2^r) = D(K_3^r) = D(K_4^r) = 3$ و $\alpha(K_2^r) = 3$ و $\alpha(K_3^r) = 4$ اثبات کامل می‌شود. $\square$

نتیجه ۳.۴. فرض کنید $G = G_1^{\alpha_1} \square \dots \square G_r^{\alpha_r}$ تجزیه‌ی گراف G به عوامل اول باشد که در آن

(ا) همه‌ی G_i ها همبندند؛

(ب) اگر $\alpha_i = 1$ ، آنگاه G_i عادی است و نامتقارن نیست، و

(ج) $G \not\cong K_2^r$.

در این صورت G عادی است.

اثبات. اگر $r = 1$ ، آنگاه در حالت‌های $\alpha_1 = 1$ و $\alpha_1 \geq 2$ حکم ما، به‌ترتیب، باتوجه به شرط (ب) و نتیجه ۲.۴، اثبات می‌شود. لذا فرض می‌کنیم $r \geq 2$. توجه داریم که در حالت‌های $\alpha_i = 1$ و $\alpha_i \geq 2$ ، به‌ترتیب، باتوجه به شرط (ب) و قضیه ۷.۲، گراف $G_i^{\alpha_i}$ نامتقارن نیست. اگر برای هر $i \geq 1$ ، $G_i^{\alpha_i} \not\cong K_2^{\alpha_i}$ ، آنگاه $G_i^{\alpha_i}$ ها همگی عادی‌اند و چون برای هر $j \neq i$ ، گراف‌های $G_i^{\alpha_i}$ و $G_j^{\alpha_j}$ نسبت به هم اول‌اند، حکم با استفاده از گزاره ۱.۴ اثبات می‌شود. اکنون حالتی را در نظر می‌گیریم که برای یک $i \geq 1$ ، $G_i^{\alpha_i} = K_2^{\alpha_i}$. بدون کاستن از کلیت، فرض می‌کنیم $G_1^{\alpha_1} \cong K_2^{\alpha_1}$. در این صورت، توجه داریم که $H = G_2^{\alpha_2} \square \dots \square G_r^{\alpha_r}$ عادی است و اینکه H و $G_1^{\alpha_1}$ نسبت به هم اول‌اند و هیچ‌یک نامتقارن نیستند. بنابراین، طبق گزاره ۶.۲،

$$D(G) = D(H \square K_2^{\alpha_1}) \leq \max\{3, D(H) - 4\} \leq \alpha(H)\alpha(K_2^{\alpha_1}) \leq \alpha(G)$$

اگر $D(H) \geq 3$ و

$$D(G) = D(H \square K_2^{\alpha_1}) \leq \max\{D(H), 3 - 2^{D(H)} + D(H) + 1\} \leq 2 \leq \alpha(G)$$

$\square$

اگر $D(H) < 3$ ؛ در نتیجه، اثبات کامل می‌گردد.

این‌گونه به نظر می‌رسد که می‌توان گزاره ۱.۴ را با حذف شرط «نسبت به هم اول بودن عامل‌ها» قوی‌تر کرد. به‌طور دقیق‌تر حدس زیر را ارائه می‌کنیم.

حدس ۱. اگر G و H گراف‌های همبند عادی باشند که نامتقارن نیستند، آنگاه $G \square H$ عادی خواهد بود.

این بخش را با بحثی درباره‌ی حدس ۱ به پایان می‌رسانیم. پس از بررسی مثال‌های متعدد و مکالمه‌ی شخصی با ویلفرد ایمریخ^۸، حدس دیگری را به‌صورت زیر مطرح می‌کنیم.

حدس ۲. اگر G و H گراف‌های همبند غیریکریختی باشند، آنگاه $D(G \square H) \leq D(G)D(H)$.

به این نکته توجه می‌کنیم که طبق قضیه ۷.۲، اگر G گرافی نامتقارن باشد، آنگاه حدس ۲ برای $G \square G$ برقرار نیست و اگر G متقارن باشد، آنگاه این حدس برای $G \square G$ برقرار است. همچنین، از آنجایی که عدد تشخیص حاصل ضرب‌های دکارتی گراف‌ها غالباً بسیار کوچک هستند، کران بالای فوق، ممکن است چندان مفید به‌نظر نرسد، اما برای منظور این مقاله کفایت می‌کند. به عبارت دیگر، بدیهی است که درستی حدس ۲، درستی حدس ۱ را نتیجه می‌دهد. علاوه‌برآن، طبق قضیه ۱۲.۲، ملاحظه می‌کنیم که اگر G و H گراف‌های همبندی با $|V(G)| \leq |V(H)|$ باشند به‌طوری‌که $G \square H \not\cong K_2^*$ ، آنگاه $G \square H$ غیرعادی است فقط اگر $|V(H)| > 2^{|V(G)|} - |V(G)| + 1$. این به آن معناست که اگر زوج (G, H) یک مثال نقض برای حدس ۱ باشد، آنگاه گراف H می‌بایست در مقایسه با G بسیار «بزرگ» باشد.

۵. گراف خط

در این بخش، مسئله‌ی اصلی مقاله را برای بعضی از گراف‌های خط مورد بررسی قرار می‌دهیم؛ به عبارت دیگر، گراف‌های خط برخی از خانواده‌های گراف‌ها را از دیدگاه عادی یا غیرعادی بودن مطالعه می‌کنیم. ابتدا توجه می‌کنیم که برای هر گراف G ، داریم $\alpha(L(G)) = \nu(G)$ ، که به ما در تعیین عادی یا غیرعادی بودن گراف‌های خط کمک می‌کند. ابتدا گزاره‌ی زیر را مشاهده می‌کنیم.

گزاره ۱.۵. گراف $L(K_n)$ عادی است اگر و تنها اگر $n \geq 6$ یا $n = 2$.

اثبات. اگر $n \geq 6$ ، آنگاه بنا بر گزاره ۹.۲، $D(L(K_n)) = 2$. از سویی دیگر، $\alpha(L(K_n)) = \nu(K_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. این نشان می‌دهد که به ازای $n \geq 6$ ، گراف $L(K_n)$ عادی است. برای جهت عکس، توجه داریم که $D(L(K_3)) = 3$ و $\alpha(L(K_3)) = 1$ درحالی‌که $D(L(K_4)) = D(L(K_5)) = 3$ و $\alpha(L(K_4)) = \alpha(L(K_5)) = 2$ ، که اثبات را کامل می‌کنند. $\square$

برای ادامه‌ی کار، تعریف می‌کنیم $\mathcal{A} = \{P_3, K_3, R, K_4, C_4, C_5, K_5\}$. با بررسی این گراف‌های کوچک، مطلب زیر مشاهده می‌شود.

$\square$

لم ۲.۵. گراف‌های خط گراف‌های موجود در $\mathcal{A}$ غیرعادی‌اند.

اینک گراف‌های خط گراف‌های پنجه‌آزاد را نسبت به خاصیت عادی بودن رده‌بندی می‌کنیم؛ به این ترتیب که نشان می‌دهیم اعضای $\mathcal{A}$ تنها گراف‌های همبند پنجه‌آزاد هستند که گراف خط آنها غیرعادی است.

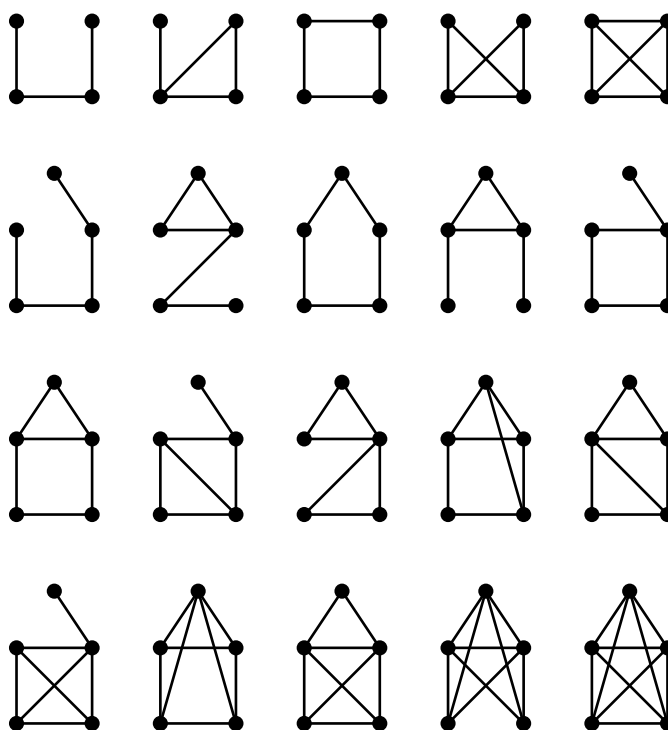
قضیه ۳.۵. فرض کنید G یک گراف همبند پنجه‌آزاد باشد. در این صورت $L(G)$ غیرعادی است اگر و تنها اگر $G \in \mathcal{A}$.

^۸Wilfried Imrich

اثبات. طبق لم ۲.۵، کافی است جهت «تنها اگر» را اثبات کنیم. فرض کنیم $G \notin \mathcal{A}$ یک گراف همبند پنجه‌آزاد باشد به طوری که $L(G)$ غیرعادی است. در این صورت، طبق قضیه ۱.۰۲، داریم $D(L(G)) = D'(G)$. از سویی دیگر، قضیه ۱.۱.۲ نتیجه می‌دهد که $D'(G) \leq 3$ ، که به این معناست که $D(L(G)) \leq 3$. فرض کنید T یک درخت فراگیر از G باشد. اگر $\beta(T) \geq 3$ ، آنگاه بنا بر قضیه کونینگ^۹ و لم ۴.۲ خواهیم داشت

$$3 \leq \beta(T) = \nu(T) \leq \nu(G) = \alpha(L(G)),$$

که نتیجه می‌دهد $L(G)$ عادی است و این تناقض است. همچنین اگر $\beta(T) = 1$ ، آنگاه G باید P_3 یا K_3 باشد که دوباره تناقض است. نهایتاً حالتی که در آن $\beta(T(G)) = 2$ ، مشتمل بر دقیقاً بیست گراف غیریکریخت است که در شکل ۲ نمایش داده شده‌اند. با بررسی همه‌ی این گراف‌ها مشاهده می‌کنیم که فقط گراف‌های R ، C_4 ، K_4 ، C_5 و K_5 دارای گراف‌های خط غیرعادی هستند. مجدداً این با فرض ما روی G در تضاد است. بنابراین حکم اثبات می‌شود. $\square$



شکل ۲. بیست گراف اشاره شده در اثبات قضیه ۲.۵

Figure 2: The twenty graphs discussed in the proof of Theorem 5.3

در نتیجه‌ی بعد، از مفهوم گراف‌های خط مکرر استفاده خواهیم کرد؛ به عبارت دیگر، نمادگذاری $L(G) = L^1(G)$ و $L^r(G) = L(L^{r-1}(G))$ ، برای هر $r \geq 2$ ، را در نظر می‌گیریم.

نتیجه ۴.۵. فرض کنید G گراف همبندی باشد که $L(G) \notin \{K_3, Q, R, C_4, K_4, C_5, K_5\}$. در این صورت، برای هر $r \geq 2$ ، گراف $L^r(G)$ عادی است مگر اینکه $L(G) = P_n$ ، که در این حالت نیز حکم به ازای $n \leq 3 + r$ برقرار است. $\square$

^۹Konig's Theorem

اکنون و به‌عنوان آخرین خانواده، مسئله را برای گراف‌های خطِ گراف‌های چندبخشی کامل در نظر می‌گیریم. به‌طور دقیق‌تر، یک شرط لازم و کافی برای عادی بودن این گراف‌ها ارائه می‌کنیم.

قضیه ۵.۵. فرض کنیم $G = K_{n_1^{j_1}, n_2^{j_2}, \dots, n_r^{j_r}}$ ، که در آن $n_1 > n_2 > \dots > n_r$ و، برای هر $i = 1, 2, \dots, r$ ، به تعداد j_i بخش از اندازه‌ی n_i وجود دارد. فرض کنیم $\Sigma = \sum_{i=1}^r j_i n_i + (j_1 - 1)n_1$ در این صورت $L(G)$ عادی است اگر و تنها اگر $n_1 \leq \Sigma$ ، مگر اینکه $G \cong R$ ، که در این حالت $L(G)$ غیرعادی است.

اثبات. توجه داریم که $L(R) \cong K_{2,2,1}$ ؛ پس بنا بر قضیه ۸.۳، $L(R)$ غیرعادی است. بنابراین، فرض می‌کنیم $G \not\cong R$. طبق قضیه ۱۰.۲، $D(L(G)) = D'(G)$. در نتیجه چون $\nu(G) \leq \alpha(L(G))$ ، گراف $L(G)$ عادی است اگر و تنها اگر یک رنگ‌آمیزی یالی تشخیص از G با $\nu(G)$ رنگ وجود داشته باشد. ابتدا فرض می‌کنیم $n_1 \geq \Sigma$. در این حالت $j_1 = 1$ و بنا بر قضیه ۳.۲، داریم $\nu(G) = \Sigma$. فرض کنید A تنها بخش گراف G از اندازه‌ی n_1 باشد. درجه‌ی هر رأس در A برابر است با Σ و در نتیجه می‌توان دید که یک رنگ‌آمیزی یالی تشخیص برای G ، با استفاده از همه‌ی Σ دنباله‌ی ممکن به طول Σ با عناصر متعلق به $\{1, \dots, \Sigma\}$ وجود دارد اگر و تنها اگر $n_1 \leq \Sigma$. بنابراین، حکم اثبات می‌گردد. اینک حالت مکمل $n_1 < \Sigma$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنید $n = |V(G)|$. در این صورت، طبق قضیه ۳.۲، کافی است نشان دهیم یک رنگ‌آمیزی یالی تشخیص از G با $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ رنگ وجود دارد. ابتدا توجه می‌کنیم که اگر n زوج باشد، آنگاه یک عدد صحیح z با شرط $0 \leq z \leq \frac{n}{4}$ وجود دارد به‌طوری‌که $n_1 = \frac{n}{4} - z$ و $\Sigma = \frac{n}{4} + z$ ؛ درحالی‌که اگر n فرد باشد، آنگاه یک z با شرط $0 \leq z \leq \frac{n-1}{4} - 1$ چنان وجود دارد که $n_1 = \frac{n-1}{4} - z$ و $\Sigma = \frac{n-1}{4} + z + 1$ ، $\nu(G) = \frac{n-1}{4}$ حکم را در حالتی‌که n فرد است اثبات می‌کنیم؛ اثبات برای حالت دیگر، به طریق مشابه صورت می‌گیرد. فرض می‌کنیم $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{n_1}\}$ یکی از بخش‌های G از اندازه‌ی n_1 باشد و بقیه‌ی رئوس G را با $b_1, b_2, \dots, b_{\frac{n-1}{4}+1+z}$ نمایش می‌دهیم. یک رنگ‌آمیزی یالی تشخیص از G با $\nu(G) = \frac{n-1}{4}$ رنگ به این صورت معرفی می‌کنیم: به ازای هر $1 \leq i \leq n_1$ ، یال‌های $\{a_i, b_1\}$ را با رنگ‌های $1, 2, \dots, \frac{n-1}{4}$ ، یال‌های $\{a_1, b_i\}$ را با رنگ‌های $1, 2, \dots, \frac{n-1}{4}$ ، یال‌های $\{a_i, b_i\}$ را با رنگ‌های $1, \dots, z+1$ رنگ می‌کنیم. همچنین، برای هر $1 \leq i \leq n_1$ و $2 \leq j \leq \frac{n-1}{4} + 1 + z$ ، یال‌های $\{a_i, b_j\}$ را با رنگ ۱ و برای هر $2 \leq i \leq n_1$ و $1 \leq j \leq \frac{n-1}{4} + 1 + z$ ، یال‌های $\{a_i, b_j\}$ را با رنگ ۲ رنگ می‌کنیم. درنهایت، همه‌ی یال‌های باقی‌مانده را با رنگ ۱ رنگ می‌کنیم. به‌راحتی می‌توان دید که این رنگ‌آمیزی، هر خودریختی از G را مجبور می‌کند که رئوس b_1 و a_1 را ثابت نگه دارند. بنابراین همه‌ی رئوس A توسط هر خودریختی از G ثابت نگه داشته می‌شوند. نتیجه می‌گیریم که این رنگ‌آمیزی یالی، تشخیص است و حکم اثبات می‌شود. $\square$

۶. نتیجه‌گیری

موضوع مهم و جالب توجه شکست تقارن گراف‌ها با رنگ‌آمیزی رئوس (یا یال‌های) گراف و نیز ارتباط آن با پارامترهای مهم گراف‌ها را مورد مطالعه قرار دادیم. در این راستا، مفهوم گراف‌های عادی و غیرعادی را با توجه به مقایسه‌ی عدد تشخیص و عدد استقلال گراف‌ها تعریف کردیم و دیدیم که این موضوع عمق قابل‌توجهی دارد و مسائل جالبی را در بر می‌گیرد. به‌عنوان نمونه‌ای از این مسائل، عادی یا غیرعادی بودن برخی از خانواده‌های گراف‌ها از قبیل درخت‌ها، دورها، گراف‌های چندبخشی کامل، گراف‌های جانسون تعمیم‌یافته، حاصل ضرب‌های دکارتی و گراف‌های خط بعضی از خانواده‌های گراف‌ها را مورد بررسی قرار دادیم. این رویکرد مجرد گرافی، همچنان مسائل باز زیادی دارد از جمله رده‌بندی خانواده‌های دیگری از گراف‌ها، یافتن خانواده‌های نامتناهی عادی یا غیرعادی جدید و حل حدس‌های مطرح‌شده در بخش ۴. علاوه‌برآن، با توجه به ماهیت مفهوم

معرفی شده، به نظر می‌رسد یافتن کاربردهایی از این مطالعه در شاخه‌های دیگر از جمله علم داده، یادگیری ماشین و سایر شاخه‌های علوم کامپیوتر می‌تواند دستاوردهای ارزشمندی را رقم بزند. به عنوان مثال، بسیاری از داده‌های پیچیده (از قبیل اطلاعات شبکه‌های اجتماعی) را می‌توان به صورت گراف‌هایی بزرگ نمایش داد و همان‌طور که در [۲۳] بحث شده است، یادگیری این گراف‌ها و توپولوژی آنها توسط ماشین و تحلیل آنها بسیار حائز اهمیت است. بنابراین، به نظر می‌رسد خاصیت‌های تقارنی و تعداد رنگ‌های مورد نیاز جهت شکست این تقارن‌ها، در فرایند یادگیری این گراف‌های بزرگ توسط ماشین، نقش مهمی ایفا کنند.

۷. تشکر و قدردانی

نویسندگان مقاله بر خود لازم می‌دانند از همکاری‌ها و کمک‌های فکری و معنوی گروه تحقیقاتی Graph Distinguishers در بخش ریاضی دانشگاه شیراز، به ویژه دکتر محمدحسن حقیقی، دکتر محمدهادی شکرریز و آقای امیرمحمد غضنفری صمیمانه تقدیر و تشکر نمایند.

مراجع

- [1] B. Ahmadi, F. Alinaghipour and M. H. Shekarriz, Number of distinguishing colorings and partitions, *Discrete Math.*, **343** no. 9 (2020) 13 pp.
- [2] M. O. Albertson and K. L. Collins, Symmetry breaking in graphs, *Electron. J. Combin.*, **3** no. 1 (1996) 17 pp.
- [3] S. Alikhani and S. Soltani, The distinguishing number and the distinguishing index of line and graphoidal graph(s), *AKCE Int. J. Graphs Comb.*, **17** no. 1 (2020) 1–6.
- [4] Bondy, J., Murty, U. & Others Graph theory with applications. (Macmillan London, 1976)
- [5] B. Bogstad, and L. J. Cowen, The distinguishing number of the hypercube, *Discrete Math.*, **283** no. 1-3 (2004) 29–35.
- [6] K. L. Collins and A. N. Trenk, The distinguishing chromatic number, *Electron. J. Combin.*, **13** no. 1 (2006) 19 pp.
- [7] M. N. Ellingham and J. Z. Schroeder, Distinguishing partitions and asymmetric uniform hypergraphs, *Ars Math. Contemp.*, **4** no. 1 (2011) 111–123.
- [8] D. Erwin and F. Harary, Destroying automorphisms by fixing nodes, *Discrete Math.*, **306** no. 24 (2006) 3244–3252.
- [9] E. Estaji, W. Imrich, R. Kalinowski, M. Pilśniak and T. Tucker, Distinguishing Cartesian products of countable graphs, *Discuss. Math. Graph Theory*, **37** no. 1 (2017) 155–164.
- [10] R. H. Hammack, W. Imrich and S. Klavžar, Product graphs: structure and recognition, Publisher: John Wiley & Sons. Inc., New York, 2000.
- [11] R. L. Hemminger, The group of an X -join of graphs, *J. Combinatorial Theory*, **5** (1968) 408–418.
- [12] W. Imrich and S. Klavžar, Distinguishing Cartesian powers of graphs, *J. Graph Theory*, **53** no. 3 (2006) 250–260.

- [13] W. Imrich, J. Jerebic and S. Klavžar, The distinguishing number of Cartesian products of complete graphs, *European J. Combin.*, **29** no. 4 (2008) 922–929.
- [14] W. Imrich, R. Kalinowski, F. Lehner and M. Pilśniak, Endomorphism breaking in graphs, *Electron. J. Combin.*, **21** no. 1(2014) 13 pp.
- [15] W. Imrich, S. Klavžar and V. Trofimov, Distinguishing infinite graphs, *Electron. J. Combin.*, **14** no. 1 (2007) 12 pp.
- [16] R. Kalinowski M. Pilśniak, Distinguishing graphs by edge-colourings, *European J. Combin.*, **45** (2015) 124–131.
- [17] R. Kalinowski, M. Pilśniak and M. Woźniak, Distinguishing graphs by total colourings, *Ars Math. Contemp.*, **11** no. 1 (2016) 79–89.
- [18] S. Klavžar, T.-L. Wong and X. Zhu, Distinguishing labellings of group action on vector spaces and graphs, *J. Algebra*, **303** no. 2 (2006) 626–641.
- [19] S. Klavžar and X. Zhu, Cartesian powers of graphs can be distinguished by two labels, *European J. Combin.*, **28** no. 1 (2007) 303–310.
- [20] C. Laflamme, L. Thé and N. Sauer, Distinguishing number of countable homogeneous relational structures, *Electron. J. Combin.*, **17** no. 1 (2010) 17 pp.
- [21] S. Martin, J. S. Powell and D. F. Rall, On the independence number of the Cartesian product of caterpillars, *Ars Combin.*, **60** (2001) 73–84.
- [22] M. Pilsniak, Improving upper bounds for the distinguishing index, *Ars Math. Contemp.*, **13** no. 2 (2017) 259–274.
- [23] X. Pu, T. Cao, X. Zhang, X. Dong and S. Chen, Learning to learn graph topologies. *Proceedings of the 35th International Conference on Neural Information Processing Systems*, Article no. 325 (2021) 4249–4262.
- [24] H. Schreiber, S. Hüning, J. Kloas, W. Imrich and T. Tucker, Distinguishing locally finite trees, *The Australasian Journal Of Combinatorics*, (2018).
- [25] M. H. Shekarriz, B. Ahmadi, S. A. Talebpour and M. H. Shirdareh Haghighi, Distinguishing threshold of graphs, *J. Graph Theory*, **103** no. 2 (2023) 359–377.
- [26] D. Sitton, Maximum matchings in complete multipartite graphs, *Furman University Electronic J. Undergraduate Math.*, **2** (1996) 6-16.
- [27] T. W. Tucker, Distinguishing maps, *Electron. J. Combin.*, **18** no. 1 (2011) 21 pp.
- [28] J. Tymoczko, Distinguishing numbers for graphs and groups, *Electron. J. Combin.*, **11** no. 1 (2004) 13 pp.

بهمن احمدی

بخش ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه شیراز، شیراز، ایران

bahman.ahmadi@shirazu.ac.ir

bahman.ahmadi@gmail.com

بهمن احمدی متولد ۱۳۶۱ در شهر زنجان و استادیار ریاضی دانشگاه شیراز است. وی دانش‌آموخته‌ی کارشناسی ریاضی محض از دانشگاه زنجان، کارشناسی ارشد ریاضی محض از دانشگاه صنعتی شریف و دکترای ریاضی از دانشگاه Regina (کانادا) است. علایق پژوهشی وی ترکیبیات و رمزنگاری است.



سید علیرضا طالبپور شیرازی فرد

بخش ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه شیراز، شیراز، ایران

seyed.alireza.talebpour@gmail.com

سید علیرضا طالبپور شیرازی فرد متولد ۱۳۷۴ در شهر شیراز است. وی دانش‌آموخته‌ی کارشناسی ریاضیات و کاربردها و کارشناسی ارشد ریاضی محض (گرایش جبر) از دانشگاه شیراز است. علایق پژوهشی وی نظریه‌ی گراف و رمزنگاری است.

