http://math-sci.ui.ac.ir

Journal of Mathematics and Society
ISSN (print): 2345-6493, ISSN (on-line): 2345-6507
Vol. 9 No. 2 (2024), pp. 31-47.

http://www.ui.ac.ir

MUSIC AND LINEAR ALGEBRA

MARZIYEH FELAHAT* AND JAVAD TAYYEBI

Abstract. Sound, with all its manifestations, presents itself as a form of energy with properties and capabilities that remain partially shrouded in mystery. The art of composing music, the artful assemblage and fusion of sounds, still lingers in a realm of obscurity, fraught with complexities. The techniques wielded by composers often stem from an intrinsic gift that defies replication or sharing. However, akin to other art forms, music can be deciphered through the lenses of mathematics and geometry. Through the utilization of linear algebra, a paramount mathematical discipline, a practical and efficient framework can be established for the comprehension and manipulation of musical compositions. Within this discourse, we delve into the essence of music and its fundamental principles, subsequently exploring the application of mathematical concepts; linear algebra in particular; in the analysis of music. The findings put forth in this manuscript hold the potential to enlighten researchers and enthusiasts within the realm of music and mathematical sciences, enhance comprehension and knowledge, refine and enhance analytical methodologies and musical procedures across various facets of the music industry, and foster a deeper bond between the realms of mathematics and artistic expression.

1. Introduction

Music, regarded as the art of conveying human emotions and inner states of beings, has captivated audiences since ancient times. Over the years, the intertwining of music and mathematics has sparked ongoing curiosity due to its intriguing nature. Drawing on their mathematical acumen and musical

Keywords: Music, melody matrix, note, linear algebra.

Communicated by Saeid Azam.

Article Type: Promotional Paper.

*Corresponding author.

Received: 18-10-2023, Accepted: 19-02-2024, Published Online: 28-05-2024.

Cite this article: M. Felahat and J. Tayyebi, Music and linear algebra, *Mathematics and Society*, **9** no. 2 (2024) 31–47.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.139462.1616 .

flair, composers have masterfully crafted a plethora of musical compositions. The harmonious blend of sounds, intricate patterns, and rhythmic frameworks imbue each genre of music with a unique and individualistic essence. Incorporating elements of linear algebra into music opens up avenues for developing analytical frameworks and fostering creativity in both the creation and reinterpretation of musical pieces. This article delves into the exploration of the correlation between music and linear algebra, aiming to deepen the comprehension of this exquisite art form.

2. Main Results

In music, linear transformations and analysis of melody matrices are powerful tools that aid musicians and music analysts in delving into the technical depth of melodies and sound patterns. For example, the Fourier transform allows us to decompose an audio signal into a combination of frequencies, which can be used for analysis and music production. In other words, these transformations enable us to create and examine various patterns of melodies and sounds. On the other hand, melody matrices provide musicians with the opportunity to mathematically model melodies and better understand the connections between notes and musical pieces. By using these matrices, musicians can identify different patterns and rules of melodies and utilize them to create new and inventive musical compositions. As a result, the analysis of melody matrices and linear transformations equip musicians with powerful tools for creating and performing precise and diverse music.

Linear equations in mathematics and linear algebra are powerful tools for describing and analyzing various phenomena and systems. In music, linear equations allow us to determine how a combination of different sounds and frequencies can come together to create a final sound. In composition, a system of linear equations is used to determine the weight and proportion of different sounds within a scale. Generally, to convert a melody into a system of linear equations, we need to represent different parameters of the melody with linear equation variables. By defining these parameters, we can describe musical patterns and structures through the combination of various linear equations. For instance, if we have a simple melody composed of notes A, B, C, and D, we can assign each note to a linear equation variable. For example, use x_1 for note A, x_2 for note B, and so on. By using these defined variables, we can create linear equations. By combining these equations and using linear algebra methods, we can analyze different musical patterns and create a more precise and mathematical expression of musical structures. In music analysis and rhythm prediction, various linear algebra methods such as principal component analysis, independent component analysis, linear regression, etc., are used to extract and identify musical patterns and features. For example, linear regression allows us to examine the relationship between a dependent variable (such as a musical pattern) and several independent variables (like musical features). By utilizing linear equations and matrices, we can analyze the relationships between variables and predict future musical patterns using regression coefficients. Another linear algebra method used for analyzing and predicting musical rhythms is the use of linear differential equations. With these equations, we can investigate temporal changes and

 http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.139150.1606

intervals between notes, analyze rhythmic and repetitive patterns. For example, if a musical rhythm involves temporal changes between consecutive notes, we can represent these changes using a set of linear differential equations. These methods help us identify hidden patterns within musical data and gain a deeper understanding of musical structure and rules.

3. Conclusions

This article delves into exploring the fundamental concepts of music and elucidates the relationship between music and linear algebra. The utilization of linear algebra models empowers music analysts to delve more precisely into the internal structures of musical pieces and analyze them. These models are constructed based on geometrical and algebraic concepts, and by maintaining harmonic connections between pieces, they enable us to dissect the structure of music in a more accurate manner. For further reading on this topic, the interested reader is referred to the articles [1, 2, 3].

References

[1] E. Amiot, *Music through Fourier space*, Springer International Publishing Switzerland, 2016.

[2] R. D. De Veaux and P. F. Velleman, Math is music, *Amstat News*, (2008) 54–57.

[3] T. J. Hamilton, J. Doai , A. Milne, V. Saisanas, A. Calilhanna, C. Hilton, M. Goldwater and R. Cohn, Teaching mathematics with music: A pilot study, *In 2018 IEEE International Conference on Teaching, Assessment, and Learning for Engineering (TALE)*, (2018) 927–931.

Marziyeh Felahat
Department of Basic Sciences, Bozorgmehr University of Qaenat, Qaen, Iran
Email: m_felahat@buqaen.ac.ir

Javad Tayyebi
Department of Industrial Engineering, Birjand University of Technology, Birjand, Iran
Email: javadtayyebi@birjandut.ac.ir

ریاضی و جامعه
شاپا (چاپی): ۲۳۴۵-۶۴۹۳، شاپا(الکترونیکی): ۲۳۴۵-۶۵۰۷
جلد ۹، شماره ۲ (۱۴۰۳)، صص. ۳۱-۴۷

http://math-sci.ui.ac.ir
نشریه علمی دانشگاه اصفهان
http://www.ui.ac.ir

موسیقی و جبرخطی

مرضیه فلاحت * و جواد طیبی

چکیده. صدا در همه اشکالش، منبعی از انرژی است که هنوز تمام ویژگی‌ها و توانایی‌های آن کاملاً شناخته نشده است. ترکیب‌بندی موسیقی و روش گردآوری و تلفیق صداها، همچنان روشی مبهم و ناشناخته با ابهامات زیاد به شمار می‌رود. روش‌هایی که آهنگ سازان به کار می‌برند، معمولاً استعدادی ذاتی است که قابل استفاده و به اشتراک‌گذاری برای دیگران نیست. اما، همانند انواع دیگر شاخه‌های هنر، موسیقی نیز قابل تفسیر با ریاضیات و هندسه است. با استفاده از جبر خطی، به‌عنوان یکی از مهم‌ترین شاخه‌های ریاضیات، می‌توان ساختار داده‌ای عملی و کاربردی برای تجزیه و تحلیل و دستکاری موسیقی به‌دست آورد. در این مقاله ابتدا موسیقی و مفاهیم پایه‌ای آن‌را توضیح داده و سپس به‌بررسی نحوه استفاده از مفاهیم ریاضی و به‌ویژه جبرخطی در تحلیل موسیقی می‌پردازیم. نتایج این مقاله می‌تواند برای محققان و علاقه‌مندان به حوزه‌های مرتبط با موسیقی و علوم ریاضی، افزایش دانش و فهم، اصلاح و بهبود روش‌های تحلیل و فرآیندهای موسیقی در بخش‌های مختلف صنعت موسیقی و ارتباط قوی‌تر میان ریاضیات و هنر به ارمغان آورد.

۱. مقدمه

موسیقی از جمله موضوعاتی است که هنوز درک و هوش انسان بر دلیل زیبایی آن تسلط کامل ندارد. موسیقی، هنر بیان احساسات به وسیله اصوات است که حالت درونی انسان و موجودات زنده را متحول می‌کند. ارسطو موسیقی را یکی از شاخه‌های ریاضیات دانسته است، ولی چون همه‌ی ویژگی‌های موسیقی مانند ریاضی مسلم و غیرقابل تغییر نیست و ذوق و قریحه سازنده و نوازنده در آن دخالت دارد، آن‌را هنر نیز می‌نامند. همچنین موسیقی، به عنوان «ترکیب معناداری از صداها» تعریف شده است [۱۱]. این ترکیب‌ها توسط مهندسان صدا که به آهنگ سازان معروف هستند، تولید می‌شوند. آن‌ها در طول تاریخ، همانند مهندسان دیگر رشته‌ها، قطعات موسیقی متعددی ساخته‌اند. این آهنگسازان علاوه بر مهارت نوازندگی، توانایی ساختاربندی آنچه را که نواخته اند و ایجاد نمایش‌های منحصربفرد با استفاده از تخیل و خلاقیت خود را دارند [۱۳]. بسیاری از افراد می‌توانند ساز بنوازند اما تعداد اندکی قادر به آهنگ سازی هستند. زیرا آهنگ سازان علاوه بر استعداد موسیقی، دانش ریاضی و تحلیل قوی دارند. به همین دلیل، روش‌های آهنگ سازی آن‌ها به‌عنوان یک استعداد ذاتی مورد توجه قرار گرفته که به‌راحتی برای همگان قابل تسلط نیست. در واقع، آهنگ سازان به‌طور مداوم نوعی روش تأثیرگذار (ترکیبی از دانش و استعداد موسیقی) در هنگام ساخت قطعات موسیقی استفاده می‌کنند. الگوهای ریتمیک یا هارمونی‌های خاصی که در قطعات موسیقی آن‌ها ظاهر می‌شوند، به‌عنوان سبک آن‌ها شناخته می‌شوند [۱]. می‌توان مشاهده کرد که در قطعات موسیقی الگوها یا

عبارات و کلمات کلیدی: موسیقی، ماتریس ملودی، نت، جبرخطی.
دبیرتخصصی رابط: سعید اعظم
نوع مقاله: ترویجی
تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۷/۲۶ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۱۱/۳۰ تاریخ انتشار آنلاین: ۱۴۰۳/۰۳/۰۸
ارجاع به مقاله: م. فلاحت و ج. طیبی، موسیقی و جبرخطی، نشریه ریاضی و جامعه، ۹ شماره ۲ (۱۴۰۳) ۳۱-۴۷.
http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.139462.1616 .

هندسه‌های ریاضی معناداری وجود دارد که ویژگی‌های آن‌را نشان می‌دهد. سبک‌های موسیقی را می‌توان با الگوهای متفاوت ریاضی در رفتارشان از یکدیگر متمایز ساخت. به‌عنوان مثال در یک آهنگ رگی (یک نوع از موسیقی)، آکوردهای [۱] گیتار در تمام قطعه تکرار می‌شوند و در یک آهنگ پراگرسیو متال آکوردها به شکل بسیار متنوعی استفاده می‌شوند. تنوع الگوها نشان‌دهنده‌ی وجود روش‌های آهنگ سازی بی‌شمار است [۶].

در سال‌های اخیر، مطالعات فراوانی در زمینه‌ی تأثیر ریاضیات در موسیقی و تفسیر آن، انجام شده است [۱۵، ۷]. جبرخطی، یکی از زیرمجموعه‌های مهم ریاضیات است که برای تحلیل ساختارها و الگوها استفاده می‌شود. فراهم آوردن فهم عمیق‌تری از مفاهیم و اصول جبرخطی در موسیقی، امکان دستیابی به الگوریتم‌ها و روش‌های مناسب برای تولید، تحلیل و بازسازی آثار موسیقی را فراهم می‌کند. به‌علاوه، این فهم عمیق می‌تواند بهینه‌سازی در زمینه‌های مختلف مانند تولید موسیقی هنری و مدرن، تحلیل صوتی و بازسازی آثار قدیمی را فراهم کند.

در این مقاله به تشریح ارتباط موسیقی و جبرخطی می‌پردازیم. سازماندهی بخش‌های مقاله به شرح ذیل است. بخش ۲ به معرفی مفاهیم اولیه موسیقی می‌پردازد. بخش ۳، کاربردهای جبرخطی در موسیقی و بخش ۴، مدل‌سازی موسیقی با جبرخطی را معرفی می‌کند. در بخش ۵، ماتریس ملودی در موسیقی تحلیل و در بخش ۶، استفاده از معادلات خطی برای بیان ساختار موسیقی تشریح می‌شود. بحث و نتیجه‌گیری در بخش ۷ انجام می‌گیرد.

۲. مفاهیم اولیه

آهنگ ساز در ساختن موسیقی، صداها و عوامل صوتی را به کار می‌بندد. صدا، پدیده‌ای است که در نتیجه ارتعاش یک جسم تولید می‌شود و ما در دستگاه شنوایی‌مان آن‌را با فعل و انفعال فیزیولوژیک درک می‌کنیم.

برای تجزیه و تحلیل صدا و موسیقی، باید مجموعه‌ای از صداهای اصلی را پیدا کنیم که بتوان آن‌ها را با هم ترکیب و صداهای دیگر تولید نمود. برای این منظور، ابتدا به نحوه عبور صداها در هوا و اینکه گوش هنگام دریافت صدا چه واکنشی نشان می‌دهد می‌پردازیم. صداها توسط ارتعاشاتی که باعث انتشار در فشار هوا می‌شود، تولید می‌شوند. اگر هنگام صحبت کردن انگشتان خود را روی گلوی خود بگیرید، می توانید لرزش حنجره خود را احساس کنید. هنگامی که یک کمان روی یک رشته کشیده می‌شود، سیم به ارتعاش در می‌آید. همچنین این ارتعاشات را می‌توان هنگام ایستادن در کنار بلندگوی در حال استفاده احساس کرد. این تغییرات در فشار هوا از منبع صدا به گوش منتقل شده، در آنجا پردازش شده و درنهایت به مغز ارسال می‌شود. تغییرات فشار هوا باعث لرزش پرده‌های گوش شده و نیز مقداری مایع در گوش داخلی به اطراف می‌چرخد. این مایع یک غشای مویی را احاطه کرده و در یک محفظه مخروطی محصور شده است. تغییر در فشار هوا باعث انتشار امواج با اشکال متفاوت در مایع می‌شود. از آنجایی که محفظه حاوی غشاء مخروطی است، برخی از امواج بیش‌تر از بقیه در طول غشاء حرکت کرده و موهای مختلف را تحریک می‌کنند. این موها به نورون‌هایی که اطلاعات را به مغز منتقل می‌کنند متصل هستند. به‌عنوان مثال این تغییرات در یک نقطه از غشاء را می‌توان توسط معادله‌ی دیفرانسیل $\frac{d^۲y}{dt^۲} = -ky$ بیان کرد که در آن t زمان و y فاصله آن نقطه تا مرکز مخروط است. راه‌حل‌های این معادله دیفرانسیل یک ایده‌ی کلی برای درک صداها فراهم می‌کند.

۱.۲. موسیقی و قوانین آن. موسیقی یک هنر و علم است که از سال‌های بسیار قدیم در تمامی فرهنگ‌ها و اجتماعات حضور داشته است. این هنر به وسیله‌ی ترکیب و سازش بین صداها و ریتم‌ها ایجاد می‌شود و از طریق احساسات و هیجانات، به مخاطبان خود انتقال داده می‌شود. تاریخچه موسیقی به‌صورت گسترده‌ای به عقب می‌رود، از آنجا که نمی‌توان به‌طور دقیق تاریخ ابتدایی این هنر را تعیین کرد. با این‌حال، نخستین آثار موسیقیایی از خطوطی روی سنگ‌ها و استفاده از سازهای ساده

[۱] نواختن همزمان چند نت با هم

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.139462.1616

در دوره‌های تاریخی باستانی چون دوره مصر باستان و خاورمیانه قدیمی به‌دست آمده‌اند. در مبحث نظریه ی موسیقی، صدا دارای ویژگی‌های زیر است [۸]:

۱. نواک: زیر و بمی و یا ارتفاع صوت از نظر موسیقیایی نواک [۲] نامیده می‌شود. مثلاً صدای مردان از صدای زنان یا کودکان بم‌تر است.

۲. دیرند: مدت زمانی را که هر صدای موسقیایی ادامه می‌یابد دیرند [۳] گویند. روشن است که یک آهنگ موسیقی از صداهایی تشکیل شده که ارزش‌های زمانی متفاوتی دارند، یعنی برخی کوتاه‌تر و برخی کشیده‌تر هستند. در موسیقی دیرندهای مختلف را با شکل مخصوص در هر نت نشان می‌دهند.

۳. شدت: مقدار یا درجه‌ی شدت (قوّت و ضعف) که به موسیقی داده می‌شود تا حالت پیدا کند را شدت یا نوانس [۴] می‌نامند.

۴. شیوش: کیفیت و یا رنگ هر صوت را شیوش [۵] می‌نامند. این خصوصیت شنونده را قادر می‌سازد تا دو صدای کاملاً یکسان را که دارای نت و فرکانس یکسان هستند، از هم تمایز دهد. مثلاً وقتی با دو ساز گیتار و پیانو، نت‌های یکسانی با ریتم و فرکانس یکسان نواخته شود با استفاده از رنگ صدای آن‌ها می‌توان تشخیص داد که کدام یک صدای گیتار و کدام یک صدای پیانو است.

در موسیقی تقسیمات مساوی زمانی داریم که کوچک‌ترین واحد زمانی در موسیقی ضرب [۶] نام دارد. هرگاه حداقل دو یا چند ضرب در کنار هم قرار گیرند تشکیل یک میزان [۷] می‌دهند. پس میزان نیز، یکی از تقسیمات مساوی زمانی است که در دل خود نت‌هایی با ضرب‌های برابر را جای می‌دهد. تقسیم‌بندی به‌صورت مساوی نت‌ها و ضرب‌های موسیقی فواید و اهداف بسیاری دارد. یکی از این اهداف، رعایت صحیح ریتم قطعه است. با این تقسیم‌بندی مساوی می‌توانید به خوبی ریتم قطعه را به کمک ضرب‌پا تشخیص داده و رعایت کنید. از فواید میزان‌ها می‌توان به نظم و ترتیب نت‌های موسیقی اشاره کرد که باعث خوانایی بهتر برای نوازنده شده و می‌تواند به خوبی نت‌ها و ضرب‌ها را از یکدیگر تشخیص دهد.

میزان‌ها به وسیله خط میزان (خطوط عمودی) از یکدیگر جدا می‌شوند، یعنی خط میزان‌ها دقیقاً در جایی قرار می‌گیرند که از نظر ارزش زمانی ضرب‌ها و نت‌ها را به دسته‌هایی برابر تقسیم کند. اگر به یک قطعه موسیقی نگاه کنید و دیرندهای نت‌های هر میزان را با هم جمع کنید متوجه می‌شوید که دیرند و تعداد ضرب‌های همه‌ی میزان‌ها با هم برابر است. برای درک بیشتر به شکل ۱ توجه کنید.

شکل ۱. نمایش ساختار موسیقی

Figure 1: Show the structure of music

در شکل ۱ به تعداد ۴ میزان و در هر میزان ۲ ضرب وجود دارد. مشاهده می‌کنید که تعداد ضرب‌های هر ۴ میزان با هم برابر است. از طرفی اگر دیرند نت‌ها را نیز با هم جمع کنید، ملاحظه می‌کنیم آن‌ها نیز با هم برابر هستند. توجه داشته باشید که تعداد ضرب‌ها ربطی به تعداد نت‌ها ندارد.

[2]Pitch [3]Duration [4]Nuance [5]Tuning [6]Beat [7]Bar

تعریف ۱.۲. تکرار متناوب یک رشته دیرندهای گوناگون را وزن [۸] می‌نامند. این دیرندها می‌توانند از صوت (صرف‌نظر از نواک‌شان) یا سکوت تشکیل شده که در حالت ساده خود دارای دوره تناوبی در فضای یک میزان و گاه بیش از یک میزان متجلی می‌شوند.

تعریف ۲.۲. نشانه‌ی دیگر تعیین کننده‌ی وزن در هر آهنگ یا قطعه موسیقی کسر میزان [۹] است. در شروع خطوط حامل کنار کلید سل همیشه دو عدد به‌صورت کسری نوشته می‌شوند، که به آن کسر میزان می‌گویند. وظیفه‌ی کسر، میزان دادن اطلاعات در مورد قطعه موسیقی می‌باشد. در کسر میزان عدد بالایی همیشه تعداد ضرب‌های هر میزان را نشان می‌دهد.

تعریف ۳.۲. به فاصله‌ی بین دو نت هم‌نام متوالی اکتاو [۱۰] می‌گویند. تعدادی اصوات پی‌درپی که با فاصله‌های معین و حساب شده به‌دنبال هم قرار می‌گیرند و آخرین نت آن، اکتاو بالایی نت اول باشد را گام [۱۱] می‌نامند. عوامل تعیین کننده هر گام، تعداد اصوات پیاپی و نیز فاصله میان آن‌ها است.

تعریف ۴.۲. سرعت اجرای یک قطعه موسیقی یا قسمتی از آن که از بسیار بسیار کند تا بسیار بسیار تند گسترش می‌یابد را، تمپو [۱۲] می‌نامند.

احساس حرکت در موسیقی را ریتم می‌نامند که تاکیدی قابل ملاحظه بر نظم تکراری و دورانی و نیز اختلاف قوت و ضعف ضرب‌ها از آن درک می‌شود. دو عامل نظم و اختلاف در بسیاری از پدیده‌های طبیعی مانند تنفس، ضربان قلب، حرکت آب دریا و دوره‌های چند زمانه مانند دوره شبانه‌روز، گردش سال و ... دیده می‌شود. تعداد صداهای موسیقی که پی‌درپی و بیشتر در یک بخش اجرا یا شنیده شوند، ملودی نامیده می‌شود.

بی‌شک موسیقی بدون قوانین و قواعد ثابت نمی‌تواند به‌عنوان یک هنر استوار و نظم بخش شناخته شود. قوانین موسیقی به‌عنوان نیروی مهمی در پیچیدگی و زیبایی موسیقی عمل می‌کنند. از جمله قوانین موسیقی عبارتند از [۹]:

۱. قانون هارمونی: هارمونی در موسیقی به معنای هماهنگی در ترکیب صداها، به‌منظور تولید اثری آرامش‌بخش و هماهنگ است. این قانون مشتمل بر استفاده از آکوردها، انتخاب صداهای سازها و هماهنگی درست بین آن‌ها می‌باشد.
۲. قانون ریتم: ریتم زمان‌بندی الگوی تکراری، اندازه‌گیری سرعت و تعداد ضربان‌ها در موسیقی است. ریتم در ساختار آهنگ و تأثیرگذاری بر حرکت و احساسات شنونده نقش مهمی دارد.
۳. قانون ملودی: ملودی عبارت است از ترکیب صوت‌ها برای ایجاد الگوها و نوایی در موسیقی. ملودی در موسیقی به‌طور کلی از لحن و انتخاب صدای هر سازی تشکیل می‌شود و داشتن ملودی قوی به تأثیرپذیری و خوشایندی آهنگ کمک می‌کند.
۴. قانون تناسب: در موسیقی، تناسب بین اجزای مختلف آهنگ و هارمونی بین آن‌ها اهمیت دارد. همچنین، بالانس صداها و استفاده مناسب از دینامیک (شدت صدا) نیز استواری و کیفیت کار را تعیین می‌کند.
۵. قانون تکرار و تنوع: استفاده از تکرار و تنوع در ساختار آهنگ در جذب شنونده تأثیر بسزایی دارد. تکرار الگوهای برجسته و تنوع در بخش‌های موسیقی می‌تواند جذابیت و جذبه اثر را بیشتر کند.
۶. قانون ارتباطات موسیقیایی: در موسیقی، ارتباطات بین اجزا و واکنش‌های صوتی به یکدیگر نقش مهمی دارد. این ارتباطات می‌توانند شامل تناوب، پیوستگی و تعامل بین صداها بوده و به ایجاد ترنم و تنظیم بخش‌های مختلف آهنگ کمک می‌کنند.

[8]Time [9]time signature [10]Octave [11]Gamme [12]Tempo

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.139462.1616

قوانین موسیقی که در بالا ذکر شده‌اند، مهمترین اصولی هستند که در ساختارهای موسیقی وجود دارند. رعایت این قوانین برای هر آهنگساز، تنظیم‌کننده و نوازنده حیاتی است؛ زیرا به آن‌ها اجازه می‌دهد تا آثاری بیشتر از لحاظ فنی و همچنین جذابیت هنری ایجاد کنند. همچنین، این قوانین در حفظ تنوع و پویایی هنر موسیقی مؤثر هستند و هنرمندان را در مقابل تکرار و ناهنجاری‌های بی‌قانون که ممکن است جذابیت و کیفیت هنر را کاهش دهند، محافظت می‌کنند.

۲.۲. ارتباط مفاهیم موسیقی با ریاضیات. اگر چه موسیقی و ریاضیات دو حوزه‌ی مستقل به‌نظر می‌رسند، اما این صنعت به‌طور هوشمندانه با استفاده از مفاهیم و اصول ریاضی، نوآوری‌هایی بی‌سابقه خلق نموده است. ارتباط موسیقی و ریاضیات به دوره فیثاغورث برمی‌گردد [۴]. وی به درک ریاضیاتی از صداهایی که به موسیقی تبدیل می‌شدند، دست یافت. مدل‌سازی تصادفی، یکی از اولین نوع ترکیب موسیقی و ریاضیات است.

در سال‌های اخیر، مطالعات فراوانی برای بررسی و تحلیل تأثیر ریاضیات در علوم مختلف انجام گرفته است و از جمله دشوارترین نقاط مطرح، تأثیر ریاضیات در فرآیند خلق موسیقی و تفسیر آن است. از جمله زوایای مختلف ارتباط بین مفاهیم موسیقی و ریاضیات عبارتند از:

- تناسب‌ها و نسبت‌ها: تناسب‌ها و نسبت‌ها از جمله مفاهیمی هستند که هم در ریاضیات و هم در موسیقی به‌کار می‌روند. در ریاضیات، اصول انتقال و توزیع تناسب‌ها بسیار مهم هستند. در موسیقی نیز، تناسب‌ها با نام‌گذاری آکورد و تنظیم صداها، توزیع نت‌ها در مقیاس و ایجاد هارمونی‌های متناسب مورد استفاده قرار می‌گیرند.
- پتانسیل هارمونیک: در ریاضیات، تحلیل توابع و سری‌های فوریه بر اساس تحلیل توابع هارمونیکی بسیار رایج است. هر تابع می‌تواند به‌صورت یک سری هارمونیک با ترکیبی از فرکانس‌ها و نسبت‌های مختلف نوشته شود. در موسیقی نیز از هارمونیک‌ها در تولید صداها و ساختار موسیقی استفاده می‌شود.
- مقیاس‌ها و الگوها: ریاضیات به ما امکان می‌دهد الگوها و ساختارهای مختلف را تجزیه و تحلیل کنیم. در موسیقی نیز، مقیاس‌ها و الگوهای مختلف استفاده می‌شوند که از طریق توالی نت‌ها و فرکانس‌های متفاوت تشکیل می‌شوند.

جبرخطی، یکی از شاخه‌های مهم ریاضیات است که در آن از قوانین و قواعد منطقی برای تحلیل ساختارها و الگوها استفاده می‌شود. موسیقی نیز، به‌عنوان یک سازنده الگوها و ساختارهای صوتی، نه تنها قوانین جبرخطی را برای ساخت و تفسیر آثار مورد استفاده قرار می‌دهد، بلکه به وسیله این قوانین می‌تواند به‌طور خلاقانه و نوآورانه ریتم‌ها، آکوردها و ملودی‌هایی ایجاد کند که از طریق آن احساسات، افکار و حتی پیام‌های عمیق را منتقل کند.

دیدگاه جبرخطی در موسیقی، از قرن ۱۷ میلادی رواج یافت و تأثیر قابل ملاحظه‌ای در توسعه‌ی موسیقی کلاسیک و نوین داشته است [۱۰، ۲]. بر اساس اصول جبرخطی، می‌توان آثار موسیقی را مدل‌سازی کرد. این مدل‌سازی به‌طور خاص برای تفسیر سازمان‌دهی موسیقی‌های پیچیده و همچنین تجزیه و تحلیل اثر بازگشتی، ضربه و انعکاس صدا، تکرار و تکامل سوالات بسیاری را مطرح می‌کند.

علاوه بر این، جبرخطی در موسیقی می‌تواند بهینه‌سازی در زمینه‌های مختلف اعم از تولید موسیقی، تحلیل صوتی، بازسازی آثار قدیمی و ایجاد موسیقی امروزی را فراهم آورد. از این‌رو، فهم عمیق‌تری از مبانی و مفاهیم جبرخطی در موسیقی، ما را به طرح و تدوین روش‌ها و الگوریتم‌های مبتنی بر ریاضیات سیستماتیک متقابل نزدیک‌تر می‌سازد. به‌عنوان مثال مفاهیمی مانند تابع، ماتریس، اعداد صحیح، تقارن و $\cdots$ در هر دو حوزه مورد استفاده قرار می‌گیرند.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.139462.1616

۳. کاربردهای جبرخطی در موسیقی

ارتباط بین مدل‌های جبرخطی و فضاهای موسیقایی نخستین‌بار توسط موسیقیدان و نظریه‌پرداز آلمانی، هاینریش شنکر مورد مطالعه قرار گرفت [۵]. شنکر با استفاده از اصول جبرخطی و تحلیل موسیقی، شیوه‌هایی برای بررسی و توصیف ساختار داخلی قطعات موسیقی به‌دست آورد. از آنجاکه روابط جبری و هندسی اساساً قابل جابجایی هستند، یعنی برای به‌دست آوردن یک ایده یا رویکرد شهودی می‌توان یک فرمول جبری یا قضیه جبری را به‌صورت هندسی بیان کرد و برعکس، با استفاده از جبرخطی نیز می‌توان ایده‌های جدید از مدل‌های ریاضی–موسیقایی را برای مفاهیم هندسی و جبری بیان کرد. یکی از مفاهیم پایه‌ای جبرخطی بردار و فضاهای برداری است. بردارها می‌توانند انواع مختلفی از اشیا باشند که وقتی به صورت خطی ترکیب می‌شوند یک فضای برداری به‌وجود می‌آورند. در ریاضی بردار را می‌توان نیرو، جهت، موقعیت، دستگاه معادلات خطی و توابع عددی و ... تعریف کرد. به‌عنوان مثال، یک فیزیکدان ممکن است از بردار برای نشان دادن تعداد کل نیروهای وارد شده بر یک جسم معین (مانند یک موشک) استفاده کند. در این‌حالت از بردارهای رو به بالا برای نمایش نیروی رانش موشک و از بردارهای رو به پایین برای نمایش نیروهای گرانش و اصطکاک استفاده می‌شود. در این‌صورت، فیزیکدانان می‌توانند این بردارها را با رسم پیکان‌هایی روی محور دکارتی که در آن طول هر پیکان نشان‌دهنده بزرگی نیرو و جهت پیکان، جهت نیرو را نشان می‌دهد، نمایش دهند. به‌علاوه، این نمایش برداری به فیزیکدان اجازه می‌دهد تا با تغییر ریاضی در نیروها، نیروی خالص را تعیین کرده یا نیرو و جهتی را که برای قرار دادن موشک در مدار لازم است محاسبه کند.

به‌طور مشابه می‌توان از بردارها برای توصیف عناصر پایه‌ای موسیقی استفاده کرد. یعنی یک بازه از نت‌های موسیقی را به‌صورت بردار در نظر گرفت. در تولید صداها و افکت‌های صوتی از ماتریس‌ها استفاده می‌شود. با استفاده از ماتریس‌ها می‌توانیم وزن و شدت صداهای مختلف را تنظیم و صداهای خاصی را تولید کنیم. همچنین، ماتریس‌ها می‌توانند در تحلیل صداها و تشخیص الگوهای موسیقی منحصر به فرد نیز مورد استفاده قرار گیرند.

۱.۳. تحلیل نت‌ها و سیستم‌های هارمونیک. برای همه صداهای موسیقی از بم‌ترین تا زیرترین آن‌ها هفت نام؛ دو، ر، می، فا، سل، لا و سی وجود دارد. این نام‌های هفت‌گانه در برخی کشورهای غربی با کلمات تک هجایی، و در برخی به شکل الفبایی تلفظ می‌شوند. وسعت صداهای اصلی موسیقی متجاوز از ۶۰ صوت را در بر می‌گیرد. در واقع در این پهنه‌ی گسترده پس از هفتمین نت، تمام آن‌ها از آغاز تکرار می‌شود. به‌عبارت دیگر، در ادامه‌ی پهنه اصوات موسیقی همواره پیش از هر نت «دو»، نت «سی» و پس از هر نت «سی»، نت «دو» قرار دارد. تحلیل نت‌ها فرآیندی است که در آن اجزای صداها به‌صورت هارمونیک بازنمایی می‌شوند، به این‌صورت که هر نت می‌تواند به یک تعدادی هارمونیک در اطراف فرکانس اصلی تجزیه شود. فرکانس هر هارمونیک تناسبی روی فرکانس نت اصلی دارد که با استفاده از تراز صحیح فرکانس‌ها محاسبه می‌شود. این نسبت‌ها به‌عنوان نماینده‌های شناخته شده برای نوعی ساز معین استفاده می‌شوند. تحلیل هارمونیک‌ها در مورد سیستم‌های صوتی متناوب مانند سیم‌ها، لوله‌ها و سازهای موسیقی اطلاعات مفیدی از جمله درک رنگ و کاراکترهای مختلف سیستم‌ها را ارائه می‌دهد. سیستم‌های هارمونیک در موسیقی عموماً به‌عنوان چهارگانه‌ها شناخته می‌شوند. این چهارگانه شامل اصلی‌ترین هارمونیک که نت اصلی را تشکیل می‌دهد، هارمونیک اول که دو برابر فرکانس اصلی است، هارمونیک دوم که سه برابر فرکانس اصلی است و هارمونیک سوم که چهار برابر فرکانس اصلی است، می‌باشند. تحلیل سیستم هارمونیک برای موسیقیدانان و آهنگسازان بسیار مهم است زیرا با تحلیل سیستم هارمونیک، می‌توانند فرکانس‌ها و نسبت‌های مختلفی را مورد استفاده قرار داده و صداهای متناسب و هارمونیک تولید کنند. هارمونیک‌ها در موسیقی نه تنها برای ایجاد صداهای زیبا و پرکشش، بلکه برای ایجاد هارمونی طبیعی و مطلوب به کار می‌روند.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.139462.1616

۲.۳. فضای موسیقی و تبدیلات خطی. فضای موسیقی معمولاً به مجموعه‌ای از نت‌ها و سازهای مختلف اشاره دارد که ترکیبی از صداها را تشکیل می‌دهند. فضای موسیقی می‌تواند به شکل یک فضای برداری در نظر گرفته شود که در این فضا هر نت و ساز معادل یک بردار در فضای برداری است. تبدیل‌های خطی در ریاضیات و جبرخطی کابرد زیادی دارند. در موسیقی نیز، تبدیلات خطی مثل تبدیل فوریه و تبدیل کسینوس، برای تحلیل و سنتز صداها استفاده می‌شوند. این تبدیلات خطی به ما امکان می‌دهند تا صداها را به ترکیبی از فرکانس‌های مختلف تجزیه یا با استفاده از تراز صحیح، فرکانس‌های خاصی را تغییر دهیم. هر تبدیل خطی معادل یک ماتریس در ریاضیات است. این ماتریس ممکن است برای توصیف تبدیلات موسیقی مورد استفاده قرارگیرد. تبدیلات خطی می‌توانند با استفاده از عملیاتی مانند جمع و ضرب در اعداد صحیح، تبدیل نت‌ها و سازها را تغییر دهند. این عملیات می‌تواند نت‌ها را به سمت بالا یا پایین منتقل کند، آن‌ها را در زمان تغییر دهد یا حتی نت‌ها را در تساوی پیچیده قرار دهد. با استفاده از تبدیلات خطی، موسیقیدانان می‌توانند نت‌ها و صداها را تغییر داده و قطعات جدید و منحصر به فرد ایجاد کنند، الگوهای موسیقی را تکرار کرده و همبستگی و ارتباطات بین نت‌ها و قطعات را نشان دهند. تحلیل تبدیل خطی می‌تواند به ما کمک کند تا الگوها و قواعدی که در قطعات موسیقی وجود دارند را شناسایی کنیم.

۳.۳. فیلتر کردن و پردازش صدا با استفاده از جبرخطی. سیگنال می‌تواند هر شکلی از اطلاعات باشد که در طول زمان تغییر می‌کند، مانند صدا، ویدئو، تصاویر یا داده‌های جمع آوری شده از حسگرها و غیره. روش های مختلفی برای پردازش سیگنال به منظور استخراج اطلاعات معنی‌دار از سیگنال‌ها، افزایش کیفیت آن‌ها یا اصلاح آن‌ها برای کاربردهای خاص استفاده می‌شوند؛ که شامل روش‌های ریاضی و محاسباتی برای دستکاری سیگنال‌ها در هر دو حوزه آنالوگ و دیجیتال هستند. امروزه یادگیری و آموزش پردازش سیگنال برای بسیاری از صنایع اهمیت بالایی دارد. از جمله این روش‌ها، استفاده از جبرخطی در فیلتر کردن صدا برای حذف نویز، اعمال افکت‌های خاص، تقویت فرکانس‌های خاص یا تغییر کیفیت صدا، می‌باشد. فیلترهای خطی مانند فیلترهای پایین‌گذر، بالاگذر، گذرباند و ردباند، در پردازش صدا استفاده می‌شوند. فیلترهای پایین‌گذر را می‌توان برای حذف فرکانس‌های بالای مشخصی و استخراج سیگنال‌های پایین‌تر استفاده کرد. فیلترهای بالاگذر، عکس فیلترهای پایین‌گذر هستند و برای حذف فرکانس‌های پایین‌تر و استخراج سیگنال‌های بالاتر استفاده می‌شوند. فیلترهای گذرباند می‌توانند فرکانس‌های مشخصی را گذردهند و سایر فرکانس‌ها را کاهش دهند. فیلترهای ردباند می‌توانند فرکانس‌های مشخصی را رد کنند و سایر فرکانس‌ها را اجازه عبور دهند. جبرخطی همچنین به ما امکان می‌دهد تا ترکیبی از فیلترها را بسازیم و کارایی و کنترل دقیق‌تری در پردازش صدا داشته باشیم و نیز پردازش صدا را به‌طور ریاضی و دقیق توصیف کرده و تغییرات را به‌صورت ماتریسی نشان دهیم.

۴. مدل‌سازی موسیقی با جبرخطی

برای تجزیه و تحلیل ایده پنهان در موسیقی، ابتدا رفتار موسیقی را به فرم ریاضی توصیف می‌کنیم. نمایش ریاضی (نت نویسی) به‌جای نمایش کلاسیک موسیقی، $(A, A\#, B, C, \dots)$، ابزار گسترده‌ای برای تجزیه و تحلیل و اصلاح ارائه می‌دهد. مفاهیم پایه‌ای جبرخطی، مانند بردارها و ماتریس‌ها، به دلیل ماهیت‌شان ابزار مناسبی برای این‌منظور می‌باشند. در آغاز ایدئولوژی نمایش نت‌های موسیقی بر اساس ریاضی، ملودی به‌عنوان بخش مهم و تکراری قطعه موسیقی در نظر گرفته شد. با تجزیه ملودی می‌توان نت‌ها و ریتم‌ها را پیدا کرد یا با ترکیب آن‌ها یک قطعه موسیقی پدید آورد. یک ملودی ممکن است توسط ملودی‌های دیگر از سازهای مختلف پشتیبانی شود. در شکل ۲، ملودی‌ها با نوار از هم جدا شده است. این نوارها نقطه اتصال نت‌ها و ساختار ملودی می‌باشند، که بر اساس اتصال‌ها می‌توان ملودی‌ها را با ماتریس نمایش داد.

بنابراین می‌توان گفت ملودی ترکیبی از ویژگی‌هایی است که آن‌را متمایز می‌سازد. این ویژگی‌ها عبارتند از نت در یک قطعه موسیقی، مدت زمان هر نت از ابتدا تا انتها و قدرت (درک فیزیکی) یک نت که یک فضای سه بعدی برای یک ملودی

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.139462.1616

شکل ۲. نمایش کلاسیک موسیقی

Figure 2: show Classical music

ایجاد می‌کنند. این فضای سه بعدی مشخصات کلی موسیقی را بدون نیاز به ویژگی دیگری بیان می‌کند. در واقع، اجزای این فضای سه بعدی بردارها در ماتریس ملودی می‌باشند. بنابراین می‌توان گفت ملودی ترکیبی از بردارها به فرم یک ماتریس $N \times ۳$ است، که در آن عدد ۳ نشان‌دهنده بردارهای نت، مدت زمان و قدرت و عدد N نشان‌دهنده کلید ریتم قطعه است. کلید ریتم، مشخص‌کننده‌ی جنبه ریتمیک یک ملودی و تعداد عناصر در یک سطر در نمایش ماتریسی ملودی می‌باشد [۱۴].

۱.۴. بردار نت. نت‌ها در واقع صداهای خاص زیر و بم می‌باشند که ارتعاشات منحصر به فردی برای شنونده تولید می‌کنند. وقتی صدا بیشتر یا کمتر می‌شود در واقع نت‌های یکسان با سیگنال‌های متفاوت ایجاد شده است. برخی از سازها در هر گام، هفت نتْ در حالی‌که برخی دوازده نت یا بیشتر دارند. با توجه به اینکه یک خط محدود را می‌توان به تعداد نامتناهی قطعه بسیار کوچک و در عین حال متفاوت تقسیم کرد پس گام صدا ممکن است دارای بینهایت نت باشد. متناظر با سبک‌های مختلف موسیقی می‌توان مقیاس‌های متفاوت برای نمایش نت‌ها در نظر گرفت. به‌عنوان مثال دامنه گام ۱۲ نتی موسیقی غربی را می‌توان در مبنای ۱۲ به‌صورت

$$C = ۰(\mathrm{DO}), C = ۱, D = ۲(\mathrm{Re}), D = ۳, E = ۴(\mathrm{Mi}), F = ۵(\mathrm{Fa}), F = ۶, G = ۷(\mathrm{Sol}),$$
$$G = ۸, A = ۹(\mathrm{La}), A = ۱۰, B = ۱۱(\mathrm{Ti})$$

در نظر گرفت. همچنین بردار نت ممکن است حاوی بردارهای ستونی داخلی باشد که نشان دهنده‌ی چند نت در یک زمان معین می‌باشد.

۲.۴. بردار زمان. هر نت در یک ملودی مدت زمان خاص خود را دارد که نشان می‌دهد چگونه یک نت قبل از نت بعدی تمام می‌شود. در نظریه ی موسیقی کلاسیک، مدت زمان ملودی به‌صورت ۱، $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۱}{۴}$، $\frac{۱}{۸}$، $\frac{۱}{۱۶}$ و $\cdots$ تعریف می‌شود. هنگامی‌که این مدت زمان‌ها با هم ترکیب می‌شوند یک مقیاس ایجاد شده و ترکیب این مقیاس‌ها یک قطعه موسیقی ایجاد می‌کند. بنابراین با این رویکرد، مدت زمان‌ها را می‌توان با بردارهایی مانند $[۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۵}, \frac{۱}{۶}, \frac{۱}{۷}, \frac{۱}{۸}, \frac{۱}{۱۶}, \frac{۱}{۳۲}]$ نمایش داد. ملودی‌هایی که در یک قطعه موسیقی به هم متصل می‌شوند باید محتوای مشترکی داشته باشند تا بتوان اصلاح و تحلیل انجام داد. می‌توان گفت که ملودی‌های یک قطعه موسیقی، زمان یکسان دارند. بنابراین می‌توان هر ملودی را یک نوار در نظر گرفت و مدت زمان هر نت در مقیاس به ریتمی که ملودی آن‌را دنبال می‌کند تقسیم می‌شود. اگر در یک ملودی فقط سه نت با مدت زمان یکسان وجود داشته باشد، هر کدام $\frac{۱}{۳}$ از مدت زمان کل ملودی را دارند. در نتیجه در بردار زمان، مجموع عناصر نمی‌تواند از ۱ بیشتر باشد. نمونه‌های بردار زمان زیر به ترتیب دارای کلیدهای ریتم ۴، ۶ و ۳ هستند:

$$\begin{bmatrix} ۰/۲۵ & ۰/۲۵ & ۰/۲۵ & ۰/۲۵ \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} ۰/۵ & ۰ & ۰ & ۰/۵ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} ۰/۳۳ & ۰/۳۳ & ۰/۳۳ \end{bmatrix}$$

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.139462.1616

۳.۴. بردار قدرت. آخرین بعد ماتریس ملودی حاوی قدرت هر نت می‌باشد که هویت فیزیکی یک نت، مقدار درک شنونده مانند ضربه قوی، ضربه صاف، لرزش، سکوت و غیره را تعیین می‌کند. عناصر بردار قدرت را می‌توان مقادیر تصادفی در بازه $[\circ, ۱]$ یا با استفاده از توابع $y = f(x)$ به‌دست آورد. به‌عنوان مثال مقادیر به‌دست آمده از تابع $y = sinx$ ارتعاشاتی تولید می‌کنند که رفتار تابع در بازه‌ی $[\circ, ۱]$ را توصیف می‌کند.

۴.۴. ماتریس ملودی. همان‌طور که بیان شد ملودی را می‌توان به فرم یک ماتریس سه سطری نمایش داد. در این‌صورت هر ستون ماتریس ویژگی‌های یک بخش از ملودی (نت، مدت زمان و قدرت) را بیان می‌کند.

مثال ۱.۴. ماتریس زیر، یک نمونه از ماتریس ملودی است.

$$\begin{bmatrix} ۸ & ۸ & ۸ & ۱۲ \\ \circ & \circ/۵ & \circ/۲۵ & \circ/۲۵ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

همچنین می‌توان گفت ماتریس فوق یک ملودی با دنباله نت $\{A, F, F, F\}$، مدت زمان $\circ, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۴}$ و قدرت یکسان با کلید ریتم ۴ را نشان می‌دهد.

۵. تحلیل ماتریس ملودی

برای درک بهتر قطعات موسیقی و استفاده از آن‌ها برای تولید موسیقی بر روی ویژگی‌های ملودی‌ها تمرکز می‌کنیم. این ویژگی‌ها بردارها و ماتریس‌هایی هستند که رابطه‌ی بین ملودی‌ها را بیان می‌کنند. در زیر چند روش برای یافتن رابطه داخلی ملودی و رابطه‌ی بین ملودی‌ها را، بیان می‌کنیم [۱۴].

۱.۵. مقیاس کسینوسی. از مقیاس کسینوسی می‌توان برای تحلیل شباهت ملودی‌ها استفاده کرد. ضرب داخلی سطرهای ملودی تقسیم بر نرم آن سطرها، مقدار کسینوس در بازه $[\circ, ۱]$ را محاسبه می‌کند که به‌عنوان شاخص شباهت بین دو ملودی در نظر گرفته می‌شود. با محاسبه شاخص کسینوسی بین ملودی‌ها، اطلاعاتی در مورد ساختار قطعه موسیقی؛ مانند ملودی شروع یا ترتیب اجرای ملودی‌ها؛ به‌دست می‌آید. ضرب داخلی بین دو ملودی نه تنها نشان می‌دهد که آیا آن‌ها شبیه هم هستند یا خیر، بلکه هر عضو یک ملودی را با عضو متناظر در ملودی دیگر مقایسه می‌کند که به ما امکان می‌دهد تا بدانیم که آیا یک ملودی خاص همیشه پس از ملودی دیگری ظاهر می‌شود یا یک تکرار خاصی در ساختار موسیقی وجود دارد یا خیر.

مثال ۱.۵. دو ملودی زیر را در نظر بگیرید:

- ملودی ۱: $[\circ/۲, \circ/۴, \circ/۶, \circ/۸]$
- ملودی ۲: $[\circ/۱, \circ/۳, \circ/۵, \circ/۷]$

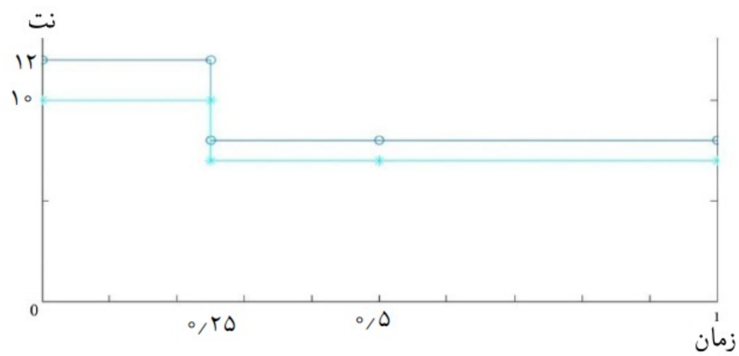
کسینوس بین دو ملودی برابر $\circ/۶۷$ است که این مقدار نشان می‌دهد که دو ملودی به‌طور نسبی شبیه به هم هستند.

شباهت‌های بسیار بین نت، مدت زمان و قدرت در دو ملودی با اعداد بین $[\circ, ۱]$ ذخیره می‌شوند. تفسیر این مقادیر عددی به دلیل تعداد زیاد دشوار است، به جز "۱" که نشان‌دهنده ملودی‌های یکسان است. بنابراین، مشخصه‌های جایگزین برای تحلیل ملودی‌ها نیاز است.

مثال ۲.۵. ماتریس‌های ملودی زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{bmatrix} 12 & 8 & 8 & 8 \\ 0/25 & 0/25 & 0/5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 7 & 7 & 7 \\ 0/25 & 0/25 & 0/5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

شباهت بین دو ملودی برابر ۰٫۹۹۹۷ است که در شکل ۳ نشان داده شده است.



شکل ۳. نمودار نت‌ها

Figure *3: Chart of notes*

توصیف رفتار یک ملودی نیاز به‌بررسی دلیل شباهت دارد که نشان می‌دهد آیا ملودی‌ها را می‌توان به‌صورت معادله خاص بر حسب زمان بیان کرد و روابط بین ملودی‌ها را از این طریق تفسیر نمود یا خیر. ایده‌ی تشکیل ماتریس ملودی از این دیدگاه مطرح شده است. برای به‌دست آوردن چنین ساختاری، می‌توان یک قطعه موسیقی را تحلیل و الگوهای ممکن را تعیین کرد. انواع مختلف رابطه‌ی بین ماتریس‌های ملودی در زیر نشان داده شده است.

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} 12 & 8 & 8 & 8 \\ 0/25 & 0/25 & 0/5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 12 & 8 & 8 & 8 \\ 0/25 & 0/25 & 0/5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 12 & 8 & 8 & 8 \\ 0/25 & 0/25 & 0/5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \Updownarrow \text{ یکسان} & \Updownarrow \text{ مشابه} & \Updownarrow \text{ ارتباط ندارند} \\ \begin{bmatrix} 12 & 8 & 8 & 8 \\ 0/25 & 0/25 & 0/25 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 10 & 7 & 7 & 7 \\ 0/25 & 0/25 & 0/5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5 & 7 & 8 & 10 \\ 0/25 & 0/25 & 0/25 & 0/25 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

۲.۵. بردار دودویی زمان[13]. برای تجزیه و تحلیل عمیق‌تر ماتریس ملودی بر حسب زمان، بردار دودویی زمان شامل مقادیر "۱"و "۰" تعریف شده است که نشان می‌دهد آیا شروع ضربه نت در نقطه داده شده است یا خیر. این ویژگی نسبت به بردار زمان مشخصه قوی‌تری است که نشان می‌دهد چگونه ضربه‌های نت در مکان‌های ممکن بردار زمان قرار می‌گیرند.

[13] duration binary vector

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.139462.1616

مثال ۳.۵. ماتریس‌های ملودی زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{bmatrix} ۱۲ & ۸ & ۸ & ۸ \\ ۰/۲۵ & ۰/۲۵ & ۰/۵ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \qquad (۱)$$

$$\begin{bmatrix} ۵ & ۷ & ۸ & ۱۰ \\ ۰/۲۵ & ۰/۲۵ & ۰/۲۵ & ۰/۲۵ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \qquad (۲)$$

بردار دودویی زمان برای این ماتریس‌ها به‌ترتیب عبارتند از: $\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$.

۳.۵. بردار مقدار مقیاس[14]. در ابتدای تولید موسیقی کتابخانه مقیاس [15]، برداری حاوی تمام نت‌های ممکن، تعریف می‌شود. یکی دیگر از مؤلفه‌های تجزیه و تحلیل ماتریس ملودی بردار مقیاس است. این بردار دودویی با ابعاد کتابخانه مقیاس اطلاعات مربوط به اینکه کدام نت از کتابخانه مقیاس در ملودی استفاده شده است را، ذخیره می‌کند. ممکن است برخی یا همه نت‌های کتابخانه مقیاس در ملودی قرار گیرند. اگر عنصر کتابخانه در ملودی استفاده شود، بردار مقدار مقیاس ۱ و در غیراین‌صورت ۰ در مکان مربوط به آن نت قرار می‌دهد.

مثال ۴.۵. ماتریس ملودی ۱ در مثال ۳.۵ را در نظر بگیرید. اگر کتابخانه مقیاس را به‌صورت $\begin{bmatrix} ۵ & ۷ & ۸ & ۱۰ & ۱۲ \end{bmatrix}$ تعریف کنیم آنگاه بردار مقدار مقیاس این ماتریس به‌صورت $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ می‌باشد.

۴.۵. ضرایب پیچیدگی. برای بررسی پیچیدگی یک ملودی می‌توان برای نت و بردار مدت زمان یک ضریب در نظر گرفت. ضریب نت را می‌توان تعداد نت‌های استفاده شده در ملودی تعریف کرد. این مقیاس را می‌توان برای یک ملودی مشخص به‌جای ارتباط با ملودی‌های دیگر در نظر گرفت. به‌عنوان مثال ضریب پیچیدگی برای ماتریس ملودی ۱ در مثال ۳.۵ برابر ۲ می‌باشد.

۵.۵. ضریب ریتم. ضریب ریتم را می‌توان سطح پیچیدگی ریتم یک ملودی تعریف کرد که بر بردار دودویی زمان در ماتریس ملودی تمرکز می‌کند. این ضریب برای تحلیل الگو در ملودی‌ها و کل قطعه موسیقی به کاربرد می‌رود. ضریب ریتم تعیین می‌کند که چند ضربه نت ۱ در بردار دودویی زمان وجود دارد. به‌عنوان مثال برای ماتریس‌های ملودی ۱ و ۲ در مثال ۳.۵ ضریب ریتم به ترتیب ۳ و ۴ است.

۶. استفاده از معادلات خطی برای بیان ساختار موسیقی

معادلات خطی در ریاضیات و جبرخطی از ابزارهای قدرتمند برای توصیف و تحلیل پدیده‌ها و دستگاه های مختلف می‌باشند. در موسیقی، معادلات خطی به ما امکان می‌دهند تعیین کنیم که چگونه تعدادی صدا و فرکانس مختلف می‌توانند با هم ترکیب شوند تا صدای نهایی بسازند. در آهنگ سازی، دستگاه معادلات خطی برای تعیین وزن و نسبت صداهای مختلف در یک مقیاس مورد استفاده قرار می‌گیرد. به‌طورکلی، برای تبدیل یک ملودی به دستگاه معادلات خطی، نیاز داریم تا پارامترهای مختلف ملودی را با متغیرهای معادله خطی نشان دهیم. پس از تعریف این پارامترها، می‌توانیم با ترکیب معادلات خطی مختلف، الگوها و ساختارهای موسیقی را توصیف کنیم. فرض کنید یک ملودی ساده از نت‌های A، B، C و D تشکیل شده

[14] scale value vector [15] scale library

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.139462.1616

باشد. در این‌حالت، می‌توانیم هر نت را به یک متغیر معادله خطی نسبت دهیم. مثلاً متغیر x_1 برای نت A، x_2 برای نت B و به همین ترتیب x_3 و x_4 برای نت‌های C و D استفاده کنیم. حال با استفاده از متغیرهای تعریف شده، می‌توانیم معادلات خطی را ایجاد کنیم. برای مثال، اگر ترتیب ملودی با فرمت A, B, C, D باشد، می‌توانیم معادله خطی زیر را بسازیم:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

این معادله به ما می‌گوید که مجموع ارزش متغیرهای مربوط به نت‌ها برابر با ۱ است. همچنین، برای نشان دادن الگوها و ترکیبات مختلف موسیقی، می‌توان معادلات خطی دیگری نیز ایجاد کرد. به‌عنوان مثال، اگر ترتیب ملودی به‌صورت A, B, B, C باشد، می‌توان معادله خطی زیر را در نظر گرفت:

$$x_1 + x_2 + x_2 + x_3 = 1$$

با این‌کار، الگوی تکرار نت B در ملودی را نمایش می‌دهیم. با ترکیب این معادلات و استفاده از روش‌های جبرخطی می‌توان الگوها و ترکیبات مختلف موسیقی را تحلیل و ساختار موسیقی را به‌صورت دقیق‌تر و ریاضی بیان کرد.

۱.۶. تحلیل و پیش‌بینی الگوها و ریتم‌ها با استفاده از جبرخطی. تحلیل موسیقی و ریتم‌ها، از جنبه‌های مختلف اهمیت به سزایی دارد از جمله:

- درک عمیق‌تر موسیقی: تحلیل موسیقی به ما کمک می‌کند تا ساختار و الگوهای موسیقی را به‌طور دقیق‌تر درک کرده، الگوهای تکراری، مفاهیم ملودیک و ریتمیک را شناسایی کرده و همچنین تعامل و تغییرات بین عناصر مختلف موسیقی را مشخص کنیم.
- پیش‌بینی و خلق موسیقی: با تحلیل الگوها و ریتم‌های موسیقی و استفاده از رابطه‌های ریاضی و آماری می‌توانیم الگوهای بعدی را پیش‌بینی کرده و با استفاده از این پیش‌بینی، موسیقی جدید خلق کنیم.
- ارزیابی و تجزیه و تحلیل عملکرد: با تحلیل عملکرد موسیقی، می‌توانیم نقاط قوت و ضعف در اجرای موسیقی را شناسایی کرده و بهبودهای لازم را اعمال کنیم.
- تحلیل فرهنگی و تاریخی: تحلیل موسیقی می‌تواند به ما کمک کند تا نقش موسیقی در فرهنگ‌ها و تاریخ‌های مختلف را درک کرده، الگوهای مشترک و خصوصیات هر فرهنگ و تاریخ موسیقی را تحلیل و درک عمیق‌تری از ارتباط موسیقی با جوامع و فرهنگ‌ها داشته باشیم.

به‌طور کلی، تحلیل موسیقی و ریتم‌ها به ما کمک می‌کند تا موسیقی را به‌عنوان یک هنر و علم بهتر درک کنیم و با استفاده از این درک، بتوانیم خلق‌کنندگان و اجراکنندگان موسیقی را در تولید و اجرای موسیقی همراهی کنیم. در تحلیل داده‌های موسیقی، از روش‌های جبرخطی مانند تجزیه به‌عوامل اول، تحلیل مؤلفه‌های مستقل، رگرسیون خطی و ... برای استخراج و تشخیص الگوها و ویژگی‌های موسیقی استفاده می‌شود. برای مثال، روش رگرسیون خطی به ما اجازه می‌دهد تا رابطه‌ی بین یک متغیر وابسته (مثلاً الگوی موسیقی) و تعدادی متغیر مستقل (مثلاً ویژگی‌های موسیقی) را بررسی کنیم. با استفاده از معادلات خطی و ماتریس‌ها، می‌توانیم رابطه‌ی بین متغیرها را تحلیل کرده و با استفاده از ضرایب رگرسیون، الگوهای بعدی موسیقی را پیش‌بینی کنیم. یکی دیگر از روش‌های جبرخطی برای تحلیل و پیش‌بینی ریتم‌های موسیقی، استفاده از معادلات دیفرانسیل خطی است. در این روش، می‌توانیم با استفاده از معادلات دیفرانسیل خطی، تغییرات زمانی و فاصله بین نت‌ها را بررسی و الگوهای ریتمیک و تکراری را تحلیل کنیم. برای مثال، فرض کنیم یکی از ریتم‌های موسیقی، تغییرات زمانی بین دو نت متوالی در یک ملودی باشد. این تغییرات زمانی می‌تواند با استفاده از یک مجموعه از معادلات دیفرانسیل خطی به‌صورت زیر

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.139462.1616

نمایش داده شود:

$$x[n] = a * x[n-۲] + b \qquad n = ۲, ۳, \ldots$$

در اینجا $x[n]$ نشانگر زمان بین نت‌ها در جایگاه n و a و b پارامترهایی هستند که قابلیت مدل کردن الگوهای تغییرات زمانی را به ما می‌دهند. با استفاده از این رابطه، می‌توان تغییرات زمانی بین نت‌های بعدی را پیش‌بینی کرد. برای مثال، اگر به ما دو نت قبلی داده شود، می‌توانیم با استفاده از این معادله زمان بین نت بعدی را با استفاده از پارامترهای a و b پیش‌بینی کنیم. این روش‌ها به ما امکان می‌دهند الگوهای پنهان در داده‌های موسیقی را مشخص کنیم و اطلاعات بیشتری درباره ساختار و قوانین موسیقی کسب کنیم.

۷. بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله، به‌بررسی مفاهیم پایه‌ای موسیقی پرداختیم و ارتباط موسیقی با مفاهیم جبرخطی را بیان کردیم. استفاده از مدل‌های جبرخطی، تحلیلگران موسیقی را قادر می‌سازد تا با دقت بیشتری به ساختار داخلی قطعات موسیقی بنگرند و آن را تحلیل کنند. این مدل‌ها بر مفاهیم هندسی و جبری بنا شده‌اند و با توجه به استمرار پیوندهای هارمونیک بین قطعات، به ما امکان می‌دهند تا به شکل دقیق‌تری ساختار موسیقی را تشریح کنیم. برای مطالعه‌ی بیشتر در مورد این موضوع خواننده علاقه‌مند را به مقالات [۱۶، ۱۲، ۳] ارجاع می‌دهیم.

مراجع

[1] B. Janssen, W. B. Haas, A. Volk and P. Kranenburg, Finding repeated patterns in music: state of knowledge, challenges, perspectives, *International Symposium on Computer Music Modeling and Retrieval*, (2014) 277–297.

[2] D. Lewin, *Generalized musical intervals and transformations*, Oxford University Press, USA, 2007.

[3] E. Amiot, *Music through Fourier space*, Springer International Publishing Switzerland, 2016.

[4] G. Joseph, *The crest of the peacock: Non-European roots of mathematics*, Princeton University Press, 2010.

[5] H. Schenker, *The masterwork in music*, Courier Corporation, 1926.

[6] I. Xenakis, Musiques formelles, Revised English edition Formalized Music: Thought and Mathematics in Composition, *Harmonologia Series*, **6** Stuyvesant, NY: Pendragon Press, 1971.

[7] J.S. McDonel, Exploring learning connections between music and mathematics in early childhood, *Bulletin of the Council for Research in Music Education*, **203** (2015) 45–62.

[8] J. Harnum, *Basic music theory: how to read, write, and understand written music*, Sol Ut Press, 2005.

[9] M. Miller, *The Complete Idiot's Guide to Music Composition: Methods for Developing Simple Melodies and Longer Compositions*, Penguin, 2005.

[10] R. Browne, *The Structure of Atonal Music*, 2014.

[11] R. I. Godøy and M. Leman, *Musical Gestures: Sound, Movement, and Meaning*, New York (N.Y.): Routledge, 2011.

[12] R. D. De Veaux and P. F. Velleman, Math is music, *Amstat News*, (2008) 54–57.

[13] S. Shah, *An Exploration of the Relationship between Mathematics and Music*, Manchester Institute for Mathematical Science. School of Mathematics, The University of Manchester, 2010.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.139462.1616

[14] S. Yelkenci, *Algorithmic Music Composition Using Linear Algebra*, Diss. Southern Illinois University at Edwardsville, 2017.

[15] S.M. Jones and D. Pearson Jr, Music: Highly engaged students connect music to math, *General Music Today*, **1** (2013) 18–23.

[16] T. J. Hamilton, J. Doai , A. Milne, V. Saisanas, A. Calilhanna, C. Hilton, M. Goldwater and R. Cohn, Teaching mathematics with music: A pilot study, *In 2018 IEEE International Conference on Teaching, Assessment, and Learning for Engineering (TALE)*, (2018) 927–931.

مرضیه فلاحت
گروه علوم پایه، دانشگاه بزرگمهر قائنات، قائن، ایران
m_felahat@buqaen.ac.ir

مرضیه فلاحت متولد شهریور ۱۳۶۷ است. او در بهمن ماه ۱۳۸۵ وارد مقطع کارشناسی رشته ریاضی کاربردی و در سال ۱۳۹۰ وارد مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی گرایش تحقیق در عملیات در دانشگاه بیرجند شد. در سال ۱۳۹۳ دوره دکتری ریاضی کاربردی در گرایش آنالیزعددی را در دانشگاه تحصیلات تکمیلی صنعتی و فناوری پیشرفته کرمان و تحت نظر استاد محمود محسنی‌مقدم آغاز و در سال ۱۳۹۹ از پایان نامه خود در زمینه موجک‌ها و معادلات انتگرال دفاع کرد.

جواد طیبی
گروه مهندسی صنایع، دانشکده مهندسی کامپیوتر و صنایع، دانشگاه صنعتی بیرجند، بیرجند، ایران
javadtayyebi@birjandut.ac.ir

جواد طیبی در سال ۱۳۶۴ متولد شد. وی مقطع کارشناسی خود را در رشته ریاضی در دانشگاه بیرجند در سال ۱۳۸۶ به پایان رسانید و مقطع کارشناسی ارشد خود را در رشته ریاضی کاربردی در دانشگاه صنعتی شریف در سال ۱۳۸۸ با موفقیت به اتمام رساند. او تحصیلات خود را در مقطع دکتری در دانشگاه بیرجند ادامه داد و در سال ۱۳۹۴ از پایان‌نامه دکتری خود در زمینه مسائل جریان شبکه معکوس دفاع کرد. هم‌اکنون وی دانشیار گروه مهندسی صنایع در دانشگاه صنعتی بیرجند است. زمینه‌های تحقیقاتی وی شامل مسائل بهینه‌سازی جریان شبکه و نظریه بازی‌ها است.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.139462.1616