

MARIO PIERI'S AXIOMATIZATION OF GEOMETRY

REZA REZAVAND 

ABSTRACT. In this paper, we discuss the method of the Italian mathematician, Mario Pieri, for axiomatization of geometry, which is based only on two undefined terms, point and motion. We examine the postulates proposed by him, definitions of various geometrical concepts and some important theorems arising from those postulates.

1. Introduction

After the conclusion of a long debate about the fifth postulate of Euclid known as the parallel postulate in the early 19th century and the emergence of non-Euclidean geometries, the attention of mathematicians was drawn to other postulates of Euclid and the question, whether or not, in general, the set of postulates presented by him is a satisfactory system of principles, was taken into consideration. The first person who tried to present an improved system of postulates for geometry was Moritz Pasch, a German mathematician who did this in 1882 in a book called *Lectures in New Geometry* [3]. From his point of view, some important geometrical concepts in Euclid's book, such as betweenness of points as well as the congruence of geometric shapes are not precisely defined, nor are principles established for the exact identification of these concepts. The undefined terms for Pasch at

Keywords: Mario Pieri, Axiomatization, Motion, Geometry.

Communicated by Mohamad Reza Pouryayevali.

Article Type: Review Paper.

*Corresponding author.

Received: 12-10-2023, Accepted: 03-02-2024, Published Online: 27-05-2024.

Cite this article: R. Rezavand, Mario Pieri's axiomatization of geometry, *Journal of Mathematics and Society*, **9** no. 1 (2024) 99–105.

<http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.139419.1615> .

the beginning of the discussion were points and line segments, to which were later added the concepts of flat surface and congruence of geometrical shapes. From Pasch's point of view, line segment as an undefined term is preferable to line because it is more tangible, and by introducing line segment as an undefined term and establishing principles for it, it is also possible to define the concept of betweenness of points at the same time. Regarding congruence, Pasch got his idea from the concept of rigid motion, and according to him, congruence between two geometrical shapes intuitively means that one of the them can be moved in such a way that it fits properly on the second one. Of course, the problem in this regard is that geometrical shapes can not necessarily be moved independent of each other. For example, if two shapes have common points, with each movement of one, the other's common points also move. Of course, Pasch overcame this problem in this way that if there is a third shape that can be moved with respect to the above two shapes and fits both, then both of them will also be congruent. Of course, the concept of motion for Pasch was just an intuitive idea to build the concept of congruence and formulate the principles related to it, and in the ten postulates that Pasch established for congruence, no name of motion was mentioned.

The next person was Giuseppe Peano, an Italian mathematician, who in 1889, inspired by Pasch's work, wrote a booklet called *Principles of Geometry* [4]. The above work was almost a rewriting of Pasch's principles and theorems in logical language. Of course, the topics related to congruence are absent in this small treatise. Five years later, Peano expanded his previous article to a considerable extent in another article called the *Basics of Geometry*, which is more detailed, and added explanations to it [5]. But the most important difference between this and the previous article is the topics which are related to congruence. In this part, Peano, after referring to principles of congruence by Pasch, took another method and instead of congruence, he introduced motion itself, as an undefined term and established principles for it. Unlike Pasch, whose perception of the concept of motion was really a physical movement, Peano considered motion as a mapping that corresponds points with properties reflected in principles. After introducing motion and its principles, at the end of the article, Peano presented a relatively detailed discussion about specific types of motion, including reflection, translation, and rotation.

The next person was Mario Pieri, another Italian mathematician, who went even further and claimed that it is possible to define other geometrical concepts with only two undefined terms of point and motion. In 1900, almost simultaneously with Hilbert's *Principles of Geometry*, he wrote an essay called the *Treatise on Point and Motion* [6] and he used the above idea there and tried to prove all the theorems of the first three books of Euclid. Some of his basic principles regarding motion are similar to Peano, but he has followed a different approach. In this article, we examine the method used by Pieri and review the postulates introduced by him, concepts based on these postulates and the important theorems derived from them. For more information about Mario Pieri and his role in

development of mathematics, refer to [1, 2]. Especially in [2], there is a translation of the *Treatise on Point and Motion* in English, which is also used in writing this article.

2. Main Results

Throughout this section, a, b, c are distinct points. Pieri in his monograph first introduces some postulates to explain the nature of points and motions. The first concept that he defines by means of motions is the collinearity of three points. He calls three points collinear if there exists a pure motion that keeps all three points fixed. Next, he defines the line joining two points a, b as the set of points which are collinear with them and defines a plane abc as the set of all points on any of the lines that connect a to points on the line bc or connect b to the points on the line ac or connect c to the points on the line ab . His most important tool for introducing the geometric concepts by motions is sphere. In his sense the sphere through b with center a (denoted by b_a) is the set of all points x , such that, there is a motion that takes b to x and keeps a fixed. Next he introduces some postulates about intersection of lines and spheres and defines reflection of b across a , as the point that lies on the line ab and on the sphere b_a but different from b . He mentions a postulate which guarantees the existence of a motion which carries a onto b and maps some point of ab to itself and calls that fixed point, the midpoint of a, b denoted by $a|b$. Next he defines a circle as a set of points that lie on a sphere and at the same time in a plane that contains the sphere's center. Then he says the pair (a, c) is perpendicular to the pair (a, b) (denoted by $(a, c) \perp (a, b)$), if there exists a motion that maps c into a point different from c but belonging to the line ca and keeps the points a, b fixed. He calls two figures congruent to each other, whenever there exists a motion so that the one figure is transformed precisely into the other. Next he defines the polar sphere of the points a, b as the sphere $a_{a|b} = b_{a|b}$ and says the point x is internal to a sphere b_a when there exist two distinct points on the sphere having x as midpoint. He says a point x is between a, b if a, b, x are collinear and x is internal to the polar sphere of a, b . Next he defines the segment $|ab|$ as the set of all points that lie between a and b , or that coincide with a or with b . By introducing the concept of betweenness, the rest of his approach is similar to standard axiomatic methods and he introduces the concepts of ray, triangle and halfplane similarly. He concludes his paper with a discussion of continuity principle.

3. Summary of Conclusions

In this article, we have briefly examined Mario Pieri's method for axiomatization of geometry by two undefined terms, point and motion. The concept of motion was first used by Pasch as an idea to introduce the undefined concept of congruence. Then Peano directly used motion as one of the undefined concepts and used it to define congruence. But Peiri's method was unique in that he considered point and motion as the only undefined terms and defined other geometric concepts by

them and according to what was discussed in this article , it can be concluded that his effort was quite successful.

REFERENCES

- [1] E. A. Marchisotto and J. T. Smith, *The Legacy of Mario Pieri in Geometry and Arithmetic*, Birkhäuser, Boston, 2007.
- [2] E. A. Marchisotto, F. R. Consuegra and J. T. Smith, *The Legacy of Mario Pieri in Foundations and Philosophy of Mathematics*, Birkhäuser, New York, 2021.
- [3] M. Pasch, *Vorlesungen über Neuere Geometrie* , Teubner, Leipzig, 1882.
- [4] G. Peano, *I Principii di Geometria Logicamente Esposti* , Fratelli Bocca Editore, Torino, 1889.
- [5] G. Peano, Sui fondamenti della geometria, *Rivista di matematica*, **4** (1894) 51–90.
- [6] M. Pieri, Della geometria elementare come sistema ipotetico deduttivo: Monografia del punto e del moto, *Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino (series 2)* , **49** (1900) 173–222.

Reza Rezavand

School of Mathematics, Statistics and Computer Science, College of Science, University of Tehran, Tehran, Iran

Email: rezavand@ut.ac.ir

اصل موضوعی سازی هندسه به روش ماریو پیری

رضا رضواند^۱

چکیده. در این مقاله به رهیافت ماریو پیری ریاضیدان ایتالیایی، برای اصل موضوعی سازی هندسه که تنها مبتنی بر دو مفهوم تعریف نشده نقطه و حرکت می باشد، می پردازیم. اصول موضوعه پیشنهاد شده توسط او و تعاریف مفاهیم مختلف هندسی و برخی از قضایای مهم برآمده از این اصول را، مورد بررسی قرار می دهیم.

۱. مقدمه

پس از تعیین تکلیف اصل پنجم اقلیدس موسوم به اصل توازی در اوایل قرن نوزدهم و ظهور هندسه های نااقلیدسی، توجه ریاضیدانان به سایر اصول اقلیدس جلب شد و این مسأله که آیا به طور کلی، مجموعه اصول ارائه شده توسط اقلیدس یک دستگاه اصل موضوعی رضایت بخش می باشد یا خیر، مورد توجه قرار گرفت. اولین کسی که تلاش کرد یک دستگاه اصل موضوعی بهبود یافته برای هندسه ارائه کند، موریس پاش^۱ ریاضیدان آلمانی بود که در سال ۱۸۸۲ در کتاب موسوم به مباحثی در هندسه جدید، این مهم را به انجام رسانید [۶]. از دیدگاه او، برخی از مفاهیم مهم هندسی از جمله بینیت نقاط و همچنین قابلیت انطباق اشکال هندسی در کتاب اصول اقلیدس، نه به طور دقیق تعریف شده و نه اصولی برای شناسایی دقیق این مفاهیم وضع گردیده است. مفاهیم تعریف نشده برای پاش در ابتدای بحث، نقطه و پاره خط بود که در ادامه مفاهیم سطح تخت و قابلیت انطباق به آنان اضافه گردید. از نظر پاش، پاره خط به عنوان مفهوم تعریف نشده به خط ارجحیت دارد زیرا ملموس تر است، ضمن اینکه با معرفی پاره خط به عنوان مفهوم تعریف نشده و وضع اصولی برای آن، همزمان می توان بینیت نقاط را نیز معرفی کرد. در مورد قابلیت انطباق، پاش از مفهوم حرکت صلب، ایده گرفت و از نظر او انطباق بین دو شکل هندسی، از نظر شهودی به این معنی است که می توان یکی از دو شکل فوق را به گونه ای حرکت داد که به طور مناسبی روی شکل دوم منطبق گردد. البته مشکلی که در این خصوص وجود دارد این است که هر دو شکل هندسی لزوماً نسبت به هم به طور مستقل قابل حرکت نیستند، یعنی ممکن است نتوان یکی را ثابت نگه داشت و دیگری را به گونه ای حرکت داد که بر آن منطبق گردد. مثلاً اگر دو شکل نقاط مشترکی داشته باشند با هر حرکت یکی، نقاط مشترک دیگری نیز حرکت می کند. البته پاش به این شکل بر این مشکل غلبه کرد که اگر شکل ثالثی باشد که نسبت به دو شکل فوق قابل حرکت باشد و بر هر دو منطبق گردد، آنگاه آن دو نیز قابل انطباق می گردند. البته مفهوم حرکت برای پاش، صرفاً یک ایده شهودی برای استوار ساختن مفهوم

عبارات و کلمات کلیدی: ماریو پیری، اصل موضوعی سازی، حرکت، هندسه.

دبیر تخصصی رابط: محمدرضا پوربایولی

نوع مقاله: مروری

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۷/۲۰ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۱۱/۱۴ تاریخ انتشار آنلاین: ۱۴۰۳/۰۳/۰۷

ارجاع به مقاله: ر. رضواند، اصل موضوعی سازی هندسه به روش ماریو پیری، نشریه ریاضی و جامعه، ۹ شماره، ۱ (۱۴۰۳) ۹۱-۱۰۵.

<http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.139419.1615>

¹Moritz Pasch

قابلیت انطباق و تدوین اصول مربوط به آن بود، و در ده اصلی که پاش برای قابلیت انطباق وضع کرد، هیچ اسمی از حرکت برده نشد.

نفر بعدی جوزپه پیانو^۲، ریاضیدان ایتالیایی بود که در سال ۱۸۸۹ با الهام گرفتن از کتاب پاش، کتابچه‌ای موسوم به اصول هندسه تألیف کرد [۷]. اثر فوق تقریباً یک بازنویسی از اصول و قضایای کتاب پاش به زبان منطقی بود. درواقع در کتاب فوق حتی یک جمله به نثر وجود ندارد و کاملاً با زبان منطق ریاضی که توسط خود پیانو توسعه داده شده بود، نوشته شده است. البته مباحث مربوط به قابلیت انطباق در این رساله کوچک غایب است. پنج سال بعد، پیانو در مقاله‌ای دیگر به نام «مبانی هندسه»، که مفصل‌تر است، مقاله قبلی خود را به میزان قابل توجهی بسط داد و توضیحاتی به نثر به آن افزود [۸]. ولی مهم‌ترین تفاوت این مقاله با مقاله قبلی، اضافه شدن مباحث مربوط به قابلیت انطباق می‌باشد. در این قسمت پیانو بعد از اشاره به اصول قابلیت انطباق توسط پاش، روش دیگری در پیش گرفت و به جای قابلیت انطباق، خود حرکت را به عنوان یک مفهوم تعریف نشده معرفی کرده و اصولی برای آن وضع کرد. بر خلاف پاش که تلقی‌اش از مفهوم حرکت، واقعاً یک حرکت فیزیکی بود، پیانو حرکت را به عنوان نگاشتی که نقاط را به هم متناظر می‌سازد با ویژگی‌هایی که در اصول منعکس شده، در نظر گرفت. پس از معرفی حرکت و اصول آن، در انتهای مقاله، پیانو بحث نسبتاً مفصلی در مورد انواع خاص حرکت از جمله بازتاب، انتقال و دوران ارائه داد.

نفر بعدی ماریو پیری^۳، دیگر ریاضیدان ایتالیایی بود که پا را از این هم فراتر گذاشت و ادعا کرد که می‌توان صرفاً با دو مفهوم تعریف نشده نقطه و حرکت و وضع اصول موضوعه‌ای برای آنها، سایر مفاهیم هندسی را تعریف کرده و قضایای مورد نظر را به اثبات رسانید. او در سال ۱۹۰۰ و تقریباً همزمان با نگارش کتاب اصول هندسه توسط هیلبرت^۴، مقاله‌ای موسوم به نقطه و حرکت منتشر کرد [۹] و ایده فوق را در آنجا به کار گرفته و سعی کرد تمامی قضایای سه کتاب اول اقلیدس را اثبات کند. چند اصل ابتدایی او در خصوص حرکت، مشابه پیانو است ولی در ادامه، مسیر متفاوتی در پیش گرفته شده است. در این نوشتار، روش به کار رفته توسط پیری را مورد بررسی قرار می‌دهیم و به مرور اصول موضوعه معرفی شده توسط او، تعریف مفاهیم مختلف بر اساس این اصول و قضایای مهم برآمده از آنها می‌پردازیم. برای اطلاعات بیشتر در خصوص ماریو پیری و نقشی که در پیشبرد ریاضیات داشته است به [۳، ۴] مراجعه کنید. به خصوص در [۴]، ترجمه‌ای از رساله نقطه و حرکت به زبان انگلیسی موجود است که در نگارش این مقاله نیز مورد استفاده قرار گرفته است.

۲. متن اصلی

در این بخش اصول موضوعه مطرح شده توسط پیری را مورد بررسی قرار می‌دهیم. پیری در ابتدا خاطر نشان کرد که نظام هندسی که قرار است در نوشتار فوق شکل بگیرد به کمک دو مفهوم اولیه در کنار هم پیش می‌رود، که از هیچ دانش قیاسی دیگری به دست نیامده است و در آغاز وانمود می‌شود که چیزی درباره آنها نمی‌دانیم. این دو مفهوم، نقطه و حرکت می‌باشند. سایر مفاهیم مورد بحث، یا به منطق محض تعلق دارند و یا در غیر این صورت منشاء خود را از این دو مفهوم ابتدایی می‌گیرند. در ضمن بهتر است که برای نیل به اهداف روش استنتاجی فوق، هیچ پیش داوری در مورد این مفاهیم، از جمله تجسم ظاهری از طریق رسم شکل، در اثبات گزاره‌ها ظاهر نگردد. سپس پیری اصول مورد نظر را به شرح زیر معرفی کرد:

اصل ۱.۲. خانواده نقاط و خانواده حرکت‌ها، مجموعه می‌باشند.

اصل ۲.۲. حداقل یک نقطه موجود است. اگر p یک نقطه باشد آنگاه نقطه دیگری متمایز از آن موجود است.

حال به وضوح اصولی لازم است تا ماهیت حرکت را توضیح دهد.

²Giuseppe Peano ³Mario Pieri ⁴David Hilbert

اصل ۳.۲. هر حرکت، یک تبدیل یک به یک از نقاط به نقاط دیگر می باشد. به عبارت دیگر هر حرکت به هر نقطه، نقطه ای را متناظر می سازد و دو نقطه متمایز به نقاط متمایزی نظیر خواهند شد.

تا اینجا مشخص است که هر حرکت، تابعی یک به یک از مجموعه همه نقاط به خودش می باشد. اصل بعدی نشان می دهد که این تابع، پوشا نیز می باشد.

اصل ۴.۲. اگر μ یک حرکت باشد آنگاه حرکت μ^{-1} موجود است به طوری که $\mu^{-1}x = y$ اگر و تنها اگر $\mu y = x$. در این صورت μ^{-1} را معکوس μ می نامیم.

از اصل فوق نتیجه می شود که هر حرکت به عنوان یک تابع، معکوس پذیر است و معکوس آن نیز یک حرکت می باشد.

اصل ۵.۲. ترکیب هر دو حرکت، یک حرکت می باشد.

با توجه به دو اصل فوق، به وضوح ترکیب هر حرکت با معکوس خودش نیز یک حرکت می باشد، که همان نگاشت همانی است. پس تابع همانی یک حرکت است و هر حرکت غیر از آن را یک حرکت سره می نامیم. به عبارت دیگر حرکت μ یک حرکت سره است هرگاه حداقل یک نقطه x موجود باشد به طوری که $\mu x \neq x$.

اصل ۶.۲. برای هر دو نقطه متمایز، حداقل یک حرکت سره موجود است به طوری که هر دو نقطه را ثابت نگه می دارد.

اصل ۷.۲. اگر a, b, c نقاط متمایزی باشند و حرکت سره ای موجود باشد که هر سه نقطه را ثابت نگه دارد، آنگاه هر حرکت سره دیگر که a, b را ثابت نگه دارد، c را نیز ثابت نگه خواهد داشت.

دو اصل فوق مقدمه ای برای تعریف خط در هندسه پیری می باشد. ایده این تعریف از بازتاب نقاط نسبت به یک خط حاصل می گردد. در واقع می دانیم که بازتاب نسبت به خط گذرا از نقاط a, b ، تمامی نقاط روی آن خط را ثابت نگه می دارد و سایر نقاط به نقاط دیگری متناظر می شوند. پس از این طریق می توان تمام نقاط روی خط فوق را مشخص کرد.

تعریف ۸.۲. اگر a, b, c نقاطی باشند و حرکتی سره موجود باشد که هر سه نقطه را ثابت نگه دارد آنگاه این سه نقطه را هم خط می نامیم.

دقت کنید که در تعریف فوق صحبتی از متمایز بودن نقاط نشده است. به سادگی دیده می شود که اگر حداقل دو نقطه از سه نقطه فوق مساوی باشند آنگاه هر سه نقطه هم خط می باشند.

تعریف ۹.۲. اگر a, b نقاط متمایزی باشند، اتصال a به b که با نماد ab نشان داده می شود خانواده همه نقاطی است که با a, b هم خط می باشند.

به راحتی دیده می شود که خود نقاط a, b به اتصال ab تعلق دارند و $ab = ba$. سپس پیری ثابت کرد که حداقل سه نقطه ناهم خط موجود است و در واقع برای هر دو نقطه متمایز a, b حداقل یک نقطه خارج از ab وجود دارد.

تعریف ۱۰.۲. هر اتصال بین دو نقطه متمایز را یک خط می نامیم.

سپس پیری ثابت کرد که اگر a, b نقاط متمایز و c, d نیز دو نقطه متمایز متعلق به خط ab باشند، آنگاه $ab = cd$ و در نتیجه از هر دو نقطه متمایز دقیقاً یک خط می گذرد. پس از آن نشان داد که اگر a, b دو نقطه متمایز باشند آنگاه برای هر حرکت μ داریم $\mu(ab) = (\mu a)(\mu b)$. در نتیجه تصویر هر خط تحت هر حرکت یک خط می باشد.

مرحله بعدی تعریف صفحه می‌باشد. برای این منظور پیری از سه نقطه ناهم خط استفاده کرده و مجموعه همه نقاط روی خطوط واصل یکی از این نقاط و نقاط روی خط حاصل از اتصال دو نقطه دیگر را در نظر گرفت. ایده این تعریف از پئانو می‌باشد. پاش در کتاب خود، سطوح تخت را به عنوان مفهوم تعریف نشده در نظر گرفت ولی پئانو نشان داد که می‌توان صفحه را به کمک مفاهیم قبلی تعریف کرد و در نتیجه چهار مفهوم تعریف نشده پاش، به سه مورد کاسته شد.

تعریف ۱۱.۲. فرض کنیم a, b, c سه نقطه ناهم خط باشند. مجموعه همه نقاط روی هر یک از خطوطی که a را به نقاط مختلف خط bc متصل می‌کنند یا b را به نقاط روی خط ac متصل می‌کنند و یا c را به نقاط خط ab متصل می‌کنند را، صفحه abc می‌نامیم.

به سادگی دیده می‌شود که اگر a, b, c سه نقطه غیرهم خط باشند، آنگاه خطوط ab, ac, bc همگی در صفحه abc واقع هستند. در ضمن صفحات $abc, acb, bac, bca, cab, cba$ با هم یکسان هستند. به علاوه، تصویر هر صفحه تحت یک حرکت، یک صفحه خواهد بود و در واقع اگر μ یک حرکت و a, b, c سه نقطه ناهم خط باشند آنگاه $\mu(abc) = (\mu a)(\mu b)(\mu c)$.

اصل ۱۲.۲. اگر a, b, c نقاط ناهم خط و d نقطه‌ای از خط bc و متمایز از b باشد، آنگاه صفحه abd مشمول صفحه abc خواهد بود.

البته در واقع صفحات فوق با هم یکسان خواهند بود که این مطلب به سادگی از اصل فوق و نتایج قبلی حاصل می‌گردد. سپس پیری نتیجه قوی‌تر زیر را اثبات نمود:

قضیه ۱۳.۲. اگر a, b, c نقاط غیرهم خط و d نقطه‌ای از abc و خارج ab باشد، آنگاه صفحات abc, abd با هم یکسان می‌باشند. همچنین اگر a, b, c نقاطی غیرهم خط و d, e, f نیز نقاطی غیرهم خط در صفحه abc باشند آنگاه $abc = def$.

نتیجه بعدی که توسط پیری اثبات شد، معمولاً در رهیافت‌های دیگر جزو اصول شمرده می‌شود:

قضیه ۱۴.۲. اگر d, e نقاطی متمایز از صفحه abc باشند آنگاه خط de به طور کامل در صفحه abc واقع است.

گام مهم بعدی معرفی مفهوم هم‌فاصله بودن است که در معرفی کره، دایره و نقطه وسط میان دو نقطه کاربرد دارد. در اینجا پیری ابتکاری به خرج داده و ابتدا کره را بر اساس مفهوم حرکت و نه بر اساس فاصله نقاط، تعریف می‌کند:

تعریف ۱۵.۲. اگر a, b نقاطی باشند، کره گذرا از نقطه b و حول نقطه a یا به مرکز a ، که با نماد b_a نشان داده می‌شود، عبارت است از مجموعه همه نقاطی چون x به طوری که به ازای این نقطه، حرکتی موجود است که b را به x می‌برد و a را ثابت نگه می‌دارد.

دقت کنید که فرضی در مورد تمایز نقاط a, b نداریم. به وضوح اگر $a = b$ آنگاه کره فوق فقط شامل نقطه a می‌باشد. در ضمن به راحتی دیده می‌شود که برای هر دو نقطه a, b ، داریم $b \in b_a$ و اگر $a \neq b$ آنگاه $a \notin b_a$.

سپس پیری نشان داد که اگر a, b, c سه نقطه و $c \in b_a$ آنگاه کره‌های b_a, c_a یکسان می‌باشند. مسأله بعدی تصویر کره تحت یک حرکت می‌باشد. او نشان داد که اگر a, b نقاط متمایز و μ یک حرکت باشد آنگاه $\mu(b_a) = (\mu b)_a$. از مطالب فوق قضیه مهم زیر به دست می‌آید:

قضیه ۱۶.۲. هر حرکتی که نقطه a را ثابت نگه دارد، هر کره به مرکز a را نیز به خودش تصویر می‌کند.

دو اصل بعدی در مورد تقاطع خط و کره می‌باشد. مسأله تقاطع خط و کره به خودی خود، جالب است ولی پیری به کمک آن موفق به تعریف بازتاب یک نقطه نسبت به یک نقطه دیگر گردید.

اصل ۱۷.۲. اگر a, b نقاط متمایزی باشند، آنگاه حرکتی موجود است که a را ثابت نگه می‌دارد و b را به نقطه‌ای از ab غیر از خودش تصویر می‌کند.

بلافاصله از اصل فوق نتیجه می‌شود که اگر a, b نقاط متمایزی باشند آنگاه کره b_a و خط ab یکدیگر را در نقطه‌ای غیر از b قطع می‌کنند.

اصل ۱۸.۲. اگر a, b نقاطی متمایز و μ, ν دو حرکت باشند به طوری که هر دو a را ثابت نگه داشته و b را به نقطه‌ای روی ab به غیر از خود نقطه b تصویر کنند، آنگاه $\mu b = \nu b$. به عبارت دیگر کره b_a و خط ab یکدیگر را حداکثر در دو نقطه قطع می‌کنند.

تعریف ۱۹.۲. اگر a, b نقاط متمایزی باشند، آنگاه بازتاب b نسبت به a که با نماد $\frac{b}{a}$ نشان داده می‌شود، نقطه‌ای متمایز با b است که در اشتراک کره b_a و خط ba قرار دارد.

سپس پیری نشان داد که اگر حرکت μ نقطه a را ثابت نگه داشته و b را به نقطه $b' \neq b$ روی خط ab تصویر کند، آنگاه b' نیز به b تصویر خواهد شد. اصل بعدی تضمین کننده وجود نقطه وسط بین دو نقطه مفروض می‌باشد:

اصل ۲۰.۲. اگر a, b نقاط متمایزی باشند، آنگاه حرکتی وجود دارد که a را به b می‌برد و نقطه‌ای از خط ab را ثابت نگه می‌دارد.

به عبارت دیگر برای هر دو نقطه متمایز a, b ، نقطه c روی خط ab موجود است به طوری که کره گذرا از b حول c شامل a نیز می‌باشد. در این حالت به وضوح a, b بازتاب یکدیگر نسبت به c می‌باشند. به سادگی دیده می‌شود که نقطه فوق یکتا می‌باشد.

تعریف ۲۱.۲. اگر a, b نقاط متمایزی باشند، نقطه یکتای به دست آمده در اصل بالا را نقطه وسط a, b می‌نامیم و با نماد $a|b$ نشان می‌دهیم.

سپس پیری ثابت کرد که نقطه وسط و بازتاب، تحت هر حرکت حفظ می‌شود به عبارت دیگر برای هر سه نقطه a, b, c اگر $c = \frac{a}{b}$ یا $c = a|b$ آنگاه همین روابط برای تصویر این نقاط تحت هر حرکتی برقرار است. نتیجه بعدی در مورد وجود حرکتی است که نقاط را در امتداد یک خط انتقال می‌دهد:

قضیه ۲۲.۲. برای هر دو نقطه متمایز a, b حرکتی موجود است که خط ab را به خودش تصویر می‌کند و نقطه a را به b می‌برد و هیچ نقطه‌ای از خط فوق ثابت نمی‌ماند.

اصل ۲۳.۲. برای هر سه نقطه ناهم خط a, b, c یک حرکت موجود است که نقاط a, b را ثابت نگه می‌دارد و c را به نقطه‌ای غیر از خودش در صفحه abc متناظر می‌سازد.

در واقع در این حالت، صفحه abc حول خط ab به اندازه 180° درجه دوران می‌کند تا مجدداً به روی خود منطبق گردد. سپس پیری ثابت کرد که برای هر سه نقطه ناهم خط a, b, c کره‌های c_a, c_b در صفحه abc یکدیگر را در نقطه‌ای غیر از c نیز قطع می‌کنند. اصل بعدی نشان می‌دهد که تعداد نقاط تقاطع در آن صفحه نمی‌تواند از دو بیشتر باشد و قضیه پس از آن نشان می‌دهد که در صورت هم خط بودن نقاط فوق، تنها نقطه تقاطع، نقطه c می‌باشد. دقت کنید که در اینجا فرض این است که دو کره یکدیگر را حداکثر در یک نقطه c قطع می‌کنند. بررسی این مساله که دو کره دلخواه تحت چه شرایطی یکدیگر را قطع می‌کنند، نیاز به اصل پیوستگی دارد که در بخش انتهایی معرفی گردیده است.

تعریف ۲۴.۲. یک دایره مجموعه نقاطی است که در اشتراک یک کره و صفحه‌ای گذرا از مرکز آن کره قرار دارند. مرکز هر دایره، مرکز کره متناظر با آن می‌باشد. در صورتی که ابهامی نباشد، از همان نماد c_a برای دایره گذرا از نقطه c به مرکز a استفاده می‌کنیم.

اصل ۲۵.۲. اگر a, b, c نقاطی ناهم خط و d, e نقاطی متمایز از c در صفحه abc باشند به طوری که $d, e \in c_a \cap c_b$ آنگاه $d = e$. به عبارت دیگر تحت شرایط فوق، دایره‌های c_a و c_b واقع در صفحه abc ، یکدیگر را غیر از c دقیقاً در یک نقطه قطع می‌کنند.

قضیه ۲۶.۲. اگر a, b دو نقطه متمایز و c نقطه‌ای روی خط ab باشد، آنگاه کره‌های c_a, c_b یکدیگر را در نقطه‌ای به جز c قطع نمی‌کنند.

نتیجه بعدی در مورد تقاطع خط و کره می‌باشد. قبلاً حالت خاص تقاطع کره با خطی گذرا از مرکز آن کره را مورد بررسی قرار داده‌ایم.

قضیه ۲۷.۲. اگر a, b, c نقاطی ناهم خط باشند و $c \in b_a$ ، آنگاه کره b_a خط bc را در نقطه‌ای به جز b, c قطع نمی‌کند. به عبارت دیگر تقاطع خط و کره نمی‌تواند بیش از دو نقطه داشته باشد.

گام بعدی تعریف تعامد می‌باشد. برای این منظور پیری باز هم از بازتاب نقاط نسبت به یک خط استفاده کرد. ابتدا قضیه زیر را داریم:

قضیه ۲۸.۲. اگر a, b, c نقاطی ناهم خط و حرکت‌های μ, ν به گونه‌ای باشند که صفحه abc را به خودش تصویر کنند و نقاط a, b را ثابت نگه دارند، آنگاه برای هر نقطه دلخواه d از صفحه abc داریم: $\mu d = \nu d$. در ضمن $\mu \mu d = d$. به عبارت دیگر هر دو حرکتی که صفحه abc را حول محور ab دوران دهند به طوری که صفحه فوق به روی خود منطبق گردد، نسبت به صفحه abc یکسان می‌باشند. در ضمن با همان شرایط نقطه وسط $d, \mu d$ همواره روی خط ab قرار دارد.

حال آماده‌ایم که تعامد یک جفت از نقاط را تعریف کنیم. پئانو تعامد را ابتدا برای نیم‌خطها تعریف کرد ولی تعریف اولیه تعامد توسط پیری برای یک جفت نقطه انجام شده است:

تعریف ۲۹.۲. برای سه نقطه متمایز a, b, c گوییم جفت (a, c) به جفت (a, b) عمود است هرگاه حرکتی موجود باشد که a, b را ثابت نگه دارد و c به نقطه‌ای غیر از خودش روی خط ca تصویر شود. در این حالت می‌نویسیم: $(a, c) \perp (a, b)$.

به راحتی دیده می‌شود که رابطه فوق متقارن است. در ضمن اگر a, b, c نقاط ناهم خط و b' نقطه‌ای از خط ab و c' نقطه‌ای از خط ac باشند، آنگاه گزاره‌های $(a, c) \perp (a, b)$ ، $(a, c') \perp (a, b')$ با هم معادلند. گام بعدی تعریف تعامد دو خط می‌باشد:

تعریف ۳۰.۲. دو خط r, s که در نقطه a مشترک هستند را عمود بر هم نامیم هرگاه نقاط $b \in r$ و $c \in s$ موجود باشند به طوری که $(a, c) \perp (a, b)$.

سپس پیری قضایای مشهور زیر را ثابت کرد:

قضیه ۳۱.۲. اگر r یک خط و p نقطه‌ای خارج از r باشد آنگاه دقیقاً یک نقطه x روی r موجود است به طوری که $px \perp r$. به عبارت دیگر از هر نقطه خارج از یک خط، دقیقاً یک خط عمود بر آن خط می‌توان رسم کرد.

قضیه ۳۲.۲. اگر a, b, c نقاطی ناهم خط باشند و d نقطه‌ای از صفحه abc متمایز با c و غیر واقع روی خط ab باشد و اگر $(a, c) \perp (a, b)$ ، $(a, d) \perp (a, b)$ ، آنگاه نقاط a, c, d هم خط می‌باشند. به عبارت دیگر، از هر نقطه روی یک خط نمی‌توان در یک صفحه شامل آن خط، بیش از یک خط بر آن عمود کرد.

نتیجه مهم بعدی در مورد حفظ تعامد تحت هر حرکت می‌باشد:

قضیه ۳۳.۲. اگر a, b, c نقاط متمایز باشند به طوری که $(a, c) \perp (a, b)$ و μ یک حرکت دلخواه، آنگاه

$$(\mu a, \mu c) \perp (\mu a, \mu b).$$

از اینجا به بعد، مقاله پیری شامل بحث نسبتاً مفصلی در مورد هندسه فضایی می‌باشد که در اینجا به اختصار اصولش را معرفی می‌کنیم:

اصل ۳۴.۲. اگر a, b, c نقاطی ناهم خط باشند، آنگاه حداقل یک نقطه خارج از صفحه abc موجود است.

تعریف ۳۵.۲. چهار نقطه a, b, c, d را هم صفحه نامیم هرگاه سه نقطه ناهم خط x, y, z موجود باشند به طوری که صفحه xyz شامل هر چهار نقطه فوق باشد.

واضح است که اگر نقاط a, b, c, d ناهم صفحه باشند آنگاه این نقاط متمایزند، هر سه تا از آنها ناهم خط هستند و هر یک خارج از صفحه شامل سه نقطه دیگر است.

اصل ۳۶.۲. اگر نقاط a, b, c, d ناهم صفحه باشند، آنگاه حرکتی موجود است که a, b را ثابت نگه می‌دارد و d را به صفحه abc می‌برد.

به عبارت دیگر حرکت فوق، صفحه abd را حول محور ab دوران داده و به صفحه abc تصویر می‌کند.

تعریف ۳۷.۲. نقاط b, c را نسبت به نقطه a هم فاصله نامیم هرگاه هر دو نقطه فوق روی کره‌ای به مرکز a ، واقع باشند.

مفهوم مهم بعدی تعامد خط بر صفحه می‌باشد. ابتدا پیری قضیه زیر را ثابت کرد:

قضیه ۳۸.۲. اگر a, b, c نقاطی ناهم خط و d نقطه‌ای از صفحه abc متمایز از a و نقطه p خارج از صفحه abc باشد، آنگاه اگر ap به ab و ac عمود باشد آنگاه به ad نیز عمود خواهد بود.

تعریف ۳۹.۲. تحت مفروضات قضیه فوق، خط pa که به همه خطوط گذرا از نقطه a در صفحه abc عمود است، را یک خط عمود یا نرمال بر صفحه abc می‌نامیم.

سپس پیری ثابت کرد که از هر نقطه خارج از یک صفحه و نیز از هر نقطه روی یک صفحه، می‌توان دقیقاً یک خط بر آن صفحه عمود کرد. همچنین او نشان داد که اشتراک دو صفحه متمایز و متقاطع، یک خط است و اشتراک دو کره متقاطع و نیز اشتراک یک صفحه با یک کره (در صورت تقاطع)، یک دایره یا یک نقطه می‌باشد. در نهایت پس از اثبات قضایای متعدد در هندسه فضایی، پیری مفهوم قابلیت انطباق را به صورت زیر تعریف کرد:

تعریف ۴۰.۲. دو شکل را قابل انطباق نامیم هرگاه حرکتی موجود باشد به طوری که تصویر یکی از این اشکال تحت حرکت فوق، برابر با شکل دیگر باشد.

قضیه ۴۱.۲. هر دو خط با هم قابل انطباقند. همچنین هر دو صفحه نیز با هم قابل انطباقند.

تعریف ۴۲.۲. برای هر دو نقطه a, b قرار دهید:

$$Sfr(a, b) = a_{a|b} = b_{a|b}.$$

کره فوق را کره قطبی نقاط a, b یا کره عمود بر جفت نقاط a, b می‌نامیم و نقاط a, b قطب‌ها یا نقاط به‌طور قطری متضاد کره فوق نامیده می‌شوند. واضح است که $Sfr(a, b) = Sfr(b, a)$. در صورتی که $a = b$ ، کره فوق به یک نقطه منقبض می‌گردد.

قدم بعدی تعریف رابطه بینیت در نقاط می‌باشد. برای این منظور باز هم پیری به کره‌ها متوسل گردید. ابتدا باید نقاط درون یک کره تعریف شود:

تعریف ۴۳.۲. برای هر دو نقطه a, b گوئیم نقطه x درون کره b_a واقع است، هرگاه دو نقطه متمایز روی کره موجود باشند به‌طوری‌که x نقطه وسط آن دو باشد. گوئیم نقطه z خارج از کره فوق قرار دارد هرگاه هیچ دو نقطه‌ای روی کره موجود نباشد به‌طوری‌که z نقطه وسط آن دو باشد.

نتایج زیر بلافاصله از تعریف فوق به‌دست می‌آیند:

قضیه ۴۴.۲. هر نقطه که روی کره b_a نباشد یا درون آن است و یا خارج از آن و نه هر دو. هیچ نقطه روی کره فوق، درون یا خارج از آن نیست. اگر نقاط a, b متمایز باشند آنگاه مرکز کره فوق درون کره قرار دارد.

تعریف ۴۵.۲. نقطه‌ای از یک صفحه را درون یا خارج از یک دایره در آن صفحه نامیم هرگاه نقطه فوق درون یا خارج کره شامل آن دایره، با مرکز واقع در آن صفحه باشد.

تعریف ۴۶.۲. برای هر دو نقطه a, b گوئیم نقطه x بین a, b است هرگاه a, b, x هم‌خط باشند و همچنین x درون کره قطبی a, b باشد. در ضمن پاره خط واصل a به b عبارت است از مجموعه نقاطی که بین a, b هستند یا با یکی از نقاط a, b برابرند. مجموعه فوق را با نماد $|ab|$ نشان می‌دهیم. به‌وضوح $|ab| = |ba|$.

دو اصل بعدی، در مورد چگونگی استقرار چهار نقطه متمایز روی یک خط می‌باشد.

اصل ۴۷.۲. اگر نقاط a, b, c, d متمایز و هم‌خط باشند، آنگاه امکان ندارد که d دقیقاً روی یکی از پاره‌خط‌های $|ab|, |ac|, |bc|$ واقع باشد.

به‌عبارت دیگر یا d روی هیچ کدام از پاره‌خط‌های فوق قرار ندارد و یا روی حداقل دوتا از پاره‌خط‌های فوق واقع است.

اصل ۴۸.۲. اگر a, b, c سه نقطه و c بین a, b باشد، آنگاه هیچ نقطه‌ای وجود ندارد که هم بین a, c و هم بین b, c باشد.

در واقع این اصل تکمیل‌کننده اصل قبلی از این جهت است که نقطه d مذکور در آن اصل نمی‌تواند روی هر سه پاره‌خط فوق باشد. سپس پیری برخی از خواص معمول پاره‌خط‌ها را اثبات کرد از جمله:

قضیه ۴۹.۲. اگر نقاط a, b, c به‌گونه‌ای باشند که $c \in |ab|$ ، آنگاه $|ac|, |bc| \subseteq |ab|$ و هر نقطه درون $|ac|$ یا $|bc|$ ، درون $|ab|$ می‌باشد. در ضمن با شرایط فوق b بین a, c نیست و a نیز بین b, c نیست و داریم: $|ab| = |ac| \cup |bc|$.

اصل بعدی که به اصل پاش معروف است برای اولین بار توسط او در مجموعه اصولش معرفی شده است:

اصل ۵۰.۲. برای هر سه نقطه ناهم خط a, b, c ، اگر خطی در صفحه abc از بین a, b بگذرد و شامل هیچیک از نقاط a, b, c نباشد، آنگاه خط فوق باید از بین a, c یا از بین b, c نیز عبور کند.

به عبارت دیگر در صفحه شامل سه نقطه ناهم خط a, b, c خطی وجود ندارد که فقط یکی از سه پاره خط $|ab|, |ac|, |bc|$ را قطع کند. با معرفی مفهوم بینیت، بقیه مسیر تقریباً مشابه رهیافت پئانو می باشد.

تعریف ۵۱.۲. اگر a, b نقاط متمایزی باشند، توسیع پاره خط $|ab|$ از سمت a عبارت است از مجموعه نقاطی مانند x به طوری که $a \in |bx|$. در ضمن نیم خط از a به سمت b عبارت است از مجموعه نقاطی که روی $|ab|$ یا روی توسیع $|ab|$ از سمت b قرار دارند. نیم خط فوق را با نماد $|ab|$ نشان می دهیم.

تعریف ۵۲.۲. اگر r یک خط و p نقطه ای خارج از آن باشد، نیم صفحه از r به سمت p خانواده نقاطی چون y می باشد به طوری که r پاره خط $|py|$ را قطع نمی کند یا آن را در y قطع می کند. نیم صفحه فوق را با $|rp|$ نشان می دهیم.

تعریف ۵۳.۲. اگر a, b, c نقاطی متمایز باشند، زاویه محدب نیم خط های $|ab|, |ac|$ عبارت است از مجموعه نقاط x به طوری که یا $x = a$ و یا $x \neq a$ و نیم خط $|ax|$ پاره خط $|bc|$ را قطع می کند. زاویه فوق را با نماد $\hat{a}.bc$ نشان می دهیم. رأس زاویه فوق a می باشد و یال های آن $|ab|, |ac|$ می باشند. هر نقطه از زاویه که روی یکی از یال ها نباشد را نقطه درون زاویه می نامیم. اگر نقاط a, b, c هم خط باشند آنگاه زاویه فوق یک نیم خط یا یک خط خواهد بود بسته به اینکه نقاط b, c در یک طرف یا در طرفین نقطه a باشند.

سپس پیری نشان داد که اگر $|ab|$ و $|cd|$ قابل انطباق باشند آنگاه هر حرکتی که این دو را به هم منطبق می سازد، نقاط انتهایی را به هم نظیر می کند. همچنین اگر دو زاویه محدب قابل انطباق باشند، آنگاه حرکتی موجود است که یال ها را به هم منطبق می سازد.

تعریف ۵۴.۲. اگر a, b, c, d نقاطی باشند که $a \neq b$ ، آنگاه گوئیم $|ab| < |cd|$ هرگاه حرکتی موجود باشد که یکی از نقاط a, b را به یکی از نقاط c, d نظیر سازد و نقطه دیگر را به نقطه ای بین c, d نظیر سازد. به عبارت دیگر نقطه x بین c, d موجود باشد به طوری که $|ab|$ با $|cx|$ یا $|dx|$ قابل انطباق باشد.

تعریف ۵۵.۲. برای زوایای محدب $\hat{a}.bc, \hat{d}.ef$ که a, b, c ناهم خط باشند، گوئیم $\hat{a}.bc < \hat{d}.ef$ هرگاه حرکتی موجود باشد که یک یال از $\hat{a}.bc$ را به یالی از $\hat{d}.ef$ نظیر سازد و یال دیگر از $\hat{a}.bc$ را به نیم خطی درون $\hat{d}.ef$ نظیر سازد. به عبارت دیگر نقطه x درون زاویه $\hat{d}.ef$ موجود باشد به طوری که زاویه $\hat{a}.bc$ با یکی از زوایای $\hat{d}.ex$ یا $\hat{d}.fx$ قابل انطباق باشد.

تعریف ۵۶.۲. اگر a, b, c نقاطی دلخواه باشند، آنگاه مجموعه حاصل از اجتماع پاره خط هایی که یک سرش نقطه a و سر دیگر روی پاره خط $|bc|$ واقع است را مثلث حاصل از نقاط a, b, c می نامیم و با نماد $|abc|$ نشان می دهیم. به راحتی دیده می شود که مثلث فوق با تغییر ترتیب نقاط یکسان باقی می ماند. پاره خط های $|ab|, |ac|, |bc|$ یال های مثلث و نقاط a, b, c رئوس آن نامیده می شوند. اجتماع سه یال را مرز مثلث می نامیم و هر نقطه از مثلث فوق که روی مرز نباشد، نقطه درون مثلث نامیده می شود.

سپس حالت انطباق (ض ز ض) بین مثلث ها که معمولاً در رهیافت های دیگر به عنوان اصل پذیرفته می شود، توسط پیری اثبات گردید. اصل آخر، موسوم به اصل پیوستگی، تضمین کننده عدم وجود حفره روی خطوط است. تا به اینجا در مورد

تقاطع دو دایره، فقط حداکثر تعداد نقاط تقاطع، مورد بررسی قرار گرفته است و در مورد شرایط وجود حداقل یک نقطه در این تقاطع صحبتی نشده است. اصل پیوستگی، تضمین کننده وجود نقاط تقاطع تحت شرایط خاصی می باشد. صورتی از این اصل ابتدا توسط پئانو به عنوان ضمیمه ای بر مقاله اصول هندسه، ارائه گردید. سپس پیری در مقاله نقطه و حرکت، صورت دیگری از این اصل را ارائه داد. هر دو فرم را جهت مقایسه در زیر می آوریم. اصل پیوستگی پئانو به فرم زیر است:

اصل ۵۷.۲. اگر h یک شکل محدب و a, b دو نقطه متمایز باشند به طوری که $a \in h$ و $b \notin h$ ، آنگاه نقطه x متعلق به پاره خط $|ab|$ موجود است به قسمی که $|ax| - \{x\}$ مشمول h و $|bx| - \{x\}$ خارج از h می باشد.

دقت کنید که از دیدگاه پئانو، پاره خط شامل نقاط انتهایی خود نیست ولی در دیدگاه پیری، نقاط انتهایی نیز عضو آن محسوب می شوند. برای همین، در صورت اصل بالا، تغییرات جزئی اعمال شده تا بانمادگذاری و تعاریف پیری هماهنگ شود. در واقع اصل فوق بیان می کند که هر تقسیم بندی یک پاره خط در طرفین یک شکل محدب، توسط یک نقطه از آن پاره خط صورت می گیرد. اصل پیوستگی ارائه شده توسط پیری به فرم زیر است:

اصل ۵۸.۲. اگر a, b نقاط متمایز و k یک زیرمجموعه ناتهی از نقاط درون پاره خط $|ab|$ باشد، آنگاه نقطه $x \in |ab| - \{a\}$ موجود است به طوری که اولاً هیچ نقطه ای از k بین x, b نیست و ثانیاً برای هر نقطه y بین a, x ، نقطه ای از k موجود است به طوری که یا بین y, x است و یا با x مساوی است.

در واقع اگر نقاط روی پاره خط $|ab|$ را معادل با یک بازه بسته $[a, b]$ از اعداد حقیقی در نظر بگیریم، نقطه x همان سوپریم یا کوچک ترین کران بالای مجموعه k خواهد بود. پس به عبارتی این اصل، مشابه اصل کمال در اعداد حقیقی می باشد. پس طبیعی است که به عنوان اولین نتیجه، خاصیت ارشمیدسی را در مورد پاره خطها داشته باشیم که به فرم زیر توسط پیری معرفی گردیده است:

قضیه ۵۹.۲. فرض کنید a, a_1 نقاط متمایز و b نقطه ای از توسیع $|aa_1|$ در سمت a_1 باشد و برای هر $i > 2$ قرار دهید $a_i = \frac{a_i - 2}{a_i - 1}$. آنگاه عدد صحیح و مثبت n موجود است که b روی پاره خط $|a_{n-1}a_n|$ واقع است.

پابان بخش مقاله پیری، نتیجه بسیار مهمی در مورد شرط تقاطع دو کره می باشد. قضیه معروفی موسوم به قضیه دو دایره یا اصل پیوستگی دایره در مورد تقاطع دو دایره وجود دارد که می گوید اگر دایره ای نقطه ای درون و نقطه ای خارج از یک دایره دیگر داشته باشد، دو دایره فوق یکدیگر را قطع می کنند. در برخی از کتابهای مقدماتی هندسه، این قضیه با فرض اصل توازی اقلیدس ثابت می گردد [۵]، در حالی که برای اثبات آن نیازی به اصل توازی نیست و با سایر اصول قابل اثبات است. قضیه دو دایره را می توان از قضیه زیر که توسط پیری ثابت شده نتیجه گرفت. البته پیری اشاره ای به قضیه دو دایره نکرده است.

قضیه ۶۰.۲. اگر a, b نقاط متمایز و c, d نقاطی روی خط ab باشند که c درون $|ab|$ و d خارج از آن قرار دارد، آنگاه کره ca و کره قطبی نقاط a, b ، یکدیگر را قطع می کنند.

۳. نتیجه گیری

در این مقاله به اختصار روش پیری برای اصل موضوعی سازی^۵ هندسه توسط مفاهیم تعریف نشده نقطه و حرکت را مورد بررسی قرار دادیم. مفهوم حرکت ابتدا توسط پاش به عنوان ایده ای برای معرفی مفهوم تعریف نشده قابلیت انطباق مورد استفاده قرار گرفت. سپس پئانو به طور مستقیم از حرکت به عنوان یکی از مفاهیم تعریف نشده استفاده کرد و آنرا جهت تعریف قابلیت

^۵axiomatization

انطباق به کار گرفت. ولی روش پیری از این روی منحصر به فرد بود که نقطه و حرکت را به عنوان تنها مفاهیم تعریف نشده در نظر گرفت و سایر مفاهیم هندسی را به کمک آن تعریف نمود و با توجه به آنچه در این مقاله در مورد روند شکل گیری این دستگاه اصل موضوعی مورد بحث قرار گرفت، می توان به این نتیجه رسید که تلاش او کاملاً موفقیت آمیز بوده است. البته در نهایت با انتشار مجموعه اصول هندسه توسط هیلبرت، سایر روش ها از جمله روش پیری، به حاشیه رانده شد. سه دهه بعد در سال ۱۹۳۲، ریاضیدان آمریکایی جورج بیرکاف^۶ مجموعه دیگری از اصول برای هندسه مسطحه ارائه داد [۱] و در آن از اعداد حقیقی برای اندازه گیری طول پاره خط و اندازه زاویه استفاده کرد. با توجه به دشواری هندسه بدون اعداد برای ریاضیات دبیرستانی، روش فوق به سرعت محبوبیت پیدا کرد و در اکثر دوره های دبیرستانی در آمریکا، کتاب های درسی با اصولی مشابه اصول بیرکاف نوشته شد. به خصوص در دهه شصت، گروه مطالعاتی ریاضیات دبیرستانی (MSG) دستگاهی از اصول موضوعه بر اساس روش بیرکاف ارائه کرد که مدت ها به عنوان یک روش استاندارد برای آموزش هندسه در دبیرستان، مورد استفاده قرار گرفت [۲].

مراجع

- [1] G. D. Birkhoff, A set of postulates for plane geometry, based on scale and protractor, *Ann. Math.*, **33** (1932) 329–345.
- [2] J. M. Lee, *Axiomatic Geometry*, American Mathematical Society, Providence, 2013.
- [3] E. A. Marchisotto and J.T. Smith, *The Legacy of Mario Pieri in Geometry and Arithmetic*, Birkhäuser, Boston, 2007.
- [4] E. A. Marchisotto, F. R. Consuegra and J. T. Smith, *The Legacy of Mario Pieri in Foundations and Philosophy of Mathematics*, Birkhäuser, New York, 2021.
- [5] E. E. Moise, *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1990.
- [6] M. Pasch, *Vorlesungen über Neuere Geometrie*, Teubner, Leipzig, 1882.
- [7] G. Peano, *I Principii di Geometria Logicamente Esposti*, Fratelli Bocca Editore, Torino, 1889.
- [8] G. Peano, Sui fondamenti della geometria, *Rivista di matematica*, **4** (1894) 51–90.
- [9] M. Pieri, Della geometria elementare come sistema ipotetico deduttivo: Monografia del punto e del moto, *Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino (series 2)*, **49** (1900) 173–222.

رضا رضاوند

دانشکده ریاضی آمار و علوم کامپیوتر، دانشکدگان علوم، دانشگاه تهران، تهران، ایران.

rezavand@ut.ac.ir

رضا رضاوند در سال ۱۳۶۰ در تهران متولد شد. وی در سال ۱۳۷۷ وارد مقطع کارشناسی رشته ریاضی محض دانشگاه تهران و در سال ۱۳۸۱ وارد مقطع کارشناسی ارشد در همان دانشگاه شد. وی در سال ۱۳۸۴ در دوره دکتری تخصصی ریاضی دانشگاه تربیت مدرس پذیرفته شد و در سال ۱۳۸۸ از رساله خود دفاع کرد. وی هم اکنون عضو هیات علمی دانشگاه تهران می باشد.



^۶George D. Birkhoff