

KNOT THEORY, FROM PAST TO PRESENT

EAMAN EFTEKHARY^{id}

ABSTRACT. In this paper, which is the first paper from a trio on important developments of low dimensional topology in the past 100 years, we review the history and major developments in knot theory. This historic account includes the initial attempts at formulating some of the main questions about knots in a mathematical language, putting the definitions and arguments in a rigorous mathematical framework, and employing tools from other fields of mathematics to extract interesting and intriguing results in knot theory. The study starts from Tait's work in nineteenth century and reviews the important steps taken before the introduction of gauge theory. In particular, we will review the prime decomposition of knots and various polynomial invariants constructed for knots and links. We finish the paper by discussing some of the important conjectures in knot theory which have surprisingly simple statement. We also review some of the recent developments around the aforementioned conjecture, including some theorems including contributions from the author.

1. Introduction

This is the first paper from a trio (including the present paper, [6] and [5]) which described some of the major developments in low dimensional topology in the past 100 years.

Among topological objects in low dimensions, knots are distinguished as objects with extreme intuitive simplicity as well as significant topological complexity. Knots have a long history in different civilizations [3, 8]. Nevertheless, the first mathematical/scientific attempts at understanding knots go

Keywords: Knot theory, low dimensional topology, knot invariants, unknotting number, knot polynomials.

Communicated by Mohamad Reza Pouryayevali.

Article Type: Research Paper.

Received: 11-12-2023, Accepted: 30-01-2024, Published Online: 27-05-2024.

Cite this article: E. Eftekhary, Knot theory, from past to present, *Journal of Mathematics and Society*, **9** no. 1 (2024) 107–136.

<http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140066.1631> .

back to 18th century, when Sir William Thomson (Lord Kelvin) used knots in his model for atoms[14]. Later, Mathematicians got interested in the study of knots as well. In particular, Gauss introduced the notion of linking number in 19th century. In 1867, Tate introduced the first table of knots, and ordered the knots according to their crossing numbers. He also presented the first complete list of alternating knots with at most 10 crossings [10, 14].

The work of Tate is distinguished from other approaches of his time, and some of the concepts and questions he introduced remained in the center of attention for more than a century. In particular, his conjectures (which were proved in the second half of 20th century) are of extreme importance [10].

In last years of 19th century and the first few years of 20th century, algebraic topology came to birth in the work of Poincaré, and in particular, the concept of fundamental group was introduced. The fundamental group of the knot complement later proved to be a very strong knot invariant. Among other developments in the beginning of 20th century, which influenced the progress of knot theory are the representations of the braid groups and the introduction of a polynomial invariants by Alexander. Moreover, Reidemeister's theorem on how different diagrams of a knot are changed to one another, paved the way for a more rigorous and reliable approach to constructing knot invariants.

Classical methods were used in some of the main developments in the later years of the 20th century. In 1954, the prime decomposition theorem for knots was proved, which is probably one of the most important conceptual theorems in knot theory. Jones polynomial and HOMFLY polynomial were constructed in 1984. Moreover, the progress in low dimensional topology resulted in tools and developments in knot theory. This line of progress started with the influence of gauge theory on knot theory. However, in this paper we focus on the era before the introduction of gauge theory.

In the last section of the paper, some of the major conjectures and open questions in knot theory are reviewed. We have selected the conjectures and open questions which have simple statements, and are thus accessible for a wide range of audience.

2. Main Results

The main theorems and developments covered in this paper include the following major results. We start with Tate conjectures, which were formulated towards the end of 19th century and motivated several later developments:

Conjecture 2.1 (Tate Conjectures). *Suppose that L is an alternating link. Then the following are true.*

- *The number of crossings in every alternating diagram of L which does not have any nugatory crossings is precisely the crossing number $c(L)$ of L .*

- The wirth numbers of every two alternating diagrams of L which do not have any nugatory crossings are the same.
- Every two alternating diagrams of L which do not include nugatory crossings are changed to one another by a finite sequence of flypes.

Schubert presented an important contribution in 1954, which is called the Prime Decomposition of knots [13].

Theorem 2.2 (Prime Decomposition Theorem for Knots). *Every nontrivial knot K in $\mathbb{R}^3$ may be written as the connected sum of prime knots. Moreover, if*

$$K = K_1 \# \cdots \# K_n = K'_1 \# \cdots \# K'_m$$

are two decompositions of K to (nontrivial) prime knots, then $m = n$ and there is a permutation $\sigma \in S_n$ such that K'_i and $K_{\sigma(i)}$ are equivalent.

In the beginning of 20th century, the relation between knot theory and the study of braid groups was an important line of research. In particular, the following theorem of Alexander from 1923 is considered an important step:

Theorem 2.3 (Alexander). *For every link L , there is a positive integer n and a braid $b \in B_n$ so that the closure of b gives L .*

The contribution of Alexander did not stop here. In 1928, he introduced the first polynomial invariants for knots [1]. His construction used the work of Reidemeister [12] and the previous work of Artin on braid groups. To every diagram D of a knot K , he associated a $n \times (n + 2)$ matrix $A'_D(t)$ with monomial entries, called the Alexander matrix. By removing the last two columns of A'_D , he obtains a square matrix $A_D(t)$, and defined

$$\Delta_K(t) \doteq \det(A_D(t)).$$

Here $\doteq$ indicates that the equality is modulo multiplication by a factor $\pm t^k$ for some integer k .

Theorem 2.4. *The polynomial $\Delta_K(t)$ is an invariant of the knot K , up to multiplication by a monomial $\pm t^k$, and does not depend on the choice of the diagram D .*

Conway normalized the Alexander polynomial, and got rid of the ambiguity (of multiplication by a factor $\pm t^k$) [4]. For other new knot polynomials, mathematicians waited more than 50 years. Jones introduced his polynomial in 1984 [9], while 4 months his construction was generalized to give the HOMFLY polynomial [7]. By a skein we mean three links K^0, K^+ and K^- which have diagrams that are identical outside a small disk, while inside that disk they look like Figure 14 of the paper. The construction of HOMFLY polynomial may be stated as the following theorem.

Theorem 2.5 (Existence of HOMFLY polynomial). *We may associate a polynomial $P_K \in \mathbb{Z}[a, z]$ to every link K so that*

- *If K and K' are equivalent then $P_K = P_{K'}$;*
- *For the unknot O , we have $P_O = 1$;*
- *For every skein K^0, K^-, K^+ we have*

$$\frac{1}{a}P_{K^+} - aP_{K^-} = zP_{K^0}.$$

Although HOMFLY polynomial is capable of distinguishing many knots from one another, there are ways to change a knot K to a different knot K' which shares the same HOMFLY polynomial. In particular, mutation provides one such operation. For instance, Conway mutation changes the Conway knot to Kinoshita-Terasaka knot, as illustrated in Figure 17 of the paper. For a knot invariant, it is always an interesting question to verify if it distinguishes between mutant knots.

3. Conclusions

The paper concludes with some open questions and conjectures in knot theory, with different flavors. The open questions include the following question about the existence of an algorithm for distinguishing a knot from the unknot.

Question 3.1. *Is there a polynomial-time algorithm than can verify if a knot is non-trivial?*

We do not know of any nontrivial knots with trivial Jones polynomial. If the following conjecture is true, the above question may be answered positively.

Conjecture 3.2. *The Jones polynomial of a non-trivial knot is nontrivial*

The crossing number of knots is the source of many questions as well. Let us denote by $N(c)$ the number of non-equivalent knots with at most c crossings.

Question 3.3. *Does the limit*

$$\lim_{c \rightarrow \infty} (N(c))^{\frac{1}{c}}$$

exist? If so, what is its value?

It seems that the crossing number behaves pretty well under connected sum. Nevertheless, proving the following natural conjecture is still wide open.

Conjecture 3.4 (Additivity of Crossing Number). *For every two knots K and K' we have*

$$c(K_1 \# K_2) = c(K_1) + c(K_2).$$

The best known result is the following theorem, which is due to Lackenby [11]:

Theorem 3.5. *For every two knots K and K' we have*

$$\frac{c(K_1) + c(K_2)}{152} \leq c(K_1 \# K_2) \leq c(K_1) + c(K_2).$$

Let $u(K)$ denote the unknotting number of a knot K . The additivity of $u(K)$ under connected sum is also wide open.

Conjecture 3.6 (Additivity of Unknotting Number). *For every two knots K and K' we have*

$$u(K_1 \# K_2) = u(K_1) + u(K_2).$$

It is not even known whether for a pair of knots K_1 and K_2 , the unknotting number of $K = K_1 \# K_2$ is always at least a fixed multiple of $u(K_1)$. The following theorem of Alishahi and the author [2] is considered a significant progress in the direction of Conjecture 3.6.

Theorem 3.7. *For every knot K , there is a lower bound $t(K)$ for $u(K)$ so that for every two knots K and K' we have*

$$\mathfrak{K}_1 \# \mathfrak{K}_2 \geq \max\{\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2\}.$$

Moreover, for the torus knot $K = T_{p,q}$ we have $t(K) = \min\{p, q\} - 1$.

REFERENCES

- [1] I. Agol, The virtual Haken conjecture, With an appendix by Agol, Daniel Groves, and Jason Manning, *Doc. Math.*, **18** (2013) 1045–1087.
- [2] A. Alishahi and E. Eftekhary, Knot Floer homology and the unknotting number, *Geom. Topol.*, **24** no. 5 (2020) 2435–2469.
- [3] R. Beer, *The Handbook of Tibetan Buddhist Symbols*, Serindia Publications Inc, Serindia Publications Inc., 2003.
- [4] J. H. Conway, *An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties*, Computational Problems in Abstract Algebra (Proc. Conf., Oxford, 1967), Pergamon, Oxford-New York-Toronto, Ont., 1970 329–358.
- [5] E. Eftekhary, Knot theory and modern mathematical tools, [In Persian]. *preprint*, available at <https://www.researchgate.net/profile/Eaman-Eftekhary/research>.
- [6] E. Eftekhary, Topology of 3-manifolds [In Persian]. *preprint*, available at <https://www.researchgate.net/profile/Eaman-Eftekhary/research>.
- [7] P. Freyd, D. Yetter, J. Hoste, W. B. R. Lickorish, K. Millett and A. Ocneanu, A new polynomial invariant of knots and links, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **12** no. 2 (1985) 239–246.
- [8] N. D. Gilbert and T. Porter, *Knots and surfaces*, Oxford Science Publications, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1994.

- [9] V. F. R. Jones, Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials, *Ann. of Math. (2)*, **126** no. 2 (1987) 335–388.
- [10] C. G. Knott, *Life and scientific work of Peter Guthrie Tait*, Cambridge University Press, 1911.
- [11] M. Lackenby, The crossing number of composite knots, *J. Topol.*, **2** no. 4 (2009) 747–768.
- [12] K. Reidemeister, *Knotentheorie*, (German) Reprint, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1974.
- [13] H. Schubert, Über eine numerische Knoteninvariante, (German), *Math. Z.*, **61** (1954) 245–288.
- [14] A. Sossinsky, *Knots. Mathematics with a twist*, Translated from the 1999 French original by Giselle Weiss, Harvard University Press, Cambridge, MA, 2002.

Eaman Eftekhary

School of Mathematics, Institute for Research in Fundamental Sciences (IPM), P.O.Box 19395-5746, Tehran, Iran

Email: `eamanipm.ir`

نظریه گره‌ها، از گذشته تا امروز

ایمان افتخاری^{ID}

چکیده. در این مقاله، که اولین مقاله از یک سه‌گانه با موضوع تحولات مهم توپولوژی ابعاد پایین در صد سال گذشته است، به پیشینه و تحولات مهم تاریخی در نظریه گره‌ها می‌پردازیم. این پیشینه، شامل تلاش‌های اولیه ریاضیدانان برای صورت‌بندی سؤالات اصلی به زبان ریاضی، قرار دادن استدلال‌ها و تعاریف در چارچوب‌های دقیق ریاضی و برخی از ابزارهای مهمی است که از حوزه‌های مختلف ریاضی وام گرفته شد، تا نتایج جالب و درخشانی در نظریه گره‌ها حاصل گردد. روایت اصلی این مقاله از کارهای تیت در قرن نوزدهم آغاز می‌شود و گام‌های مهمی که تا پیش از معرفی ناورداهای پیمانه‌ای برداشته شد را مرور می‌کند. بالاخص به تجزیه اول گره‌ها و ناورداهای چندجمله‌ای برای گره‌ها توجه ویژه‌ای خواهیم داشت. در پایان این مقاله، تعدادی از حدس‌های مهم نظریه گره‌ها که صورت‌هایی ساده و ملموس دارند، مطرح شده است و به برخی نتایجی که در سال‌های اخیر در خصوص این حدس‌ها به دست آمده است؛ از جمله برخی مواردی که نویسنده در آنها مشارکت داشته است؛ هم اشاره خواهیم کرد.

۱. مقدمه

این مقاله، اولین مقاله از یک سه‌گانه (شامل این مقاله، [۱۰] و [۹]) است که به توصیف بخش‌هایی از تحولات توپولوژی ابعاد پایین (و نظریه گره‌ها) در یکصد سال گذشته می‌پردازد، و در عین حال، چند قضیه از نویسندگان را در این بستر، و در میان قضایایی که بر ابزارهای مدرن‌تر استوار هستند، شرح می‌دهد. توپولوژی ابعاد پایین از زمینه‌های فعال ریاضیات در شصت سال گذشته بوده است، که در عین حال کمتر مورد توجه جامعه ریاضی کشور قرار گرفته است. بنابراین، این مقاله، در کنار اهداف پژوهشی و شاید بیش از آنها، اهداف ترویجی را هم دنبال می‌کند.

در میان موجودات توپولوژیکی که در ابعاد پایین زندگی می‌کنند، گره‌ها^۱ موقعیت ممتازی از جهت سادگی مفهومی و پیچیدگی محتوایی دارند. گره‌ها را به سادگی می‌توان تعریف و تصور کرد، و با این وجود تلاش‌های جدی و چند صدساله ریاضیدان‌ها برای رده‌بندی آنها تقریباً بی‌ثمر بوده است. به علاوه، تنوع گره‌ها و پیوندها^۲ به حدی است که هر خمینه^۳-بعدی را می‌توان با استفاده از آنها توصیف کرد. همه اینها از گره‌ها موجوداتی آشنا، ساده و در عین حال رازآلود ساخته است. پرداختن‌های غیرحرفه‌ای به گره‌ها، پیشینه‌ای طولانی دارد. از ظهور گره‌ها در معماری‌های سنتی کشورهای مختلف گرفته تا کاربردهایی در زندگی روزمره، نشانه‌های روشنی دیده می‌شود مبنی بر این‌که گره‌ها از ملموس‌ترین موجودات دنیای مجرد توپولوژی هستند. به این معنا، پرداختن به گره‌ها ریشه‌های تاریخی بسیار عمیقی دارد. چند قرن پیش از میلاد مسیح، گره‌ها

عبارات و کلمات کلیدی: نظریه گره‌ها، توپولوژی بعد پایین، ناورداهای گره‌ها، عدد گشودن گره، چندجمله‌ای‌های گره.
دبیرتخصصی رابط: محمدرضا پوریای ولی
نوع مقاله: پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۹/۲۰ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۱۱/۱۰ تاریخ انتشار آنلاین: ۱۴۰۳/۰۳/۰۷
ارجاع به مقاله: ا. افتخاری، نظریه گره‌ها، از گذشته تا امروز، نشریه ریاضی و جامعه، ۹ شماره ۱ (۱۴۰۳)، صص. ۱۰۷-۱۳۶.
<http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.140066.1631>

¹knot ²link



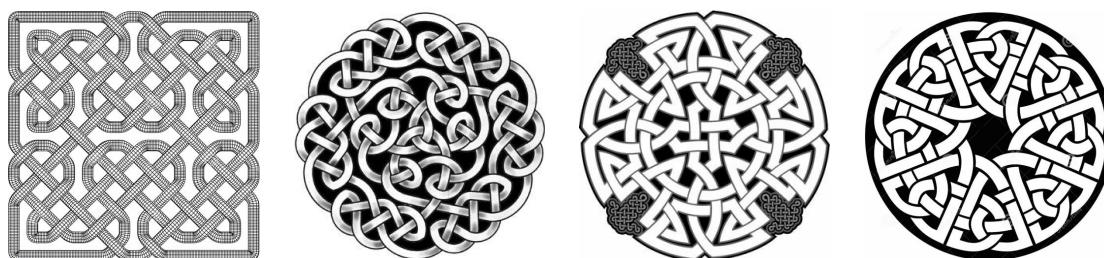
شکل ۱. آشتامانگالا، یا همان هشت نماد فرخنده شامل شریواستا (گره بی‌پایان) است. در تصویر بالا از آشتامانگالا، شریواستا در ردیف اول، به‌عنوان اولین نماد از سمت چپ ظاهر می‌شود.

Figure 1: Ashtamangala, or the eight auspicious symbols, includes Shrivasta (the endless knot). In the above illustration of Ashtamangala, Shrivasta appears in the top row as the first symbol from the left.

در آثار هنری چین ظاهر شده‌اند و در مکتب بودایی تبّ هم شریواستا^۳ یا همان گره بی‌پایان، نقش نمادین مهمی دارد. این گره در واقع یکی از نمادهای آشتامانگالا (هشت نماد فرخنده)^۴ است که جایگاه ویژه‌ای در مکتب‌های بودایی و هندو دارد [۶]. نقش نمادین گره‌ها و پیوندها به گره بی‌پایان منحصر نیست، و در جاهای دیگر نیز مشاهده می‌شود. از جمله پیوند برومویی^۵ هم در فرهنگ‌های مختلف ظاهر شده و معمولاً به‌عنوان نمادی از وحدت مورد توجّه بوده است. راهبان سلّتی^۶ صفحات متعددی از «کتاب بایدها»^۷ را (که بیش از ۱۲۰۰ سال قدمت دارد) به تصویر کردن گره‌ها و پیوندهایی اختصاص داده‌اند که به نام شبکه‌های سلّتی^۸ شناخته می‌شوند [۱۲]. در هنر اسلامی نیز گره‌ها جایگاه ویژه‌ای دارند. از کاشی‌کاری سقف‌ها و دیوارهای مساجد و بارگاه‌ها در معماری اسلامی گرفته تا نقش‌هایی که برای تزئینات قرآن کریم به‌کار می‌روند، می‌توان آنها را رصد کرد. در تصاویر شکل ۳ نمونه‌هایی از این نقش‌ها مشاهده می‌شود. از جمله این نمونه‌ها، تزئینات جلد نسخه‌ای از قرآن کریم با بیش از ۸۰۰ سال قدمت است که در کشور ترکیه نگهداری می‌شود. همچنین، نمونه‌هایی را از مسجد سمرقند در ازبکستان و مسجد کوردوبا در اسپانیا انتخاب کرده‌ایم. خواننده علاقمند می‌تواند نمونه‌های متعدد دیگری را با یک جستجوی ساده در اینترنت مشاهده کند.

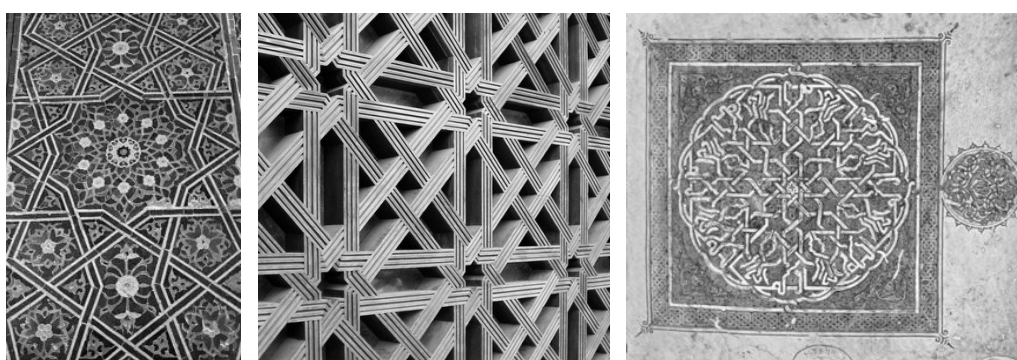
با این وجود، پرداختن به نظریه گره‌ها به‌عنوان یک موضوع علمی اولین بار در قرن هجدهم اتفاق افتاد. اولین بار فیزیکدان‌ها (در مطالعه مدل گردابی^۹ برای اتم) به گره‌ها علاقمند شدند، و این علاقه بعد از مدّتی به ریاضیات کشیده شد تا بررسی گره‌ها و پیوندها در ریاضیات به‌عنوان موضوعی مستقل دنبال گردد. کارهای قرن نوزدهم شامل تهیه فهرست‌هایی از گره‌ها، معرفی برخی از ناوردا^{۱۰} و ارائه اثبات‌هایی نادقیق برای برخی از خصوصیات گره‌ها بود. بالاخص، حدس‌های تیت^{۱۱} که در اواخر قرن نوزدهم صورت‌بندی شدند، جایگاه ویژه‌ای در میان این گونه تلاش‌ها دارند. حدس‌های تیت با استدلال‌هایی همراه بود، که البته با استنتاج‌های کامل فاصله قابل توجّهی داشتند. تکمیل برخی از این اثبات‌ها بیش از ۸۰ سال به طول انجامید، که قسمتی از این تأخیر متأثر از دشواری قرار دادن نظریه گره‌ها در چارچوبی دقیق و تدوین ریاضیاتی بود که به‌بررسی آنها می‌پرداخت.

³Shrivasta ⁴Ashtamangala (eight auspicious symbols) ⁵Borromean link ⁶Celtic monks ⁷the book of Kells ⁸Celtic network ⁹vortex model ¹⁰invariant ¹¹Tait conjectures



شکل ۲. چهار نمونه از شبکه‌های سلتی.

Figure 2: Four samples of Celtic networks.



شکل ۳. چهار نمونه از گره‌ها در هنر اسلامی. از راست: جلد نسخه‌ای با قدمت بیش از ۸۰۰ ساله از قرآن کریم، دیواری در مسجد کوردوبا در اسپانیا، کاشی‌کاری مسجدی در سمرقند ازبکستان.

Figure 3: Four samples of knots in Islamic art. From right: A 800 year old Quran-cover, A wall from Cordoba mosque in Spain and the tiling of a mosque in Samarkand, Uzbekistan.

در آخرین سال‌های قرن نوزدهم و اولین سال‌های قرن بیستم، مبانی توپولوژی جبری با انتشار سلسله مقالات «تحلیل مکان»^{۱۲} آنری پوانکاره^{۱۳} شکل گرفت. در سال‌های پس از آن، ریاضیدان‌های مهمی به استحکام این مبانی کمک کردند. تحولات مهم و مرتبطی هم در نظریه گره‌ها که به بررسی بازنمایش^{۱۴} گروه بافت^{۱۵} مربوط می‌شد پایه دیگری از نظریه گره‌ها را شکل داد. به این ترتیب، مسیر برای بررسی بهتر گره‌ها به مقدار زیادی هموار گردید، و پیشرفت نظریه گره‌ها سرعت گرفت. از جمله، اولین ناوردهای چندجمله‌ای برای گره‌ها و پیوندها توسط الکساندر^{۱۶} ساخته شد. به علاوه، قضیه راینمایستر^{۱۷} که نحوه تبدیل نمودارهای مختلف یک گره به یکدیگر را توصیف می‌کرد ابزاری مهم برای جلوگیری از اشتباهات قبلی در اثبات‌ها پیش روی ریاضیدان‌ها گذاشت. تا اواسط قرن بیستم قضیه تجزیه اول گره‌ها به اثبات رسید که شاید از مهم‌ترین قضایای ساختاری دوره خود محسوب می‌گردد. معرفی ناوردهای چندجمله‌ای متنوع‌تر تا سال ۱۹۸۴ به طول انجامید که چندجمله‌ای جونز^{۱۸} و چندجمله‌ای هافلی^{۱۹} معرفی شدند. این چندجمله‌ای‌ها توانایی زیادی در تشخیص گره‌ها از یکدیگر داشتند و کشف آنها، که با فاصله زمانی قابل توجهی نسبت به چندجمله‌ای الکساندر اتفاق افتاد، تحول مهمی در نظریه گره‌ها محسوب می‌شود.

¹²analysis situs ¹³Henri Poincaré ¹⁴representation ¹⁵braid group ¹⁶Alexander ¹⁷Reidemeister ¹⁸Jones polynomial ¹⁹HOMFLY Polynomial

علاوه بر تلاش‌هایی که به آنها اشاره شد، استفاده از ابزارهای توپولوژی بعد پایین هم نتایج درخشانی را در نظریه گره‌ها رقم زد. توانایی گروه بنیادی^{۲۰} مکمل یک گره در تشخیص آن (که البته منظور از آن باید با ظرافت‌هایی مورد توجه قرار گیرد) از جمله این نتایج است. همچنین، ابزارهایی که از نظریه‌های پیمانه‌ای^{۲۱} حاصل شدند، امکان اثبات قضایای درخشانی را فراهم کردند. توضیح بیشتر در مورد این مسیرها، به مقاله‌ای دیگر از این مجموعه موکول می‌شود.

در این مقاله آغازین، بخش اول داستان گره‌ها را دنبال خواهیم کرد، که بدون اتکا به تحولات توپولوژی ۳-بعدی اتفاق افتاد. بخش قابل توجهی از این داستان با استفاده از ریاضیات مقدماتی قابل بیان است، هر چند که گهگاه ارائه اثبات‌های دقیق، بر استفاده از ابزارهای اولیه توپولوژی دیفرانسیل استوار بوده است. در مقاله‌های بعدی در مورد روند تحولات و پیشرفت‌ها در توپولوژی ابعاد پایین سخن خواهیم گفت، و با برخی از ابزارهای مهمی که در اثنای این تحولات ساخته شدند، آشنا خواهیم شد. پس از آشنا شدن با این ابزارها مجدداً به موضوع گره‌ها باز خواهیم گشت و داستان‌مان را تا حدودی تکمیل خواهیم کرد. در بخش پایانی مقاله حاضر، به برخی از حدس‌های باز در نظریه گره‌ها هم اشاره خواهیم کرد که صورت‌هایی بسیار ساده و ملموس دارند. به تعدادی از نتایجی که در سال‌های اخیر حاصل شده است هم، از جمله برخی از نتایجی که نویسنده در آنها نقش داشته است، اشاره خواهد شد. برای توصیف ابزارهایی که در رویکردهای متأخر به کار رفته‌اند، خواننده را به مقاله‌های بعدی از این مجموعه ارجاع می‌دهیم.

۲. مفاهیم اولیه و برخی مثال‌ها

صورت‌بندی دقیق این موضوع که چه هنگام دو گره با هم معادل هستند، موضوعی است که نیاز به تأمل دارد. به طور شهودی، تمایل بر این است که دو گره را با هم معادل بگیریم، هرگاه بتوان بدون بریدن گره، و تنها با حرکت دادن گره در فضای ۳-بعدی، آن را از یک حالت به حالت دیگر تبدیل کرد. معادل بودن، یک رابطه هم‌ارزی^{۲۲} است. نظریه گره‌ها به مطالعه رده‌های گره‌ها^{۲۳}، یعنی رده‌های هم‌ارزی گره‌ها نسبت به این رابطه هم‌ارزی می‌پردازد. با وجود کفایت نسبی این دیدگاه شهودی، برای خواننده‌ای که آشنایی بیشتری با مفاهیم توپولوژی دارد، ذکر برخی از تعاریف رسمی‌تر خالی از لطف نیست. این بخش، به ارائه این تعاریف پایه‌ای و طرح برخی از مثال‌های مهم خواهد پرداخت.

کره استاندارد n -بعدی را با S^n نشان می‌دهیم و منظور از آن، زیرفضایی از فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^{n+1}$ است که با

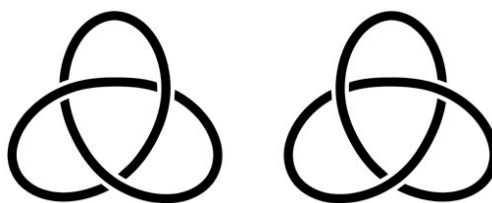
$$S^n = \left\{ (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n x_i^2 = 1 \right\},$$

تعریف می‌شود. بنابراین، S^1 دایره استاندارد، S^2 کره ۲-بعدی استاندارد، و S^3 کره ۳-بعدی استاندارد است که به نحو معادل؛ تا جایی که از منظر توپولوژی اهمیت دارد؛ با اضافه کردن یک نقطه در بی‌نهایت به $\mathbb{R}^3$ به دست می‌آید. منظور از یک گره، تصویری هموار^{۲۴} از دایره استاندارد S^1 در کره استاندارد است که خودش را قطع نمی‌کند و تکینگی^{۲۵} ندارد. اگر نگاشت تصویر را با

$$K : S^1 \hookrightarrow S^3 \subset \mathbb{R}^4$$

نشان دهیم، منظور این است که K به عنوان تابعی از زاویه θ که دایره S^1 را پرمایش می‌کند، تابعی است یک‌به‌یک و هموار که مشتق آن همه جا ناصفر است. به چنین نگاشت‌هایی، یک نشانند^{۲۶} دایره S^1 در S^3 می‌گوییم. خمینه میزبان را در حالت کلی می‌توان متفاوت از کره استاندارد هم انتخاب کرد. اما تمرکز ما بر گره‌هایی است که در S^3 و یا $\mathbb{R}^3$ زندگی می‌کنند.

²⁰fundamental group ²¹gauge theory ²²equivalence relation ²³knot class ²⁴smooth ²⁵singularity ²⁶embedding



شکل ۴. گره سه پر (چپ) و تصویر آینه‌ای آن (راست). به این دو گره، گره‌های سه پر راست‌گرد و چپ‌گرد هم گفته می‌شود.

Figure 4: The trefoil knot (left) and its mirror (right). These knots are also called the right-handed and the left-handed trefoils.

تعریف ۱.۲. منظور از یک گره، نشاندهی هموار مانند $K : S^1 \hookrightarrow S^3$ است. به‌طور مشابه، منظور از یک پیوند با ℓ مولفه، یک نشاندهی

$$L : \coprod_{i=1}^{\ell} S^1 = S^1 \amalg S^1 \amalg \dots \amalg S^1 \hookrightarrow M$$

است. پس تصویر هر مولفه یک پیوند، یک گره است.

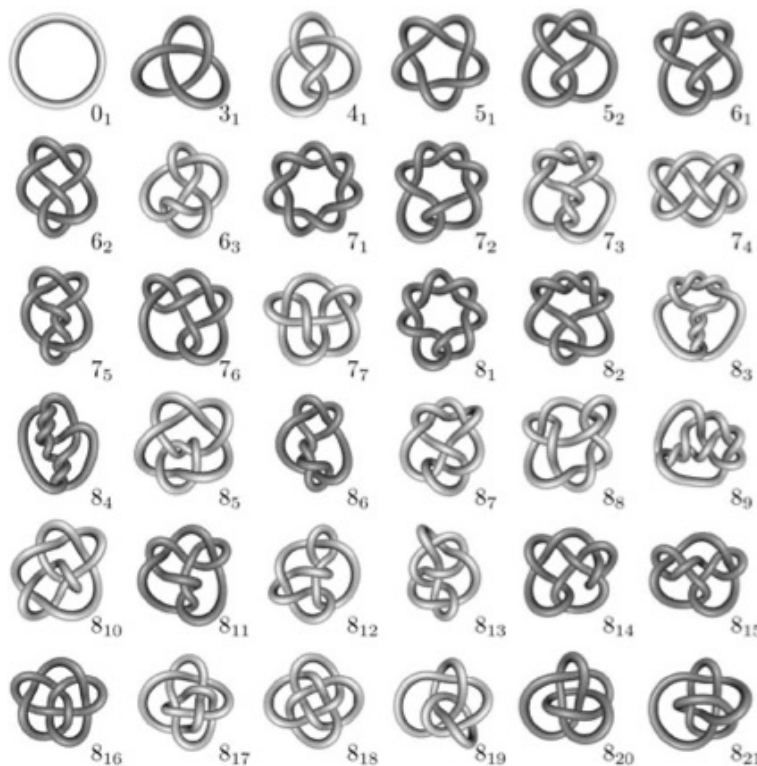
در این مقاله از یک هموارریختی^{۲۷} از یک فضا به خودش، با عنوان خودریختی^{۲۸} یاد خواهیم کرد. توجه کنید که هر خودریختی کره ۳-بعدی یا با نگاشت همانی (که جهت‌نگهدار^{۲۹} است) یک نهاده^{۳۰} است و یا با نگاشت جهت‌برگردان^{۳۱} $\iota : S^3 \rightarrow S^3$ که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\iota(x_0, x_1, x_2, x_3) := (-x_0, x_1, x_2, x_3), \quad \forall (x_0, x_1, x_2, x_3) \in S^3.$$

گره‌های $K : S^1 \hookrightarrow S^3$ و $K' : S^1 \hookrightarrow S^3$ را با هم معادل می‌گوییم هرگاه خودریختی جهت‌نگهدار $\iota : S^3 \rightarrow S^3$ موجود باشد به‌طوری‌که $\iota \circ K = K'$. نگاشت $\iota : S^3 \rightarrow S^3$ در واقع یک یک‌نهمش^{۳۲} محیطی^{۳۳} بین دو گره ایجاد می‌کند. همان‌طور که قبلاً هم اشاره کردیم، معادل بودن گره‌ها، یک رابطه هم‌ارزی است. نظریه گره‌ها به مطالعه رده‌های گره‌ها، یعنی رده‌های هم‌ارزی گره‌ها نسبت به یک‌نهمش محیطی، می‌پردازد. معمولاً بین خودریختی‌های جهت‌نگهدار و خودریختی‌های جهت‌برگردان تمایز قائل می‌شویم. با اعمال خودریختی جهت‌برگردان ι روی گره $K : S^1 \hookrightarrow S^3$ گره جدیدی به‌دست می‌آید که تصویر آینه‌ای^{۳۴} گره اول خوانده می‌شود. تصویر آینه‌ای K را معمولاً با $-K$ نشان می‌دهیم. توجه کنید که تنها تحدید خودریختی جهت‌برگردان به گره در ساخت تصویر آینه‌ای آن اهمیت دارد.

اگر شرط جهت‌نگهدار بودن خودریختی را حذف کنیم، مفهوم ضعیف‌تری از معادل بودن گره‌ها به‌دست می‌آید. طبق این تعریف، یک گره و تصویر آینه‌ای آن با هم معادل ضعیف هستند، اما ممکن است یک یک‌نهمش محیطی بین آنها وجود نداشته باشد. ممکن است یک گره با تصویر آینه‌ای خود یک نهاده^{۳۵} محیطی^{۳۶} باشد. مثلاً گره بدیهی (تصویری استاندارد از S^1 در S^3) و گره هشت-سیما که در شکل ۵ با شماره ۴۱ نمایش داده شده است، هر دو با تصویر آینه‌ای‌شان یک نهاده^{۳۷} محیطی (معادل) هم هستند. گره‌هایی که با تصویر آینه‌ای خود یک نهاده^{۳۸} محیطی هستند را گره‌های خوددست^{۳۹} می‌نامیم، و گره‌هایی که چنین نیستند دگردست^{۴۰} خوانده می‌شوند. گره سه پر^{۴۱} که در شکل ۴ به همراه تصویر آینه‌ای‌اش به تصویر کشیده شده است، گرهی

²⁷diffeomorphism ²⁸automorphism ²⁹orientation preserving ³⁰isotopic ³¹orientation reversing ³²isotopy ³³ambient
³⁴mirror image ³⁵ambient isotopic ³⁶chiral knot ³⁷achiral ³⁸trefoil knot



شکل ۵. نمودارهایی برای تعدادی از گره‌های ساده، که تعداد گذرهای آنها حداکثر ۸ است. گره‌های دگردست اندکی تیره‌تر از گره‌های خوددست نمایش داده شده‌اند.

Figure 5: Diagrams for some simple knots, whose crossing numbers is at most 8. The achiral knots are illustrated darker than the chiral knots.

دگردست است. در شکل ۵، که در آن گره‌های مختلفی با حداکثر ۸ گذر^{۳۹} به تصویر کشیده‌اند، گره‌های دگردست کمی تیره‌تر از گره‌های خوددست نمایش داده شده‌اند.

همان‌طور که قبل‌تر اشاره شد، تمرکز ما بر روی گره‌هایی خواهد بود که در S^3 نشسته‌اند. چنین گره‌هایی را می‌توان با حذف نقطه‌ای از S^3 که روی گره قرار ندارد، به‌طور معادل گره‌هایی در $\mathbb{R}^3$ فرض کرد. در این شرایط، سخن از تصویر آینه‌ای یک گره $K : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ معنی‌دار خواهد بود، و آن را با $-K = \tau \circ K : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ نشان خواهیم داد، که در آن $\tau : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ تقارن آینه‌ای استاندارد است که با $\tau(x_1, x_2, x_3) = (-x_1, x_2, x_3)$ تعریف می‌شود. برای نمایش یک گره در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^3$ ، معمولاً از یک نمودار^{۴۰} گره استفاده می‌شود. برای به‌دست آوردن یک نمودار برای یک گره، نگاشت تصویر کردن در راستای یک بردار v روی یک صفحه اقلیدسی را که با $\pi_v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ نشان داده می‌شود در نظر می‌گیریم، به‌طوری‌که ترکیب $\pi_v \circ K$ یک فروبری^{۴۱} باشد. به‌علاوه فرض می‌کنیم که نگاشت تصویر کردن به گونه‌ای انتخاب شده است که تصویر K خودش را به‌طور تراگذر^{۴۲} قطع می‌کند، و پیش‌تصویر^{۴۳} هر نقطه از تصویر، حداکثر شامل دو نقطه از دایره است. با داشتن چنین نگاشت تصویری، می‌توان $\pi_v(K(S^1))$ را ترسیم کرد، و در گذرها یعنی در نقاطی که تصویر K خودش را قطع می‌کند، قسمت کوچکی

³⁹crossing ⁴⁰diagram ⁴¹immersion ⁴²transverse ⁴³preimage

از تصویر مولفه‌ای از پیش‌تصویر که نسبت به بردار v ارتفاع کمتری دارد را حذف کرد. به هر مولفه هم‌بندی در یک نمودار گره یک کمان ^{۴۴} می‌گوییم. به‌طور مشابه می‌توان از نمودارهایی برای پیوندها هم صحبت کرد.

در شکل ۵ نمودارهایی برای تعدادی گره ساده نمایش داده شده است. تعداد گذرها در نمودارهای مختلف از یک گره می‌تواند متفاوت باشد. به حداقل تعداد گذرهای ممکن در نمودارهای مختلف از یک گره K ، عدد گذر ^{۴۵} گفته می‌شود. عدد گذر گره بدیهی به‌وضوح صفر است، و هیچ گرهی عدد گذر ۱ یا ۲ ندارد. گره سه‌پر و تصویر آینه‌ای آن تنها گره‌های با عدد گذر ۳ هستند، که در شکل ۴ نمایش داده شده‌اند. عدد گذر یک گره K را با $c(K)$ نشان خواهیم داد. در جدول‌هایی که برای گره‌ها تهیه می‌شود، گره‌هایی که با تقریب خودریختی محیطی با هم یکی هستند یک بار ظاهر می‌شوند. بنابراین، از بین یک گره و تصویر آینه‌ای آن دقیقاً یکی در جدول گره‌ها ظاهر خواهد شد. علاوه بر این، برای نام‌گذاری گره‌ها، چنان‌که در شکل ۵ هم دیده می‌شود، از دو عدد استفاده می‌شود، که یکی عدد گذر گره را نشان می‌دهد، و دومی که به‌عنوان اندیس عدد اول در نام‌گذاری مورد استفاده قرار می‌گیرد، شماره گره را در بین گره‌هایی که عدد گذر آنها با هم برابر است نشان می‌دهد. بنابراین، ۳۱ نشان‌دهنده اولین گرهی در جدول است که عدد گذر آن ۳ است، و ۱۱۲۱ نشان‌دهنده ۲۱مین گرهی است که عدد گذر آن ۱۱ است.

با شروع از یک نقطه روی یک نمودار گره، می‌توان با عبور از هر گذر ثبت کرد که آیا مسیر حرکت از شاخه بالایی گره اتفاق افتاده یا از شاخه پایینی. در حالت اول می‌گوییم که به یک روگذر ^{۴۶} رسیده‌ایم، و در حالت دوم می‌گوییم که به یک زیرگذر ^{۴۷} رسیده‌ایم. زیرگذرها باعث می‌شوند که کمان‌هایی که روی یک نمودار گره می‌بینیم از یکدیگر جدا شوند. به این ترتیب، متناظر با یک گره و یک نقطه شروع، با مسافت روی گره به دنباله‌ای از زیرگذرها و روگذرها می‌رسیم. منظور از یک نمودار متناوب گره ^{۴۸} نموداری است که برای آن در این دنباله، روگذرها و زیرگذرها یکی در میان ظاهر شوند. یک گره را گره متناوب ^{۴۹} می‌نامیم اگر دارای یک نمودار متناوب باشد.

پیش از پرداختن به داستان گره‌ها، شاید بهتر باشد که ابتدا، برخی از مثال‌ها را با هم مرور کنیم. کره استاندارد S^3 را می‌توان به‌عنوان زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{C}^2$ در نظر گرفت:

$$S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid \|z\|^2 + \|w\|^2 = 1\}.$$

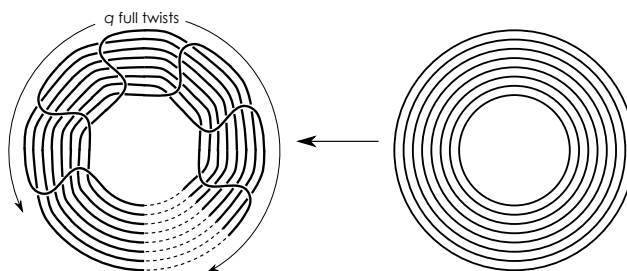
مجموعه جواب‌های معادله

$$z^p = w^q, \quad z, w \in \mathbb{C}$$

در $\mathbb{C}^2$ را که در آن p و q اعدادی صحیح، مثبت و نسبت به هم اول هستند، با $Z(p, q)$ نشان می‌دهیم. اگر مبداء را از $Z(p, q)$ حذف کنیم، زیرخمینه‌ای ۲-بعدی از $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ به‌دست می‌آید که کره استاندارد را به‌طور تراگذر در یک زیرخمینه ۱-بعدی از آن قطع می‌کند. به این زیرخمینه ۱-بعدی گره چنبره‌ای ^{۵۰} از نوع (p, q) گفته می‌شود، که آن را با $T(p, q)$ نشان خواهیم داد. همان‌طور که در این نمونه‌ها هم دیده می‌شود، راه شهودی‌تری که برای ساختن گره چنبره‌ای $T(p, q)$ وجود دارد این است که q پیچش تمام ^{۵۱} در p دایره موازی ایجاد کنیم. اگر p و q نسبت به هم اول باشند، $T(p, q)$ یک گره خواهد بود، و در غیر این صورت، یک پیوند به‌دست می‌آوریم که تعداد مولفه‌های آن برابر است با بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک p و q .

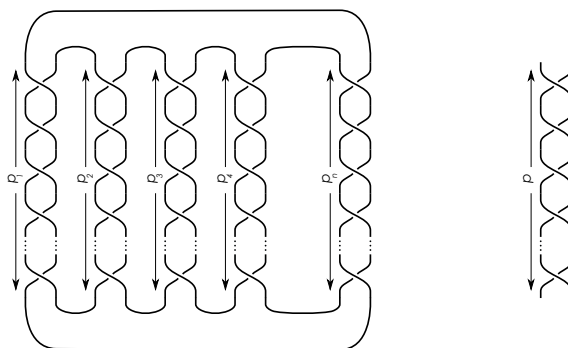
این فرآیند در شکل ۶ نشان داده شده است. در این شکل، ۶ پیچش تمام در ۸ دایره موازی نشان داده شده است. گره‌های چنبره‌ای، یکی از ساده‌ترین زیردسته‌ها از گره‌ها را تشکیل می‌دهند، و از این جهت مثال‌های مهمی به حساب می‌آیند. مثال جالب دیگر، گره‌های پرتزلی ^{۵۲} هستند. برای ساختن یک گره پرتزلی، n جفت رشته انتخاب می‌کنیم. جفت اول را p_1 بار، ... و جفت n -ام را p_n بار به هم تاب می‌دهیم، و مانند شکل ۷، این جفت رشته‌های به هم تابیده را به یکدیگر متصل می‌کنیم.

⁴⁴arc ⁴⁵crossing number ⁴⁶over crossing ⁴⁷under crossing ⁴⁸alternating knot diagram ⁴⁹alternating knot ⁵⁰torus knot ⁵¹complete twist ⁵²pretzel knot



شکل ۶. گره چنبره‌ای $T(p, q)$ با ایجاد q پیچش تمام در p دایره موازی ساخته می‌شود.

Figure 6: The torus knot $T(p, q)$ is obtained from p parallel circles by performing q complete twists.



شکل ۷. دو رشته موازی را می‌توان p بار به هم تاب داد (سمت راست). با استفاده از n زوج رشته که به ترتیب $p_1, p_2, \dots, p_n$ بار به هم تاب خورده‌اند، گره پرتزلی $P(p_1, p_2, \dots, p_n)$ ساخته می‌شود.

Figure 7: Two parallel strands may be twisted p times (right). Using n pairs of strands which are twisted $p_1, p_2, \dots, p_n$ times, respectively, the pretzel knot $P(p_1, p_2, \dots, p_n)$ is constructed.

در سمت راست شکل ۷ منظور از p بار تاب دادن یک جفت رشته، که حاصل آن نموداری با p گذر است، نشان داده است. حاصل فرآیندی که به آن اشاره شد، پیوندی است که با $P(p_1, p_2, \dots, p_n)$ نشان می‌دهیم. بالاخص وقتی همه اعداد صحیح $p_1, p_2, \dots, p_n$ فرد باشند، $P(p_1, p_2, \dots, p_n)$ یک گره است (یعنی تنها یک مولفه همبندی دارد).

۳. سرآغاز نظریه گره‌ها

گره‌ها ابتدا در اواخر قرن هجدهم میلادی در متون فیزیکی مورد توجه قرار گرفتند. سِر ویلیام تامسون (لرد کِلِوین)^{۵۳} در مدل گردابی، اتم‌ها را به‌عنوان گره‌های گرداب‌های چرخان در اتر^{۵۴} تصویر کرد [۲۴]. بعدتر، توجه ریاضیدان‌ها هم به مطالعه گره‌ها جلب شد. بررسی گره‌ها به‌عنوان موجوداتی ریاضی، در قرن نوزدهم میلادی آغاز شد. کارل فُردِریش گاوس^{۵۵} در پی مطالعاتش در الکترومغناطیس، مفهوم عدد پیوند^{۵۶} دو مولفه یک پیوند را تعریف کرد.

⁵³Sir William Thomson (Lord Kelvin) ⁵⁴ether ⁵⁵Carl Friedrich Gauss ⁵⁶linking number

فرض کنید که L یک پیوند در $\mathbb{R}^3$ باشد، و $K_1 : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ و $K_2 : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ مولفه‌هایی متفاوت از این پیوند باشند. در این صورت، نگاشت

$$K_1 \times K_2 : S^1 \times S^1 \hookrightarrow R = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}^3\}$$

به دست می‌آید. برای هر $(x, y) \in R$ نقاط x و y در $\mathbb{R}^3$ متفاوت هستند. بنابراین، نگاشت گاوس^{۵۷} به صورت

$$\Gamma : R \rightarrow S^2, \quad \Gamma(x, y) = \frac{x - y}{\|x - y\|}$$

قابل تعریف خواهد بود. به علاوه، می‌توان انتگرال گاوس^{۵۸}

$$\ell(K_1, K_2) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S^1 \times S^1} \left(\frac{K_1(s) - K_2(t)}{\|K_1(s) - K_2(t)\|^3} \right) \cdot \left(\frac{dK_1}{ds} \times \frac{dK_2}{dt} \right) ds dt = \iint_{S^1 \times S^1} \Gamma^*(\text{vol}_{S^2}).$$

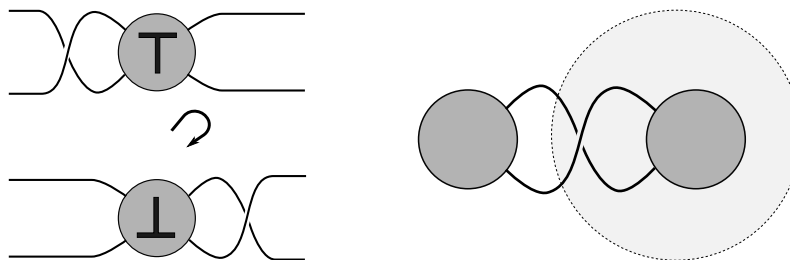
را تعریف کرد. در اینجا، vol_{S^2} مضرب ثابتی از عنصر حجم استاندارد S^2 است که مساحت کره نسبت به آن عدد ۱ را به ما می‌دهد. گاوس نشان داد که این انتگرال، که عددی صحیح است، نسبت به یک‌نهمش‌های محیطی ناورد است. این عدد به هم تنیدگی دو مولفه $K_1, K_2 \subset L$ را اندازه‌گیری می‌کند، و عدد پیوند K_1 و K_2 خوانده می‌شود.

در سال ۱۸۶۷ پیتروگوتزی تیت^{۵۹} که یک فیزیکی‌دان بود، به بررسی گره‌ها پرداخت، و به نوعی اولین جدول گره‌ها را تهیه کرد. در جدول تیت، گره‌ها بر اساس عدد گذر، مرتب شده بودند. البته برخی از گره‌ها بیش از یک بار در جدول تیت ظاهر شده بودند، و بعدها نشان داده شد یک‌نهاد محیطی هستند. با این وجود، اقدام به تهیه جدول برای گره‌ها اقدام مهمی محسوب می‌شد. همچنین تیت به همراه چارلز نیوتون لیتل^{۶۰} با تکمیل کارهای توماس کرکمن^{۶۱} و حذف تعدادی از گره‌های تکراری از فهرست او، اولین فهرست کامل از گره‌های متناوب که عدد گذر آنها حداکثر ۱۰ است را منتشر کردند [۱۵، ۲۴].

کارهای تیت در نظریه گره‌ها در میان هم‌عصران او برجستگی خاصی دارد. او به برخی از مفاهیمی توجه کرد که امروز هم مرکز مطالعات ریاضیدان‌ها در نظریه گره‌ها هستند. در میان این مفاهیم، می‌توان به عدد گشودن^{۶۲} یک گره اشاره کرد. منظور از یک تغییر گذر^{۶۳} در یک نمودار از گره K ، تغییر یک روگذر به یک زیرگذر، و یا تبدیل یک زیرگذر به یک روگذر است. یک تغییر گذر در یک گره K تبدیل گره K به گره K' است که با یک تغییر گذر در یک نمودار گره K به دست می‌آید. عدد گشودن یک گره K ، حداقل تعداد تغییر گذرهای لازم برای تبدیل گره K به گره بدیهی است. مثلاً برای گره سه‌پر، عدد گشودن برابر با ۱ است. گره‌هایی با عدد گذرهای به دلخواه بزرگ وجود دارند که عدد گشودن آنها برابر با ۱ است. عدد گشودن یک گره K را با $u(K)$ نشان می‌دهیم. به عنوان ناوردایی از یک گره، $u(K)$ تعریفی ساده و نزدیک به ذهن دارد. اما سؤال‌های متعددی در مورد $u(K)$ همچنان باز است، و از این نظر، عدد گشودن گره یکی از مرموزترین ناوردهای گره‌ها به حساب می‌آید. بعدتر (در بخش هفتم) در مورد تعدادی از سؤالات باز در مورد عدد گشودن که ظاهری ساده هم دارند، سخن خواهیم گفت.

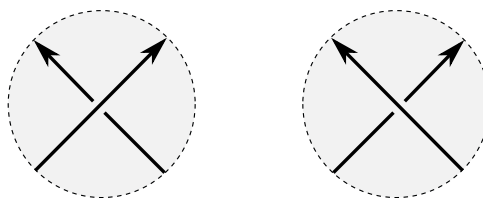
تفاوت برخی از گره‌ها با تصویر آینه‌ای آنها (یعنی دگردست بودن برخی از گره‌ها) از دیگر موضوعاتی بود که تیت به آن توجه کرد. اما شاید ماندگارترین اثر تیت، حدس‌های او در مورد گره‌های متناوب باشد که اثبات آنها تا دهه هشتاد قرن بیستم به طول انجامید. تیت اثبات‌های نادقیقی از این گزاره‌ها ارائه داد، که البته فاصله زیادی با یک استدلال دقیق و واقعی برای درستی ادعایش داشت. برای بیان حدس‌های تیت، ابتدا باید مفهوم یک گذر پوچ^{۶۴} را تعریف کنیم. منظور از یک گذر پوچ، گذری در یک نمودار برای گره K است که نمودار را به دو قسمت مجزا، آن‌گونه که در شکل ۸ (سمت راست) نمایش داده شده است، تقسیم کند.

⁵⁷Gauss map ⁵⁸Gauss integral ⁵⁹Peter Guthrie Tait ⁶⁰Charles Newton Little ⁶¹Thomas Kirkman ⁶²unknotting number ⁶³change of crossing ⁶⁴nugatory crossing



شکل ۸. گذر پوچ (راست) و فرآیند تغییر نمودار یک پیوند با تاب دادن (چپ).

Figure 8: A nugatory crossing (right) and the process of changing a diagram by performing a flype.



شکل ۹. علامت متناظر با دو نوع گذر محتمل. گذر سمت چپ علامت مثبت و گذر سمت راست علامت منفی دارد.

Figure 9: The sign associated with two possible crossing types. The crossing on the left-hand-side has positive sign while the crossing on the right-hand-side has negative sign.

حدس ۱.۳ (حدس اول تیت). هر نمودار متناوب که پیوندی چون L را نمایش دهد و هیچ تقاطع پوچی نداشته باشد، دقیقاً دارای $c(L)$ گذر است.

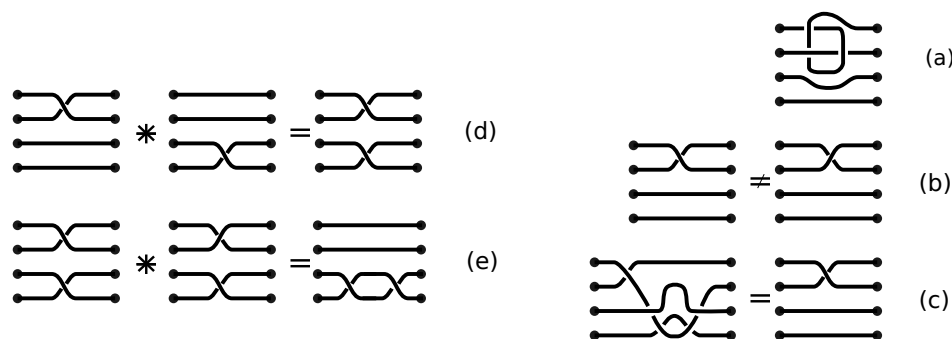
فرض کنید که نموداری از یک پیوند L داده شده است. مولفه‌های مختلف L را می‌توان جهت‌دهی کرد تا به یک نمودار جهت‌دار برسیم. به یک گذر، بسته به این که موضعاً شبیه به گذر سمت راست یا گذر سمت چپ در شکل ۹ باشد، به ترتیب علامت -1 یا $+1$ نسبت می‌دهیم. در این شرایط عدد تیت، یا عدد پیچش^{۶۵} برای نمودار جهت‌دهی شده پیوند L را برابر با جمع علامت‌های گذرهای نمودار تعریف می‌کنیم. واضح است که یک گذر پوچ عدد پیچش را تغییر می‌دهد.

حدس ۲.۳ (حدس دوم تیت). اگر دو نمودار مختلف متناوب از یک پیوند L داده شده باشند به طوری که هیچ کدام گذر پوچ نداشته باشند، عدد پیچش آنها با هم برابر خواهد بود.

منظور از یک تاب دادن^{۶۶} در یک نمودار برای پیوند L تغییری است که در شکل ۸ (سمت چپ) به تصویر کشیده شده است. در این تغییر، با یک دوران 180° درجه‌ای (یا همان تاب دادن) گذر سمت چپ از بین می‌رود، و به جای آن گذری در سمت راست ایجاد می‌شود. در عوض، قسمتی از پیوند که درون کره به تصویر کشیده شده است، دوران پیدا می‌کند. اگر پیوند پیش از تاب دادن متناوب باشد، پس از تاب دادن هم متناوب می‌ماند.

حدس ۳.۳ (حدس سوم تیت). هر دو نمودار متناوب برای پیوند L که هیچ کدام دارای گذر پوچ نباشند با دنباله‌ای از تاب دادن‌ها به هم تبدیل می‌شوند.

⁶⁵writhe number ⁶⁶flype (Norwegian word)



شکل ۱۰. قسمت (a) در این شکل تعدادی رشته که یک بافت را تشکیل نمی‌دهند نشان می‌دهد. در قسمت (b) نامعادل بودن بافت‌های متناظر با کلمات σ_1 و σ_1^{-1} نشان داده شده است. رابطه‌های $\sigma_1 = \sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_3 \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2$ ، $\sigma_1 \sigma_3 = \sigma_3 \sigma_1$ و $(\sigma_1 \sigma_3)(\sigma_1^{-1} \sigma_3) = \sigma_3^2$ در گروه B_n به‌ترتیب در قسمت‌های (c)، (d) و (e) به تصویر کشیده شده‌اند.

Figure 10: Part (a) illustrates strands which do not form a braid. Part (b) illustrates that the braids corresponding to the words σ_1 and σ_1^{-1} are not equivalent. The relations $\sigma_1 = \sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_3 \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2$, $\sigma_1 \sigma_3 = \sigma_3 \sigma_1$ and $(\sigma_1 \sigma_3)(\sigma_1^{-1} \sigma_3) = \sigma_3^2$ in the group B_n are illustrated in parts (c), (d) and (e), respectively.

تئیه کارهای خود روی گره‌ها را در قالب سه مقاله و در یک بازه زمانی ۹ ساله منتشر کرد [۱۵]. پس از او توجه به نظریه گره‌ها به عنوان یک حوزه مستقل کمابیش محدود گردید. بالاخص، با منسوخ شدن نظریه اتم‌های گردابی کلونین در اواخر قرن نوزدهم، که از پایه‌های توجه ریاضیدان‌ها و فیزیکدان‌ها به نظریه گره‌ها بود، فعالیت برای شناختن و دسته‌بندی گره‌ها تقریباً متوقف گردید. این سکوت تا چند دهه بعد که نظریه گره‌ها از منظری کاملاً متفاوت دوباره مورد مطالعه قرار گرفت، ادامه داشت.

در سال ۱۹۲۰، امیل آرتین^{۶۷} به دلایل علایقش در مطالعه گروه‌های بافت به سمت نظریه گره‌ها کشیده شد. برای آرتین، یک بافت^{۶۸} مجموعه‌ای از n رشته در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^3$ بود که همگی از سمت چپ به یک میله عمودی متصل‌اند، و از سمت راست هم به میله عمودی دیگری که موازی با میله اول است متصل هستند، به‌طوری‌که هر صفحه عمودی (عمود بر محور چپ-راست) که بین این دو میله افقی قرار داشته باشد بافت را دقیقاً در n نقطه قطع کند. قرارداد این است که با حرکت دادن رشته‌ها، بافت تغییر نمی‌کند. به عبارت دیگر، هر رده یک‌نهم از چنین مجموعه‌هایی از n رشته، یک بافت در گروه بافت خواهد بود. بافت‌ها را می‌توان با هم ترکیب کرد: منظور از ترکیب یک بافت b_1 با بافت b_2 بافتی است که از پشت سرهم قرار گرفتن این دو بافت حاصل می‌شود، به‌طوری‌که b_1 در سمت چپ b_2 قرار بگیرد. شکل ۱۰ تعدادی بافت و ترکیب آنها را نشان می‌دهد. همچنین مثالی از ۴ رشته که یک بافت تشکیل نمی‌دهند را هم به نمایش می‌گذارد. می‌توان نشان داد که به این ترتیب با استفاده از همه بافت‌ها و قرار دادن عمل ترکیب روی آنها یک گروه به دست می‌آید که آن را با B_n نشان می‌دهیم. برای بیانی جبری و دقیق از یک بافت، آرتین مشاهده کرد که هر بافت از ترکیب تعدادی بافت مولد^{۶۹} به دست می‌آید. یک بافت مولد از اجتماع n رشته موازی با انجام یک تاب 180° درجه روی رشته‌های i ام و $(i+1)$ ام به دست می‌آید. برای نشان دادن این بافت مولد از نماد σ_i استفاده می‌کنیم، و برای نشان دادن بافت مولدی که تاب خوردن آن در جهت مخالف انجام می‌شود از نماد σ_i^{-1} استفاده خواهیم کرد. به این ترتیب، هر کلمه‌ای که با استفاده از $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ (و وارون‌های

⁶⁷Emil Artin ⁶⁸braid ⁶⁹generating braid

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad \text{if } |i-j| > 1$$

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-2$$

شکل ۱۱. روابطی که بین بافت‌های مولد برقرار هستند.

Figure 11: The relations which are satisfied between generating braids.

آنها) در گروه آزاد

$$F_{n-1} = \langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1} \rangle$$

انتخاب کنیم، یک بافت را نشان می‌دهد. با این وجود، روابطی هم بین این مولدها در گروه بافت برقرار است. بدیهی‌ترین رابطه، که در گروه آزاد هم برقرار است، رابطه $\sigma_i \sigma_i^{-1} = 1$ است، اما روابط مهم‌تری هم وجود دارند که معنای هندسی آنها در شکل ۱۱ نمایش داده شده است. این روابط را می‌توان به این شکل توصیف کرد:

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad \text{اگر } |i-j| > 1$$

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad i = 1, \dots, n-2.$$

مهم‌ترین گام آرتین در مطالعه بافت‌ها، که شباهت قابل توجهی به گره‌ها داشتند، آن بود که نشان داد که این روابط تنها روابط لازم هستند، و گروه بافت دقیقاً خارج قسمت گروه آزاد نسبت به این روابط است. لذا این گروه به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$B_n = \left\langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{ll} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i & \text{اگر } |i-j| > 1 \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} & i = 1, \dots, n-2 \end{array} \right\rangle.$$

از هر بافت، با یکی کردن میله بالایی و میله پایینی می‌توان پیوندی به دست آورد که بستار بافت^{۷۰} خوانده می‌شود. بافت‌های معادل، پیوندهای معادلی را به عنوان بستار خود تولید می‌کنند، اما ممکن است بافت‌هایی متفاوت پیوندهای یکسانی را به عنوان بستار خود به ما بدهند.

۴. کارهای الکساندر

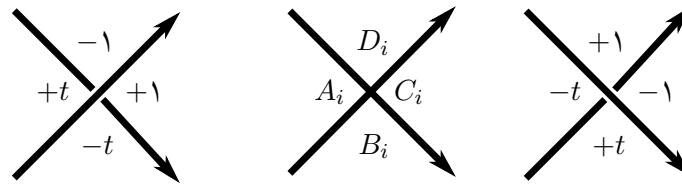
جیمز وِدل الکساندر^{۷۱} گام‌هایی مهم و نو را در نظریه گره‌ها برداشت. اولین قضیه مهم الکساندر که در سال ۱۹۲۳ به اثبات رسید این بود که هر گرهی را می‌توان به صورت بستار یک بافت به دست آورد.

قضیه ۱.۴ (قضیه الکساندر). به ازای هر پیوند L عدد صحیح مثبت n و عضو $b \in B_n$ از گروه بافت وجود دارد به طوری که بستار b پیوند L است.

قضیه الکساندر توجه ریاضیدان‌های متعددی را به این سؤال جلب کرد که آیا با استفاده از رده‌بندی بافت‌ها که توسط گروه بافت آرتین انجام شده بود، می‌توان گره‌ها را هم رده‌بندی کرد. این سؤال همچنان بی‌پاسخ مانده است. با این وجود، ارتباط بین بافت‌ها و گره‌ها مبداء نگرشی جدید به گره‌ها محسوب می‌شود.

پنج سال بعد، در سال ۱۹۲۸، الکساندر موفق به معرفی یک ناوردای چندجمله‌ای برای گره‌ها شد [۱]. کشف این ناوردا به الکساندر امکان محاسباتی جالب، و از آن مهم‌تر، امکان تشخیص برخی از گره‌های نامعادل از یکدیگر را داد. از این رو،

⁷⁰closure of braid ⁷¹James Waddell Alexander



شکل ۱۲. مقادیر متناظر با کنج‌های مجاور گذر i ام در دو نوع تقاطع منفی و مثبت.

Figure 12: The values corresponding to the neighboring quadrants of the i th crossing, in the positive and negative crossings.

کشف چندجمله‌ای الکساندر تحوّل مهمّی در نظریه گره‌ها محسوب می‌شد. تعریف چندجمله‌ای الکساندر علاوه بر استفاده از مفهوم گروه بافت آرتین، از اطلاعاتی که در «کتاب نظریه گره‌ها»^[۲۰] نوشته کورت رائدمايستر^[۲۳] (که شاید اولین کتاب در نظریه گره‌ها باشد و در همان سال‌ها به چاپ رسیده بود) استفاده می‌کرد. چندجمله‌ای الکساندر که اولین ناوردای چندجمله‌ای گره‌هاست، در عمل تا سال ۱۹۸۴ تنها ناوردای چندجمله‌ای شناخته‌شده برای گره‌ها (در کنار چندجمله‌ای کانوی که ماهیتی کمابیش یکسان دارد) بود.

اولین قدم الکساندر برای تعریف چندجمله‌ای الکساندر، تعریف ماتریس الکساندر برای یک نمودار گره یا پیوند بود. فرض کنید که نموداری برای گره K که جهت‌دار شده است داده شده باشد. گذرهای این نمودار را با اعداد $1, 2, \dots, n$ شماره‌گذاری کنید. نواحی که در مکمل نمودار به دست می‌آیند را هم می‌توان نام‌گذاری کرد. از آنجا که تعداد این نواحی برابر با $n+2$ خواهد بود، می‌توانیم این نواحی را $R_1, R_2, \dots, R_{n+2}$ بنامیم. در هر گذر i چهار کنج از کنج‌های نواحی $R_1, R_2, \dots, R_{n+2}$ مشاهده می‌شود که آنها را مطابق تصویر وسط در شکل ۱۲ می‌توانیم A_i, B_i, C_i و D_i بنامیم. متناظر با هر یک از این چهار کنج، الکساندر مقداری در $\mathbb{Z}[t]$ را تعیین کرد که در تصویرهای سمت راست و سمت چپ شکل ۱۲ تعیین شده است.

ماتریس $(n+2) \times n$ الکساندر، که آن را با $A = [A_{ij}]$ نشان می‌دهیم، به صورت زیر تعریف می‌شود. اگر ناحیه R_j از گوشه A_i استفاده کند، برابر با مقدار متناظر با گوشه A_i تعریف می‌شود و در غیراین صورت a_{ij} صفر است. به همین ترتیب b_{ij}, c_{ij} و d_{ij} را بسته به این‌که گوشه‌های C_i, B_i و D_i در ناحیه R_j قرار داشته باشند یا نه به ترتیب برابر با مقداری که الکساندر به گوشه اختصاص داده بود، یا صفر، تعریف می‌کنیم. سپس، تعریف می‌کنیم

$$A_{ij} := a_{ij} + b_{ij} + c_{ij} + d_{ij}.$$

ماتریس الکساندر تحویل‌شده^[۲۴]، که آن را با $A_K(t)$ نشان می‌دهیم، و به متغیر t وابسته است، با حذف دو ستون (مثلاً دو ستون آخر) از A به دست می‌آید و چندجمله‌ای الکساندر، درمیان این ماتریس الکساندر تحویل‌شده است:

$$\Delta_K(t) = \det(A_K(t)).$$

در اینجا علامت $\equiv$ نشانگر تساوی با تقریب یک فاکتور $\pm t^k$ است، که بستگی به انتخاب نمودار دارد. به عنوان مثال، اگر برای گره سه‌پر چندجمله‌ای الکساندر را محاسبه کنیم، الگوریتم بالا چندجمله‌ای

$$\Delta_{3_1}(t) = -t^2 + t - 1$$

را به ما می‌دهد. الکساندر نشان داد که صرف نظر از یک فاکتور $\pm t^k$ ، چندجمله‌ای الکساندر ناوردایی از گره K است که به تغییرات آن تحت یک‌نهمش محیطی و انتخاب نمودار برای آن بستگی ندارد [۱].

⁷²knottentheorie ⁷³Kurt Reidemeister ⁷⁴reduced



شکل ۱۳. حرکات اول (راست)، دوم (وسط) و سوم (چپ) رایدمایستر رده یک‌نهمش محیطی را حفظ می‌کنند.

Figure 13: The first (right), second (middle) and third (left) Reidemeister moves preserve the ambient isotopy type.

قضیه ۲.۴ (قضیه ناوردایی چندجمله‌ای الکساندر). چندجمله‌ای الکساندر، با تقریب یک فاکتور $\pm t^k$ ، تحت تغییرات گره با یک‌نهمش‌های محیطی ناورداست، و بالاخص به انتخاب نمودار گره بستگی ندارد.

الکساندر در اثبات ناوردایی چندجمله‌ای الکساندر، علاوه بر جبر خطی و مقداری توپولوژی جبری، از حرکات رایدمایستر^{۷۵} هم استفاده کرد که در ادامه در مورد آن توضیح خواهیم داد. رایدمایستر در ابتدا به رده‌بندی گره‌ها با استفاده از نمودار گره علاقه داشت. با وجود آن‌که تمام تلاش‌های او در این خصوص با شکست مواجه شد، در نهایت موفق شد قضیه مهمی را به اثبات رساند که کمابیش در همه تحولات بعدی نظریه گره‌ها نقش مهمی ایفا کرد. برای این کار، رایدمایستر سه نوع تغییر نمودار برای گره‌ها را معرفی کرد که به حرکات سه‌گانه رایدمایستر موسوم هستند. این سه حرکت در شکل ۱۳ نمایش داده شده‌اند. منظور از این حرکات آن است که نمودار گره خارج از قسمتی که به تصویر کشیده شده است تغییری نمی‌کند، و تمام تغییرات، به گونه‌ای که قسمت‌های سه‌گانه شکل ۱۳ نشان می‌دهد، در قسمت انتخاب شده نمودار اتفاق می‌افتد.

قضیه ۳.۴ (قضیه رایدمایستر). گره‌های K و K' که با نمودارهای D و D' داده شده‌اند با هم معادل (یک‌نهاد محیطی) هستند اگر و تنها اگر دنباله‌ای از نمودارها مانند $D = D_0, D_1, \dots, D_n = D'$ وجود داشته باشد به طوری که در این دنباله هر نمودار از نمودار قبلی با یکی از سه حرکت رایدمایستر (یا عکس آن) و یا یک‌نهمش نمودارها (که گذرها را تغییر نمی‌دهد) به دست آمده باشد.

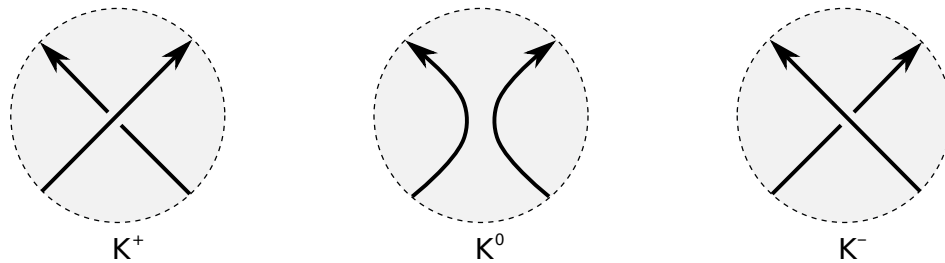
بعدها، جان هورتون کانوی^{۷۶} موفق شد چندجمله‌ای الکساندر را بهنجار^{۷۷} کند. در این هنجارش^{۷۸}، ابهام تعریف (با تقریب یک فاکتور $\pm t^k$) از بین می‌رود [۷]. رهیافت او البته متفاوت از رهیافت الکساندر بود. کانوی از رابطه دسته‌ای^{۷۹} برای تعریف چندجمله‌ای خود که با نام چندجمله‌ای کانوی^{۸۰} هم شناخته می‌شود، استفاده کرد. منظور از یک دسته^{۸۱}، مجموعه‌ای از سه پیوند K^+, K^0, K^- است که تنها تفاوت آنها با یکدیگر در ناحیه کوچکی است که در شکل ۱۴ نمایش داده شده است. **قضیه ۴.۴** (قضیه کانوی). متناظر با هر پیوند K چندجمله‌ای یکتای $\nabla_K \in \mathbb{Z}[x]$ را می‌توان چنان تعریف کرد که در سه اصل زیر صدق کند.

- ناوردایی: اگر پیوندهای K و K' با هم معادل باشند، آنگاه $\nabla_K = \nabla_{K'}$.
- هنجارش: برای گره بدیهی که با O نشان داده می‌شود داریم $\nabla_O = 1$.
- رابطه دسته‌ای: برای هر دسته شامل سه پیوند K^+, K^0, K^- رابطه زیر برقرار است:

$$\nabla_{K^+} - \nabla_{K^-} = x \nabla_{K^0}.$$

⁷⁵Reidemeister move ⁷⁶John Horton Conway ⁷⁷normalized ⁷⁸normalization ⁷⁹skein relation ⁸⁰Conway polynomial

⁸¹skein



شکل ۱۴. سه پیوندی که به جز در قسمت نشان داده شده نمودار یکسانی دارند، یک دسته را تشکیل می‌دهند که از سه پیوند K^+ ، K^0 ، K^- و K^+ تشکیل شده است.

Figure 14: Three links which have identical diagrams outside the illustrated disks form a skein, which consists of three links K^- , K^0 and K^+ .

بر خلاف چندجمله‌ای الکساندر، ابهامی در تعریف چندجمله‌ای کانوی وجود ندارد. به علاوه از روی چندجمله‌ای کانوی می‌توان چندجمله‌ای الکساندر را به دست آورد. در واقع، برای هر پیوند K رابطه

$$\Delta_K(t) = \nabla_K \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right)$$

برقرار است. به عبارت سمت راست، چندجمله‌ای الکساندر بهنجار هم گفته می‌شود. برای گره‌ها، این چندجمله‌ای در $\mathbb{Z}[t, 1/t]$ قرار دارد، و برای یک پیوند دلخواه مقادیرش را در $\mathbb{Z}[\sqrt{t}, 1/\sqrt{t}]$ می‌گیرد.

هر چند یافتن چندجمله‌ای الکساندر کشف بزرگی در نظریه گره‌ها محسوب می‌شود، این ناوردا با یک ناوردا کامل فاصله زیادی دارد. از جمله، گره‌های زیادی وجود دارند که چندجمله‌ای الکساندر بهنجار آنها بدیهی است. چندجمله‌ای کانوی تا حدودی از چندجمله‌ای الکساندر قوی‌تر است، و از جمله می‌تواند برخی از گره‌ها را از تصویر آینه‌ای آنها تشخیص دهد. با این وجود، اکثر ضعف‌های چندجمله‌ای الکساندر در چندجمله‌ای کانوی هم وجود دارد.

فرض کنید $K : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ یک گره باشد. این نشان دادن S^1 در $\mathbb{R}^3$ را می‌توان به یک نشان دادن $\hat{K} : S^1 \times D^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ گسترش داد. در این صورت، گره‌های

$$K = \hat{K}(\cdot, \circ) : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{و} \quad K' = \hat{K}(\cdot, 1) : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$$

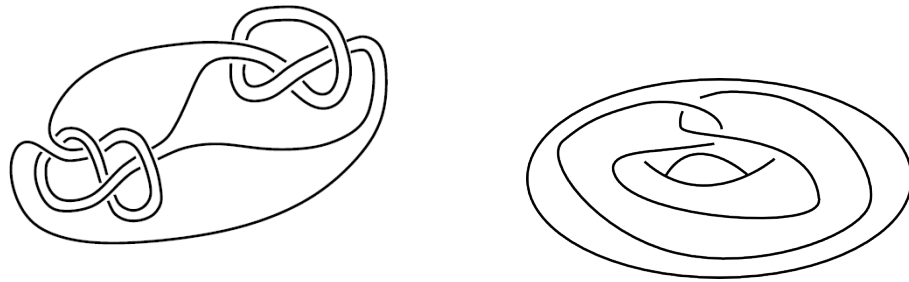
قابل تعریف هستند. می‌توان توسیع $\hat{K}$ ^{۸۲} را به گونه‌ای انتخاب کرد که عدد پیوند دو گره K و K' صفر باشد، یعنی داشته باشیم $\ell(K, K') = 0$. دایره S^1 را می‌توان به طریقی که در شکل ۱۵ (سمت راست) نمایش داده شده است در $S^1 \times D^2$ نشان داد. با ترکیب این نشان دادن با $\hat{K}$ ، گره جدیدی به دست می‌آید که به آن دولاشده وایتهد^{۸۳} گره K گفته می‌شود، و آن را با

$$W_K : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$$

نشان می‌دهیم. اگر K گرهی دلخواه باشد، چندجمله‌ای کانوی دولاشده وایتهد آن همیشه بدیهی و برابر با ۱ است، در حالی که برای گره‌های نابدیهی، دولاشده وایتهد همیشه نابدیهی است. به این ترتیب، خانواده‌ای بزرگ از گره‌هایی که چندجمله‌ای کانوی آنها بدیهی است به دست می‌آید. در واقع، اگر به جای نشان دادن خاص وایتهد که در بالا به آن اشاره شد، تصویر نابدیهی دیگری از S^1 داخل $S^1 \times D^2$ که آن را با $L : S^1 \hookrightarrow S^1 \times D^2$ نشان می‌دهیم، انتخاب شود، متناظر با این نشان دادن، رده مانستگی^{۸۴}

$$n_L = L_*[S^1] \in H_1(S^1 \times D^2, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$$

⁸²extension ⁸³Whitehead double ⁸⁴homology



شکل ۱۵. تصویر S^1 در $S^1 \times D^2$ که در دولا کردن وایتهد استفاده می‌شود (راست) و یک گرهی اقماری گره 4_1 (چپ).

Figure 15: The image of S^1 in $S^1 \times D^2$ which is used in the construction of the Whitehead double (right) and a satellite knot for the knot 4_1 (left).

را به دست می‌آوریم، که عددی صحیح خواهد بود. آنگاه می‌توان نشان داد که چندجمله‌ای الکساندر بهنجار برای ترکیب

$$\hat{K} \circ L : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$$

که آن را با $S(K, L)$ نشان می‌دهیم و یک گره اقماری^{۸۵} برای K می‌خوانیم از رابطه زیر قابل محاسبه است [۱۹]:

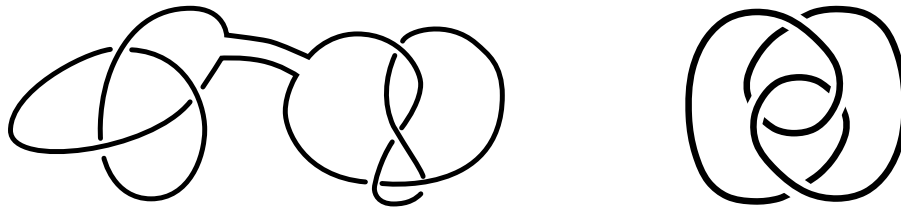
$$\Delta_{S(K, L)}(t) = \Delta_K(t^{n_L})\Delta_L(t).$$

گره K مدار گره اقماری $S(K, L)$ و گره L قمر این گره اقماری خوانده می‌شود. منظور از جمع همبند دو گره K_1 و K_2 گرهی است که از قرار دادن گره‌های K_1 و K_2 با فاصله از همدیگر در $\mathbb{R}^3$ و اتصال آنها با یک جفت رشته موازی، آن‌گونه که در سمت چپ شکل ۱۶ نشان داده شده است، به دست می‌آید. جمع همبند دو گره K_1 و K_2 را با $K_1 \# K_2$ نشان می‌دهیم. می‌توان نشان داد که انتخاب‌های مختلف دو رشته موازی که برای ساختن جمع همبند دو گره مورد استفاده قرار می‌گیرد، در جمع همبند (با تقریب معادل بودن) تأثیری نمی‌گذارد. گره K را مرکب^{۸۶} می‌نامیم اگر جمع همبند دو گره نابديهی باشد، و در غیر این صورت آن را اول^{۸۷} می‌نامیم. هر گره مرکب، یک گره اقماری است.

۵. تجزیه اول گره‌ها

در دهه ۴۰ قرن بیستم، هورست شوبرت^{۸۸} مفهوم عدد پل^{۸۹} برای یک گره را معرفی کرد. در یک نمودار گره، می‌توان فرض کرد که به دور از گذرها همه کمان‌هایی که در نمودار دیده می‌شوند روی صفحه قرار می‌گیرند، در حالی که در یک گذر، یکی از کمان‌ها از بالای صفحه و دیگری روی صفحه عبور می‌کند. گویی جاده‌هایی روی صفحه مسیر گره را مشخص می‌کنند و در هر گذر یک پل از تقاطع این جاده‌ها جلوگیری می‌کند. اما اگر دو روگذر متوالی در گره دیده شود، می‌توان به جای آنکه این دو روگذر را دو پل مختلف فرض کنیم، یک پل بلندتر متشکل از هر دوی آنها و کمان واصل بین آنها درست کنیم. حداقل تعداد چنین پل‌هایی که با استفاده از آنها می‌توان به نموداری از گره دست پیدا کرد را عدد پل آن گره می‌نامیم. توجه کنید که برای به دست آوردن کمترین تعداد پل‌ها، گاهی لازم است تعداد گذرها را در یک نمودار گره زیاد کنیم. مثلاً نمودار سمت راست در شکل ۱۶ که گره سه‌پل را نمایش می‌دهد و ۴ گذر دارد، شامل ۲ پل است، در حالی که این گره را با ۳ گذر هم می‌توان رسم کرد. اما در نمودارهای با ۳ گذر، تعداد پل‌ها هم ۳ است.

⁸⁵satellite knot ⁸⁶composite ⁸⁷prime ⁸⁸Horst Schubert ⁸⁹bridge number



شکل ۱۶. عدد پل گره سه‌پر برابر با ۲ است (راست). جمع همبند برای دو گره ساده (چپ).

Figure 16: The bridge number of the trefoil is equal to 2 (right). The connected sum of two simple knots (left).

تعریف ۱.۵. برای یک گره یا پیوند داده‌شده L و یک نمودار D برای L منظور از یک پل در نمودار D کمانی است پیوسته (که توسط هیچ زیرگذری ناهمبند نشده باشد) که شامل حداقل یک روگذر باشد. عدد پل پیوند L که آن را با $b(L)$ نمایش می‌دهیم حداقل تعداد پل‌های ممکن در یک نمودار برای پیوند L است.

توجه کنید که کمانی‌هایی که بین دو زیرگذر متوالی تشکیل می‌شوند، یک پل محسوب نمی‌گردند. به این ترتیب، عدد پل یک گره از عدد گذر آن کمتر، یا مساوی با آن است. عدد پل برای هر یک از گره‌های سه‌پر و هشت-سیما برابر با ۲ است. عدد پل برای گره بدیهی برابر با ۱ است، و این گره در واقع تنها گره با عدد پل ۱ است. شوبرت نشان داد که عدد پل نسبت به جمع همبند خوش‌رفتار^{۹۰} است. در واقع، شوبرت قضیه زیر را در سال ۱۹۵۴ ثابت کرد [۲۳].

قضیه ۲.۵ (قضیه شوبرت). اگر K_1 و K_2 دو گره در $\mathbb{R}^3$ باشند آنگاه داریم:

$$b(K_1 \# K_2) = b(K_1) + b(K_2) - 1.$$

گره‌هایی نظیر گره هشت-سیما که عدد پل آنها برابر با ۲ است را گره‌های دوپل^{۹۱} می‌گوییم. بنا بر قضیه شوبرت، گره‌های دوپل اول هستند. به علاوه، هر گره دارای یک تجزیه اول است، یعنی می‌توان آن را به صورت جمع همبندی از گره‌های اول نوشت. با استفاده از قضیه فوق، شوبرت همچنین نشان داد که چنین تجزیه‌ای یکتاست [۲۳].

قضیه ۳.۵ (قضیه تجزیه اول گره‌ها). هر گره نابديهی K در $\mathbb{R}^3$ را می‌توان به صورت جمع همبند گره‌های اول نابديهی نوشت. به علاوه، اگر

$$K = K_1 \# K_2 \# \dots \# K_n = K'_1 \# K'_2 \# \dots \# K'_m$$

دو تجزیه گره K به گره‌های اول نابديهی باشند، آنگاه $n = m$ و جایگشت $\sigma \in S_n$ وجود دارد به طوری که K_i و $K'_{\sigma(i)}$ با هم معادل هستند.

چندجمله‌ای الکساندر بهنجار هم نسبت به جمع همبند رفتاری مناسب دارد. در واقع، رابطه

$$\Delta_{K_1 \# K_2}(t) = \Delta_{K_1}(t) \Delta_{K_2}(t).$$

تقریباً به وضوح برقرار است. از سویی، این رابطه را می‌توان حالت بسیار خاصی از فرمول چندجمله‌ای الکساندر بهنجار برای گره‌های اقماری هم در نظر گرفت، چرا که $K_1 \# K_2$ همواره یک گره اقماری برای K_1 است، که در آن ماهواره، گره K_2 است و مقدار عبارت n_{K_2} برابر با ۱ است.

⁹⁰well-behaved ⁹¹two-bridge knot

۶. کارهای جونز

در سال ۱۹۸۴، وان جونز^{۹۲} ارتباطی بین جبرهای فون نویمان^{۹۳} و گروه‌های بافت پیدا کرد. با استفاده از این ارتباط، او موفق به کشف یک ناوردای چندجمله‌ای برای گره‌ها شد که امروزه چندجمله‌ای جونز خوانده می‌شود [۱۴]. ساخت این چندجمله‌ای که از طریق بازنمایش‌های جبرهای فون نویمان ساخته شده بود را می‌توان به گونه‌ای ساده‌تر و با همان روشی که ساخت چندجمله‌ای کانوی را توضیح دادیم، بیان کرد.

قضیه ۱۰۶ (قضیه جونز). متناظر با هر پیوند K می‌توان چندجمله‌ای یکتای جونز متناظر با آن که با $J_K \in \mathbb{Z}[\sqrt{t}]$ نشان داده می‌شود را به‌طور یکتا به‌گونه‌ای تعیین کرد که در سه شرط زیر صدق کند.

- ناوردایی: اگر پیوندهای K و K' با هم معادل باشند، آنگاه $J_K = J_{K'}$.
- هنجارش: برای گره بدیهی که با O نشان داده می‌شود داریم $J_O = 1$.
- رابطه دسته‌ای: برای هر دسته شامل سه پیوند K^+, K^0, K^- رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{1}{t} J_{K^+} - t J_{K^-} = \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right) J_{K^0}.$$

چندجمله‌ای جونز در تشخیص گره‌ها و پیوندها از یکدیگر تا حدود زیادی از چندجمله‌ای‌های الکساندر و کانوی قدرتمندتر بود. در مجموع، ۴۶۸۴ گره و پیوند متناوب و ۳۹۹۳ گره و پیوند نامتناوب مختلف با حداکثر ۱۲ گذر وجود دارد که در کل مجموعه‌ای شامل ۸۶۷۷ گره و پیوند مختلف را تشکیل می‌دهند. در این مجموعه ۲۹۷۷ گره و ۵۷۰۰ پیوند (با بیش از یک مولفه) دیده می‌شوند. از این میان، ۱۸۳۲ تا از گره‌ها چندجمله‌ای الکساندری دارند که به گره یا پیوند دیگری هم مربوط می‌شود. به عبارت دیگر، ۶۲ درصد گره‌های با کمتر از ۱۲ گذر توسط چندجمله‌ای الکساندرشان (در میان چنین گره‌ها و پیوندهایی) به‌طور یکتا مشخص نمی‌شوند. برای چندجمله‌ای جونز، این تعداد به ۱۲۱۳ مورد، یعنی حدود ۴۱ درصد کاهش پیدا می‌کند. در میان پیوندها، این دو عدد برای چندجمله‌ای الکساندر و جونز به ترتیب برابر با ۴۱۶۹ و ۱۵۶۵، یعنی به ترتیب ۷۳ درصد و ۲۷ درصد از کل پیوندهاست. چندجمله‌ای جونز همچنین نسبت به تقارن آینه‌ای هم حساسیت زیادی دارد و بیشتر گره‌هایی که عدد گذر آنها کوچک است را از تصویر آینه‌ای آنها (در صورت متفاوت بودن این دو گره) تشخیص می‌دهد.

چهار ماه پس از کشف چندجمله‌ای جونز، هوست، اوکینو، میله، فراید، لیکوریش و پتر^{۹۴}، که حروف ابتدای اسامی آنها در لاتین کلمه HOMFLY را تشکیل می‌دهد، به‌طور مستقل ناوردای چندجمله‌ای دیگری را برای پیوندها به دست آوردند، که امروز به نام چندجمله‌ای هامفلی خوانده می‌شود. چندجمله‌ای هامفلی، یک چندجمله‌ای در $\mathbb{Z}[a, z]$ است [۱۱].

قضیه ۲۰۶ (قضیه هامفلی). برای هر پیوند K چندجمله‌ای یکتای هامفلی $P_K \in \mathbb{Z}[a, z]$ را می‌توان چنان تعریف کرد که در سه اصل زیر صدق کند.

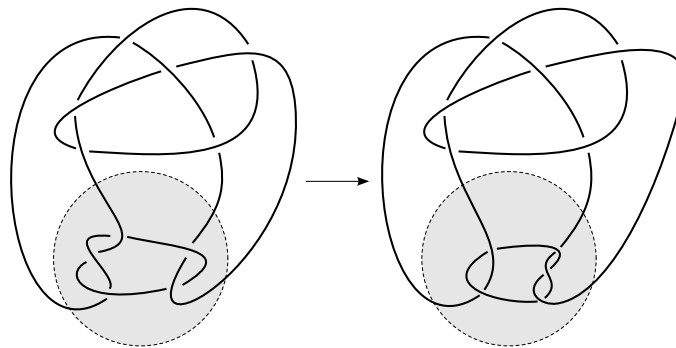
- ناوردایی: اگر پیوندهای K و K' با هم معادل باشند، آنگاه $P_K = P_{K'}$.
- هنجارش: برای گره بدیهی که با O نشان داده می‌شود داریم $P_O = 1$.
- رابطه دسته‌ای: برای هر دسته شامل سه پیوند K^+, K^0, K^- رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{1}{a} P_{K^+}(a, z) - a P_{K^-}(a, z) = z P_{K^0}(a, z).$$

به این ترتیب، چندجمله‌ای هامفلی تعمیمی از هر دو چندجمله‌ای جونز و کانوی است:

$$J_K(t) = P_K\left(t, \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right), \quad \nabla_K(x) = P_K(1, x).$$

^{۹۲}Vaughan Jones ^{۹۳}von Neumann algebra ^{۹۴}Jim Hoste, Adrian Ocneanu, Kenneth Millett, Peter J. Freyd, W. B. R. Lickorish, and David N. Yetter



شکل ۱۷. گره کینوشیتا-تراساکا با یک دگرگونی، که دگرگونی کانوی خوانده می‌شود، به گره کانوی تبدیل می‌شود. این دو گره چندجمله‌ای‌های هامفلی برابر دارند.

Figure 17: The Kinoshita-Terasaka knot is changed by a mutation, called the Conway mutation, to the Conway knot. These two knots have the same HOMFLY polynomials.

چندجمله‌ای هامفلی برای تصویر آینه‌ای یک گره را می‌توان از چندجمله‌ای خود گره محاسبه کرد:

$$P_{-K}(a, z) = P_K(-\frac{1}{a}, z).$$

به این ترتیب، این چندجمله‌ای معمولاً یک گره را از تصویر آینه‌ای آن (در صورت متفاوت بودن آنها) تمیز می‌دهد. در میان گره‌های با عدد گذر کمتر یا مساوی ۱۰، تنها دو گره هستند که با وجود نداشتن تقارن آینه‌ای، چندجمله‌ای هامفلی آنها و تصویر آینه‌ای‌شان با هم یکی است. این دو گره، در جدول گره‌ها با شماره‌های ۹۴۲ و ۱۰۷۱ شناخته می‌شوند. از میان گره‌های با حداکثر ۱۲ گذر، ۶۰۰ گره، یعنی ۲۰ درصد گره‌ها، چندجمله‌ای هامفلی تکراری دارند، و از میان پیوندهای با بیش از یک مؤلفه که حداکثر ۱۲ گذر دارند، ۱۳۰۷ پیوند، یعنی حدود ۱۵ درصد از کل پیوندها چندجمله‌ای هامفلی تکراری دارند. یکی از راه‌های تولید گره‌هایی با چندجمله‌ای هامفلی یکسان، استفاده از روشی است که به آن اعمال یک دگرگونی^{۹۵} روی نمودار گره گفته می‌شود. دگرگونی ممکن است گره را به گره دیگری تبدیل کند، و یا منجر به گرهی معادل با گره اولیه شود. برای اعمال یک دگرگونی، ابتدا یک قرص در صفحه ۲-بعدی که شامل نمودار گره است به گونه‌ای انتخاب می‌شود که مرز آن گره را در ۴ نقطه قطع کند. بعد از اعمال یک، یک‌نهم می‌توان فرض کرد که قرص یادشده همان قرص استاندارد است و چهارنقطه اشتراک گره با این قرص چهار نقطه

$$\exp((2k+1)\pi/\lambda) \in S^1 \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

روی دایره واحد هستند. با این مفروضات، می‌توان قسمتی از نمودار که داخل قرص واحد قرار دارد را نسبت به هر یک از محورهای حقیقی یا موهومی دوران داد، در حالی که بیرون از قرص واحد نمودار گره تغییری نمی‌کند. به این ترتیب چهار نمودار گره به دست می‌آیند، که اولی نموداری است که کار را با آن آغاز کردیم. گره‌های متناظر با این چهار نمودار گره‌های دگرگون یکدیگر^{۹۶} خوانده می‌شوند. دگرگونی چندجمله‌ای هامفلی را تغییر نمی‌دهد و برخی دیگر از ناوردهای گره هم تحت آن ناوردا می‌مانند. این موضوع باعث می‌شود که تشخیص گره‌هایی که دگرگون یکدیگر هستند از هم، معمولاً موضوعی دشوار باشد. شکل ۱۷ یک دگرگونی را به تصویر کشیده است. در این شکل گره کینوشیتا-تراساکا^{۹۷} با شماره ۱۱۴۲ و دگرگون شده آن، یعنی گره کانوی^{۹۸} با شماره ۱۱۳۴، و دگرگونی که اعمال آن یکی را به دیگری تبدیل می‌کند، نشان داده شده‌اند.

⁹⁵mutation ⁹⁶mutant knots ⁹⁷Kinoshita-Terasaka knot ⁹⁸Conway knot

۷. سؤال‌های باز با صورت‌های ساده

در چهل سال گذشته برای پاسخ دادن به سؤال‌های باز متنوعی که دربارهٔ گره‌ها وجود دارد، ابزارهایی از قسمت‌های دیگر ریاضیات به کارگرفته شدند. ورود این ابزارها باعث پیشرفت‌های جالب توجهی در نظریهٔ گره‌ها گردید و به تعدادی از سؤال‌ها که برای سال‌های طولانی بی‌جواب مانده بودند، پاسخ داده شد. در مقاله‌های بعدی، برخی از این دستاوردهای جدید را مرور خواهیم کرد. با وجود این دستاوردهای درخشان، بسیاری از سؤالات سادهٔ مرتبط با گره‌ها همچنان بی‌پاسخ مانده است و در برخی موارد، اثبات حدس‌هایی که در برابر تلاش‌های ریاضیدانان مقاومت کرده‌اند، بسیار دور از دسترس به نظر می‌رسد. در این بخش، نمونه‌هایی از چنین حدس‌هایی را عرضه می‌کنیم.

سؤال اول به موضوع شناسایی گره‌ها از طریق نمودارهای آنها مرتبط است. به‌طور کلی، یافتن الگوریتم‌های مؤثر برای تشخیص این‌که آیا دو نمودار داده‌شده، گره یا پیوند یکسانی را نمایندگی می‌کنند یا خیر، موضوعی جالب و محوری در نظریهٔ گره‌ها است. بالاخص، در مورد یک نمودار گره می‌توان پرسید که آیا گرهی که توسط نمودار نمایندگی می‌شود گره بدیهی است یا خیر. الگوریتم‌های متعددی برای پاسخ دادن به این سؤال، که به آن مسألهٔ تشخیص گره بدیهی گفته می‌شود، عرضه شده است. بیشتر این الگوریتم‌ها به ابزارهای پیشرفته‌ای تکیه دارند. با این وجود، پاسخ سؤال زیر همچنان نامعلوم است:

سؤال ۱.۷. آیا یک الگوریتم زمان-چندجمله‌ای برای مسألهٔ تشخیص گره بدیهی وجود دارد؟

الگوریتم‌هایی که تاکنون برای پاسخ به مسألهٔ تشخیص گره بدیهی ارائه شده‌اند، رده‌های پیچیدگی NP و $co-NP$ ، و البته E را پوشش می‌دهند [۲، ۱۳، ۱۶]. برای مطالب بیشتری در این زمینه، خواننده را به مقالهٔ توصیفی [۱۸] ارجاع می‌دهیم. سؤال‌های جالب دیگری هم، با طبیعتی متفاوت، در مورد راه‌های تمیز گره بدیهی از سایر گره‌ها وجود دارند. شاید مهم‌ترین و چالش برانگیزترین سؤال در مورد تشخیص گره بدیهی، سؤال زیر است:

سؤال ۲.۷. آیا چندجمله‌ای جونز گره بدیهی را از سایر گره‌ها تشخیص می‌دهد؟ به عبارت دیگر، اگر چندجمله‌ای جونز وابسته به یک گره K بدیهی باشد، آیا می‌توان نتیجه گرفت که K گره بدیهی است؟

با وجود شواهد زیاد برای پاسخی مثبت به این سؤال، این مورد هم از سؤالات دشوار و دور از دسترس در نظریهٔ گره‌ها محسوب می‌شود. در مقاله‌های بعدی به برخی از گزاره‌هایی خواهیم پرداخت که پاسخی ضعیف به این سؤال هستند. بسیاری از موضوعاتی که به بررسی تعداد گذرها در نمودارهای گره مربوط است، به سؤالات دشواری با صورتی ساده منجر می‌شوند. می‌توان الگوریتم‌هایی برای یافتن عدد گذر هر گره داده‌شده عرضه کرد. در واقع، با داشتن نموداری برای یک گره K می‌توان مطمئن بود که عدد گذر K حداکثر به اندازهٔ تعداد گذرها در نمودار داده‌شده است. به این ترتیب، کافی است بین نمودارهایی که حداکثر این تعداد گذر دارند، مشخص کنیم که کدام یک با K معادل هستند. این رویکرد، یافتن $c(K)$ را به مسألهٔ تشخیص گره‌ها تحویل می‌کند، که راه‌هایی برای پاسخ دادن به آن وجود دارد. یافتن تعداد گره‌هایی که عدد گذر آنها حداکثر c است، دشوار است. این تعداد، که آن را با $N(c)$ نمایش می‌دهیم، رشدی نمایی دارد. می‌توان نشان داد که نمودارهایی که حداکثر c گذر را شامل می‌شوند، به حداکثر 2^{c+1} گره منجر می‌شوند. برای اثباتی از این موضوع می‌توانید [۸، قضیهٔ ۵.۶] را ببینید. از سوی دیگر، اگر $N_{alt}(c)$ تعداد گره‌های متناوب نامعادل با حداکثر c گذر باشد، راه‌های مؤثری برای تعیین $N_{alt}(c)$ وجود دارد. با استفاده از این روش‌ها، ساندبرگ^{۹۹} و تیسلتوت^{۱۰۰} قضیهٔ زیر را ثابت کردند [۲۵]:

قضیه ۳.۷ (قضیهٔ ساندبرگ-تیسلتوت). رشد تعداد گره‌های متناوب با حداکثر c گذر، در رابطهٔ زیر صدق می‌کند:

$$\lim_{c \rightarrow \infty} (N_{alt}(c))^{\frac{1}{c}} = \frac{101 + \sqrt{21001}}{40}.$$

⁹⁹Carl Sundberg ¹⁰⁰Morwen Thistlethwaite

به این ترتیب، با توجه به رابطه بدیهی $N_{alt}(c) \leq N(c)$ نتیجه می‌گیریم:

$$6 < \frac{101 + \sqrt{21001}}{40} \leq \liminf_{c \rightarrow \infty} (N(c))^{\frac{1}{c}} \leq \limsup_{c \rightarrow \infty} (N(c))^{\frac{1}{c}} \leq 24.$$

بررسی دقیق‌تر رفتار مجانبی $N(c)$ دشوار است. نسبت $N_{alt}(c)/N(c)$ ، برخلاف رفتاری که در میان گره‌های با عدد گذر کم مشاهده می‌شود، با زیاد شدن c به سمت صفر میل می‌کند. سؤال زیر در مورد رفتار مجانبی $N(c)$ همچنان باز است:

سؤال ۴.۷. آیا حد

$$\lim_{c \rightarrow \infty} (N(c))^{\frac{1}{c}}$$

وجود دارد؟ در صورتی که این حد وجود دارد، مقدار آن چیست؟

بررسی رفتار $c(K)$ تحت عمل‌های ساده‌ای که روی گره‌ها می‌توان انجام داد، از جمله موضوعات دیگری است که پیشرفت کمی در مورد آن صورت گرفته است. اگر نموداری از گره K_1 با c_1 گذر، و نموداری از گره K_2 با c_2 گذر داده شده باشند، به سادگی می‌توان نموداری برای گره $K_1 \# K_2$ با $c_1 + c_2$ گذر ساخت. لذا رابطه

$$c(K_1 \# K_2) \leq c(K_1) + c(K_2)$$

به سادگی نتیجه می‌شود. برقرار بودن تساوی در نامساوی بالا، حدسی مهم و دور از دسترس در نظریه گره‌ها به شمار می‌آید:

حدس ۵.۷ (حدس جمعی بودن عدد گذر گره‌ها). به ازای هر دو گره دلخواه K_1 و K_2 ، رابطه جمعی زیر برقرار است:

$$c(K_1 \# K_2) = c(K_1) + c(K_2).$$

بهترین نتیجه عمومی در این خصوص، قضیه زیر از مارک لکنبی^{۱۰۱} است [۱۷]:

قضیه ۶.۷ (قضیه لکنبی). به ازای هر دو گره دلخواه K_1 و K_2 ، رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{c(K_1) + c(K_2)}{152} \leq c(K_1 \# K_2) \leq c(K_1) + c(K_2)$$

فرض کنید K یک گره در $\mathbb{R}^3$ باشد. به دایره S در مکمل گره K یک دایره پوچ^{۱۰۲} گفته می‌شود هرگاه S مرز قرصی در $\mathbb{R}^3$ باشد که K را قطع نمی‌کند. متناظر با هر تقاطع پوچ دایره‌ای حول آن گذر می‌توان در نظر گرفت که یک دایره پوچ باشد. با این توضیحات، پاسخ سؤال زیر هم در حال حاضر دور از دسترس به نظر می‌رسد:

سؤال ۷.۷. فرض کنید تغییر یک گذر c در نموداری از گره K ، گره را تغییر نمی‌دهد. آیا دایره متناظر با گذر c الزاماً یک دایره پوچ است؟

پاسخ به این سؤال در حالتی که K گره بدیهی باشد، مثبت است [۲۱]. اما در حالت کلی، راه مؤثری برای پرداختن به این سؤال پیشنهاد نشده است.

شاید یکی از موضوعاتی که حدس‌های باز بسیاری در آن وجود دارد، عدد گشودن خانواده‌های مختلف گره‌ها است. همان‌طور که در بخش سوم این فصل هم اشاره شد، عدد گشودن یک گره K ، حداقل تعداد تغییر گذرهای لازم برای تبدیل K به گره بدیهی است. این ناوردا، با وجود ساده بودن تعریف آن، برای محاسبه بسیار دشوار است. برای گشودن یک گره با حداقل تعداد تغییر گذرهای ممکن، محتمل است لازم باشد که نمودار ساده‌ای از آن گره را ابتدا بسیار پیچیده کنیم، و

¹⁰¹Mark Lackenby ¹⁰²nugatory circle

با تغییر تعداد کمی گذر در آن نمودار پیچیده، به نموداری از گره بدیهی برسیم. وجود این احتمال به این معناست که یافتن عدد گشودن یک گره خاص، مسأله‌ای متناهی (که با کمک گرفتن از رایانه قابل حل است) نباشد. کامل کردن محاسبه عدد گشودن گره‌های اولی که کمتر از ۹ گذر دارند، تنها چند سال پیش کامل شد. در میان گره‌های اول با ۱۰ گذر، عدد گشودن گره‌های ۱۰۱۱، ۱۰۴۷، ۱۰۵۱، ۱۰۵۴، ۱۰۶۱، ۱۰۷۶، ۱۰۷۷، ۱۰۷۹، و ۱۰۱۰۰ همچنان نامعلوم است، هر چند می‌دانیم که عدد گشودن هر یک از ۹ گره یاد شده، یکی از عددهای ۲ یا ۳ است. در میان گره‌هایی که اول نیستند، وضعیت از این هم وخیم‌تر است. نشان داد که این گره را می‌توان با ۳ تغییر گذر گشود. در ضمن، قضیه‌ای از مارتین شارلمان^{۱۰۳} نشان می‌دهد که هر گرهی که عدد گشودن آن ۱ باشد، الزاماً گرهی اول است [۲۲]. لذا عدد گشودن $T(2,3) \# - T(2,5)$ هم یکی از عددهای ۲ یا ۳ است. مشابه حدسی که در مورد عدد گذر جمع همبند دو گره بیان کردیم، حدس دشوار زیر در مورد عدد گشودن گره‌ها هم صورت‌بندی شده است:

حدس ۸.۷ (حدس جمعی بودن عدد گشودن گره‌ها). به ازای هر دو گره K_1 و K_2 ، رابطه جمعی زیر برقرار است:

$$u(K_1 \# K_2) = u(K_1) + u(K_2).$$

تقریباً هیچ پیشرفتی در خصوص این حدس حاصل نشده است. فارغ از این که عدد گشودن گره‌های K_1 و K_2 چه قدر بزرگ باشد، کران‌های پایین مؤثری برای $u(K_1 \# K_2)$ در دست نیست. حتی اگر بدانیم $u(K_1)$ و $u(K_2)$ هر دو بزرگ‌تر از یک میلیون هستند، در حالت کلی روشی برای اثبات این که $u(K_1 \# K_2)$ از ۲ بیشتر است، در دسترس نیست. همچنین برای هیچ گره خاص K_1 با عدد گشودن بیشتر از ۱ راهی برای اثبات این موضوع که به ازای هر گره K_2 رابطه $u(K_1 \# K_2) \geq u(K_1)$ برقرار است، در دست نداریم. در واقع، هیچ دلیلی در دست نیست که با استفاده از جمع همبند نتوان عدد گشودن یک گره دلخواه را تا ۲ کاهش داد. نشان دادن این نکته در مورد گره‌های خاص (و نه تمام گره‌ها)، تنها به تازگی و با استفاده از ابزارهای پیشرفته ممکن شده است. به عنوان مثال، قضیه زیر از اکرم علیشاهی و نویسنده پیشرفتی جدی محسوب می‌شود [۳]:

قضیه ۹.۷. به ازای هر گره دلخواه K رابطه زیر برقرار است:

$$u(T(p,q) \# K) \leq \min\{p, q\} - 1$$

این قضیه که در مورد گره‌های چنبره‌ای بیان شده است، در واقع بخشی از قضیه‌ای کلی‌تر در مورد همه گره‌ها است. در مقاله یاد شده، به هر گره دلخواه L ناوردایی نامنفی به نام پیچش L نسبت داده می‌شود که کران پایینی برای عدد گشودن است و آن را با $t(L)$ نشان می‌دهیم. در [۳] نشان داده می‌شود که برای هر دو گره K و L داریم $t(K \# L) \geq t(L)$. از آنجا که $t(T_{p,q}) = \min\{p, q\} - 1$ قضیه بالا نتیجه می‌شود. قضیه یاد شده با استفاده از ابزارهایی انجام می‌شود که در دو مقاله [۵] و [۴] ساخته شده‌اند و در چارچوب نظریه مانستگی اژوات-سابو^{۱۰۴} قرار دارند. در مقالات بعدی اشاره‌هایی به این ابزارها هم خواهیم داشت.

یافتن عدد گشودن خانواده‌های ویژه از گره‌ها، از موضوعات چالش برانگیز در نظریه گره‌ها است. عدد گشودن گره‌های چنبره‌ای به مدت چهل سال مجهول مهمی در نظریه گره‌ها محسوب می‌شد تا این که در سال ۱۹۹۳ و با استفاده از ابزارهای نظریه پیمان‌های محاسبه گردید. در فصل ششم به این محاسبه اشاره خواهیم کرد. در اینجا به ذکر این نکته بسنده می‌کنیم که

$$u(T(p,q)) = \frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

با این وجود، سؤال زیر، که نسخه ضعیفی از حدس جمعی بودن عدد گشودن است، همچنان بی‌پاسخ مانده است:

¹⁰³Martin G. Scharlemann ¹⁰⁴Ozsváth-Szabó homology

سؤال ۱۰۷. فرض کنید p_1, q_1, p_2, q_2 اعداد صحیح هستند، به طوری که $(p_1, q_1) = (p_2, q_2) = 1$. آیا رابطه زیر برقرار است؟

$$u(T(p_1, q_1) \# -T(p_2, q_2)) = \frac{(p_1 - 1)(q_1 - 1)}{2} + \frac{(p_2 - 1)(q_2 - 1)}{2}$$

سؤال‌های متعدد دیگری در مورد عدد گشودن دسته‌های خاص از گره‌ها وجود دارند، که فاصله ما با پاسخ آنها به شکل حیرت‌آوری زیاد است. مورد قابل توجه دیگر، گره‌های پرتزلی هستند. اگر $1 \leq k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_{2n+1}$ اعدادی صحیح باشند، گره پرتزلی $(1, 2k_1 + 1, 2k_2 + 1, \dots, 2k_{2n+1} + 1)$ را می‌توان با $k_1 + k_2 + \dots + k_{2n} + n$ تغییر گذر به گره بدیهی تبدیل کرد (سعی کنید این کار را به عنوان تمرین انجام دهید). با فرض این که k_{2n+1} به اندازه کافی بزرگ است، پس از مدتی تلاش می‌توان تا حدودی قانع شد که گشودن گره یادشده با تغییر گذرهای کمتر، ممکن نیست. با این وجود، هیچ استدلالی در دسترس نیست که بتواند نشان دهد، حتی فقط در مورد یکی از این گره‌های پرتزلی، $u(P)$ از $2n + 1$ بیشتر است. بالاخص، سؤال زیر، بی جواب مانده است:

سؤال ۱۱۷. آیا دنباله عددهای گشودن

$$\left\{ u(P(2a + 1, 2b + 1, 2c + 1)) \right\}_{a,b,c \in \mathbb{Z}^+}$$

بی کران است؟ آیا در این دنباله، عددی بزرگ‌تر از ۳ وجود دارد؟

این سؤال‌های باز، نمونه کوچکی از مسائل دشوار (با ظاهرهای ساده) در نظریه گره‌ها است که ابزارهای ما برای پاسخ دادن به آنها هنوز کافی نیست. در دو مقاله بعدی، ابتدا تحولات صورت گرفته در مطالعه خمینه‌های سه بعدی را مرور خواهیم کرد، و سپس به توصیف ابزارهای مدرن و اثرات آنها در نظریه گره‌ها و توپولوژی خمینه‌های بعد پایین خواهیم پرداخت.

مراجع

- [1] I. Agol, The virtual Haken conjecture, With an appendix by Agol, Daniel Groves, and Jason Manning, *Doc. Math.*, **18** (2013) 1045–1087.
- [2] I. Agol, J. Hass and W. Thurston, 3-manifold knot genus is NP-complete, *Proceedings of the Thirty-Fourth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, ACM, New York, 2002 761–766.
- [3] A. Alishahi and E. Eftekhary, Knot Floer homology and the unknotting number, *Geom. Topol.*, **24** no. 5 (2020) 2435–2469.
- [4] A. Alishahi and E. Eftekhary, Tangle Floer homology and cobordisms between tangles, *J. Topol.*, **13** no. 4 (2020) 1582–1657.
- [5] A. S. Alishahi and E. Eftekhary, A refinement of sutured Floer homology, *J. Symplectic Geom.*, **13** no. 3 (2015) 609–743.
- [6] R. Beer, *The Handbook of Tibetan Buddhist Symbols*, Serindia Publications Inc, Serindia Publications Inc., 2003.
- [7] J. H. Conway, *An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties*, Computational Problems in Abstract Algebra (Proc. Conf., Oxford, 1967), Pergamon, Oxford-New York-Toronto, Ont., 1970 329–358.

- [8] A. Coward and M. Lackenby, An upper bound on Reidemeister moves, *Amer. J. Math.*, **136** no. 4 (2014) 1023–1066.
- [9] E. Eftekhary, Knot theory and modern mathematical tools, [In Persian]. *preprint*, available at <https://www.researchgate.net/profile/Eaman-Eftekhary/research>.
- [10] E. Eftekhary, Topology of 3-manifolds [In Persian]. *preprint*, available at <https://www.researchgate.net/profile/Eaman-Eftekhary/research>.
- [11] P. Freyd, D. Yetter, J. Hoste, W. B. R. Lickorish, K. Millett and A. Ocneanu, A new polynomial invariant of knots and links, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **12** no. 2 (1985) 239–246.
- [12] N. D. Gilbert and T. Porter, *Knots and surfaces*, Oxford Science Publications, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1994.
- [13] J. Hass, J. C. Lagarias and N. Pippenger, The computational complexity of knot and link problems, *J. ACM*, **46** no. 2 (1999) 185–211.
- [14] V. F. R. Jones, Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials, *Ann. of Math. (2)*, **126** no. 2 (1987) 335–388.
- [15] C. G. Knott, *Life and scientific work of Peter Guthrie Tait*, Cambridge University Press, 1911.
- [16] G. Kuperberg, Knottedness is in NP, modulo GRH, *Adv. Math.*, **256** (2014) 493–506.
- [17] M. Lackenby, The crossing number of composite knots, *J. Topol.*, **2** no. 4 (2009) 747–768.
- [18] M. Lackenby, *Elementary knot theory*, Lectures on geometry, Clay Lect. Notes, Oxford Univ. Press, Oxford, 2017 29–64.
- [19] W. B. R. Lickorish, *An introduction to knot theory*, Graduate Texts in Mathematics, **175**, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [20] K. Reidemeister, *Knotentheorie*, (German) Reprint, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1974.
- [21] M. Scharlemann and A. Thompson, Link genus and the Conway moves, *Comment. Math. Helv.*, **64** no. 4 (1989) 527–535.
- [22] M. G. Scharlemann, Unknotting number one knots are prime, *Invent. Math.*, **82** no. 1 (1985) 37–55.
- [23] H. Schubert, Über eine numerische Knoteninvariante, (German), *Math. Z.*, **61** (1954) 245–288.
- [24] A. Sossinsky, *Knots. Mathematics with a twist*, Translated from the 1999 French original by Giselle Weiss, Harvard University Press, Cambridge, MA, 2002.
- [25] C. Sundberg and M. Thistlethwaite, The rate of growth of the number of prime alternating links and tangles, *Pacific J. Math.*, **182** no. 2 (1998) 329–358.

ایمان افتخاری

پژوهشکده ریاضیات، پژوهشگاه دانش‌های بنیادی، میدان شهید باهنر، تهران، ایران.
eaman@ipm.ir

ایمان افتخاری متولد مهرماه ۱۳۵۸ در شهر گلپایگان است. وی در سال ۱۳۷۹ از دوره کارشناسی ریاضی دانشگاه صنعتی شریف فارغ‌التحصیل شد و در سال ۱۳۸۳ دکتری خود را در توپولوژی ابعاد پایین از دانشگاه پرینستون آمریکا دریافت کرد. از سال ۱۳۸۶ تاکنون، او عضو هیئت علمی پژوهشکده ریاضیات پژوهشگاه دانش‌های بنیادی است.

