

## BOLLOBÁS LEMMA: ANALYSIS, APPLICATION, ALGORITHM

MOHSEN ALAMBARDAR MEYBODI\*  AND AFSHAN HASHEMI

**ABSTRACT.** Many of the theorems that were developed by researchers in the 1960s and 1970s in combinations and graph theory as mathematical theorems, are still used today in designing algorithms and solving new problems. The purpose of this article is to show that useful things happened in the past that we should not forget and use them with a creative eye. Bollobás Lemma [1], which was proposed in the 1970s, is a well-known problem in combinatorics. In this problem, we have a family of sets  $A_1, A_2, \dots, A_m$  each with size  $a$  and another family of sets  $B_1, B_2, \dots, B_m$  each with size  $b$ . The goal is to find the maximum size  $m$ , the number of sets so that for each index  $i$  we have  $A_i \cap B_i = \emptyset$  and also  $A_i \cap B_j \neq \emptyset$  where  $(i \neq j)$ . The Bollobás lemma expresses the upper bound for the maximum number of these sets as  $m \leq \binom{a+b}{b}$ . In this paper, after stating the versions of the lemma and the existing proof for this lemma, we present another probability-based proof for the Bollobás Lemma, and then with a different look at this combinatorial problem, we investigate the interesting applications of this lemma in graph theory problems and parameterized algorithms.

### 1. Introduction

Suppose we have 20 astronauts and we want to choose a group of 6 of them to send to space, but we know that 3 of them are going to get sick the day before the flight, and the group that has a sick person cannot go to space. The question that arises here is how many groups should be formed to be sure that at least one of them can go to space? An obvious answer to this problem is  $\binom{20}{3}$ , but it is

Keywords: Bollobás Lemma, parameterized algorithms, representative set.

Communicated by Soghra Nobakhtian .

Article Type: Research Paper.

\*Corresponding author.

Received: 22-09-2023, Accepted: 23-01-2024, Published Online: 27-05-2024.

**Cite this article:** M. Alambardar Meybodi and A. Hashemi, Bollobás Lemma: Analysis, Application, Algorithm, *Mathematics and Society*, 9 no. 2 (2024) 1–18.

<http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.139150.1606> .

clear this value grows factorially according to the number of primary astronauts. So we have to look for a way to calculate the answer to this problem with less calculations. In the following, we introduce the Bollobás lemma, which can be used to reduce the amount of calculations for this problem to  $\binom{9}{3}$ .

## 2. Main Results

**Lemma 2.1.** [1] *If  $A_1, A_2, \dots, A_m$  be minimal family of sets of sizes  $a_1, a_2, \dots, a_m$  and so on  $B_1, B_2, \dots, B_m$  be another family of sets with sizes  $b_1, b_2, \dots, b_m$  such that  $A_i \cap B_i = \emptyset$  for each  $i$  and  $A_i \cap B_j \neq \emptyset$  for any  $i \neq j$ , then*

$$(2.1) \quad \sum_{i=1}^m \binom{a_i + b_i}{b_i}^{-1} \leq 1.$$

We present two proofs for this lemma, the existing proof for this lemma in [1], and a new probability-based proof. Then with a different look, we investigate the interesting applications of this lemma in graph theory problems and parameterized algorithms.

**Lemma 2.2.** [General Case] *If  $A_1, A_2, \dots, A_m$  form a minimal family of sets with sizes  $a_1, a_2, \dots, a_m$  respectively, and similarly  $B_1, B_2, \dots, B_m$  form another family of sets with sizes  $b_1, b_2, \dots, b_m$  such that  $A_i \cap B_i = \emptyset$  and  $A_i \cap B_j \neq \emptyset$  ( $i \neq j$ ), then*

$$(2.2) \quad \sum_{i=1}^m \binom{a_i + b_i}{b_i}^{-1} \leq 1.$$

It is clear that by substituting  $a$  and  $b$  for the parameters  $a_i$  and  $b_i$  respectively, Equation (2.1) can be reached.

$$(2.3) \quad \sum_{i=1}^m \binom{a+b}{b}^{-1} = m \binom{a+b}{b}^{-1} \leq 1 \implies m \leq \binom{a+b}{b}$$

Lemma 2.2 provides an upper bound for the number of members in the family. Now we present two proofs for this lemma in the general case.

*Proof 1.*

**Definition 2.3** (Separating Permutation). *Let  $A$  and  $B$  be two subsets of the set  $\{x_1, \dots, x_n\}$  such that  $A \cap B = \emptyset$ . A permutation  $(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$  is a separating permutation of  $(A, B)$  if all elements in the set  $A$  precede those in the set  $B$ , i.e., for every  $x_k \in A$  and  $x_l \in B$ ,  $x_k < x_l$ .*

**Claim:** Each permutation separates at most one pair  $(A, B)$ .

**Proof:** Suppose to the contrary that there exists a permutation that separates two pairs  $(A_i, B_i)$  and  $(A_j, B_j)$ . Also, according to the definition, we know that  $A_i \cap B_j \neq \emptyset$  and  $A_j \cap B_i \neq \emptyset$ . Now two cases arise: either the smallest element of  $B_j$  is smaller than the smallest element of  $B_i$ , or vice versa. Here

we assume the first case occurs (Figure 1). But this is impossible since we know that  $A_j$  and  $B_i$  have common elements, leading to a contradiction, as two pairs cannot be separated by one permutation.

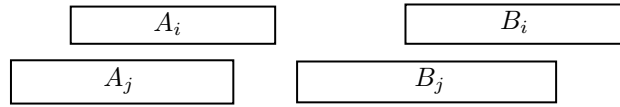


FIGURE 1. Two subsets  $(A_i, B_i)$  and  $(A_j, B_j)$

**Question:** How many permutations can separate the pair  $(A, B)$ ?

**Answer:** If  $a = |A|$  and  $b = |B|$ , then the number of ways we can select sets  $A$  and  $B$  is  $\binom{n}{a+b}$ . The number of permutations of  $A$  and  $B$  is  $a!b!$ . The number of permutations for the remaining elements not chosen is  $(n - a - b)!$ . Hence, we have:

$$(2.4) \quad \binom{n}{a+b} \cdot a!b! \cdot (n - a - b)! = n! \binom{a+b}{a}^{-1}.$$

Now, if we calculate the number of permutations for each pair  $(A, B)$ , we get the following:

$$(2.5) \quad \sum_{i=1}^m n! \binom{a_i + b_i}{a_i}^{-1},$$

which is always less than or equal to  $n!$ , the total number of permutations over  $n$ . Thus, the following inequality is always valid:

$$(2.6) \quad \sum_{i=1}^m n! \binom{a_i + b_i}{a_i}^{-1} \leq n! \implies \sum_{i=1}^m \binom{a_i + b_i}{b_i}^{-1} \leq 1.$$

□

*Proof 2.* We give a probabilistic proof. Assume  $\pi$  is a random permutation of the set  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ . In the previous proof, it was shown that the number of permutations that separate  $A$  and  $B$  is  $n! \binom{a+b}{a}^{-1}$ , i.e.,

$$(2.7) \quad P(\pi \text{ separates } A \text{ and } B) = \binom{a+b}{a}^{-1}.$$

Additionally, it was proved that the two probabilities

- $\pi$  separates  $A_i$  and  $B_j$ ,
- $\pi'$  separates  $A_j$  and  $B_j$ ,

are independent since each permutation only separates one pair. Hence, the sum of probabilities for all  $m$  pairs can be written as  $\sum_{i=1}^m \binom{a_i + b_i}{b_i}^{-1}$ , and since it is a probability, it always has a value less than or equal to 1, i.e.,

$$(2.8) \quad \sum_{i=1}^m \binom{a_i + b_i}{b_i}^{-1} \leq 1.$$

□

It is easily seen that we can use the Bollobás Lemma to solve the astronaut selection problem, since all conditions for using this lemma hold, i.e., the astronaut groups we select and the group of people who get sick should have no intersection.

**2.1. Some Application of Bollobás Lemma.** In this section, we will examine some applications of this lemma in proving and solving various problems such as:

- A family of sets  $F$  is antichain if for every  $A, B \in F$  with  $A \neq B$ , we have  $A \not\subseteq B$ .

If  $F$  be a antichain on the set  $X$  with  $n$  members then:

$$\sum_{A \in F} \binom{n}{|A|}^{-1} \leq 1.$$

- The minimum set  $S$  of the vertices of the graph  $G$  is called vertex cover if  $S$  contains at least one vertex of each edge of the graph. The graph  $G$  is called  $k$ -edge-critical if  $G$  has a vertex cover of size  $k$  and removing each edge  $e$  leads to a vertex cover with size  $k - 1$ . Every  $k$ -edge-critical graph contains at most  $\binom{k+1}{2}$  edges.
- $S \subseteq V(G)$  is an independent set if there are no edges between the vertices in  $S$ . There is no  $n$  vertex graph that has more than  $3^{n/3}$  maximum independent set.
- A graph with  $n$  vertices has at most  $O(1.6181^n)$  minimal separator.

### 3. Summary of Proofs/Conclusions

In this article, after considering the states of the lemma and the existing proof for this lemma, we provide another probability-based proof for the Bollobás lemma. Then we examine the interesting applications of this lemma in problems such as, antichain sets [3], Edge  $k$ -critical graphs, minimal separator [4] and representative sets [7].

### REFERENCES

- [1] B. Bollobás, On generalized graphs, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **16** (1965) 447–452.
- [2] B. Bollobás, *The art of mathematics. Coffee time in Memphis*, Cambridge University Press, New York, 2006.
- [3] C. Bey, Polynomial LYM inequalities, *Combinatorica*, **25** no. 1 (2005) 19–38.
- [4] F. V. Fomin and P. Kaski, Exact exponential algorithms, *Communications of the ACM*, **56** no. 3 (2013) 80–88.
- [5] L. Lovász, Flats in matroids and geometric graphs, *Combinatorial surveys (Proc. Sixth British Combinatorial Conf.)*, Academic Press, London-New York, (1977) 45–86.
- [6] M. Naor, L. J. Schulman and A. Srinivasan, Splitters and near-optimal derandomization, *InProceedings of IEEE 36th Annual Foundations of Computer Science*, (1995) 182–191.
- [7] M. Cygan, F. V. Fomin, Ł. Kowalik ,D. Lokshtanov, D. Marx, M. Pilipczuk, M. Pilipczuk and S. Saurabh, *Parameterized algorithms*, Springer (2015).

**Mohsen Alambardar Meybodi**

Department of Applied Mathematics and Computer Science, Faculty of Mathematics and Statistics, University of Isfahan, P.O.Box 81746-73441, Isfahan, Iran

Email: [m.alambardar@sci.ui.ac.ir](mailto:m.alambardar@sci.ui.ac.ir)

**Afshan Hashemi**

Department of Computer and Information Sciences, Linköping University, Linköping, Sweden

Email: [afsha719@student.liu.se](mailto:afsha719@student.liu.se)

## لم بلاباس: تحلیل، کاربرد و الگوریتم

محسن علمبردار میبدی\*<sup>ID</sup> و افشان هاشمی

چکیده. بسیاری از قضایایی که در دهه‌های ۶۰ و ۷۰ میلادی در ترکیبیات و نظریه‌ی گراف توسط پژوهشگران توسعه داده شده‌اند، امروزه در طراحی الگوریتم‌ها و حل مسائل جدید همچنان کاربرد دارد. هدف این مقاله این است که نشان دهیم چیزهای مفیدی در گذشته رخ داده است که نباید آنها را فراموش کنیم و باید با نگاهی خلاقانه از آنها استفاده کنیم. لم بلاباس، که در دهه ۱۹۷۰ مطرح شد یک مسئله معروف در حوزه ترکیبیات است. در این مسئله، یک خانواده از مجموعه‌های  $A_1, A_2, \dots, A_m$  هر کدام با اندازه  $a$  و خانواده‌ای دیگر از مجموعه‌ها  $B_1, B_2, \dots, B_m$  هر کدام با اندازه  $b$  داریم. هدف یافتن بیشترین مقدار  $m$  از تعداد مجموعه‌ها است به طوری که برای هر اندیس  $i$  داشته باشیم  $A_i \cap B_i = \emptyset$  و همچنین  $A_i \cap B_j \neq \emptyset$  برای هر  $j \neq i$ . لم بلاباس کران بالایی برای حداکثر تعداد این مجموعه‌ها به صورت  $m \leq \binom{a+b}{b}$  بیان می‌کند. در این مقاله، پس از بیان حالات لم و اثبات موجود برای این لم، اثبات دیگری بر پایه احتمال برای لم بلاباس ارائه می‌دهیم و سپس با نگاهی متفاوت به این مسئله ترکیبیاتی، به بررسی کاربردهای جالب این لم در مسائل نظریه گراف و الگوریتم‌های پارامتری می‌پردازیم.

### ۱. مقدمه

ترکیبیات شاخه‌ای از ریاضیات است که می‌توان آن را به عنوان مطالعه شمارش ساختارهای گسسته تعریف کرد. بسیاری از سؤالات ساده را می‌توان در ترکیبیات مطرح کرد، از جمله برشمردن تعداد راه‌ها برای مرتب کردن مجموعه‌ای از اشیاء و یا شمارش تعداد راه‌ها برای انتخاب زیر مجموعه‌ای با یک ساختار مشخص. اگرچه ممکن است در نگاه اول شمارش آسان باشد، اما سطح دشواری مسئله‌ی شمارش با افزایش متغیرها و شرایط مسئله به سرعت افزایش می‌یابد.

**مسئله انتخاب فضا‌نورد:** فرض می‌کنیم ۲۰ فضا‌نورد داریم و می‌خواهیم گروهی ۶ نفره از آن‌ها را انتخاب کنیم که به فضا بفرستیم اما می‌دانیم که روز قبل از پرواز قرار است ۳ نفر از آن‌ها مریض شوند و گروهی که فرد مریض داشته باشد نمی‌تواند به فضا برود. سؤالی که در اینجا مطرح است این است که حداکثر چند گروه لازم است تشکیل دهیم که مطمئن باشیم حداقل یکی از آن‌ها می‌توانند به فضا بروند؟ یک پاسخ بدیهی برای این مسئله  $\binom{20}{6}$  است زیرا باید تمام حالاتی که سه نفر می‌توانند انتخاب شوند را در نظر بگیریم و بگوییم گروه ۶ نفره را از ۱۷ نفر باقی مانده انتخاب می‌کنیم ولی واضح است که مقدار این عدد بسیار زیاد است و با توجه به تعداد فضا‌نورد های اولیه به صورت فاکتوریلی رشد می‌کند. پس باید دنبال راهی بگردیم که

عبارات و کلمات کلیدی: لم بلاباس، الگوریتم پارامتری، مجموعه معرف.

دبیرتخصصی رابط: صفری نوبختیان

نوع مقاله: پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۶/۳۱ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۱۱/۰۳ تاریخ انتشار آنلاین: ۱۴۰۳/۰۳/۰۷

ارجاع به مقاله: م. علمبردار میبدی و ا. هاشمی، لم بلاباس: تحلیل، کاربرد، الگوریتم، نشریه ریاضی و جامعه، ۹ (۲) (۱۴۰۳) ۱-۱۸.

<http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.139150.1606>

بتوان با محاسبات کمتر پاسخ این مسئله را محاسبه کرد. در ادامه به معرفی لم بلاباس می‌پردازیم که با استفاده از آن می‌توان حجم محاسبات برای این مسئله را به  $(\frac{n}{2})$  کاهش داد.

## ۲. لم بلاباس

در این بخش ابتدا لم بلاباس و حالت‌های مختلف آن بیان می‌گردد. در ادامه دو اثبات برای این لم بیان می‌شود که اثبات اول در [۱] ارائه شده است و اثبات دومی بر مبنای احتمال، در این مقاله برای این لم بیان می‌شود.

لم ۱.۰۲. [۱، لم بلاباس] اگر  $A_1, A_2, \dots, A_m$  یک خانواده مینیمال از مجموعه‌ها با اندازه‌های به ترتیب  $a_1, a_2, \dots, a_m$  باشند و همین‌طور  $B_1, B_2, \dots, B_m$  خانواده‌ای دیگر از مجموعه‌ها با اندازه‌های به ترتیب  $b_1, b_2, \dots, b_m$  باشند به طوری که  $A_i \cap B_i = \emptyset$  و  $A_i \cap B_j \neq \emptyset$  ( $i \neq j$ ) آنگاه

$$(۱) \quad \sum_{i=1}^m \left( \frac{a_i + b_i}{b_i} \right)^{-1} \leq 1.$$

حالت محدود شده لم بلاباس را می‌توان در لم ۲.۲ دید.

لم ۲.۲ (حالت خاص:). اگر  $A_1, A_2, \dots, A_m$  یک خانواده مینیمال از مجموعه‌ها با اندازه  $a$  باشند و همین‌طور  $B_1, B_2, \dots, B_m$  خانواده‌ای دیگر از مجموعه‌ها با اندازه  $b$  باشند به طوری که  $A_i \cap B_i = \emptyset$  و  $A_i \cap B_j \neq \emptyset$  ( $i \neq j$ ) آنگاه

$$(۲) \quad m \leq \left( \frac{a+b}{b} \right).$$

به وضوح قابل مشاهده است که با جایگذاری  $a, b$  به ترتیب جای پارامترهای  $a_i, b_i$  ها در لم ۱.۰۲ می‌توان به نامعادله ۲ رسید.

$$(۳) \quad \sum_{i=1}^m \left( \frac{a+b}{b} \right)^{-1} = m \left( \frac{a+b}{b} \right)^{-1} \leq 1 \implies m \leq \left( \frac{a+b}{b} \right)$$

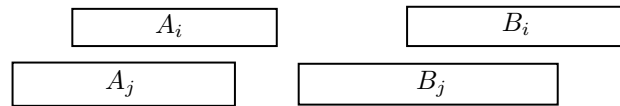
لم ۲.۲ یک کران بالا برای تعداد اعضای خانواده می‌دهد. حال دو اثبات برای این لم در حالت کلی ارائه می‌دهیم.

اثبات. [۱، اثبات ۱]

تعریف ۳.۲ (جایگشت جدا کننده). فرض کنید  $A$  و  $B$  دو زیرمجموعه از مجموعه  $\{x_1, \dots, x_n\}$  باشند که  $A \cap B = \emptyset$ . جایگشت  $(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$  یک جایگشت جدا کننده  $(A, B)$  است اگر همه عناصر موجود در مجموعه  $A$  قبل از عناصر مجموعه  $B$  قرار بگیرند به عبارت دیگر به ازای هر  $x_k \in A$  و  $x_l \in B$  آنگاه  $x_k < x_l$ .

ادعا: هر جایگشت حداکثر یک زوج  $(A, B)$  را جدا می‌کند.

برهان: فرض خلف: فرض می‌کنیم جایگشتی وجود دارد که باعث جدا شدن دو زوج  $(A_i, B_i)$  و  $(A_j, B_j)$  می‌شود. همچنین طبق تعریف می‌دانیم که  $A_i \cap B_j \neq \emptyset$  و  $A_j \cap B_i \neq \emptyset$ . حال دو حالت پیش می‌آید یا کوچکترین عضو  $B_j$  از کوچکترین عضو  $B_i$  کوچک‌تر است و یا برعکس. فرض می‌کنیم که حالت اول پیش می‌آید (شکل ۱). ولی امکان رخداد چنین حالتی نیست زیرا می‌دانیم که  $A_j$  و  $B_i$  با هم اشتراک دارند پس تناقض به وجود می‌آید. بنابراین دو زوج توسط یک جایگشت نمی‌توانند جدا شوند.



شکل ۱. دو زوج زیرمجموعه  $(A_i, B_i)$  و  $(A_j, B_j)$

Figure 1: Two pairs of subsets  $(A_i, B_i)$   $(A_j, B_j)$

پرسش: چند جایگشت می‌توانند زوج  $(A, B)$  را جدا کنند؟

پاسخ: اگر  $a = |A|$  و  $b = |B|$  باشد، آنگاه تعداد حالاتی که می‌توانیم دو مجموعه  $A$  و  $B$  را انتخاب کنیم برابر است با  $\binom{n}{a+b}$ ، تعداد جایگشت‌های  $A$  و  $B$  برابر است با  $a!b!$  و تعداد جایگشت‌هایی که برای بقیه عناصر مجموعه که انتخاب نشده‌اند پیش می‌آید  $(n - a - b)!$  است. پس در نهایت داریم:

$$(4) \quad \binom{n}{a+b} \cdot a!b! \cdot (n - a - b)! = n! \binom{a+b}{a}^{-1}.$$

حال اگر به ازای هر زوج  $(A, B)$ ، تعداد جایگشت‌های آن را محاسبه کنیم به مقدار زیر می‌رسیم.

$$(5) \quad \sum_{i=1}^m n! \binom{a_i + b_i}{a_i}^{-1}$$

که این مقدار همیشه کوچکتر یا مساوی  $n!$ ، تعداد کل جایگشت‌های روی  $n$ ، می‌باشد. پس نامساوی ۶ همیشه برقرار است:

$$(6) \quad \sum_{i=1}^m n! \binom{a_i + b_i}{a_i}^{-1} \leq n! \implies \sum_{i=1}^m \binom{a_i + b_i}{b_i}^{-1} \leq 1.$$

□

اثبات ۲. این اثبات یک اثبات احتمالاتی است. فرض می‌کنیم  $\pi$  یک جایگشت تصادفی از مجموعه  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  باشد. در اثبات قبل نشان داده شد که تعداد جایگشت‌هایی که  $A$  و  $B$  را جدا می‌کنند  $n! \binom{a+b}{a}^{-1}$  است که یعنی

$$(7) \quad P(\pi \text{ separates } A \text{ and } B) = \binom{a+b}{a}^{-1}$$

علاوه بر آن نیز اثبات کردیم که دو احتمال

• جدا کننده  $A_i$  و  $B_j$  باشد،

•  $\pi'$  جدا کننده  $A_j$  و  $B_j$  باشد،

مستقل از هم هستند. از آنجائی‌که هر جایگشت فقط یک زوج را جدا می‌کند پس مجموع احتمال همه  $m$  زوج را می‌توان به صورت  $\sum_{i=1}^m \binom{a_i + b_i}{b_i}^{-1}$  نوشت و چون می‌دانیم یک احتمال است همیشه مقداری کمتر و یا مساوی با یک دارد، پس

$$(8) \quad \sum_{i=1}^m \binom{a_i + b_i}{b_i}^{-1} \leq 1.$$

□

به راحتی دیده می‌شود که می‌توانیم از لم بلاباس برای حل مسئله انتخاب فضاورد استفاده کنیم، زیرا تمامی شروط استفاده از این لم برقرار است یعنی گروه‌های فضاوردی که انتخاب می‌کنیم و گروه افرادی که مریض می‌شوند نباید با هم اشتراکی داشته باشند.

### ۳. برخی کاربردهای لم بلاباس

در این بخش به بررسی برخی از کاربردهای این لم در اثبات و حل مسائل مختلف می‌پردازیم.

#### ۱.۳. خانواده منفصل<sup>۱</sup>

تعریف ۱.۳. یک خانواده از مجموعه‌های منفصل است اگر به ازای هر  $A, B \in F$  و  $A \neq B$  آنگاه  $A \not\subseteq B$ .

قضیه ۲.۳. [۳] اگر  $F$  یک خانواده منفصل روی مجموعه  $X$  که دارای  $n$  عضو است باشد، آنگاه

$$\sum_{A \in F} \binom{n}{|A|}^{-1} \leq 1$$

اثبات. اگر  $F = A_1, A_2, \dots, A_m$  قرار می‌دهیم  $B_i = X - A_i$ ؛ یعنی  $B_i$  مکمل هر مجموعه  $A_i$  است، بنابراین

$$\sum_{A \in F} \binom{n}{|A|}^{-1} = \sum_{i=1}^m \binom{|A_i| + |B_i|}{|A_i|}^{-1} = \sum_{i=1}^m \binom{|A_i| + |B_i|}{|B_i|}^{-1},$$

که طبق لم بلاباس می‌دانیم این مقدار همیشه کوچکتر مساوی یک است، پس

$$\sum_{A \in F} \binom{n}{|A|}^{-1} \leq 1.$$

□

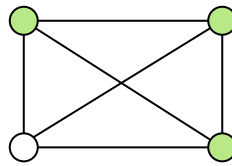
#### ۲.۳. پوشش رأسی<sup>۲</sup>

تعریف ۳.۳. مجموعه  $S$  از رأس‌های گراف  $G$  را یک پوشش رأسی می‌نامیم، اگر حداقل یک سر هر یال از گراف در این مجموعه باشد.

تعریف ۴.۳ (گراف  $k$  یال بحرانی<sup>۳</sup>). گراف  $G$  را یک گراف  $k$  یال بحرانی می‌گوییم اگر یک پوشش رأسی با اندازه  $k$  در گراف  $G$  وجود داشته باشد و هر یک یال  $e$  از این گراف را انتخاب و حذف کنیم، گراف حاصله  $G \setminus e$  یک پوشش رأسی با اندازه حداکثر  $k - 1$  داشته باشد.

مثال: گراف‌های کامل با  $k + 1$  رأس،  $K_{k+1}$ ، گراف  $k$  یال بحرانی هستند.

<sup>1</sup> antichain   <sup>2</sup> vertex cover   <sup>3</sup> edge  $k$ -critical graphs

شکل ۲.  $K_4$  گراف ۳ یال بحرانیFigure 2:  $K_4$  graph 3 critical edge

قضیه ۵.۳. [۵] هر گراف  $k$  یال بحرانی حداکثر  $\binom{k+1}{۲}$  یال دارد.

اثبات. فرض می‌کنیم گراف  $G$ ،  $k$  یال بحرانی است و مجموعه یال‌هایش  $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  است. برای هر یال  $e_i$  که یک مجموعه دوتایی از رأس‌ها است می‌توانیم یک مجموعه از رأس‌ها به نام  $S_i$  پیدا کنیم که هیچ اشتراکی با  $e_i$  ندارد زیرا می‌دانیم گراف  $k$  یال بحرانی است و با حذف هر یال اندازه پوشش یالی یکی کاهش می‌یابد به عبارت دیگر هر یال توسط یک رأس پوشش داده شده است. بدیهی است که مجموعه  $S_i$  با تمام یال‌های دیگر اشتراک دارد چون یک پوشش یالی است. پس شرایط لم بلاباس برقرار است و به صورت زیر می‌توانیم از آن استفاده کنیم:

$$\begin{aligned} e_1, \dots, e_m \quad |e_i| &= ۲ \\ S_1, \dots, S_m \quad |S_i| &= k - ۱ \end{aligned}$$

که  $e_i \cap S_i = \emptyset$  و  $e_i \cap S_j \neq \emptyset$  برای  $i \neq j$ . پس:

$$m \leq \binom{k-1+2}{2} = \binom{k+1}{2}.$$

□

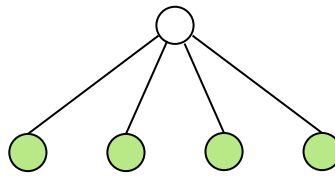
شمارش یک مجموعه خاص در گراف‌ها یک مسئله جالب، پرکاربرد در حل الگوریتمی مسائل و در عین حال سخت به شمار می‌آید. در این قسمت ابتدا مسئله شمارش مجموعه‌های مستقل بیشین و سپس شمارش تعداد جداکننده‌های متمایز در گراف را بررسی می‌کنیم. با کمک لم بلاباس کران دقیقتری برای تعداد جداکننده‌ها حاصل شده است.

### ۳.۳. مجموعه‌های مستقل<sup>۴</sup>

تعریف ۶.۳.  $S \subseteq V(G)$  یک مجموعه مستقل است اگر هیچ یالی بین رأس‌های  $S$  وجود نداشته باشد.

پرسش: یک گراف حداکثر چند مجموعه مستقل می‌تواند داشته باشد؟ این پرسش به تنهایی سوال جالبی نیست زیرا به سادگی مشخص می‌شود که اگر یک درخت به شکل ۳ داشته باشیم می‌توانیم هر زیرمجموعه از برگ‌های آن را یک مجموعه مستقل در نظر بگیریم، پس در نهایت  $2^{n-1}$  مجموعه مستقل داریم. اگر شرط همبندی روی گراف نیز داشته باشیم باز هم جواب همین می‌ماند. پس بهتر است که پرسش خود را تغییر دهیم.

<sup>4</sup>independent sets

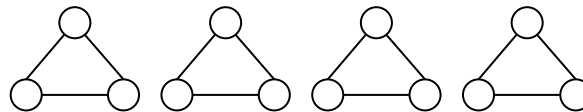


شکل ۳. هر زیر مجموعه از رأس‌های رنگ شده یک مجموعه مستقل است.

Figure 3: Each subset of colored vertices is an independent set.

تعریف ۷.۳ (مجموعه مستقل بیشین<sup>۵</sup>). یک مجموعه مستقل زمانی بیشین است که اگر هر رأسی از مجموعه مادر را به آن اضافه کنیم آنگاه دیگر مستقل نیست.

پرسش: حداکثر چند مجموعه مستقل بیشین در یک گراف وجود دارد؟ گراف  $n$  رأسی در شکل ۴ مثالی با  $3^{n/3}$  مجموعه مستقل بیشین است.



شکل ۴. گرافی با  $3^{n/3}$  مجموعه مستقل بیشین

Figure 4: A graph with  $3^{n/3}$  maximal independent sets.

در ادامه اثبات می‌کنیم که این مقدار بیشینه است.

قضیه ۸.۳. گراف  $n$  رأسی وجود ندارد که بیشتر از  $3^{n/3}$  مجموعه مستقل بیشین داشته باشد [۴].

اثبات. ابتدا دو نماد زیر را تعریف می‌کنیم:

نماد  $MIS(G)$  را به عنوان بیشین مجموعه مستقل در گراف  $G$  و نماد  $MIS(n)$  را به عنوان ماکزیمم مقدار بیشین مجموعه مستقل روی همه گراف‌های ممکن با  $n$  رأس در نظر می‌گیریم.  
شهود: مجموعه مستقل بیشین به ازای هر رأس  $v$  حداقل یک رأس از  $N[v]$ ، که  $N[v]$  شامل  $v$  و همه همسایه‌های  $v$  است، را شامل می‌شود. پس می‌توانیم بنویسیم:

$$MIS(G) \leq \sum_{u \in N[v]} MIS(G - N[v]) \implies MIS(G) \leq (d + 1)MIS(n - d - 1).$$

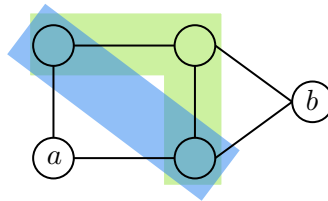
<sup>5</sup>maximal independent set

حال رابطه بازگشتی بدست آمده را به صورت زیر حل می‌کنیم تا یک کران بالا برای تعداد مجموعه های مستقل بیشین به دست آوریم.

$$\begin{aligned} MIS(n) &\leq \max_{0 \leq d} (d+1)MIS(n-d-1) \\ &\leq \max_{0 \leq d} (d+1)3^{(n-d-1)/3} \\ &\leq 3^{n/3} \max_{0 \leq d} (d+1)3^{(n-d-1)/3} \\ &\leq 3^{n/3} \times 1. \end{aligned}$$

□

**تعریف ۹.۳** (رئوس جداکننده کمین<sup>۶</sup>). دو رأس  $a, b$  را در گراف  $G$  در نظر بگیرید. جدا کننده کمین این دو رأس حداقل تعداد رأسی است که با برداشتن آن‌ها گراف به چند قسمت تقسیم می‌شود و دیگر مسیری بین  $a, b$  وجود ندارد. به عبارت دیگر هر مسیری که بین دو رأس  $a, b$  داشته باشیم از حداقل یک رأس این مجموعه می‌گذرد. اگر تعداد این رأس‌ها حداقل باشد آنگاه مجموعه جدا کننده کمین است.



شکل ۵. رأس های رنگ شده دو جدا کننده را نمایش می‌دهند که یکی از آن‌ها کمین است.

Figure 5: Colored vertices represent two separators, one of them is minimal.

**پرسش:** حداکثر چند جدا کننده کمین در گراف  $G$  با  $n$  رأس وجود دارد؟  
**پاسخ:** به سادگی می‌بینیم که پاسخ بدیهی  $O(2^n)$  دارد. ولی می‌خواهیم کران بالای دقیق‌تری مشخص کنیم.

**قضیه ۱۰.۳.** در یک گراف  $n$  رأسی حداکثر  $O(1/6181^n)$  جدا کننده کمین دارد [۴].

**لم ۱۱.۳.** اگر یک جدا کننده  $(u, v)$  کمین به نام  $S$  داشته باشیم آنگاه می‌توانیم  $S$  را توسط دو مجموعه مجزا  $C_u, C_v$  از گراف  $G - S$  به صورت یکتا مشخص کنیم که  $C_u$  و  $C_v$  به ترتیب مجموعه‌های شامل  $u$  و  $v$  هستند. در این صورت  $N(C_u) = N(C_v) = S$ .

**اثبات.** بر اساس تعریف رئوس جدا کننده می‌دانیم:

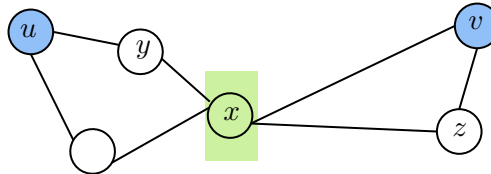
$$N(C_u) \subseteq S, \quad N(C_v) \subseteq S.$$

با توجه به کمین بودن  $S$  می‌دانیم:

$$\forall x \in S \quad \exists y \in C_u, \exists z \in C_v \quad \text{s.t. } xy, xz \in E(G),$$

<sup>۶</sup>minimal separator

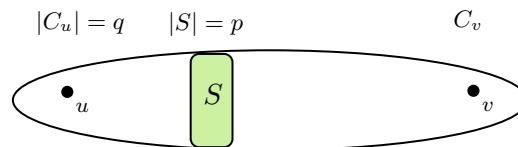
□ که این یعنی  $S \subseteq C_u$ ,  $S \subseteq C_v$  پس نتیجه می‌گیریم  $N(C_u) = N(C_v) = S$ . در غیر این صورت  $S$  کمین نیست.



شکل ۶. رأس جداکننده  $x$  یک همسایه مجزا  $y$  در  $C_u$  و یک همسایه  $z$  در  $C_v$  دارد.

Figure 6: A separating vertex  $x$  has a distinct neighbor  $y$  in  $C_u$  and a neighbor  $z$  in  $C_v$ .

حال با توجه به لم ۱۱.۳ یک کران برای مسئله حداکثر تعداد جداکننده در یک گراف  $n$  رأسی پیدا می‌کنیم. ابتدا فرض می‌کنیم که  $|C_u| \leq |C_v|$ ، که فرض معقولی است زیرا همیشه اندازه یکی از جزها کوچکتر یا مساوی دیگری است. اگر بخواهیم تعداد مجموعه‌های  $S$  با اندازه  $p$  را که می‌توانیم داشته باشیم محاسبه کنیم به مقدار  $\binom{n}{p}$  می‌رسیم ولی در لم ۱۱.۳ دیدیم که هر مجموعه  $S$  را می‌توانیم به صورت یکتا توسط هر جز  $C_u, C_v$  از گراف مشخص کنیم (شکل ۷). پس با پیدا کردن همسایگی‌های یکی از این جزها، عملاً می‌توانیم  $S$  را پیدا کنیم.



شکل ۷. افزار گراف براساس جداکننده  $S$

Figure 7: Partition of the graph based on separator  $S$ .

برای پیدا کردن مجموعه  $C_u$  با اندازه  $q$  به محاسبه  $\binom{n}{q}$  حالت مختلف نیاز داریم. پس می‌توانیم بنویسیم:

$$\max_{\substack{0 \leq p, q \leq n \\ p+q \leq n}} \min \left\{ \binom{n}{q}, \binom{n}{p} \right\},$$

که این یک مسئله بهینه‌سازی است که با حل آن به مقادیر بهینه  $p = q = n/3$  می‌رسیم، یعنی پاسخ نهایی به صورت  $\binom{n}{n/3} = O(1.88988^n)$  در می‌آید که بهتر از پاسخ بدیهی اولیه است، اما هنوز به مقدار قضیه ۱۰.۳ نرسیده است که با کمک لم بلاباس به دست می‌آید.

**اثبات.** (حل با استفاده از لم بلاباس) مسئله فوق همه شرایط لم بلاباس را ارضا می‌کند. اگر همه جداکننده‌های  $(u, v)$  کمین با اندازه  $p$  را  $S_1, S_2, \dots, S_m$  در نظر بگیریم به طوری که جزهای  $C_1, C_2, \dots, C_m$  از گراف  $G - S_i$  که رأس  $u$  را دارند با اندازه  $q$  باشند آنگاه طبق تعریفی که از مجموعه‌های جداکننده کمین داشتیم  $S_i \cap C_i = \emptyset$  و طبق لم ۱۱.۳ برای هر  $S_i$  یک  $C_i$  منحصر به فرد وجود دارد چون  $C_i$  توسط همسایه‌های  $S_i$  مشخص می‌شود. حال اگر  $C_i$  را داشته باشیم و هر  $S_j$

دیگری را انتخاب کنیم،  $C_i \cap S_j \neq \emptyset$  برای همه  $i \neq j$ . پس طبق لم بلاباس داریم

$$m \leq \binom{p+q}{p},$$

و در نهایت

$$\max_{\substack{p+q \leq n \\ p, q \leq n}} \min_{\substack{p+q \leq n \\ p, q \leq n}} \left\{ \binom{p+q}{p} \right\} \xrightarrow{p=q=n/3} \binom{2n/3}{n/3} \leq 2^{2n/3} = O(1/6181^n).$$

□

**قضیه ۱۲.۳.** یک گراف حداکثر  $O(1/6181^n)$  جدا کننده کمین  $u, v$  با اندازه  $p$  و جزیهای  $C_n$  با اندازه  $q$  دارد. با توجه به اینکه  $u, v \in V(G)$  و  $1 \leq p, q \leq n$  پس در نهایت تعداد کل حالتها حداکثر همان

$$O(n^2 \times n^2 \times 1/6181^n) = O(1/6181^n), \quad \forall$$

است.

**۴.۳. مجموعه معرف<sup>۸</sup>.** فرض می‌کنیم دو خانواده  $A$  و  $B$  از زیر مجموعه‌های با اندازه  $a = b = 2$  از مجموعه مادر  $X$  به صورت زیر داریم:

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$A = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}\}$$

$$B = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}\}$$

حال می‌خواهیم بررسی کنیم که آیا این دو مجموعه شرایط لم بلاباس را ارضا می‌کنند.

**مثال ۱۳.۳.** مجموعه  $\{1, 2\}$  را در  $A$  انتخاب می‌کنیم، برای این مجموعه، سه مجموعه  $\{3, 4\}$ ،  $\{3, 5\}$ ،  $\{4, 5\}$  در  $B$  را می‌توان در نظر گرفت که با مجموعه انتخاب شده اشتراکی ندارند ولی با بقیه زیر مجموعه‌ها در  $A$  اشتراک دارند. حال اگر به هریک از این سه زیر مجموعه به تنهایی نگاه کنیم می‌بینیم که مجموعه  $\{3, 4\}$  در  $B$  خود یک جفت برای مجموعه  $\{2, 5\}$  در  $A$  است. به همین ترتیب برای  $\{3, 5\}$  جفت  $\{1, 4\}$  و  $\{4, 5\}$  خود جفت  $\{2, 3\}$  است. پس اگر مجموعه  $\{2, 5\}$  از  $A$  حذف شود باز هم زیر مجموعه‌های باقی مانده شرایط بالا را ارضا می‌کنند. این کار را تا زمانی ادامه می‌دهیم که هیچ زیر مجموعه‌ای قابل حذف نباشد، آنگاه می‌توانیم ادعا کنیم  $A$  کمین است و شرایط لم بلاباس ارضا شده است.

از مثال ۱۳.۳ می‌بینیم که اگر خانواده  $F$  از مجموعه‌ها شامل  $A_1, A_2, \dots, A_m$  با اندازه  $a$  داشته باشیم آنگاه زیر مجموعه  $A_i \in F$  ضروری است اگر  $B_i$  با اندازه  $b$  وجود داشته باشد به طوری که  $A_i \cap B_i = \emptyset$  و  $A_j \cap B_i \neq \emptyset$  برای هر  $A_j \in F$ . اگر همه زیر مجموعه‌های  $F$  ضروری باشند آنگاه می‌توانیم از لم بلاباس استفاده کنیم.

**تعریف ۱۴.۳** (مجموعه  $b$  معرف  $F$ ). اگر خانواده‌ای از مجموعه‌ها با اندازه  $a$  باشد، مجموعه  $b$  معرف  $F$  است اگر برای هر مجموعه  $B$  با اندازه  $b$ ، مجموعه  $A \in F$  ای که  $A \cap B = \emptyset$  وجود داشته باشد آنگاه وجود دارد  $A' \in F'$  به طوری که  $A' \cap B' = \emptyset$ .

**لم ۱۵.۳** (نتیجه لم بلاباس). برای هر  $F$  وجود دارد  $F' \subseteq F$  با اندازه حداکثر  $\binom{a+b}{b}$  که  $F'$  یک مجموعه  $b$  معرف  $F$  است.

<sup>7</sup>golden ratio    <sup>8</sup>representative set

```

For every  $A_i$  in  $F$ 
    check if  $F \setminus A_i$  has a hitting set  $B$  of size  $b$ 
    if not:
        delete  $A_i$ 
    else: //  $B$  is found
         $B_i := B$ 
    
```

شکل ۸. شبه کد الگوریتم ارائه شده در قضیه ۱۷.۳

Figure 8: Pseudocode of the presented algorithm in the theorem 3.17

**مسئله:** چطور زیرمجموعه‌ی  $F'$  بیان شده در لم ۱۵.۳ محاسبه کنیم؟ همان‌طور که در تعریف ۱۴.۳ بیان شد برای هر خانواده  $F$  مجموعه  $F'$  با شرایط ذکر شده وجود دارد اما پیدا کردن این مجموعه مشکل است زیرا ما خانواده  $B$  را نمی‌شناسیم پس نمی‌توانیم بگوییم کدام مجموعه‌ها را باید نگه داریم و کدام را باید حذف کنیم تا شرایط  $F'$  ارضا شود. حال به بررسی دو الگوریتم می‌پردازیم که ما را در پیدا کردن مجموعه‌های معرف یاری می‌رساند.

### ۵.۳. استفاده از الگوریتم مسئله‌ی $d$ -تلاقی<sup>۹</sup>.

**تعریف ۱۶.۳** (مسئله  $d$ -تلاقی). فرض کنیم مجموعه مادر  $U$  و یک خانواده از مجموعه‌ها با اندازه حداکثر  $d$  به نام  $F$  که عضو  $U$  است و همین‌طور عدد صحیح  $k$  را داریم. آیا زیر مجموعه  $X$  از  $U$  با اندازه  $k$  که با هر یک از اعضای  $F$  اشتراک داشته باشد، وجود دارد؟

**قضیه ۱۷.۳.** مسئله  $d$ -تلاقی در زمان  $O(d^k |F|)$  قابل حل است [۷].

**اثبات.** با استفاده از درخت انشعاب همه‌ی مجموعه‌های  $F$  را بررسی می‌کنیم. در هر مجموعه عضو  $F$  می‌دانیم حداقل یک عضو وجود دارد که در  $X$  نیز وجود دارد، زیرا همه این مجموعه‌ها با  $X$  اشتراک دارند. پس برای هر مجموعه  $d$  انشعاب داریم که بررسی کنیم با انتخاب آن رأس به‌عنوان عضوی از  $X$  چه اتفاقی می‌افتد. پس فاکتور انشعاب در این درخت انشعاب  $d$  است و ارتفاع درخت به اندازه مجموعه  $X$  یعنی حداکثر  $k$  است. پس یعنی اندازه درخت  $O(d^k)$  است که با توجه به محاسباتی که برای هر رأس انجام می‌دهیم که چند جمله‌ای نسبت به اندازه مجموعه انتخاب شده است در نهایت پیچیدگی زمانی راه حل داده شده  $O(d^k |F|)$  است. □

الگوریتم به این صورت کار می‌کند که برای هر مجموعه دلخواه  $A$  از خانواده مجموعه‌های  $F$  بررسی می‌کنیم که آیا می‌توانیم یک  $d$ -تلاقی در  $F/A$  پیدا کنیم. به عبارت دیگر با تمام زیر مجموعه‌های دیگر اشتراک داشته باشد ولی با خود  $A$  اشتراک نداشته باشد که این همان تعریف مجموعه معرف است. شبه کد الگوریتم ذکر شده در شکل ۸ است. پیچیدگی زمانی این الگوریتم  $O(|F|^2 a^b)$  است که چند جمله‌ای نیست زیرا  $|F|$  می‌تواند نمایی باشد و در کل پیچیدگی زمانی بالایی دارد. پس به دنبال راه حل بهتری می‌گردیم.

### ۶.۳. استفاده از خانواده $k$ -جامع<sup>۱۰</sup>.

<sup>۹</sup>  $d$ -hitting set <sup>۱۰</sup>  $K$ -universal family

```

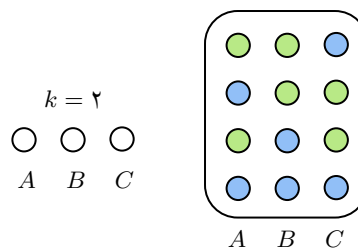
Mark all  $f_i$ 's as unused
set  $F' = \{\}$ 
For every  $A_i$ , if some unused  $f_j$  colors  $A_i$  green
    Add  $A_i$  to  $F'$ 
    mark  $f_j$  as used
output  $F'$ 
    
```

شکل ۱۰. شبه کد ساخت یک خانواده  $a + b$ -جامع

Figure 10: Pseudocode for constructing an  $a + b$ -universal family.

تعریف ۱۸.۳ (خانواده  $k$ -جامع). [۷] یک خانواده  $k$ -جامع برای مجموعه  $U$  با اندازه  $n$  یک مجموعه از توابع  $f_1, \dots, f_t$  که  $f_i : U \rightarrow \{Blue, Green\}$  است به طوری برای هر مجموعه  $S$  با اندازه  $k$  و هر نحوه رنگ آمیزی  $S$ ، تابع  $f_i$  ای وجود داشته باشد که  $S$  را به همان نحو رنگ آمیزی کند.

مثال ۱۹.۳. شکل ۹ را در نظر بگیرید. در اینجا یک خانواده جامع سه عضوی داریم و مقدار  $k$  برابر با ۲ است. مربع رنگ آمیزی شده خانواده ۲-جامع است زیرا اگر هر دو عضوی را از مجموعه جامع انتخاب کنیم و یک رنگ آمیزی دلخواه برای آنها در نظر بگیریم، آنگاه ردیف یا به عبارت دیگر عضوی در خانواده ۲-جامع وجود دارد که این دو عضو را به شکل مذکور رنگ آمیزی کند. به عنوان مثال اگر دو عنصر  $A$  و  $C$  را انتخاب کنیم و به ترتیب برای آنها رنگ های آبی و سبز را در نظر بگیریم. می بینیم که در ردیف دوم مربع چنین ترکیب رنگی را پیدا می کنیم.



شکل ۹. مثالی از یک خانواده ۲-جامع

Figure 9: An example of a 2-universal family.

قضیه ۲۰.۳. برای هر  $k$ ، یک خانواده  $k$ -جامع با اندازه  $2^{k+O(k)} \log n$  در زمان  $2^{k+O(k)} n \log n$  می توان ساخت [۶].

□

اثبات. رجوع کنید به [۶].

حال سعی می کنیم با استفاده از قضیه ۲۰.۳ مجموعه های معرف را پیدا کنیم. فرض کنید خانواده ای از مجموعه ها هر کدام با اندازه  $a$  به نام  $F = \{A_1, \dots, A_m\}$  و همین طور عدد صحیح  $b$  را داریم. هدف ساخت یک خانواده  $(a + b)$ -جامع به صورت  $f_1, \dots, f_t$  که  $t = 2^{a+b+O(a+b)} \log n$  است. الگوریتم شکل ۱۰ را اجرا می کنیم.

لم ۲۱.۳. خروجی این الگوریتم حداکثر اندازه  $2^{a+b+O(a+b)} \log n$  دارد.

اثبات. از آنجایی که داریم برای هر تابع  $f_i$  یک مجموعه  $A_j$  اضافه میکنیم و تعداد  $f_i$  ها  $2^{a+b+o(a+b)}$  است پس اندازه خروجی حداکثر  $2^{a+b+o(a+b)} \log n$  است. □

لم ۲۲.۳.  $F'$  به دست آمده  $b$ -معرف  $F$  است.

اثبات. فرض کنیم  $\exists A_i \in F$  و  $B$  به طوری که  $A \cap B = \emptyset$ . حال باید نشان دهیم مجموعه‌ای در  $F'$  وجود دارد که اشتراک آن نیز با  $B$  تهی است. از آنجایی که می‌دانیم خانواده  $a + b$  - جامع هست پس  $f_j$  ای وجود دارد به طوری که  $A_i$  را سبز و  $B$  را آبی رنگ‌آمیزی می‌کند. اگر  $A_i \notin F'$  یعنی  $f_j$  قبل از اینکه بخواهیم  $A_i$  را بررسی کنیم استفاده شده است که این یعنی  $f_j$  یک  $A_j \in F'$  دیگری را سبز می‌کند. پس در نهایت داریم که  $f_j$ ،  $A_j$  را سبز و  $B$  را آبی رنگ‌آمیزی می‌کند، پس  $A_j \cap B = \emptyset$ . بنابراین  $F'$  یک مجموعه معرف است و اثبات کامل می‌شود [۷]. □

زمان اجرای این الگوریتم  $|F| 2^{a+b} \log n$  است. لازم به ذکر است که این الگوریتم باز هم نسبت به  $|F|$  کارایی چند جمله‌ای ندارد ولی کاربردهای آن بیشتر است، به ویژه زمانی که  $a$  و  $b$  تقریباً با هم مساوی هستند.

تبصره ۲۳.۳. بهترین الگوریتم شناخته شده برای محاسبه مجموعه‌های معرف در [۷] ارائه شده و خروجی با اندازه  $2^{O(a+b)} (a+b)$  و کارایی  $|F| \left(\frac{a+b}{b}\right)^b 2^{O(a+b)}$  دارد. ولی به مراتب از دو الگوریتم بررسی شده پیچیده‌تر است.

#### ۴. نتیجه‌گیری

در این مقاله پس از بررسی انواع حالات لم و برهان موجود برای لم بلاباس، برهان جدیدی مبتنی بر احتمال برای لم ارائه شد. سپس کاربردهای جالب این لم در مسائلی مانند خانواده منفصل، گراف‌های  $k$  یال بحرانی، حداقل جداکننده در گراف‌ها و مجموعه‌های معرف بررسی شد.

#### مراجع

- [1] B. Bollobás, On generalized graphs, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **16** (1965) 447–452.
- [2] B. Bollobás, *The art of mathematics. Coffee time in Memphis*, Cambridge University Press, New York, 2006.
- [3] C. Bey, Polynomial LYM inequalities, *Combinatorica*, **25** no. 1 (2005) 19–38.
- [4] F. V. Fomin and P. Kaski, Exact exponential algorithms, *Communications of the ACM*, **56** no. 3 (2013) 80–88.
- [5] L. Lovász, Flats in matroids and geometric graphs, *Combinatorial surveys (Proc. Sixth British Combinatorial Conf.)*, Academic Press, London-New York, (1977) 45–86.
- [6] M. Naor, L. J. Schulman and A. Srinivasan, Splitters and near-optimal derandomization, *In Proceedings of IEEE 36th Annual Foundations of Computer Science*, (1995) 182–191.
- [7] M. Cygan, F. V. Fomin, Ł. Kowalik, D. Lokshtanov, D. Marx, M. Pilipczuk, M. Pilipczuk and S. Saurabh, *Parameterized algorithms*, Springer (2015).

### محسن علمبردار میبدی

گروه ریاضی کاربردی و علوم کامپیوتر، دانشکده ریاضی و آمار، دانشگاه اصفهان، اصفهان، ایران.  
m.alambardar@sci.ui.ac.ir

محسن علمبردار میبدی متولد فروردین ماه ۱۳۶۵ در شهر یزد است. وی در سال ۱۳۸۳ وارد مقطع کارشناسی رشته علوم کامپیوتر دانشگاه یزد شد و در سال ۱۳۸۷ وارد مقطع کارشناسی ارشد و در سال ۱۳۹۳ وارد مقطع دکتری در این رشته شد. از سال ۱۳۹۸ به عنوان استادیار گروه ریاضی کاربردی و علوم کامپیوتر در دانشگاه اصفهان مشغول به فعالیت است.



### افشان هاشمی

گروه کامپیوتر و علوم اطلاعات، دانشگاه لیشوپینگ، لیشوپینگ، سوئد.  
afsha۷۱۹@student.liu.se

افشان هاشمی متولد تیر ماه سال ۱۳۸۰ در شهر اصفهان است. وی در سال ۱۳۹۸ وارد مقطع کارشناسی رشته علوم کامپیوتر دانشگاه اصفهان شد و در سال ۱۴۰۲ وارد مقطع کارشناسی ارشد رشته علوم کامپیوتر دانشگاه لیشوپینگ شد.

