

CONTINUOUS-ATTRACTOR IN RABINOVICH-FABRICANT SYSTEM AND ITS NOVEL GENERALIZED MODEL

MOHAMMAD HADI MOSLEHI*  AND SEYED MOHAMMAD AMIN KHATAMI 

ABSTRACT. The aim of this work is the numerical study of the Rabinovich-Fabrikant system and its generalized model, which shows the occurrence of very rich dynamic behaviors with the interaction of three parameters of the generalized system. In particular, we observe the period-doubling bifurcation phenomenon leading to chaos, which has rarely been reported in previous works in the Rabinovich-Fabrikant system. The complex dynamic behaviors of the system are investigated by using the Lyapunov spectrum, the parameters dependent bifurcation diagram and different sections of the phase space. This study is based on the numerical solution of differential equations and their numerical bifurcation analysis using Matlab software. The obtained results are new, because the generalization of the Rabinovich-Fabrikant system of the current study was proposed and studied for the first time. The generalized model describes the three-mode interaction. It can be used to simulate systems in radio and electronics engineering in which there is a three-mode interaction and which include cubic nonlinear terms. In addition, although the Rabinovich-Fabrikant systems simulate systems of a physical nature, and in this regard, the coefficients embedded in them must be positive, its highly nonlinear and chaotic nature, due to the presence of third-order sentences, gives them a unique quality to be applied in secure communication. Resultantly, its artificial generalization with the use of negative parameters which adds to the complexity of its rich dynamics, is of particular importance.

Keywords: Rabinovich-Fabrikant system, generalized Rabinovich-Fabrikant system, chaotic attractors, Lyapunov exponents, bifurcation diagram.

Communicated by Saeid Maghsoudi.

Article Type: Research Paper.

*Corresponding author.

Received: 29-08-2023, Accepted: 20-01-2024, Published Online: 19-04-2024.

Cite this article: M. H. Moslehi and S. M. A. Khatami, Continuous-attractor in Rabinovich-Fabrikant system and its novel generalized model, *Mathematics and Society*, **9** no. 1 (2024) 1–32.

<http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.138938.1601> .

1. Introduction

A dynamic system is classified into two types, discrete and continuous, in terms of time evolution. In this paper, we will look at a particular continuous dynamical system known as the "Rabinovitch-Fabrikant system", which was invented in 1979 by two theoretical physicists, Mikhail Rabinovitch and Anatoly Fabrikant [1]. This system is actually a simplification of a complex nonlinear parabolic equation that models different physical systems such as Tollmien-Schlichting waves in hydrodynamic flows, wind waves on water, Langmuir waves in plasma. Having five equilibrium points, it is not topologically equivalent to many classical systems such as the Lorenz and Chen systems (with three equilibrium points), Rössler system (with two equilibrium points) and the like. In the following, we will call this system the RF system, for short.

There are several reasons why this system has been noticed. One is the fact that it models a physical system and, therefore, is not a synthetic model and can be used to model numerous physical phenomena. Another reason is that due to its strong nonlinearity (due to the presence of third-order terms in its mathematical model), a rigorous mathematical analysis cannot be performed on it, hence, the system may show new and interesting properties that have not yet been reported. At the same time, it creates serious challenges for the numerical methods of solving ordinary differential equations.

The mathematical model of the Rabinovich-Fabrikant (RF) system is described by the following equations:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 (x_3 - 1 + x_1^2) + ax_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1 (3x_3 + 1 - x_1^2) + ax_2 \\ \frac{dx_3}{dt} &= -2x_3 (b + x_1x_2) \end{aligned}$$

In the Rabinovitch-Fabrikant (RF) system modeled by the system of ordinary differential equations (1.1), $a > 0$ and $b \in \mathbb{R}$ is the bifurcation parameter.

Since it is currently impossible to fully analyze this system mathematically, most of the research is based on numerical and computer analysis. Following this common practice, we will also, in this paper, have an approach based on numerical analysis.

2. Main Results

Different dedicated numerical methods for ODEs, implemented in different software packages, might give different results for the same parameters values and initial conditions. system (1.1) by Danca et al. [2, 3, 4] has been studied. By numerical analysis, they showed that this system exhibits unusual and very rich dynamics, including multistability. Here, we obtain their results with a different numerical

approach. They used the 3-step predictor–corrector Local Iterative Linearization (LIL) method, which is an implicit 3-step method [5].

In this paper, to calculate the Lyapunov exponents, we have used the MATDS software package applicable in Matlab software by adding codes to get the desired output, and to solve **ODE**, the *ode45* solver implemented in this software with relative error $RelTol = 10^{-7}$ and absolute error $AbsTol = 10^{-7}$ are used. The step length used in numerical methods is also considered to be $h = 10^{-6}$.

2.1. Generalized Rabinovitch-Fabricant system. Recently, a generalization of the system (1.1) has been presented and numerically investigated as follows [6, 8]:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= [p(x_1^2 + x_3) + q(-x_2^2 + 3x_3) - 1], x_2 + ax_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= [p(-x_1^2 + 3x_3) + q(x_2^2 + x_3) + 1], x_1 + ax_2 \\ \frac{dx_3}{dt} &= -2x_3(b + (p + q)x_1x_2).\end{aligned}$$

This system becomes the system (1.1) with $p = 1$ and $q = 0$. In this section, we introduce the following system as a generalization of the system (1.1):

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_2(x_3 - 1 + x_1^2) + ax_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1(3x_3 + 1 - x_1^2) + cx_2 \\ \frac{dx_3}{dt} &= -2x_3(b + x_1x_2)\end{aligned}\tag{2.1}$$

This system becomes system (1.1) with $c = a$. This generalization is simpler than generalization (2.1), but it includes the same results in the detection of chaos and especially the process of converting the bifurcation of periodic period to chaos. According to the relationship

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = (2x_1x_2 + a) + (c) + (-2x_1x_2 - 2b) = a + c - 2b,$$

The system (2.1) is dissipative whenever $a + c - 2b < 0$.

We fix the parameters $a = -1$ and $b = -0.1$ and consider c as the branching parameter. Therefore, with $c < 0.8$, the system will be dissipative and can be chaotic. Considering that system, (1.1) has a special application in encryption and secure communications, generalizing the system and adding to its complexity will achieve these goals and reduce the possibility of decryption and making communications unsafe. In the following, we examine the complex dynamics of the system for $a = -1$, $b = -0.1$ and some values of $c < 0.8$.

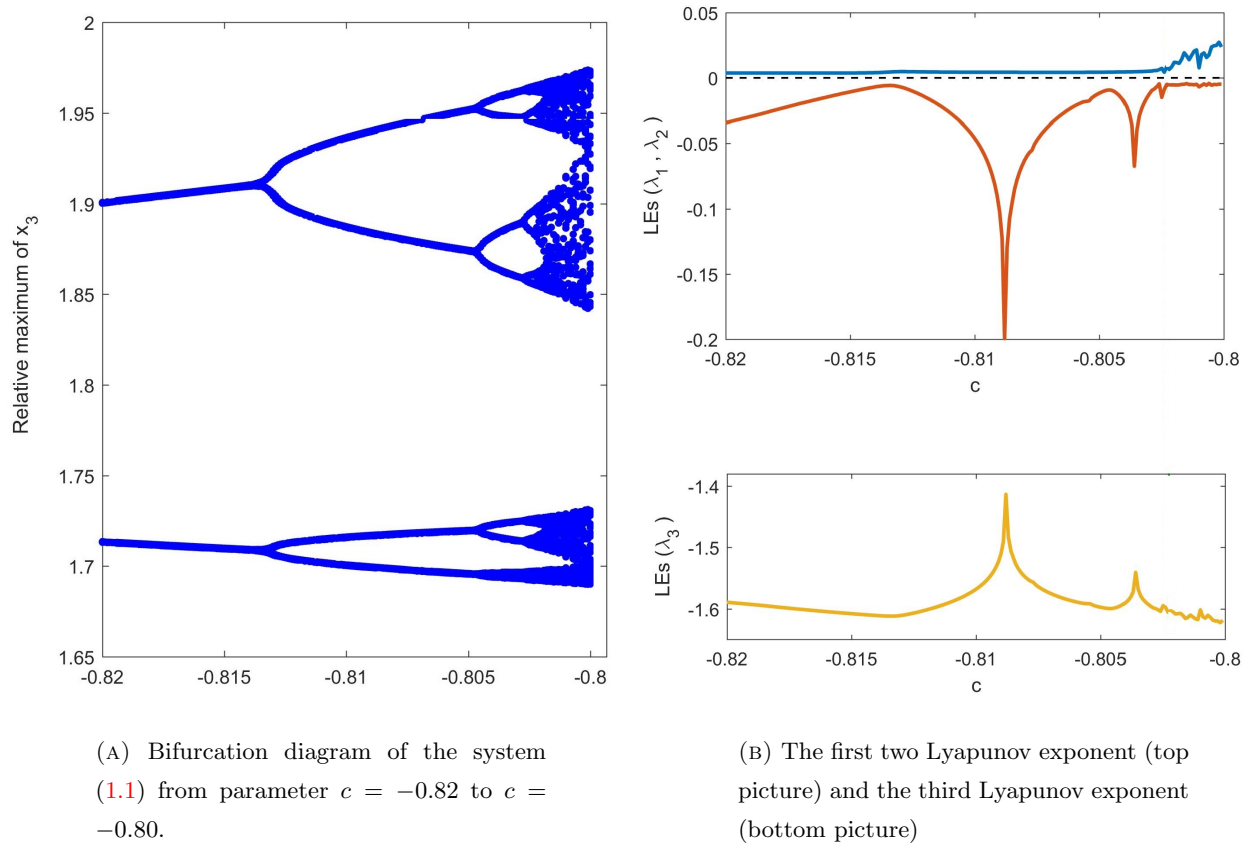
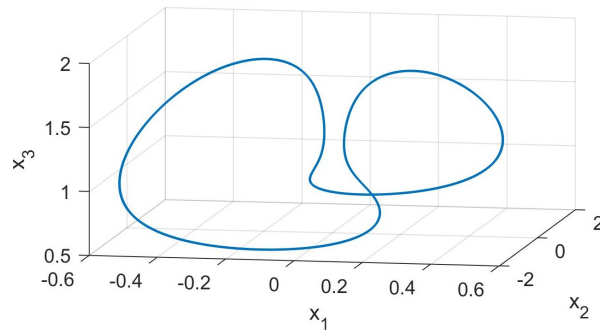


FIGURE 1. Bifurcation diagram and Lyapunov exponents of system (2.1).

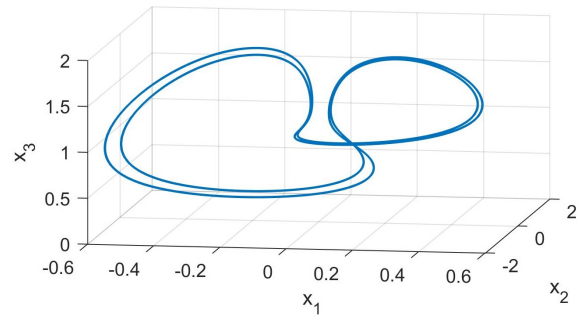
2.1.1. Period-doubling bifurcation route to chaos. By keeping $a = -1$ and $b = -0.1$ and changing c on the interval $[-0.82, -0.80]$, the bifurcation diagram and lyapunov exponents of the system (2.1), in the figure 1 are drawn. It can be seen that for $c \in [-0.8200, -0.8030]$ the system has two negative lyapunov exponents and one zero lyapunov exponent, and in this interval we have a Periodic Solutions, also for $c \in [-0.8030, -0.8000]$ We have a negative lyapunov exponent, a zero lyapunov exponent and a positive lyapunov exponent, so the system will be chaotic.

The bifurcation diagram drawn in figure 1a shows a period doubling route to chaos. In dynamical systems theory, a period-doubling bifurcation occurs when a slight change in a system's parameters causes a new periodic trajectory to emerge from an existing periodic trajectory. the new one having double the period of the original. This process is called period doubling, and its continuous repetition is one of the ways leading to chaos

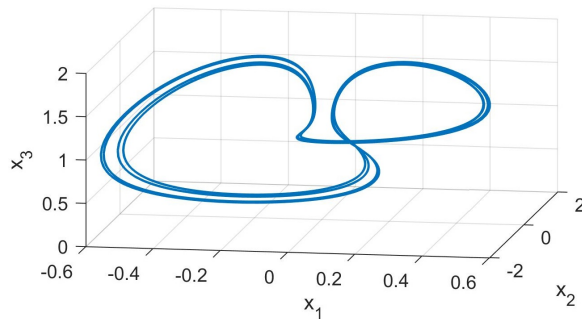
The bifurcation process of periodic period leading to chaos can be seen in figure 2.



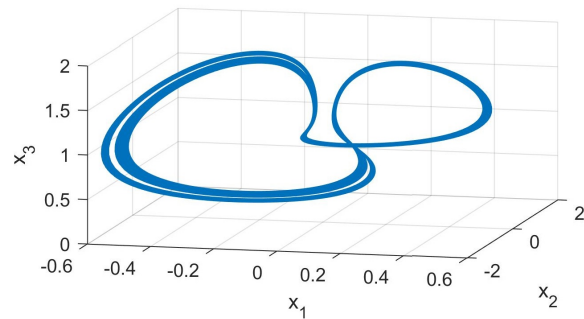
(A) $c = -0.82$. periodic solution with period 14.2.



(B) $c = -0.806$. periodic solution with period 28.4.



(C) $c = -0.8034$. periodic solution with period 56.7.



(D) $c = -0.8015$. Chaotic movement.

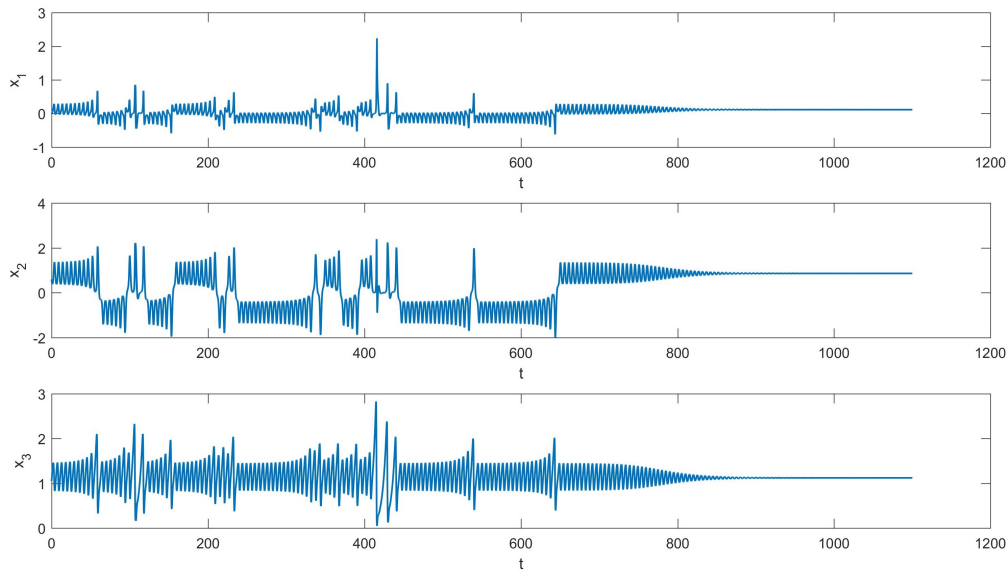
FIGURE 2. The phase space of the system (2.1) for $a = -1$, $b = -0.1$ and different values of c , which shows the process of converting period-doubling bifurcation to chaos.

2.1.2. transient chaos. A chaotic but transient behavior is observed in figure 3. As the diagram in figure 3a shows, this chaotic behavior lasts significantly, but after some time it disappears and leads to a fixed point.

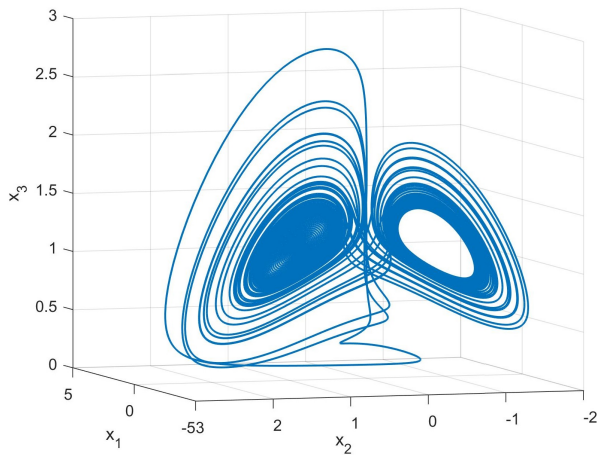
2.1.3. Coexistence of attractors. Figure 4 depicts the coexistence of some absorbers. Relevant details are specified in the figure captions.

3. Conclusions

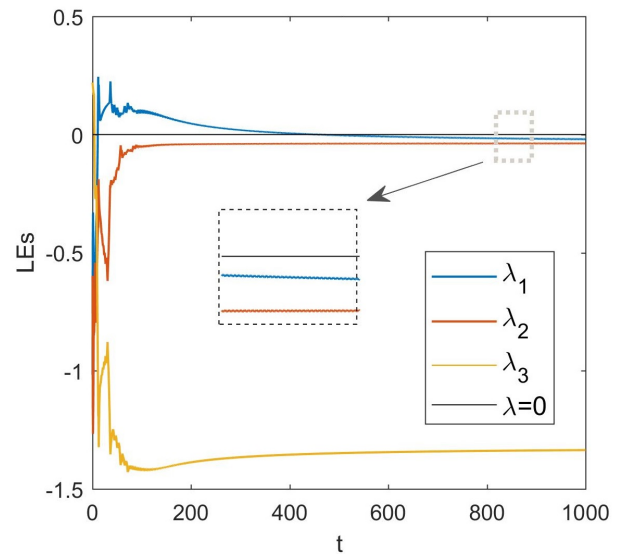
In this article, we studied the Rabinovich-Fabricant system and its generalized model numerically. For the generalized system, we determined the occurrence of very rich and complex dynamic behaviors with the interaction of three parameters. In particular, we showed the bifurcation phenomenon of



(A) The time response of state variables of the system (2.1).



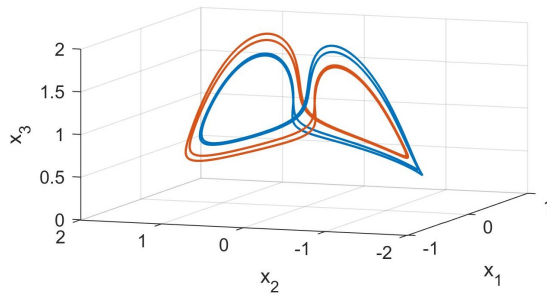
(B) The phase space of the system (2.1).



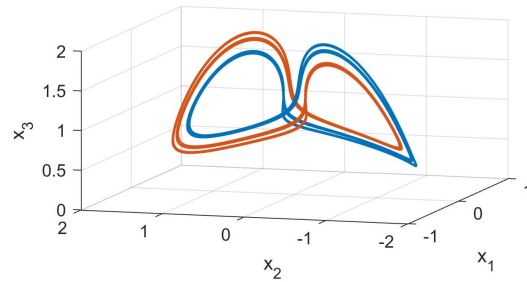
(C) Lyapunov expressions of the system (2.1).

FIGURE 3. Transient chaos in the (2.1) system for $a = -1$, $b = -0.1$ and $c = -0.5854$.

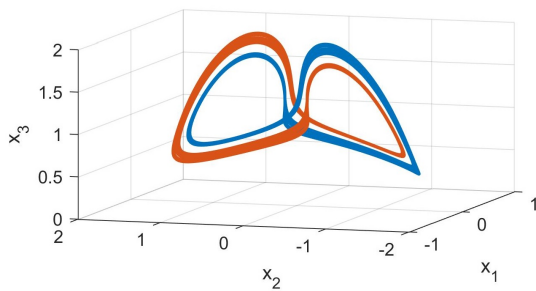
period doubling leading to chaos, which was not reported before in the Rabinovitch-Fabricant system. We have seen that by changing the bifurcation parameter in a very small interval, the evolution



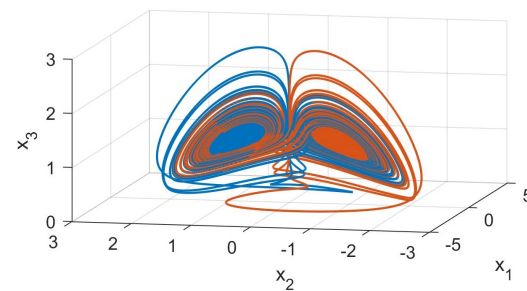
(A) $c = -0.806$. Coexistence of two periodic attractors with period 14.2.



(B) $c = -0.8034$. Coexistence of two periodic attractors with period 28.4.



(C) $c = -0.8011$. Coexistence of two chaotic attractors.



(D) $c = -0.5854$. Coexistence of two transient chaotic attractors.

FIGURE 4. Coexistence of attractors for $a = -1$, $b = -0.1$ and some values of c .

process of the system, with the continuous repetition of bifurcation bifurcation of periodic period, ends from periodic solution to chaos. The complex dynamic behaviors of the system were investigated using the Lyapunov exponents, the bifurcation diagram depending on the parameters and different sections of the phase space. This study was based on the numerical solution of differential equations and their numerical bifurcation analysis using Matlab software. The obtained results are new, as this generalization of the Rabinovitch-Fabrikant system is proposed for the first time. The generalized model can be used to simulate systems in radio and electronics engineering where there is a three-mode interaction and which include third-order nonlinear terms. The Rabinovitch-Fabricant system simulate systems of a physical nature, and in this regard, the coefficients embedded in it must be positive, but its highly nonlinear and chaotic nature, arising from the presence of third-order sentences, gives them a unique quality to be applied in secure communication. Therefore, its artificial generalization, using negative parameters, which itself adds to the complexity of its rich dynamics, is of particular importance.

REFERENCES

- [1] M. I. Rabinovich and A. L. Fabrikant, Stochastic self-modulation of waves in nonequilibrium media, *J. Exp. Theor. Phys.*, **77** (1979) 617–629.
- [2] M. F. Danca, Hidden transient chaotic attractors of Rabinovich–Fabrikant system, *Nonlinear Dynam.*, **86** no. 2 (2016) 1263–1270.
- [3] M. F. Danca, M. Feckan, N. Kuznetsov and G. Chen, Looking more closely at the Rabinovich–Fabrikant system, *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, **26** no. 2 (2016) 21 pp.
- [4] M. F. Danca and N. Kuznetsov, Hidden strange nonchaotic attractors, *Mathematics*, **9** no. 6 (2021).
- [5] M. F. Danca, A multistep algorithm for ODEs, *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. B Appl. Algorithms*, **13** no. 6 (2006) 803–821.
- [6] S. P. Kuznetsov and L. V. Turukina, Generalized Rabinovich–Fabrikant system: equations and its dynamics, *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, **30** no. 1 (2022) 7–29.
- [7] S. P. Kuznetsov and L. V. Turukina, Generalized Rabinovich–Fabrikant system: equations and its dynamics, *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, **30** no. 1 (2022) 7–29.
- [8] L. V. Turukina, Dynamics of the Rabinovich–Fabrikant system and its generalized model in the case of negative values of parameters that have the meaning of dissipation coefficients, *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, **30** no. 6 (2022) 685–701.
- [9] M. Delkhosh, Introduction to Fractals and Fractal Dimensions, *Mathematics and Society*, **2** no. 1 (1396) 1–23. [In Persian]
- [10] E. Zarei Zefreh, An image encryption algorithm based on the S_n permutation group and chaotic functions, *Journal of Electronic and Cyber Defence*, **3** no. 8 (1399) 139–150. [In Persian]

Mohammad Hadi Moslehi

Department of Mathematics, Payame Noor University (PNU), P.O. Box 19395-3697, Tehran, Iran

Email: mh_moslehi@pnu.ac.ir

Seyed Mohammad Amin khatami

Department of Mathematics, Birjand University of Technology, Birjand, Iran

Email: khatami@birjandut.ac.ir

جاذب‌های پیوسته در سامانه‌ی رابینوویچ-فابریکانت و مدل تعمیم‌یافته جدید آن

محمدهادی مصلحی*^{ID} و سید محمد امین خاتمی^{ID}

چکیده. هدف از این کار، مطالعه عددی سامانه‌ی رابینوویچ-فابریکانت و مدل تعمیم‌یافته آن است که وقوع رفتارهای پویای بسیار غنی و پیچیده را با برهم‌کنش سه پارامتر سامانه‌ی تعمیم‌یافته، نشان می‌دهد. به‌ویژه، پدیده انشعاب مضاعف‌سازی دوره تناوب منتهی به آشوب را مشاهده می‌کنیم که در کارهای قبلی به‌ندرت در سامانه‌ی رابینوویچ-فابریکانت گزارش شده‌اند. رفتارهای پیچیده پویای سامانه با استفاده از طیف نمای لیاپانوف، نمودار انشعاب وابسته به پارامترها و مقاطع مختلف از فضای فاز بررسی می‌شوند. این مطالعه براساس حل عددی معادلات دیفرانسیل و تجزیه و تحلیل انشعاب عددی آن‌ها با استفاده از نرم‌افزار متلب است. نتایج به‌دست آمده جدید هستند، زیرا تعمیم مطالعه حاضر از سامانه‌ی رابینوویچ-فابریکانت، برای اولین بار است که مطرح گردیده و مورد بررسی قرار گرفته است. مدل تعمیم‌یافته، تعامل سه حالت را توصیف می‌کند و می‌تواند برای شبیه‌سازی سامانه‌هایی در مهندسی رادیو و الکترونیک که در آن‌ها یک تعامل سه‌حالت وجود دارد و شامل جملات غیرخطی مرتبه سه هستند، مورد استفاده قرار گیرد. به‌علاوه، هر چند سامانه‌های رابینوویچ-فابریکانت، سامانه‌هایی با ماهیت فیزیکی را شبیه‌سازی می‌کنند و لذا، ضرایب تعبیه‌شده در آن‌ها باید مثبت باشند، اما ماهیت به‌شدت غیرخطی و آشوبناک آن‌ها، به‌دلیل وجود جملات مرتبه سوم، کاربرد آن‌ها را در ارتباطات ایمن از اهمیت خاصی برخوردار کرده و به‌همین علت، تعمیم مصنوعی آن با استفاده از پارامترهای منفی، که بر پیچیدگی پویای غنی آن می‌افزاید، بسیار قابل توجه است.

۱. مقدمه

در سال‌های اخیر، در زمینه‌ای از ریاضیات به نام «سامانه‌های پویا»، اتفاقات شگفت‌انگیزی رخ داده است. در واقع، انفجاری از علاقه به این زمینه علمی در جامعه ریاضی به‌وجود آمده و دانشمندان و مهندسان به قدرت و زیبایی روش‌های هندسی و کیفی توسعه‌یافته در آن پی‌برده‌اند و مهم‌تر از آن، آن‌ها توانسته‌اند این روش‌ها را در تعدادی از مسائل مهم غیرخطی فیزیکی و شیمیایی به‌کار برند؛ نتایج واقعاً هیجان‌انگیز بوده‌اند. سامانه‌هایی که زمانی از نقطه نظر تحلیلی کاملاً غیرقابل حل به‌نظر می‌رسیدند، اکنون می‌توانند به‌راحتی به‌معنای هندسی یا کیفی درک شوند. گرافیک رایانه‌ای در اینجا نقش بسیار مهمی ایفا کرده است. اکنون، به‌جای یافتن راه‌حل‌های خاص برای سامانه‌های پویا (که تقریباً همیشه ناممکن است)، گرافیک رایانه‌ای به ما این امکان را داده است که رفتار پویا را به‌صورت هندسی مشاهده کنیم. علاوه بر این، ظاهر فوق‌العاده زیبا و پیچیده اشیاء هندسی مانند مجموعه ماندلبروت، مجموعه ژولیا و سایر فرکتال‌ها، واقعاً علاقه را در این زمینه دوجندان کرده است. صفت دینامیک به این واقعیت اشاره دارد که این سامانه‌ها در طول زمان تکامل می‌یابند که در بسیاری از زمینه‌ها مانند فیزیک، نجوم، زیست‌شناسی،

عبارات و کلمات کلیدی: سامانه‌ی رابینوویچ-فابریکانت، سامانه‌ی رابینوویچ-فابریکانت تعمیم‌یافته، جاذب‌های آشوبناک، ناهای لیاپانوف، نمودار انشعاب، دبیرتخصصی رابط: سعید مقصودی

نوع مقاله: پژوهشی

* نویسنده مسئول

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۶/۰۷ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۱۰/۳۰ تاریخ انتشار آنلاین: ۱۴۰۳/۰۱/۳۱

ارجاع به مقاله: م. ه. مصلحی و س. م. ا. خاتمی، جاذب‌های پیوسته در سامانه‌ی رابینوویچ-فابریکانت و مدل تعمیم‌یافته جدید آن، نشریه ریاضی و جامعه، ۹ شماره ۱ (۱۴۰۳) ۳۲-۱.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2024.138938.1601

هواشناسی، اقتصاد و ... قابل مشاهده است. به عنوان مثال، جعبه‌ای حاوی مولکول‌های گاز در فیزیک، جمعیت گونه‌ها در زیست‌شناسی، بازار مالی در اقتصاد یا جریان‌های باد در هواشناسی؛ نمونه‌هایی از سامانه‌های پویا هستند.

یک سامانه‌ی پویا از نظر تکامل زمانی به دو نوع گسسته و پیوسته تقسیم می‌شود. در این مقاله، به یک سامانه‌ی پویای پیوسته خاص معروف به «سامانه‌ی رابینوویچ-فابریکانت» خواهیم پرداخت که در سال ۱۹۷۹ توسط دو فیزیک‌دان نظری، میخائیل رابینوویچ و آناتولی فابریکانت، اختراع شد [۴۳]. این سامانه در واقع ساده‌سازی یک معادله سهموی غیرخطی پیچیده است که سامانه‌های فیزیکی مختلف مانند امواج تولمین شیلیختینگ^۱ در جریان‌های هیدرودینامیکی، امواج باد روی آب، امواج لانگمویر^۲ در پلاسما و ... را مدل‌سازی می‌کند و با داشتن پنج نقطه تعادل، با بسیاری از سامانه‌های کلاسیک، مانند سامانه‌های لورنز و چن^۳ (با سه نقطه تعادل)، سامانه‌ی روسلر^۴ (با دو نقطه تعادل) و مانند آن‌ها، هم‌ارز توپولوژیک نیست. در ادامه، این سامانه را به اختصار، سامانه‌ی RF خواهیم نامید.

دلایل مختلفی وجود دارند که این سامانه مورد توجه قرار گرفته است. یکی این واقعیت است که این سامانه، یک سامانه‌ی فیزیکی را مدل می‌کند و بنابراین، یک مدل مصنوعی نیست و می‌توان آن را برای مدل‌سازی پدیده‌های فیزیکی متعددی به کار برد. دلیل دیگر این است که به دلیل غیرخطی بودن قوی (ناشی از وجود جملات مرتبه سوم در مدل ریاضی آن)، نمی‌توان یک تحلیل ریاضی دقیق روی آن انجام داد، از این رو، سامانه ممکن است ویژگی‌های جدید و جالبی را نشان دهد که هنوز گزارش نشده‌اند. ضمن اینکه چالش‌های واقعی را برای روش‌های عددی حل دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی ایجاد می‌کند. در سامانه‌ی RF دو پارامتر وجود دارند که به لحاظ فیزیکی، وقتی معنی دارند که مثبت باشند. پیچیدگی‌های این سامانه و ماهیت غیرخطی قوی آن، باعث شده که بدون مقید بودن به مثبت بودن پارامترها، در زمینه بسیار کاربردی و مهم «ارتباطات امن»، مورد استفاده قرار گیرد [۳، ۴، ۵].

ساختار بقیه این مقاله به شرح زیر است: بخش ۲، شامل برخی از تعاریف و مفاهیم مقدماتی است. در بخش ۳، سامانه‌ی رابینوویچ-فابریکانت مورد تجزیه و تحلیل عددی قرار می‌گیرد. این سامانه توسط دانکا و همکاران [۴۱، ۴۲، ۳۸] به طور دقیق بررسی شده است. در اینجا، نتایج آن‌ها را مرور و همان نتایج را، با یک رویکرد عددی متفاوت، به دست می‌آوریم. در بخش ۴، تعمیمی از سامانه‌ی رابینوویچ-فابریکانت را ارائه می‌دهیم و با استفاده از طیف نمای لیاپانوف و نمودار انشعاب وابسته به پارامترها و مقاطع مختلف از فضای فاز، وقوع رفتارهای پویای بسیار غنی را با برهمکنش سه پارامتر سامانه‌ی تعمیم یافته نشان می‌دهیم. به ویژه، پدیده انشعاب مضاعف‌سازی دوره تناوب منتهی به آشوب را مشاهده می‌کنیم، که در کارهای قبلی در سامانه‌ی رابینوویچ-فابریکانت گزارش نشده‌اند. با تغییر پارامتر c در یک بازه بسیار کوچک، فرآیند تکامل سامانه از چرخه‌حدی آغاز می‌شود و پس از عبور از یک سری جاذب‌های متناوب، به آشوب می‌رسد. نتایج حاصله با استفاده از پارامترهای منفی، که بر پویایی غنی شده سامانه‌ی تعمیم یافته می‌افزایند، از اهمیت خاصی در ارتباطات ایمن و رمزنگاری برخوردارند. امیدواریم که این مقاله در کنار نتایج علمی و عملی، در جذب بسیاری از افراد دیگر به این حوزه نیز تاثیرگذار باشد.

۲. تعاریف و مطالب مقدماتی

از نظر ریاضی، یک سامانه‌ی پویا (زمان-پیوسته در $\mathbb{R}^n$) یک تابع $\phi(t, \mathbf{x})$ است که برای هر $t \in \mathbb{R}$ و هر $\mathbf{x} \in E \subset \mathbb{R}^n$ تعریف شده است، که نحوه حرکت نقاط $\mathbf{x} \in E$ را نسبت به زمان توصیف می‌کند.

تعریف ۱.۲. یک سامانه‌ی پویا در E ، یک C^1 -نگاشت

$$\phi : \mathbb{R} \times E \longrightarrow E$$

است که E یک زیرمجموعه باز از $\mathbb{R}^n$ می‌باشد و اگر $\phi_t(\mathbf{x}) = \phi(t, \mathbf{x})$ ، آن‌گاه روابط زیر برقرار باشند:

¹Tollmien-Schlichting waves ²Langmuir waves ³Lorenz and Chen systems ⁴Rosler system

الف- برای هر $\phi_0(x) = x, x \in E$ ؛

ب- برای هر $\phi_t \circ \phi_s(x) = \phi_t(\phi_s(x)) = \phi_{t+s}(x), x \in E$ و $t, s \in \mathbb{R}$ ؛

از این تعریف نتیجه می‌شود که برای هر $\phi_t, t \in \mathbb{R}$ یک C^1 -نگاشت از E به E است که دارای یک C^1 -معکوس ϕ_{-t} است. بنابراین، ϕ_t با $t \in \mathbb{R}$ یک خانواده تک‌پارامتری از دیفیومورفیسم‌ها در E است که یک گروه جابجایی را تحت عمل ترکیب توابع تشکیل می‌دهد.

به‌طور کلی، اگر $\phi(t, x)$ یک سامانه‌ی پویا در $\mathbb{R}^n \supset E$ باشد، آن‌گاه

$$f(x) = \left. \frac{d}{dt} \phi(t, x) \right|_{t=0},$$

یک C^1 -میدان برداری در E تعریف می‌کند و برای هر $x_0 \in E$ ، $x(t) = \phi(t, x_0)$ جواب مسئله مقدار اولیه

$$\dot{x} = f(x)$$

(۱)

$$x(0) = x_0.$$

می‌باشد که روی $\mathbb{R}^n$ تعریف شده است. بنابراین، برای هر $x_0 \in E$ ، بازه بیشین وجود جواب، بازه $I(x_0) = (-\infty, \infty)$ می‌باشد. این نشان می‌دهد که هر سامانه‌ی پویا یک C^1 -میدان برداری ایجاد می‌کند و مجموعه جواب معادله دیفرانسیل تعریف شده توسط این میدان برداری را توصیف می‌کند.

برعکس، اگر $f \in C^1(E)$ و E یک زیرمجموعه باز از $\mathbb{R}^n$ و $x_0 \in E$ باشد، آن‌گاه جواب $x(t) = \phi(t, x_0)$ از مسئله مقدار اولیه (۱)، یک سامانه‌ی پویا در E خواهد بود اگر و فقط اگر برای هر $x_0 \in E$ ، $\phi(t, x_0)$ برای هر $t \in \mathbb{R}$ تعریف شود. در این صورت می‌گوییم $\phi(t, x_0)$ یک سامانه‌ی پویا در E است که با (۱) تعریف شده است. $x(t)$ بیان‌گر بردار موقعیت (مکان) در زمان t و مجموعه $\{\phi(t, x_0); t \in \mathbb{R}\}$ ، مدار گذرنده از نقطه x_0 ، نامیده می‌شود. فضای متغیرهای حالت یا وابسته سامانه (۱)، فضای فاز یا فضای حالت آن سامانه نامیده می‌شود و معمولاً با M نشان داده می‌شود که در اینجا، فضای حالت را همان $\mathbb{R}^n$ خواهیم گرفت.

بدین ترتیب، می‌توان $x(t)$ را موقعیت ذره‌ای متحرک در فضای فاز سامانه در زمان t در نظر گرفت که در زمان $t = 0$ در نقطه x_0 قرار داشته است. بنابراین وقتی که t روی بازه $I(x_0) = (-\infty, \infty)$ تغییر کند، مسیر حرکت ذره در فضای فاز سامانه را ترسیم خواهد کرد در حالی که در زمان $t = 0$ ، این ذره در نقطه x_0 قرار داشته است.

نقطه P یک نقطه ω -حدی از x_0 است هرگاه نقاط $\phi_{t_1}(x_0), \phi_{t_2}(x_0), \dots$ (با $0 < t_1 < t_2 < \dots$) روی مدار گذرنده از x_0 موجود باشند به‌طوری‌که $\phi_{t_i}(x_0) \rightarrow P$ هرگاه $t_i \rightarrow \infty$.

مجموعه ω -حدی نقطه x_0 را، که با نماد $\Omega(x_0)$ نشان می‌دهیم، به‌صورت مجموعه‌ای از همه نقاط ω -حدی x_0 تعریف می‌کنیم.

یک مجموعه ω -حدی Ω را یک مجموعه جاذب می‌نامیم هرگاه یک همسایگی باز U از Ω موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $x \in U$ ، رابطه $\Omega(x) = \Omega$ برقرار باشد. دامنه‌ی جذب یک مجموعه جاذب را نیز به‌صورت اجتماع همه‌ی چنین همسایگی‌هایی مثل U در نظر خواهیم گرفت که آن را معمولاً با نماد B_Ω نمایش می‌دهند.

به بیان ساده‌تر، یک جاذب یک «مجموعه مغناطیسی» در فضای فاز است که تمام مسیرهای همسایه به آن همگرا می‌شوند. یک جاذب در فضای فاز دارای ویژگی‌های زیر است [۶]:

۱- یک مجموعه پایا است (یعنی اجتماعی از مدارهاست و در نتیجه، هر مسیری که در آن شروع شود، برای همیشه در آن می‌ماند).

۲- تمام مسیرهایی که به‌اندازه کافی نزدیک به آن شروع می‌شوند را جذب می‌کند.

۳- کوچکترین است (یعنی نمی‌تواند شامل یک یا چند جاذب کوچک‌تر باشد).

در اینجا چهار نوع اصلی از جاذب‌ها (مجموعه‌های ω -حدی) معرفی می‌شوند:

(الف) **نقطه ثابت:** نقطه $x \in M$ را یک نقطه ثابت گوئیم هرگاه برای هر $t \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $\phi_t(x) = x$.
 (ب) **جواب متناوب (یا حرکت متناوب):** جواب $\phi_t(x)$ گذرنده از نقطه $x \in M$ را متناوب گوئیم هرگاه عدد ثابت $T > 0$ (دوره تناوب) موجود باشد به‌طوری‌که $\phi_t(x) = \phi_{t+T}(x)$ ، برای هر $t \in \mathbb{R}$. مدار متناوب متناظر با جواب متناوب، یک منحنی بسته است که توسط $\phi_t(x)$ در یک دوره تناوب رسم می‌شود و با دایره $\mathbb{S}^1$ هم‌ارز توپولوژیک می‌باشد. فرض کنیم $\phi_t(x)$ یک جواب متناوب غیرثابت با دوره تناوب T باشد، منحنی بسته $L = \{\phi_t(x) : 0 \leq t < T\}$ یک چرخه‌حدی نامیده می‌شود هرگاه حداقل یک جواب دیگر مانند $\phi_t(y)$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\phi_t(y), L) = 0 \quad \text{یا} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} d(\phi_t(y), L) = 0.$$

در اینجا $d(z, L) = \min\{\|z - w\| : w \in L\}$ ، فاصله هاسدورف بین نقطه x و مجموعه L می‌باشد.

(پ) **جواب شبه‌متناوب (حرکت شبه‌متناوب):** یک تابع شبه‌متناوب، تابعی است که می‌توان آنرا به‌صورت حاصل جمع شمارای $x(t) = \sum_i h_i(t)$ نوشت که در آن، توابع h_i ، توابعی متناوب با دوره تناوب کمینه T_i و فرکانس $\omega_i = \frac{2\pi}{T_i}$ هستند. همچنین، یک مجموعه متناهی از فرکانس‌های پایه مانند $\{\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \dots, \bar{\omega}_q\}$ با ویژگی‌های زیر باید وجود داشته باشد:

۱- این مجموعه مستقل خطی است.

۲- برای هر اندیس i اعداد صحیحی مانند $k_1, k_2, \dots, k_q$ وجود دارند به‌طوری‌که $\omega_i = \sum_{j=1}^q k_j \bar{\omega}_j$.
 یک جواب شبه‌متناوب با q فرکانس پایه را q -متناوب نامند. یک مدار q -متناوب، در واقع روی یک چنبره

$$\mathbb{T}^q = \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^q$$

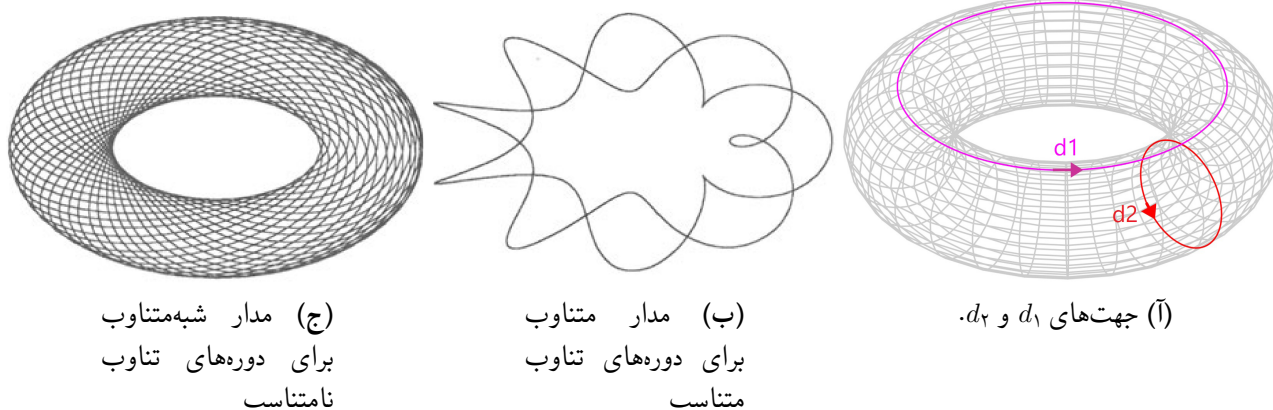
قرار می‌گیرد، که هر $\mathbb{S}^1$ یک فرکانس اصلی را به نمایش می‌گذارد.

به‌عنوان مثال، برای درک رفتار ۲-متناوب، مداری را در نظر بگیرید که روی یک چنبره می‌چرخد و در دو جهت d_1 و d_2 ، نشان داده شده در شکل ۱^ا، به‌ترتیب با دوره‌های تناوب T_1 و T_2 دور می‌زند. اگر T_1 و T_2 متناسب باشند، آن‌گاه اعداد صحیح r و s وجود دارند به‌طوری‌که $rT_1 = sT_2$. یعنی مسیر مذکور در هر ثانیه دقیقاً r دور در جهت d_1 و s دور در جهت d_2 می‌زند و پس از rT_1 ثانیه به نقطه شروع رسیده و بسته می‌شود. نتیجه این حرکت، یک چرخه‌حدی است با دوره تناوب rT_1 . گفتنی است هر قدر زمان اجرای شبیه‌سازی زیاد باشد، باز در شکل منحنی تغییری دیده نمی‌شود. این مسئله در شکل ۱^ب قابل مشاهده است. اما اگر T_1 و T_2 متناسب نباشند، چنین اعداد صحیح r و s وجود ندارند و مسیر مذکور هیچ‌گاه بسته نخواهد شد و زمان اجرای شبیه‌سازی هر قدر زیاد باشد، منحنی به‌صورت چگال‌تری روی چنبره پخش می‌شود. این وضعیت در شکل ۱^ج قابل مشاهده است. بنابراین رفتار ۲-متناوب به فرکانس‌های نامتناسب نیازمند است.

(ت) **حرکت آشوبناک:** تاکنون تعریف کلی پذیرفته شده برای آشوب ارائه نشده است. اما می‌توان گفت که دینامیک‌های آشوبناک با سه خاصیت زیر مشخص می‌شوند:

الف - آن‌ها مدارهای کران‌دار با دینامیکی شبه‌تصادفی (اما نه تصادفی) و متفاوت با دینامیک‌های معرفی شده در بالا هستند.

ب - آن‌ها در فضای فاز، به یک مجموعه به‌نام جاذب عجیب همگرا می‌شوند که یک منیفلد ساده شبیه نقطه، دایره یا چنبره نیست اما یک ساختار هندسی پیچیده فرکتالی با یک بُعد هاسدورف کسری دارد [۸]. برای یافتن جزئیات مربوط به فرکتال‌ها و بُعد کسری به مقاله [۴۹] مراجعه شود.



شکل ۱. مدارهایی روی چنبره $\mathbb{T}^2$

Figure 1: Trajectory on the torus $\mathbb{T}^2$

ج - آن‌ها وابستگی شدید سامانه به شرایط اولیه را نشان می‌دهند، بدین معنی که مدارهای آشوبناک، به‌طور موضعی از یکدیگر دور می‌شوند و تغییرات خیلی کوچک در شرایط اولیه (نقطه شروع)، باعث تغییرات بزرگ (با سرعت رشد نمایی) در حرکت آن‌ها می‌شود.

۱.۲. اندازه پایای ارگودیک.

تعریف ۲.۲. یک فضای اندازه‌پذیر، یک جفت $(\mathcal{M}, B)$ است که $\mathcal{M}$ یک مجموعه و B یک σ -جبر از زیرمجموعه‌های $\mathcal{M}$ است. عضوهای B مجموعه‌های اندازه‌پذیر نامیده می‌شوند.

تعریف ۳.۲. یک اندازه روی $(\mathcal{M}, B)$ ، یک تابع $\mu : B \rightarrow [0, +\infty]$ است به‌طوری‌که $\mu(\emptyset) = 0$ و رابطه

$$\mu \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$$

برای هر خانواده شمارا از مجموعه‌های دوبه‌دو مجزای $A_j \in B$ برقرار است. سه‌تایی $(\mathcal{M}, B, \mu)$ یک فضای اندازه نامیده می‌شود. اگر $\mu(\mathcal{M}) < \infty$ ، می‌گوییم که μ یک اندازه متناهی است و اگر $\mu(\mathcal{M}) = 1$ ، آن‌گاه μ را یک اندازه احتمال می‌نامیم، در این حالت، $(\mathcal{M}, B, \mu)$ یک فضای احتمال نامیده می‌شود.

یک اندازه μ تحت یک تبدیل f پایا است اگر برای هر مجموعه اندازه‌پذیر $E \subset \mathcal{M}$ رابطه $\mu(E) = \mu(f^{-1}(E))$ برقرار باشد. یک اندازه μ تحت یک سامانه‌ی پویا ϕ_t پایا است اگر برای هر مجموعه اندازه‌پذیر $E \subset \mathcal{M}$ و هر $t \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $\mu(E) = \mu(\phi_{-t}(E))$.

اگر μ یک اندازه احتمال روی $(\mathcal{M}, B)$ باشد آن‌گاه گفته می‌شود که μ یک اندازه ارگودیک برای سامانه‌ی پویا ϕ است، اگر μ تحت ϕ_t پایا باشد و گزاره زیر برقرار باشد:

«برای هر $A \in B$ ، اگر برای هر $t \in \mathbb{R}_+$ داشته باشیم $\phi_{-t}(A) \subset A$ آن‌گاه $\mu(A) = 0$ یا $\mu(A) = 1$ »

برای مثال، فرض کنیم $\mathcal{M} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ ، $\alpha \in \mathbb{R}$ و $\phi_t(z_1, z_2) = (e^{i\pi t} z_1, e^{i\alpha \pi t} z_2)$. اگر $\alpha \notin \mathbb{Q}$ ، آن‌گاه اندازه لبگ یک اندازه ارگودیک برای سامانه‌ی پویای ϕ_t است.

به عنوان مثالی دیگر، فرض کنیم X یک مجموعه دلخواه باشد که دارای σ -جبر $B = P(X)$ است. برای هر $p \in X$ ، تابع $\delta_p : B \rightarrow [0, +\infty]$ تعریف شده با ضابطه‌ی

$$\delta_p(A) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } p \in A \\ 0 & \text{اگر } p \notin A \end{cases}$$

را در نظر بگیرید. در این صورت δ_p یک اندازه است که معمولاً اندازه دیراک در p نامیده می‌شود. اگر $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ با $f(x) = x^2$ داده شود، آن‌گاه اندازه‌های دیراک δ_0 و δ_1 برای f پایا و ارگودیک هستند.

۲.۲. نماهای لیپانوف و بُعد کاپلان-یورک. نماهای مشخصه لیپانوف به نوعی گسترشی از تحلیل پایداری خطی در مورد حرکت‌های غیرتناوبی هستند. به طور کلی، آن‌ها نرخ واگرایی نمایی مسیرهای مجاور را اندازه‌گیری می‌کنند. از این نظر، آن‌ها اطلاعاتی را در مورد اینکه یک خطای بسیار کوچک در وضعیت اولیه سامانه، با چه سرعتی رشد می‌کند، ارائه می‌دهند. نماهای لیپانوف λ به همراه بُعد کاپلان-یورک d_{KY} یا بُعد لیپانوف d_L ، دو شاخص برای اندازه‌گیری نرخ رشد خطا در سامانه‌های پویا هستند [۷].

شاخه‌ای از نظریه سامانه‌های پویا با هدف رسمی کردن و اندازه‌گیری کمی حساسیت نسبت به شرایط اولیه توسعه یافته است. یک سامانه‌ی پویا n بعدی را در نظر بگیرید که توسط

$$(۲) \quad \dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x})),$$

که $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ و $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ، داده شده است. سامانه‌ی (۲) را اتلافی گویند هرگاه

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} < 0.$$

فرض می‌کنیم که در (۲)، f به اندازه کافی هموار است و حرکت در یک ناحیه کران‌دار R از فضای فاز سامانه $M = \mathbb{R}^n$ رخ می‌دهد. می‌خواهیم؛ جدایی بین دو مسیر در M یعنی $\bar{\mathbf{x}}(t)$ و $\mathbf{x}(t)$ را که به ترتیب از دو شرط اولیه نزدیک، $\mathbf{x}(0)$ و $\bar{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}(0) + \delta \mathbf{x}(0)$ آغاز می‌شوند را مطالعه کنیم [۱۱].

تا زمانی که تفاوت بین مسیرها، $\delta \mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t)$ ، بی‌نهایت کوچک^۵ باقی بماند، می‌توان آن‌را به عنوان یک بردار $z(t)$ در فضای مماس $T_{\mathbf{x}}M$ از M ، در نظر گرفت. تکامل زمانی $z(t)$ توسط معادلات دیفرانسیل خطی زیر داده می‌شود:

$$\dot{z}_i(t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \bigg|_{\mathbf{x}(t)} z_j(t)$$

تحت فرضیه نسبتاً کلی، آسیلیدت [۹] ثابت کرد که تقریباً برای هر شرط اولیه‌ای، یک پایه متعامد یکه $\{e_i\}$ در فضای مماس $T_{\mathbf{x}}M$ وجود دارد به طوری که برای زمان‌های بزرگ،

$$(۳) \quad z(t) = \sum_{i=1}^n c_i e_i \exp(\lambda_i t)$$

که در آن، ضرایب c_i به $z(0)$ بستگی دارند. نماهای $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ را نماهای مشخصه لیپانوف می‌گویند. اگر سامانه‌ی پویا یک اندازه پایای ارگودیک روی M داشته باشد، طیف لیپانوف LCE (مجموعه همه نماهای لیپانوف)، به جز برای مجموعه‌ای با اندازه صفر (نسبت به اندازه پایای طبیعی)، به شرایط اولیه بستگی ندارد.

^۵infinitesimal

معادله (۳) توضیح می‌دهد که چگونه یک ناحیه کروی n بعدی $R = \mathbb{S}^n \subset M$ ، با شعاع ε و مرکز $x(\circ)$ ، با گذر زمان به یک بیضی با نیم‌محوره‌های $\varepsilon_i(t) = \varepsilon \exp(\lambda_i t)$ ، که در جهت بردارهای e_i هدایت شده‌اند، تغییر شکل می‌دهد. بنابراین نمای لیپانوف، متوسط نرخ انبساط یا انقباض در جهت محوره‌های اصلی است. برای محور اصلی i ، نمای لیپانوف متناظر به صورت زیر تعریف شده است:

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\varepsilon_i(t)}{\varepsilon_i(\circ)},$$

که در آن $\varepsilon_i(t)$ شعاع بیضی در امتداد i -امین محور اصلی در زمان t است. علاوه بر این، برای یک اختلال کوچک کلی $\delta x(\circ)$ ، فاصله بین مسیر اولیه و مسیر مختل شده رفتار زیر را خواهد داشت:

$$|\delta x(t)| = |\delta x(\circ)| \exp(\lambda_1 t) [1 + O(\exp(-(\lambda_1 - \lambda_2)t))].$$

اگر $\lambda_1 > 0$ ، یک خطا در شرایط اولیه، در گذر زمان رشد سریع (نمایی) خواهد داشت. در چنین حالتی، رفتار سامانه در زمان‌های طولانی آشوبناک و غیرقابل پیش‌بینی است. در واقع، اگر خطای اولیه برابر با $|\delta x(\circ)| = \delta_\circ$ باشد، و بخواهیم حالت‌های سامانه را با حداکثر خطای معین Δ پیش‌بینی کنیم، آن‌گاه پیش‌بینی فقط تا زمان

$$T_p \sim \frac{1}{\lambda_1} \ln \left(\frac{\Delta}{\delta_\circ} \right),$$

قابل اعتماد است. این معادله نشان می‌دهد که T_p اساساً توسط بزرگ‌ترین نمای مثبت لیپانوف تعیین می‌شود، زیرا وابستگی آن به $\delta_\circ$ و Δ ، با وجود لگاریتم، ضعیف است.

با نگاهی دیگر، نماهای لیپانوف رفتار بردارها را در فضای مماس فضای فاز توصیف می‌کنند و از ماتریس ژاکوبی زیر تعریف می‌شوند:

$$J_{ij}(t) = \left. \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \right|_{x(t)}.$$

این ژاکوبی تکامل زمانی بردارهای مماس را که توسط ستون‌های ماتریس Z داده شده است، از طریق معادله زیر، با شرط اولیه $Z_{ij}(\circ) = \delta_{ij}$ ، تعریف می‌کند:

$$\dot{Z} = JZ. \quad (4)$$

اگر ماتریس Λ توسط

$$\Lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log (Z(t)Z^T(t)), \quad (5)$$

تعریف شود، آن‌گاه نماهای لیپانوف λ_i ، مقادیر ویژه Λ خواهند بود [۹]. همین رابطه مبنای محاسبه نماهای لیپانوف برحسب متغیر زمان (در زمان‌های طولانی) خواهد بود. برای جزئیات فنی در مورد محاسبه نماهای لیپانوف، [۱۰] را ببینید. بُعد کاپلان یورک d_{KY} یا بُعد لیپانوف d_L به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d_L = d_{KY} = j + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_j}{|\lambda_{j+1}|},$$

که در آن $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ و j بزرگ‌ترین عدد صحیح است که $\lambda_1 + \dots + \lambda_j > 0$. حدس زده می‌شود که بین بعد هاسدورف (d_H) و بعد کاپلان یورک رابطه $d_L = d_H$ برقرار باشد [۱۴]. این حدس، امکان محاسبه بعد d_H برای جاذب یک سامانه‌ی پویای اتلافی، برحسب نمای لیپانوف آن را فراهم می‌کند. درستی آن برای سامانه‌های پویای دو بعدی [۱۵] و برای یک کلاس نسبتاً بزرگ از سامانه‌های تصادفی ثابت شده است [۱۶]. به طور کلی فقط می‌دانیم که بعد لیپانوف یک کران بالا برای

بُعد d_H است. اگرچه ساختن نمونه‌های مصنوعی که متناقض با این حدس باشند، نسبتاً سخت نیست، لکن اعتقاد بر این است که این حدس برای سامانه‌های پویا «عموماً» صادق است.

۳.۲. دسته‌بندی جاذب‌های زمان-پیوسته براساس طیف لیاپانوف و بُعد هاسدورف. آشوب را می‌توان به‌عنوان اعمال متوالی انبساط (در امتداد منیفلد ناپایدار)، انقباض (در امتداد منیفلد پایدار) و تاخوردگی (ناشی از غیرخطی بودن) بخش‌های فضای حالت تصور کرد. از نظر ریاضی، یک جاذب آشوبناک پیوسته حداقل سه نمای مشخصه لیاپانوف (LCEs) خواهد داشت: یکی مثبت (انبساط)، یکی منفی (انقباض) و یکی صفر. به‌دلیل اتلافی بودن سیستم دینامیکی آشوبناک، مجموع کل LCEs منفی خواهد بود [۱۲].

برای یک جریان حافظ حجم یا مساحت (مانند جریان یک سامانه‌ی همیلتونی)، مجموع نماهای لیاپانوف برابر صفر می‌باشد در حالی‌که برای جاذب یک سامانه‌ی اتلافی، انقباض باید بیشتر از انبساط باشد و مجموع باید منفی باشد [۱۸]. هاکن ثابت کرد که در سامانه‌های زمان-پیوسته، برای هر جاذبی غیر از یک نقطه ثابت، یک نمای لیاپانوف همیشه صفر است [۱۷]. همان‌طور که قبلاً ذکر شد، نماهای لیاپانوف برای دسته‌بندی رفتار مجانبی سامانه‌های پویا مناسب هستند. با استفاده از نتایج کلین و بر، در جدول ۱ یک دسته‌بندی از جاذب‌های زمان-پیوسته براساس طیف لیاپانوف، همراه با بُعد هاسدورف آن‌ها ارائه شده است [۱۳، ۱۹].

جدول ۱. دسته‌بندی جاذب‌های زمان-پیوسته براساس طیف LCE و بُعد هاسدورف

Table 1: Classification of time-continuous attractors based on LCE spectrum and Hausdorff dimension

بُعد توپولوژیکی	جاذب	نماهای لیاپانوف	بُعد هاسدورف
۱	نقطه ثابت	—	۰
۲	حرکت متناوب	— ۰	۱
۳	چنبره T^2 آشوب	— ۰ ۰ — ۰ ۰	۲ $2 < d_H < 3$
۴	ابر چنبره T^3 آشوب روی T^3 ابر آشوب	— ۰ ۰ ۰ — ۰ ۰ ۰ — ۰ ۰ ۰	۳ $3 < d_H < 4$ $3 < d_H < 4$
N	نقطه ثابت	$\underbrace{- \dots -}_N$	۰
	حرکت متناوب	$\underbrace{0 - \dots -}_{N-1}$	۱
	(N-۱) - چنبره	$\underbrace{0 \dots 0}_{l \geq 2} \underbrace{- \dots -}_{N-l}$	l
	(N-۱) - آشوب	$\underbrace{+ \dots +}_{k \geq 1} \underbrace{0 \dots 0}_{l \geq 1} \underbrace{- \dots -}_{N-k-l}$	$k + l < d_H < N$

۴.۲. جاذب‌های خودبرانگیخته و پنهان. جاذب‌ها را می‌توان براساس ارتباط دامنه‌ی جذب آن‌ها با نقاط تعادل در فضای فاز، رده‌بندی کرد.

یک جاذب، خودبرانگیخته^۶ نامیده می‌شود هرگاه دامنه‌ی جاذب آن با هر همسایگی باز از نقاط ثابت (نقاط تعادل) تلاقی داشته باشد. در غیر این صورت، به آن جاذب پنهان^۷ گویند [۴۱].

برخلاف جاذب‌های خودبرانگیخته، دامنه‌ی جاذب یک جاذب پنهان، هیچ اشتراکی با همسایگی‌های کوچک نقاط ثابت ندارد. بنابراین، جاذب‌های پنهان در سامانه‌هایی با یک نقطه تعادل پایدار یا بدون نقطه تعادل رخ می‌دهند. در سال‌های اخیر، مشخص شده است که جاذب‌های پنهان کاربردهای بالقوه‌ای در بسیاری از زمینه‌ها مانند زیست‌بوم، علم آب و هوا، فیزیک، مهندسی، بازار مالی، و سامانه‌های کنترل هواپیما دارند. اخیراً برخی از سامانه‌های پویا شامل جاذب‌های پنهان با یک نقطه تعادل پایدار یا بدون نقاط تعادل ظاهر شده‌اند [۲۰، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۴، ۲۵].

۵.۲. چندپایداری یا جاذب‌های هم‌زیست. بسیاری از سامانه‌های آشوبناک دارای چندین حالت پایدار (جاذب) برای یک مجموعه معین از پارامترها هستند. این پدیده به‌عنوان چندپایداری^۸ یا جاذب‌های هم‌زیست^۹ شناخته می‌شود. جالب‌تر اینکه چندپایداری در بسیاری از سامانه‌های طبیعی مشاهده شده است و معمولاً نقش مهمی در عملکرد سامانه‌ها ایفا می‌کند [۲۷]. شواهد چندپایداری اولین بار به‌صورت تجربی در یک لیزر گازی کیوسوئیچ آشکار شد [۲۸]. از آن زمان سامانه‌های آشوبناک با چندپایداری به‌طور گسترده و تقریباً در تمام زمینه‌های تحقیقاتی علوم طبیعی مانند مکانیک، نورشناسی، الکترونیک، علوم محیطی و علوم اعصاب یافت شده‌اند [۲۹، ۳۰، ۳۱، ۳۲]. در رفتار سامانه‌های چندپایدار، به‌دلیل تعامل بین جاذب‌های مختلف، پیچیدگی فوق‌العاده زیادی مشاهده می‌شود. در این موارد، رفتار کیفی سامانه ممکن است تحت تغییرات جزئی پارامترها، به‌طور چشمگیری تغییر کند. با این حال، چندپایداری، به‌عنوان یک شاخه تحقیقاتی جدید در نظریه آشوب، هنوز در مراحل ابتدایی خود است. بنابراین، بررسی سامانه‌های آشوبناک با چندپایداری نیاز به تحقیقات بیشتری دارد.

۶.۲. کنترل آشوب و آشوب‌سازی. پس از معرفی دوره مدرن نظریه آشوب توسط لورنز در سال ۱۹۶۳ [۳۳]، در سال‌های اخیر توجه زیادی به آشوب که خود را به‌عنوان شاخه مهمی از دینامیک غیرخطی، ریاضیات و فیزیک پیشرفته با کاربردهای فراوان در زیست‌شناسی، مهندسی و همچنین ارتباطات ایمن تثبیت کرده است، معطوف شد [۳۴، ۳۵، ۳۶، ۳۷].

با توجه به وابستگی شدید سامانه‌های آشوبناک به شرایط اولیه و به‌دلیل اینکه شرایط اولیه تجربی هرگز به‌طور دقیق و کامل شناخته نمی‌شوند، این سامانه‌ها ذاتاً غیرقابل پیش‌بینی هستند. در واقع، مسیر پیش‌بینی که از شرایط اولیه تجربی پدید می‌آید و مسیر واقعی که از شرایط اولیه واقعی پدید می‌آید، به‌طور تصاعدی در طول زمان از هم جدا می‌شوند، به‌طوری که خطا در پیش‌بینی (فاصله بین مسیر پیش‌بینی و مسیر واقعی) با افزایش زمان، به‌طور تصاعدی رشد می‌کند تا جایی که مسیر واقعی سامانه، کاملاً متفاوت از مسیر پیش‌بینی شده در زمان‌های طولانی است.

این ویژگی، برای سال‌های متمادی، آشوب را نامطلوب می‌کرد و بیشتر تجربی‌گرایان این ویژگی را چیزی می‌دانستند که باید به‌شدت از آن اجتناب کرد. سامانه‌های آشوبناک، علاوه بر حساسیت ذاتی خود به شرایط اولیه، دو ویژگی مهم دیگر را نیز نشان می‌دهند. اولاً، تعداد نامتناهی از مدارهای تناوبی ناپایدار در جاذب آشوبناک نشانده شده است. به‌عبارت دیگر، اسکلت یک جاذب آشوبناک، مجموعه‌ای شامل تعداد نامتناهی از مدارهای تناوبی ناپایدار است. ثانیاً، جریان در جاذب آشوبناک، ارگودیک است به این معنی که در طول تکامل زمانی‌اش، از همسایگی‌های کوچک هر نقطه در هر یک از مدارهای تناوبی ناپایدار موجود در جاذب آشوبناک، عبور می‌کند. نکته مهم در اینجا این است که به‌دلیل آشوب، می‌توانیم با استفاده از سامانه‌ی آشوبناک، تعداد نامحدودی از رفتارهای پویای موردنظر را تنها با کمک اختلال‌های کوچک که به‌نحو مناسب انتخاب شده‌اند، تولید کنیم. بنابراین، دیگر آشوب به‌عنوان یک پدیده منفی شناخته نمی‌شود و از ویژگی‌های منحصر به فرد آن می‌توان در راستای نیل به برخی اهداف مثل رمزنگاری و ارتباطات ایمن استفاده کرد. بنابراین تلاش آشوب‌سازی برای تولید یک سامانه آشوبناک با پویایی متنوع، یعنی ساختن مصنوعی سامانه‌هایی با جاذب‌های آشوبناک، به موضوعی چالش‌برانگیز تبدیل شده است.

⁶Self-excited ⁷hidden attractor ⁸multistability ⁹coexisting attractors

سامانه‌های حاوی جاذب‌های آشوبناک هم‌زیست، حساسیت بالایی به مقادیر اولیه و پارامترها دارند. بنابراین، چنین سامانه‌هایی برای کاربردهای رمزنگاری مناسب خواهند بود. در عین حال، این سامانه‌ها دارای نقاط ضعف نیز هستند. به عنوان مثال، یافتن جاذب‌های آشوبناک هم‌زیست ممکن است دشوار باشد. بنابراین ساختن مصنوعی سامانه‌هایی با جاذب‌های آشوبناک هم‌زیست از اهمیت و کارایی بالایی برخوردار است [۲۶].

۷.۲. سامانه‌های رمزنگاری مبتنی بر آشوب. سامانه‌های رمزنگاری مبتنی بر آشوب برای محافظت از اطلاعات حیاتی، در حین برقراری ارتباط از طریق شبکه‌های ارتباطی مختلف، استفاده می‌شوند. عموماً جعبه‌های جایگزینی^{۱۰} تنها بخش غیر خطی این سامانه‌ها می‌باشند و در تولید آن‌ها، سامانه‌های آشوبناک نقش اصلی را بر عهده دارند. جعبه جایگزینی نقش مهمی در دستیابی به یک الگوریتم رمزنگاری برجسته دارد. اهمیت آن را نمی‌توان در هیچ سامانه‌ی رمزگذاری انکار کرد و حتی حملاتی که به یک سامانه‌ی رمزنگاری شده صورت می‌پذیرد، عمدتاً همین جعبه‌های جایگزینی را هدف قرار می‌دهند. یک جعبه جایگزینی، مسئول ایجاد سردرگمی^{۱۱} و بی‌نظمی^{۱۲} در سامانه‌ی رمزنگاری است. از نظر ریاضی، جعبه جایگزینی، یک تابع بولی برداری است که به صورت تعریف می‌شود:

$$S : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^m.$$

در سامانه‌های رمزنگاری، جعبه‌های جایگزینی با روش‌های مختلفی تعریف می‌شوند. برای یافتن نمونه‌هایی از نحوه تعریف و کاربرد آن‌ها در سامانه‌های رمزنگاری، می‌توان به مقالات [۴۴، ۴۵، ۴۶، ۴۷، ۵۰] رجوع کرد. به عنوان مثال، در مقاله [۵۰]، یک الگوریتم رمزنگاری تصویر با استفاده از گروه جایگشت S_n و توابع آشوب ارائه شده است. مراحل الگوریتم به شرح ذیل هستند:

- ۱- با اعمال توابع درهم‌ساز^{۱۳} بر روی اطلاعات تصویر اصلی و کلید رمز خارجی ۲۵۶ بیتی، یک کلید رمز ۲۵۶ بیتی استخراج می‌گردد که با کمک آن شرایط اولیه و پارامترهای مربوط به توابع آشوب تولید می‌شود.
- ۲- در مرحله انتشار^{۱۴}، با انجام یک جایگشت سطری و یک جایگشت ستونی مبتنی بر توابع آشوب، موقعیت پیکسل‌ها در تصویر اصلی جابه‌جا می‌شود به طوری که همبستگی بین پیکسل‌های مجاور به شدت کاهش می‌یابد.
- ۳- در مرحله سردرگمی^{۱۵}، مقدار سطح روشنایی هر پیکسل با انجام جایگشت در سطح بیت با کمک گروه جایگشت S_8 و توابع آشوبناک تغییر می‌یابد سپس با انجام تبدیل در سطح بیت به وسیله جعبه‌های جایگزینی S_8Sbox و عملگر XOR ، امنیت الگوریتم پیشنهادی افزایش می‌یابد.

۳. سامانه‌ی رابینوویچ-فابریکانت

در مطالعه بحث تلاطم^{۱۶}، دو مسئله اساسی همیشه مد نظر بوده است. یکی روش‌های خاص از بین بردن ناپایداری ایجادشده در ماده‌ای با خاصیت ارتجاعی غیرخطی (ماده‌ای که از قانون هوک پیروی نمی‌کند. قانون هوک، رابطه‌ای خطی بین تغییر طول ماده و بار وارد بر آن است) و دیگری مکانیسم‌های منجر به ظهور حرکت تصادفی بی‌نظم. بررسی‌های فشرده روی نوسانات خودکار تصادفی در سیستم‌های دینامیکی با بُعد متناهی، مشخص کرده است که اصولاً امکان شروع آشوب در سامانه‌های اتلافی می‌تواند با سازکاری که برای محدودسازی ناپایداری سامانه اجرایی می‌شود، مرتبط باشد [۴۳]. یکی از مدل‌هایی که سازکار پایدارسازی در آن به بروز حرکات تصادفی بی‌نظم منجر می‌شود، مدل معروف لاندو^{۱۷} با معادله سهموی غیرخطی با ضرایب مختلط

$$(۶) \quad f_t = \gamma_0 f + (\beta + i\chi) f_{xx} + (i\alpha - \rho) f |f|^2$$

¹⁰Substitution box or S-box ¹¹confusion ¹²disarray ¹³Hash Function ¹⁴Diffusion ¹⁵confusion ¹⁶turbulence ¹⁷Landau

است که در آن، $f(x, t)$ دامنه موج مختلط است.

اگر محیط کمی ناپایستار باشد، یعنی اگر پارامترهای بدون بعد $\mu = \beta/\chi$ و $r = \rho/\alpha$ کوچک باشند، معادله (۶) به معادله شرودینگر غیرخطی نزدیک است و برخی اطلاعات در مورد مدل (۶) را می‌توان با استفاده از تقریب آن با معادله شرودینگر غیرخطی به دست آورد [۴۳].

فرض کنیم تغییر عدد کوانتوم $N = \int |a|^2 dx$ و شبه‌تکانه $P = \int i(a_x a^* - a^* a_x) dx$ را به عنوان یک نتیجه از ناپایستاری سامانه (۶) (که برای آن $\gamma_0 \neq 0$ ، $\beta \neq 0$ و $\rho \neq 0$) به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$\begin{aligned} (7) \quad \frac{dN}{dt} &= 2\gamma_0 N - 2\beta \int |a_x|^2 dx - 2\rho \int |a|^* dx \\ \frac{dP}{dt} &= 2\gamma_0 P - 2\beta \int i(a_x^* a_{xx} - a_x^* a_{xx}) dx - 2\rho \int i|a|^2 (a_x a^* - a_x^* a) dx. \end{aligned}$$

حال فرض کنیم که (۶)، مانند وضعیت پایستارش (که برای آن $\gamma_0 = \beta = \rho = 0$)، جوابی به شکل قطاری از سالیتون‌ها دارد (سالیتون یک بسته موج غیرخطی، خود تقویت‌کننده و موضعی است که به شدت پایدار است، از این نظر که شکل خود را حفظ می‌کند در حالی که آزادانه با سرعت ثابت منتشر می‌شود، همچنین دامنه، سرعت و فرم خود را حفظ می‌کند، حتی زمانی که با سالیتون‌های مختلف تماس پیدا می‌کند). بنابراین نتیجه زیر حاصل خواهد شد:

$$(8) \quad a(x, t) = A \exp \left[i \frac{\alpha A^2}{2} t + i \frac{V^2}{4\chi} t + i \frac{V}{2\chi} (x - Vt) \right] \text{ch}^{-1} \left[A(x - Vt) (\alpha/2x)^{1/2} \right].$$

با تغییر اندک دامنه A و سرعت V ، می‌توانیم معادلات تقریبی برای A و V را با جایگزین کردن (۸) در (۷) و محدود کردن خود به جملات مرتبه اول نسبت به پارامترهای کوچک $\mu \equiv \beta/\chi \sim r \equiv \rho/\alpha \ll 1$ ، به صورت زیر استخراج کنیم [۴۸]:

$$\frac{dA}{dt} = \gamma_0 A - \frac{\beta\alpha}{6x} A^3 - \frac{2\rho}{3} A^3 - \frac{\beta}{4x^2} A V^2, \quad \frac{dV}{dt} = -\frac{2}{3} \frac{\beta\alpha}{x} A^2 V$$

از اینجا می‌توان دریافت که وقتی $t \rightarrow \infty$ ، همه سالیتون‌ها متوقف می‌شوند و دامنه آن‌ها برابر می‌شوند، یعنی:

$$V \rightarrow 0, \quad A \rightarrow A_0 = \left[6 \frac{\gamma_0}{\alpha} \left(\frac{\beta}{\chi} + \frac{2\rho}{\alpha} \right)^{-1} \right]^{1/2}.$$

رابینوویچ و فابریکانت، چنین رویکردی را برای بررسی پویایی پیچیده در مدل (۶) به کار گرفتند. آن‌ها یک تقریب سه‌حالت از (۶) را به صورت زیر به دست آوردند:

$$\begin{aligned} (9) \quad \frac{dx_1}{dt} &= x_2 (x_3 - 1 + x_1^2) + a x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1 (3x_3 + 1 - x_1^2) + a x_2 \\ \frac{dx_3}{dt} &= -2x_3 (b + x_1 x_2) \end{aligned}$$

لازم به ذکر است که آن‌ها از این واقعیت استفاده کردند که معادله (۶) برای شرایط مرزی تناوبی، معادل با یک زنجیره نامتناهی از معادلات دیفرانسیل معمولی است و اگر چه همیشه نمی‌توان این را به لحاظ ریاضی به طور دقیق اثبات کرد، اما با نگاه تجربی و فیزیکی، به دلیل میرایی پیش‌رونده با زمان، سامانه‌ی با بُعد نامتناهی را می‌توان کوتاه کرد و به سامانه‌ای با بعد متناهی تبدیل کرد [۴۳].

در سامانه‌ی رایینوویچ-فابریکانت (RF) که توسط دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی (۹) مدل‌سازی شده است، $a > 0$ بوده و $b \in \mathbb{R}$ پارامتر انشعاب است. نقاط تعادل این سامانه به صورت

$$P_0 = (0, 0, 0)$$

$$P_{1,2} = \left(\mp \sqrt{\frac{bR_1 + 2b}{4b - 3a}}, \pm \sqrt{b \frac{4b - 3a}{R_1 + 2}}, \frac{aR_1 + R_2}{(4b - 3a)R_1 + 4b - 6a} \right)$$

$$P_{3,4} = \left(\mp \sqrt{\frac{bR_1 - 2b}{3a - 4b}}, \pm \sqrt{b \frac{4b - 3a}{2 - R_1}}, \frac{aR_1 - R_2}{(4b - 3a)R_1 - 4b + 6a} \right)$$

هستند که در آن

$$R_1 = \sqrt{3a^2 - 4ab + 4},$$

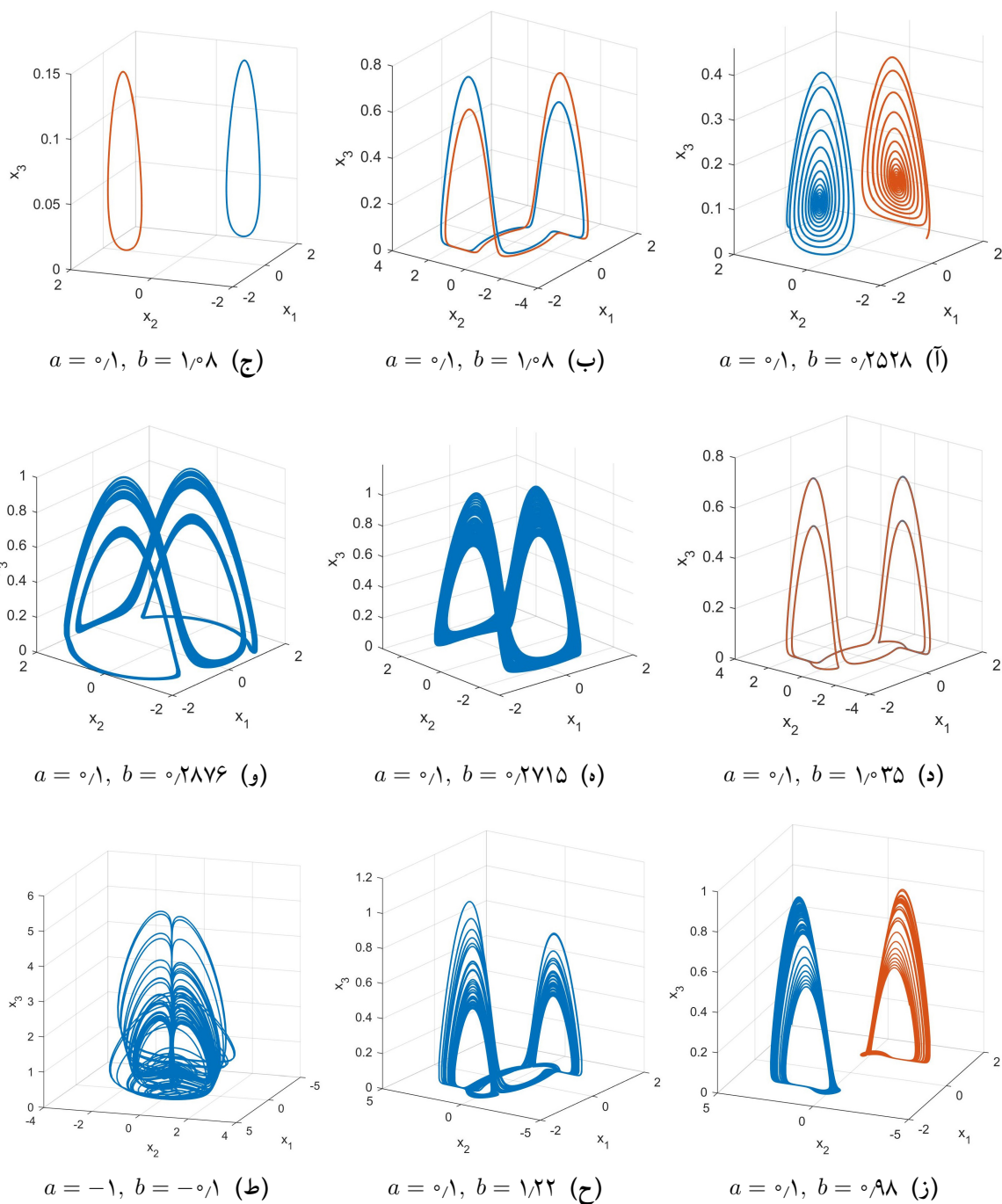
$$R_2 = 4ab^2 - 7a^2b + 3a^3 + 2a.$$

این سامانه تقارن $E : (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (-x_1, -x_2, x_3)$ را به نمایش می‌گذارد. تحت تبدیل E ، هر مسیر نسبت به محور x_3 یک مسیر متقارن «دوقلو» است. بنابراین، می‌توان فقط پایداری نقاط تعادل P_0 ، P_1 و P_3 را بررسی کرد. از آنجایی که در حال حاضر تجزیه و تحلیل کامل ریاضی این سامانه ناممکن است، بیشتر تحقیقات، مبتنی بر تحلیل‌های عددی و رایانه‌ای است. با پیروی از این رویه رایج، ما نیز در این مقاله، رویکردی مبتنی بر تحلیل عددی خواهیم داشت.

سامانه‌ی (۹) توسط دانکا و همکاران [۳۸، ۴۲، ۴۱] مورد مطالعه قرار گرفته است. آن‌ها با تجزیه و تحلیل عددی، نشان دادند که این سامانه، پویایی غیرمعمول و بسیار غنی، از جمله چندپایداری را به نمایش می‌گذارد. در اینجا، نتایج آن‌ها را با رویکرد عددی متفاوتی به دست می‌آوریم. آن‌ها از روش خطی‌سازی تکراری موضعی پیش‌بینی‌کننده-تصحیح‌کننده سه مرحله‌ای^{۱۸} استفاده کرده‌اند، که یک روش ضمنی ۳-گامی است [۴۰].

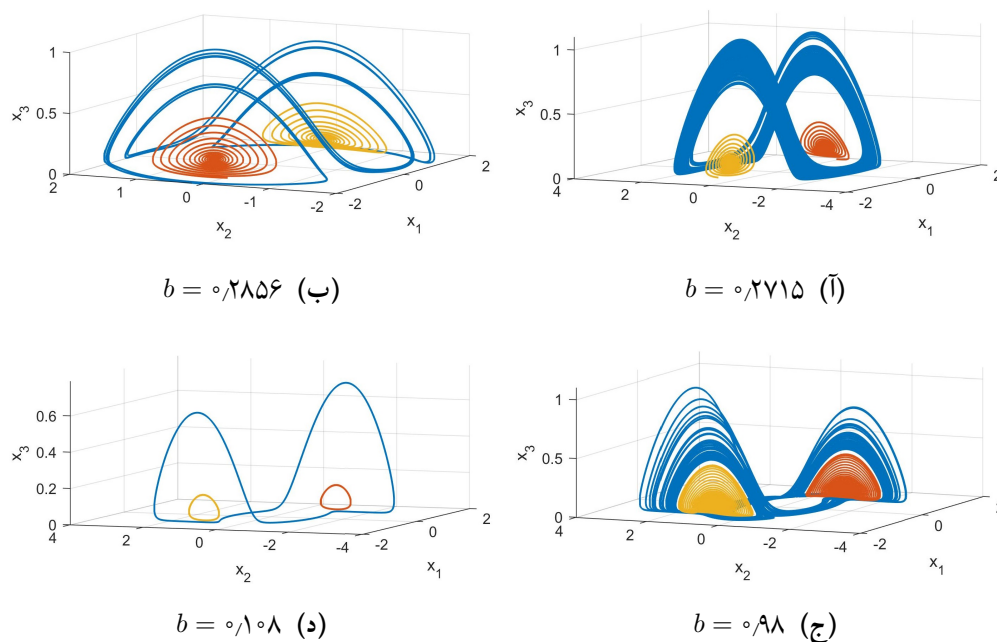
در این مقاله، برای محاسبه نماهای لیپانوف از بسته نرم‌افزاری MATDS قابل اجرا در نرم‌افزار Matlab با افزودن کدهایی جهت گرفتن خروجی موردنظر، استفاده کرده‌ایم و برای حل ODEها نیز حل‌کننده ode45 در محیط این نرم‌افزار با خطای نسبی $RelTol = 10^{-7}$ و خطای مطلق $AbsTol = 10^{-7}$ استفاده شده است. طول گام مورد استفاده در روش‌های عددی نیز $h = 10^{-6}$ در نظر گرفته شده است.

¹⁸3-step predictor-corrector Local Iterative Linearization (LIL) method



شکل ۲. جاذب‌های آشوبناک سامانه‌ی (۹) به‌ازای برخی مقادیر a و b . در شکل‌های (ب) و (ج) پارامترها برابرند ولی مقادیر اولیه متفاوت هستند. مقادیر اولیه در جدول ۲ آمده‌اند.

Figure 2: Chaotic attractors of the system (9) for some values of a and b . In Figures (B) and (C), the parameters are the same, but the initial values are different. Initial values are given in table 2.



شکل ۳. جاذب‌های هم‌زیست سامانه‌ی (۹) به ازای $a = 0.1$ و برخی مقادیر b : (آ)، (ب) و (ج) هم‌زیستی جاذب‌های آشوبناک با دو نقطه تعادل پایدار $P_{1,2}$ (ت) وجود سه چرخه‌حدی پایدار. در هر یک از شکل‌های (آ)، (ب)، (ج) و (د)، سه جاذب هم‌زیست وجود دارند که برای مقادیر ثابت a و b ، اما با شرایط اولیه متفاوت، به‌دست آمده‌اند.

Figure 3: Coexistence attractors of the system (9) for $a = 0.1$ and some values of b : (A), (B) and (C) Coexistence of chaotic attractors with two stable equilibrium points $P_{1,2}$ (t) Existence of three stable limit cycles. In each of the figures (A), (B), (C) and (D), there are three coexisting attractors obtained for fixed values of a and b , but with different initial conditions.

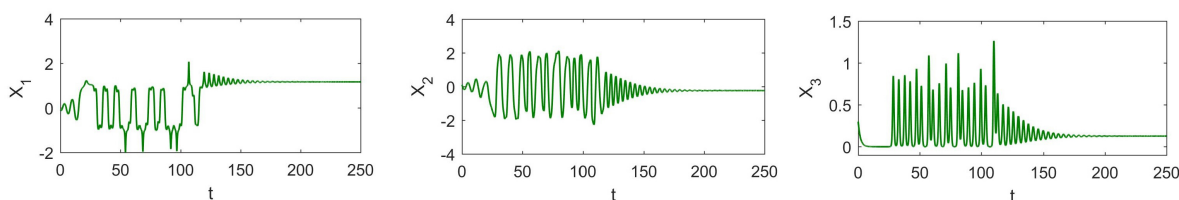
در اینجا، انواع مختلفی از جاذب‌ها که در سامانه‌ی RF مشاهده شده‌اند را معرفی می‌کنیم. در شکل ۲، دو نقطه ثابت (تعادل) و در شکل‌های ۲ب، ۲ج و ۲د جواب‌های تناوبی دیده می‌شوند که به‌ازای برخی مقادیر a و b به‌دست آمده‌اند. جزئیات مربوطه در جدول ۲ آمده است. در شکل‌های ۲ه و ۲و جاذب‌های آشوبناک پنهان سامانه‌ی (۹) و در شکل ۲ز، جاذب‌های آشوبناک خودبرانگیخته متقارن هم‌زیست نشان داده شده‌اند. در شکل‌های ۲ح و ۲ط نیز جاذب‌های آشوبناک خودبرانگیخته به‌ازای برخی مقادیر a و b نمایش داده شده‌اند. جزئیات مربوطه در جدول ۲ آمده است. در شکل ۳ چند نمونه از جاذب‌های هم‌زیست ۱۹ ارائه شده‌اند. یک رفتار آشوبناک جالب توجه در $a = 0.1$ و $b = 0.279$ اتفاق می‌افتد. همان‌طور که نمودار فاز در شکل ۴ نشان می‌دهد، رفتار آشوبناک به‌طور قابل توجهی به‌طول می‌انجامد و سپس از بین می‌رود. بنابراین، می‌توان آن را به‌عنوان آشوب زودگذر ۲۰ در نظر گرفت. در اینجا به‌نظر می‌رسد که سامانه دارای نوعی ”خودکنترلی” بوده که در نتیجه آن می‌تواند رفتار آشوبناک را از بین ببرد. هرچند در نگاه اول، این رفتار سامانه، نشان‌دهنده هم‌زیستی یک جاذب آشوبناک با یک گره کانونی پایدار P_2 است اما پس از مدت زمان کافی، با تأثیر قوی‌تر پایداری P_2 ، رفتار آشوبناک از بین می‌رود. این وضعیت بر پیچیدگی ساختار مرزی دامنه‌های جذب در هم تنیده سامانه‌ی RF تأکید دارد. رفتار آشوبناک جالب‌توجه دیگر، هم‌زیستی دو آشوب پنهان زودگذر می‌باشد که در شکل ۵ به تصویر کشیده شده‌اند.

¹⁹Coexisting attractors ²⁰transient chaos

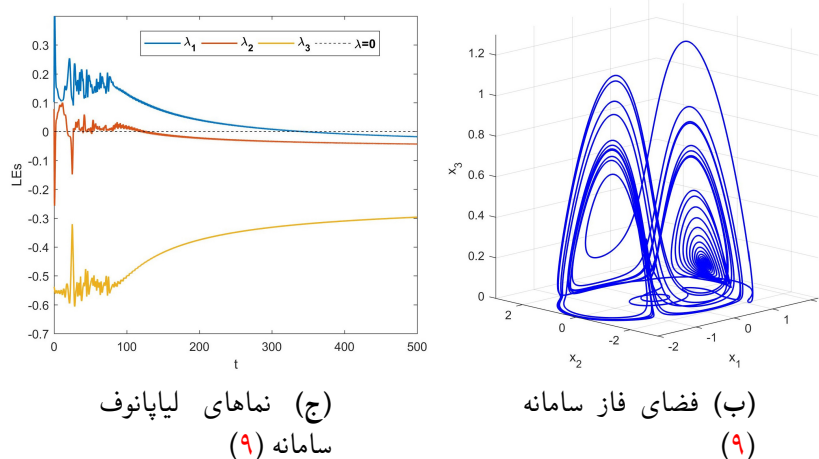
جدول ۲. جزئیات محاسباتی مربوط به شکل ۲.

Table 2: Computational details related to the figure 2.

شماره شکل	شرط اولیه	نماهای لیاپانوف	بُعد هاسدورف	دینامیک جاذب
شکل ۲آ	$[-0.5314, 1.4830, 0.0321]$	$-0.0453, -0.0535, -0.2724$	۰	ثابت
شکل ۲ب	$[-0.6316, 1.1310, 0.0000]$	$0.0000, -0.1324, -1.8272$	۱	متناوب
شکل ۲ج	$[1.0387, -1.2275, 0.0128]$	$0.0000, -0.1324, -1.8272$	۱	متناوب
شکل ۲د	$[0.9630, -0.7123, 0.0001]$	$0.0000, -0.0718, -1.8005$	۱	متناوب
شکل ۲ه	$[-0.7423, 0.4580, 0.8653]$	$0.0813, 0.0000, -0.4245$	۲/۱۹۱۵	آشوبناک
شکل ۲و	$[-2.0000, 0.0001, 0.0008]$	$0.0569, 0.0000, -0.4323$	۲/۱۳۱۶	آشوبناک
شکل ۲ز	$[-0.8350, 1.1920, 0.4450]$	$0.0629, 0.0000, -1.8227$	۲/۰۳۴۵	آشوبناک
شکل ۲ح	$[-0.9179, 2.1930, 0.2846]$	$0.0134, 0.0000, -2.2510$	۲/۰۰۶۰	آشوبناک
شکل ۲ط	$[-0.8350, 1.1920, 0.4450]$	$0.0806, 0.0000, -1.8694$	۲/۰۴۳۱	آشوبناک



(آ) پاسخ زمانی متغیرهای حالت سامانه (۹)

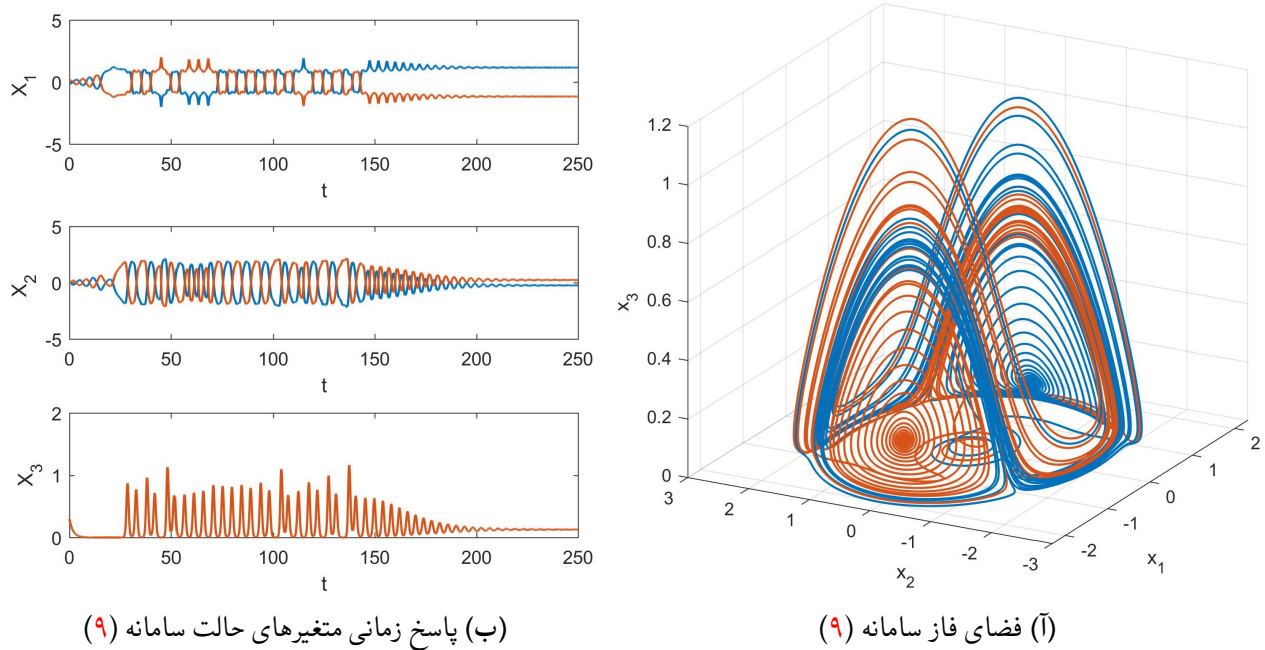


(ج) نماهای لیاپانوف
سامانه (۹)

(ب) فضای فاز سامانه
(۹)

شکل ۴. آشوب پنهان زودگذر در سامانه‌ی (۹) برای $a = 0.1$ و $b = 0.279$.

Figure 4: Transient hidden chaos in the system (9) for $a = 0.1$ and $b = 0.279$.



(ب) پاسخ زمانی متغیرهای حالت سامانه (۹)

(آ) فضای فاز سامانه (۹)

شکل ۵. همزیستی دو آشوب پنهان زودگذر در سامانه‌ی (۹) برای $a = 0.1$ و $b = 0.279$.

Figure 5: Coexistence of two transient hidden chaos in the system (9) for $a = 0.1$ and $b = 0.279$.

۴. سامانه‌ی رابینوویچ-فابریکانت تعمیم یافته

اخیرا تعمیمی از سامانه‌ی (۹) به صورت زیر ارائه و مورد بررسی عددی قرار گرفته است [۱، ۲]:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= [p(x_1^2 + x_3) + q(-x_1^2 + 3x_3) - 1], x_2 + ax_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= [p(-x_1^2 + 3x_3) + q(x_1^2 + x_3) + 1], x_1 + ax_2 \\ \frac{dx_3}{dt} &= -2x_3(b + (p + q)x_1x_2). \end{aligned} \quad (10)$$

این سامانه با $p = 1$ و $q = 0$ به سامانه‌ی (۹) تبدیل می‌شود. در این بخش، سامانه‌ی زیر را به عنوان تعمیمی از سامانه‌ی (۹) در نظر می‌گیریم:

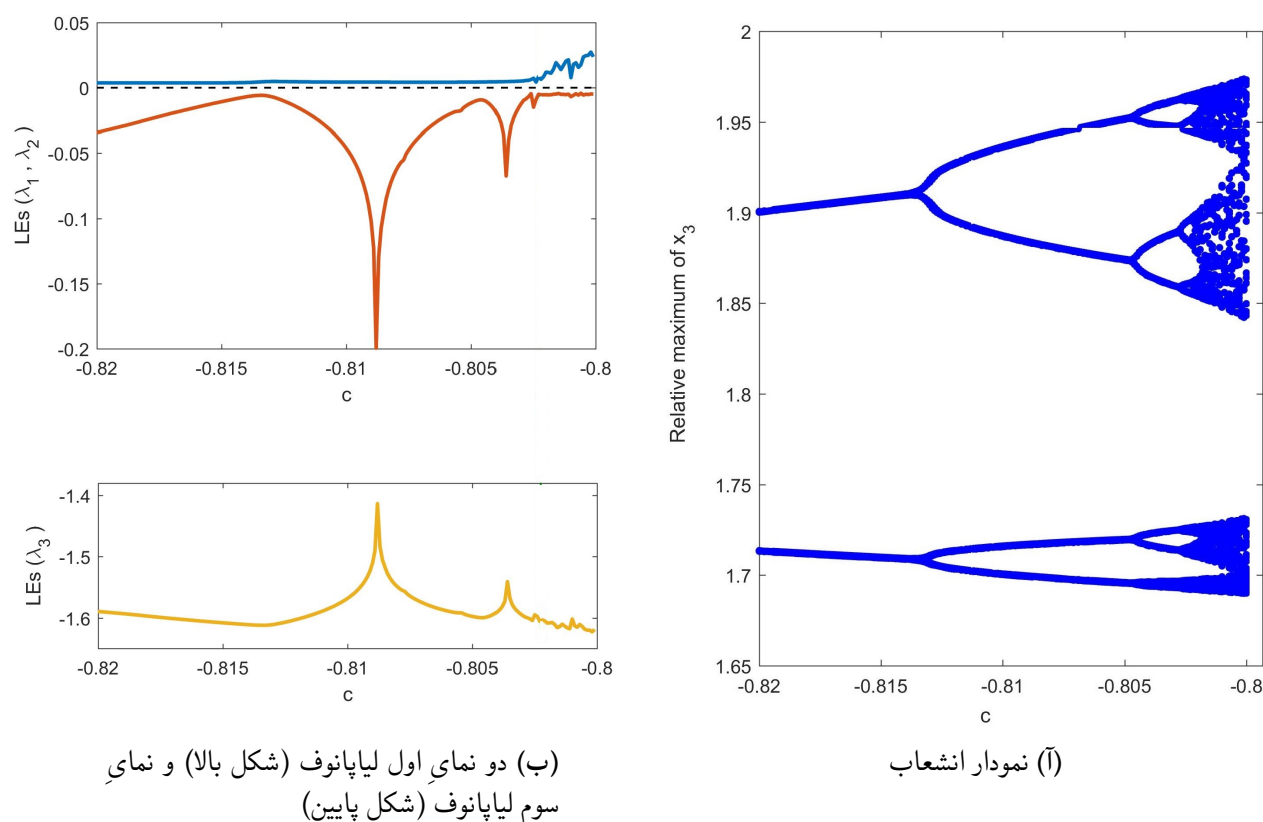
$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2(x_3 - 1 + x_1^2) + ax_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1(3x_3 + 1 - x_1^2) + cx_2 \\ \frac{dx_3}{dt} &= -2x_3(b + x_1x_2) \end{aligned} \quad (11)$$

این سامانه با $c = a$ ، به سامانه‌ی (۹) تبدیل می‌شود. این تعمیم، ساده‌تر از تعمیم (۱۰) است ولی همان نتایج را در آشکارسازی آشوب و به‌خصوص فرایند تبدیل انشعاب مضاعف‌سازی دوره تناوب به آشوب در بر دارد. با توجه به رابطه‌ی

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = (2x_1x_2 + a) + (c) + (-2x_1x_2 - 2b) = a + c - 2b,$$

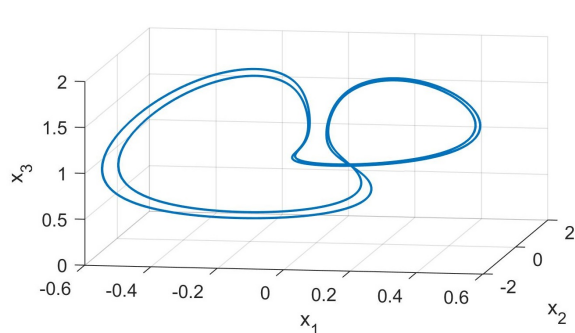
سامانه‌ی (۱۱) اتلافی است هرگاه $a + c - 2b < 0$.

پارامترهای $a = -1$ و $b = -0.1$ را ثابت گرفته و c را به‌عنوان پارامتر انشعاب در نظر می‌گیریم. بنابراین، با $c < 0.8$ ، این سامانه اتلافی خواهد بود و می‌تواند آشوبناک باشد. با توجه به این‌که سامانه (۹) در مباحث رمزنگاری و ارتباطات ایمن کاربرد ویژه‌ای دارد، تعمیم سامانه و افزودن بر پیچیدگی آن، رسیدن به این اهداف و کاهش احتمال رمزگشایی و ناایمن کردن ارتباطات را به‌همراه داشت. در ادامه، پویایی‌های پیچیده سامانه را برای $a = -1$ ، $b = -0.1$ و برخی مقادیر $c < 0.8$ بررسی می‌کنیم.

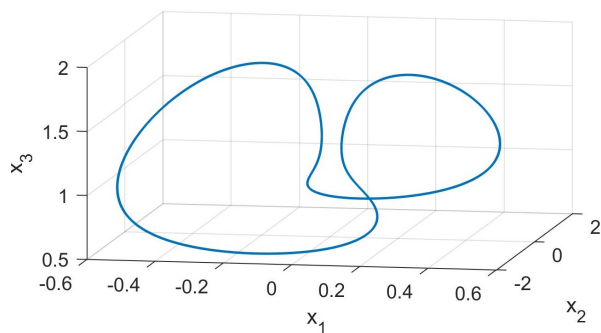


شکل ۶. نمودار انشعاب و نماهای لیپانوف سامانه (۱۱).

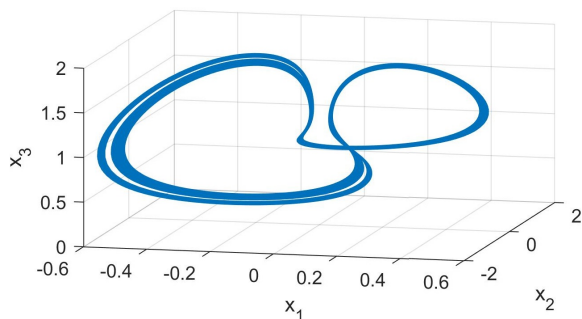
Figure 6: Bifurcation diagram and Lyapunov exponents of system (11).



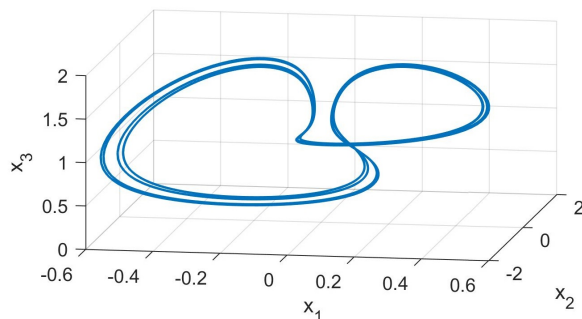
(ب) $c = -0.806$. حرکت متناوب با دوره تناوب ۲۸/۴



(آ) $c = -0.82$. حرکت متناوب با دوره تناوب ۱۴/۲



(د) $c = -0.8015$. حرکت آشوبناک



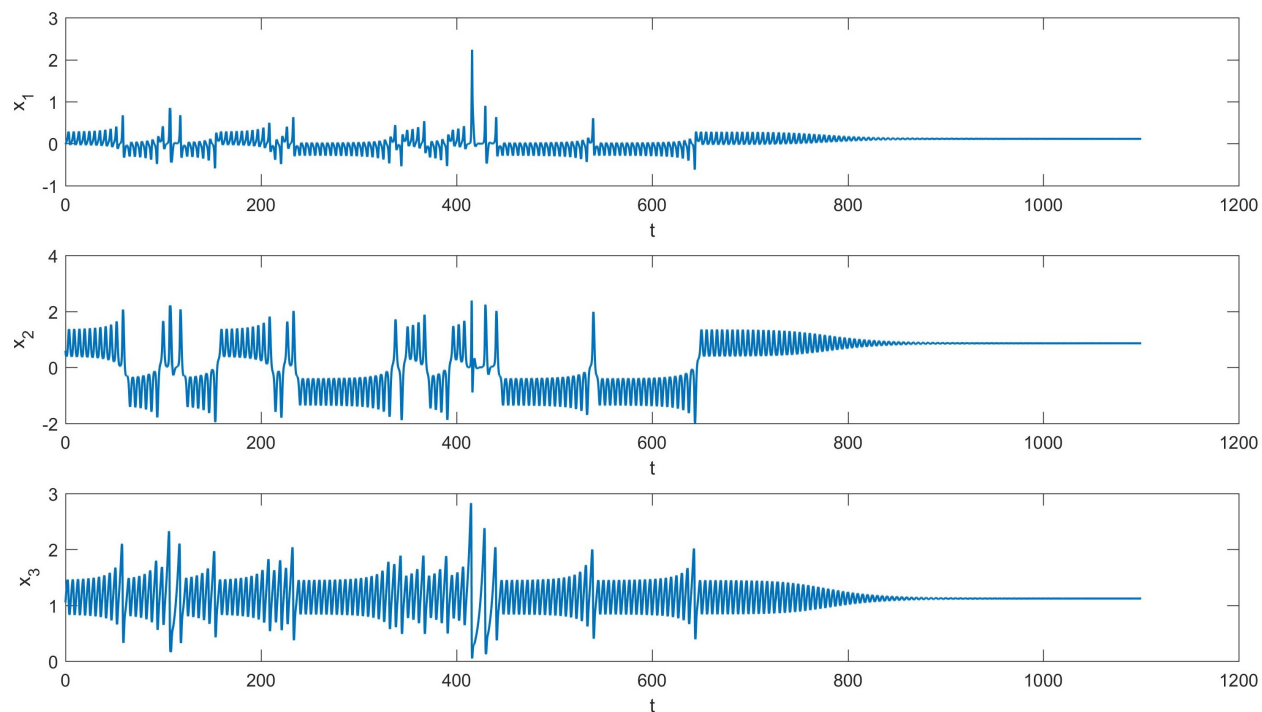
(ج) $c = -0.8034$. حرکت متناوب با دوره تناوب ۵۶/۷

شکل ۷. فضای فاز سامانه‌ی (۱۱) برای $a = -1$, $b = -0.1$ و مقادیر مختلف c ، که نشان‌دهنده فرایند تبدیل انشعاب مضاعف‌سازی دوره تناوب به آشوب است.

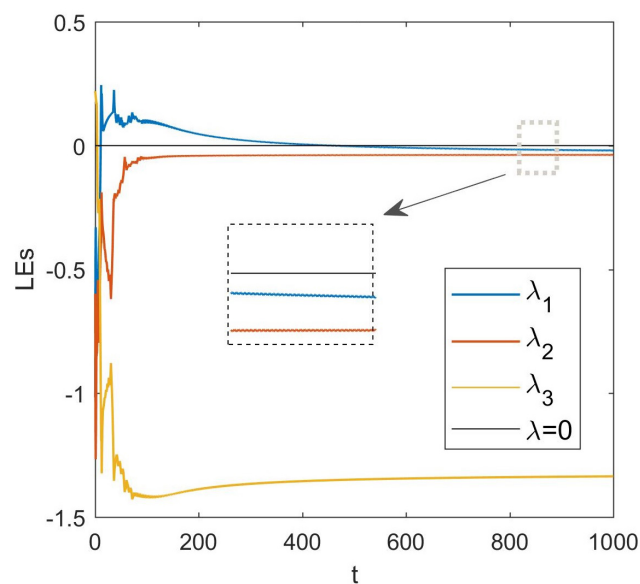
Figure 7: The phase space of the system (11) for $a = -1$, $b = -0.1$ and different values of c , which shows the process of converting period-doubling bifurcation to chaos.

۱.۴. انشعاب مضاعف‌سازی دوره تناوب منتهی به آشوب. با ثابت نگه‌داشتن $a = -1$ و $b = -0.1$ و تغییر c روی بازه $[-0.82, -0.80]$ نمودار انشعاب و نماهای لیاپانوف سامانه (۱۱)، در شکل ۶ ترسیم شده‌اند. مشاهده می‌شود که برای $c \in [-0.8200, -0.8030]$ سامانه دارای دو نمای لیاپانوف منفی و یک نمای لیاپانوف صفر است و در این بازه جواب متناوب داریم، هم‌چنین برای $c \in [-0.8030, -0.8000]$ یک نمای لیاپانوف منفی، یک نمای لیاپانوف صفر و یک نمای لیاپانوف مثبت داریم و بنابراین سامانه آشوبناک خواهد بود.

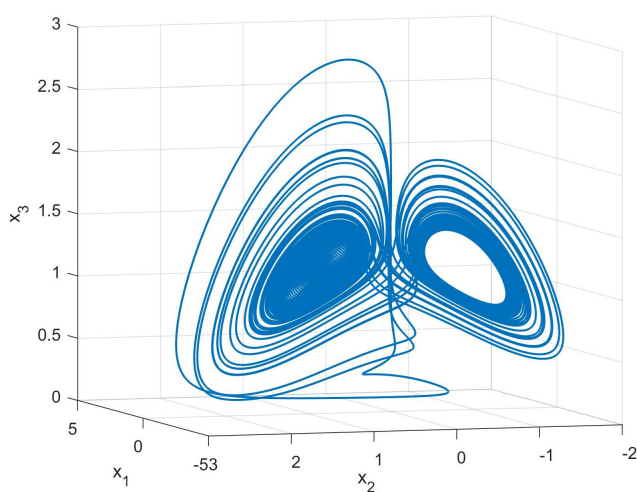
نمودار انشعاب رسم‌شده در شکل ۶آ، انشعاب مضاعف‌سازی دوره تناوب منتهی به آشوب را نشان می‌دهد. در نظریه سامانه‌های پویا، انشعاب مضاعف‌سازی دوره تناوب، زمانی اتفاق می‌افتد که یک تغییر جزئی در پارامترهای یک سامانه باعث می‌شود که یک مسیر تناوبی جدید از یک مسیر تناوبی موجود پدیدار شود. دوره تناوب مسیر جدید، دو برابر دوره تناوب مسیر اولیه است. به این فرایند، مضاعف‌سازی دوره تناوب گویند که تکرار مداوم آن، یکی از مسیرهای منتهی به آشوب است. فرایند انشعاب مضاعف‌سازی دوره تناوب منتهی به آشوب، در شکل ۷ قابل مشاهده است.



(آ) پاسخ زمانی متغیرهای حالت سامانه (۱۱)



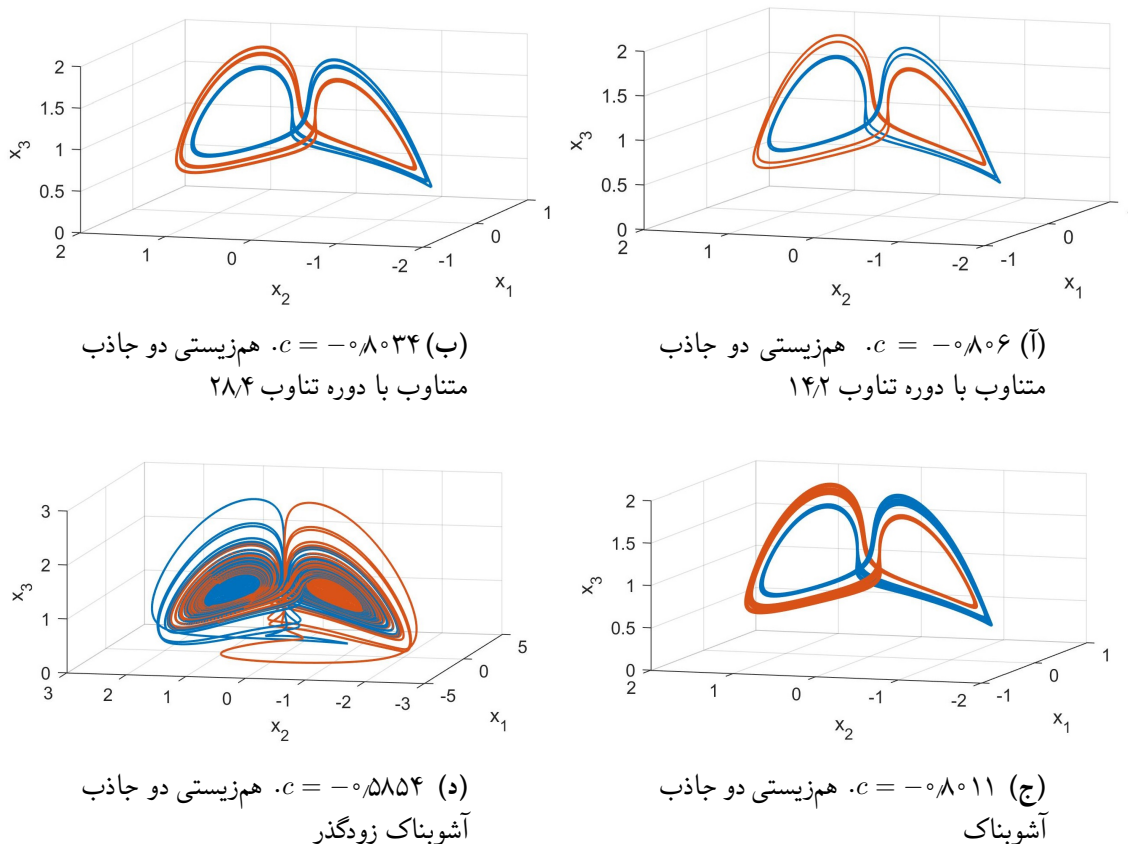
(ج) نماهای لیاپانوف سامانه (۱۱)



(ب) فضای فاز سامانه (۱۱)

شکل ۸. آشوب زودگذر در سامانه (۱۱) برای $a = -1$ ، $b = -0.1$ و $c = -0.5854$.

Figure 8: Transient chaos in the (11) system for $a = -1$, $b = -0.1$ and $c = -0.5854$.



شکل ۹. همزیستی جاذب‌ها به ازای $a = -1$ ، $b = -0.1$ و برخی مقادیر c .

Figure 9: Coexistence of attractors for $a = -1$, $b = -0.1$ and some values of c .

۲.۴. آشوب زودگذر. یک رفتار آشوبناک اما زودگذر در شکل ۸ مشاهده می‌شود. همان‌طور که نمودار در شکل ۸آ نشان می‌دهد، این رفتار آشوبناک به‌طور قابل توجهی و بیشتر از رفتار آشوبناک نشان داده شده در شکل ۴آ، به طول می‌انجامد ولی پس از مدتی از بین می‌رود و به نقطه ثابت منجر می‌شود.

۳.۴. همزیستی جاذب‌ها. شکل ۹، همزیستی برخی جاذب‌ها را به تصویر کشیده است. جزئیات مربوطه در توضیحات شکل مشخص شده‌اند.

۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله، سامانه‌ی رابینوویچ-فابریکانت و مدل تعمیم‌یافته آن را مورد مطالعه عددی قرار دادیم. برای سامانه‌ی تعمیم‌یافته، وقوع رفتارهای پویای بسیار غنی و پیچیده را با برهمکنش سه پارامتر مشخص کردیم. به‌ویژه، پدیده انشعاب مضاعف‌سازی دوره تناوب منتهی به آشوب را نشان دادیم، که قبلاً در سامانه‌ی رابینوویچ-فابریکانت گزارش نشده بود. دیدیم که با تغییر پارامتر انشعاب در یک بازه بسیار کوچک، فرآیند تکامل سامانه، با تکرار مداوم انشعاب مضاعف‌سازی دوره تناوب، از جواب متناوب به آشوب ختم می‌شود. رفتارهای پویای پیچیده سامانه با استفاده از طیف نمای لیاپانوف، نمودار انشعاب وابسته به پارامترها و مقاطع مختلف از فضای فاز بررسی شدند. این مطالعه براساس حل عددی معادلات دیفرانسیل و تجزیه و تحلیل

انشعاب عددی آن‌ها با استفاده از نرم‌افزار Matlab صورت گرفت. نتایج به‌دست آمده جدید هستند، زیرا این تعمیم از سامانه‌ی رابینوویچ-فابریکانت، برای اولین بار مطرح شده است. مدل تعمیم‌یافته، می‌تواند برای شبیه‌سازی سامانه‌هایی در مهندسی رادیو و الکترونیک که در آن‌ها یک تعامل سه‌حالت وجود دارد و شامل جملات غیرخطی مرتبه سه هستند، مورد استفاده قرار گیرد. سامانه‌ی رابینوویچ-فابریکانت، سامانه‌هایی با ماهیت فیزیکی را شبیه‌سازی می‌کند و از این‌رو، ضرایب گنجانده‌شده در آن‌ها باید مثبت باشند، اما ماهیت به‌شدت غیرخطی و آشوبناک آن، که از وجود جملات مرتبه سوم نشأت می‌گیرد، کاربرد آن‌ها را در ارتباطات ایمن از اهمیت خاصی برخوردار کرده است. بنابراین، تعمیم مصنوعی آن، با استفاده از پارامترهای منفی، که خود بر پیچیدگی پویایی غنی آن می‌افزاید، از اهمیت خاصی برخوردار است.

مراجع

- [1] S. P. Kuznetsov and L. V. Turukina, Generalized Rabinovich–Fabrikant system: equations and its dynamics, *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, **30** no. 1 (2022) 7–29.
- [2] L. V. Turukina, Dynamics of the Rabinovich–Fabrikant system and its generalized model in the case of negative values of parameters that have the meaning of dissipation coefficients, *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, **30** no. 6 (2022) 685–701.
- [3] H. J. Yakubu, E. G. Dada, S. B. Joseph and A. K. Anukem, A new chaotic image encryption algorithm for digital colour images using rabinovich-fabrikant equations, *International Journal of Computer Science and Information Security (IJCSIS)*, **17** no. 1 (2019) 15–23.
- [4] A. Alghafis, N. Munir and M. Khan, An encryption scheme based on chaotic Rabinovich–Fabrikant system and S 8 confusion component, *Multimed. Tool. Appl.*, **80** (2019) 7967–7985.
- [5] A. Javeed, T. Shah and M. Attaullah, Design of an S-box using Rabinovich–Fabrikant system of differential equations perceiving third order nonlinearity, *Multimed. Tool. Appl.*, **79** (2020) 6649–6660.
- [6] S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1994.
- [7] J. P. Eckmann and D. Ruelle, Ergodic theory of chaos and strange attractors, *Rev. Mod. Phys.*, **57** no. 3 (1985) 617–630.
- [8] J. D. Farmer, E. Ott and J. A. Yorke, The dimension of chaotic attractors, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **7** no. 1-3 (1983) 153–180.
- [9] V. I. Oseledets, A multiplicative ergodic theorem. Characteristic Ljapunov, exponents of dynamical systems, *Trudy Moskovskogo Matematicheskogo Obshchestva, Trans. Moscow Math. Soc.*, **19** (1968) 197–231.
- [10] A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney and J. A. Vastano, Determining Lyapunov exponents from a time series, *Physica D: nonlinear phenomena*, **16** no. 3 (1985) 285–317.
- [11] V. G. Ivancevic and T. T. Ivancevic, *High-dimensional chaotic and attractor systems: a comprehensive introduction*, Springer Science & Business Media, 2007.
- [12] M. Klein and G. Baier, *Hierarchies of dynamical systems*, A chaotic hierarchy, World Sci. Publ., Teaneck, NJ, 1991 1–23.
- [13] D. J. Evans, E. G. D. Cohen, D. J. Searles and F. Bonetto, Note on the Kaplan–Yorke dimension and linear transport coefficients, *J. Statist. Phys.*, **101** no. 1-2 (2000) 17–34.
- [14] P. Frederickson, J. L. Kaplan, E. D. Yorke and J. A. Yorke, The Liapunov dimension of strange attractors, *J. Differential Equations*, **49** no. 2 (1983) 185–207.

- [15] L. S. Young, Dimension, entropy and Lyapunov exponents, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **2** no. 1 (1982) 109–124.
- [16] F. Ledrappier and L. S. Young, Dimension formula for random transformations, *Comm. Math. Phys.*, **117** no. 4 (1988) 529–548.
- [17] H. Haken, At least one Lyapunov exponent vanishes if the trajectory of an attractor does not contain a fixed point, *Phys. Lett. A*, **94** no. 2 (1983) 71–72.
- [18] M. Sandri, Numerical calculation of Lyapunov exponents, *Mathematica Journal*, **6** no. 3 (1996) 78–84.
- [19] M. Klein and G. Baier, *Hierachies of dynamical systems*, In A Chaotic Hierarchy, edited by G. Baier and M. Klein, World Scientific: Singapore, 1991
- [20] Q. Yang, Z. Wei and G. Chen, An unusual 3D autonomous quadratic chaotic system with two stable node-foci, *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, **20** no. 4 (2010) 1061–1083.
- [21] D. Dudkowski, S. Jafari, T. Kapitaniak, N. V. Kuznetsov, G. A. Leonov and A. Prasad, Hidden attractors in dynamical systems, *Phys. Rep.*, **637** (2016) 1–50.
- [22] B. Munmuangsaen and B. Srisuchinwong, A hidden chaotic attractor in the classical Lorenz system, *Chaos Solitons Fractals*, **107** (2018) 61–66.
- [23] N. V. Kuznetsov and G. A. Leonov, Hidden attractors in dynamical systems: systems with no equilibria, multistability and coexisting attractors, *IFAC Proceedings Volumes*, **47** no. 3 (2014) 5445–5454.
- [24] N. V. Kuznetsov, Hidden attractors in fundamental problems and engineering models: A short survey, In *AETA 2015: Recent Advances in Electrical Engineering and Related Sciences*, (2016) 13–25.
- [25] J. P. Singh and B. K. Roy, The simplest 4-D chaotic system with line of equilibria, chaotic 2-torus and 3-torus behaviour, *Nonlinear Dynam.*, **89** no. 3 (2017) 1845–1862.
- [26] H. Natiq, M. R. M. Said, M. R. K. Ariffin, S. He, L. Rondoni and S. Banerjee, Self-excited and hidden attractors in a novel chaotic system with complicated multistability, *The Europ. Phys. J. Plus*, **133** no. 557 (2018) 1–12.
- [27] A. N. Pisarchik and U. Feudel, Control of multistability, *Phys. Rep.*, **540** no. 4 (2014) 167–218.
- [28] F. T. Arecchi, R. Meucci, G. Puccioni and J. Tredicce, Experimental evidence of subharmonic bifurcations, multistability, and turbulence in a Q-switched gas laser, *Phys. Rev. Lett.*, **49** no. 17 (1982).
- [29] J. C. Sprott, X. Wang and G. Chen, Coexistence of point, periodic and strange attractors, *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, **23** no. 5 (2013) 5 pp.
- [30] C. Li and J. C. Sprott, Multistability in the Lorenz system: a broken butterfly, *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, **24** no. 10 (2014) 7 pp.
- [31] J. Kengne, Z. T. Njitacke and H. B. Fotsin, Dynamical analysis of a simple autonomous jerk system with multiple attractors, *Nonlinear Dynam.*, **83** no. 1-2 (2016) 751–765.
- [32] G. Wang, F. Yuan, G. Chen and Y. Zhang, Coexisting multiple attractors and riddled basins of a memristive system, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **28** no. 1 (2018) 11 pp.
- [33] E. N. Lorenz, Deterministic nonperiodic flow, *J. Atmospheric Sci.*, **20** no. 2 (1963) 130–141.
- [34] S. Banerjee, S. K. Palit, S. Mukherjee, M. R. K. Ariffin and L. Rondoni, Complexity in congestive heart failure: A time-frequency approach, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **26** no. 3 (2016) 10 pp.

- [35] L. Rondoni, M. R. K. Ariffin, R. Varatharajoo, S. Mukherjee, S. K. Palit and S. Banerjee, Optical complexity in external cavity semiconductor laser, *Opt. Commun.*, **387** (2017) 257–266.
- [36] S. J. S. Theesar, S. Banerjee and P. Balasubramaniam, Synchronization of chaotic systems under sampled-data control, *Nonlinear Dynam.*, **70** no. 3 (2012) 1977–1987.
- [37] P. Saha, S. Banerjee and A. R. Chowdhury, Chaos, signal communication and parameter estimation, *Phys. Lett. A*, **326** no. 1-2 (2004) 133–139.
- [38] M. F. Danca and N. Kuznetsov, Hidden strange nonchaotic attractors, *Mathematics*, **9** no. 6 (2021).
- [39] S. P. Kuznetsov and L. V. Turukina, Generalized Rabinovich-Fabrikant system: equations and its dynamics, *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, **30** no. 1 (2022) 7–29.
- [40] M. F. Danca, A multistep algorithm for ODEs, *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. B Appl. Algorithms*, **13** no. 6 (2006) 803–821.
- [41] M. F. Danca, Hidden transient chaotic attractors of Rabinovich-Fabrikant system, *Nonlinear Dynam.*, **86** no. 2 (2016) 1263–1270.
- [42] M. F. Danca, M. Feckan, N. Kuznetsov and G. Chen, Looking more closely at the Rabinovich-Fabrikant system, *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, **26** no. 2 (2016) 21 pp.
- [43] M. I. Rabinovich and A. L. Fabrikant, Stochastic self-modulation of waves in nonequilibrium media, *J. Exp. Theor. Phys.*, **77** (1979) 617–629.
- [44] S. Ullah, X. Liu, A. Waheed and S. Zhang, An efficient construction of S-box based on the fractional-order Rabinovich-Fabrikant chaotic system, *Integration, the VLSI Journal*, **94** (2024).
- [45] A. Javeed, T. Shah and M. Attaullah, Design of an S-box using Rabinovich-Fabrikant system of differential equations perceiving third order nonlinearity, *Multimed. Tool. Appl.*, **79** (2020) 6649–6660.
- [46] H. J. Yakubu, E. G. Dada, S. B. Joseph and A. K. Anukem, A new chaotic image encryption algorithm for digital colour images using rabinovich-fabrikant equations, *International Journal of Computer Science and Information Security (IJCSIS)*, **17** no. 1 (2019) 15–23.
- [47] A. Alghafis, N. Munir and M. Khan, An encryption scheme based on chaotic Rabinovich-Fabrikant system and S 8 confusion component, *Multimed. Tool. Appl.*, **80** (2021) 7967–7985.
- [48] A. Andronov and A. L. Fabrikant, *Nelineinyye Volny (Nonlinear Waves)* ed Executive Ed AV Gaponov-Grekhov, (1979) 68.

[۴۹] م. دلخوش، معرفی فرکتال‌ها و بعدها‌ی کسری، ریاضی و جامعه، ۲ no. ۱ (۱۳۹۶) ۲۳-۱.

[۵۰] ا. زارعی زفره، الگوریتم رمزنگاری تصویر مبتنی بر گروه جایگشت Sn و توابع آشوب، پدافند الکترونیکی و سایبری، ۳ no. ۸ (۱۳۹۹) ۱۳۹-۱۵۰.

محمدی هادی مصلحی

گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور تهران، تهران، ایران

mh_moslehi@pnu.ac.ir

محمد هادی مصلحی، استادیار گروه ریاضی دانشگاه پیام نور است. سیستم‌های دینامیکی، معادلات دیفراسیل، انشعاب و آشوب، مدل‌سازی ریاضی و محاسبات عددی از علایق پژوهشی آقای مصلحی هستند.



سید محمدامین خاتمی

گروه علوم کامپیوتر، دانشگاه صنعتی بیرجند، بیرجند، ایران

khatami@birjandut.ac.ir

سید محمدامین خاتمی، استادیار منطق ریاضی گروه علوم کامپیوتر دانشگاه صنعتی بیرجند است. نظریه مدل منطق پیوسته و منطق فازی، نظریه مجموعه‌ها، ترکیبیات، آموزش ریاضی، تاریخ و فلسفه ریاضی و به‌تازگی نظریه پیچیدگی از علایق پژوهشی آقای خاتمی هستند.

