

SHAPE OPERATOR OF AN $(n - 1)$ -DIMENSIONAL DISTRIBUTION ON AN n -DIMENSIONAL MANIFOLD AND THEIR CLASSIFICATION

MEHRAN AMINIAN*^{ORCID} AND MEHRAN NAMJOO^{ORCID}

ABSTRACT. This paper aims to study of shape operator of an $(n - 1)$ -dimensional distribution on an n -dimensional smooth manifold. In this study firstly we state formulae for the shape operator and its symmetric and anti-symmetric components and in continuation we show their relationships with some notions such as integrability, totally umbilic and totally geodesic. Finally, by considering at most two eigenvalues for the shape operator, we classify this distribution and their foliations in simply connected space forms.

1. Introduction

The study of surfaces in ordinary three-dimensional space was expanded by Gauss in the early 19th century by introducing the concepts of first and second fundamental forms and curvature. This approach was generalized by studying the submanifolds of a Riemannian manifold. Details of this matter in [10, 7, 11] have been studied. But other aspects need to be studied and in this paper, we intend to examine them.

In differential geometry, a distribution on a manifold is an association of vector subspaces that have special properties, and often this distribution is a subbundle of a tangent bundle. The distributions that have the integrability condition create a foliation on the manifold, that is, they separate the

Keywords: Distribution, shape Operator, second fundamental form

Communicated by Mohamad Reza Pouryayevali.

Article Type: Research Paper.

*Corresponding author.

Received: 2023-08-21, Accepted: 2023-12-31, Published Online: 23-04-2024.

Cite this article: M. Aminian and M. Namjoo, Shape operator of an $(n - 1)$ -dimensional distribution on an n -dimensional manifold and their classification, *Journal of Mathematics and Society*, **9** no. 1 (2024) 33–50.

<http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.138841.1600> .

manifold into smaller submanifolds. These concepts have many applications in different fields of mathematics, such as integrable systems, Poisson geometry, differential topology, etc [17, 2, 6].

The study of the geometry of regular distributions is a natural extension of the study of the geometry of submanifolds. The mode of integrable distributions is in accordance with the study of foliations. For more details we refer the reader to [16].

If the distribution is not integrable, then the tensor field of its shape operator, it is not symmetrical and its decomposition into symmetric and antisymmetric parts is related to the geometric properties of the distribution. The second fundamental form as well as the shape operator, is the main and basic tool which this research aims to study. We prove different properties of symmetric and antisymmetric components. Finally, by considering at most two eigenvalues for the shape operator, we classify the distribution and its foliations in simply connected space forms.

2. Main Results

Suppose (M^n, g) be a Riemannian manifold, $\mathcal{H}$ an $(n - 1)$ -dimensional regular distribution (horizontal distribution) on M and $\mathcal{V}$ the distribution of its orthogonal complement to the Riemannian metric g (vertical distribution). So $TM = \mathcal{H} \oplus \mathcal{V}$. Let H and V be smooth $(1, 1)$ -tensor fields that attribute to a vector field (to a vector) its horizontal and vertical parts, i.e. $H(E) = E - \langle E, N \rangle N$ and $V(E) = \langle E, N \rangle N$, where N is a unit vector field may be locally defined and it is perpendicular to the horizontal distribution. Here the symbol $\langle, \rangle$ stands for the inner multiplication of the metric g , and the second fundamental form of $\mathcal{H}$ is defined in the following form

$$B^{\mathcal{H}}(E, F) = V(\nabla_{H(E)} H(F)),$$

where ∇ denotes the Levi-Civita connection of metric g and $E, F \in \mathcal{X}(M)$.

Definition 2.1. [12] Suppose N be a unit vertical vector field. The shape operator S obtained from N , is given by the following relation

$$\langle SX, Y \rangle = \langle B^{\mathcal{H}}(X, Y), N \rangle,$$

where X , and Y , are horizontal vector fields.

The following proposition is similar to that in [12].

Proposition 2.2. Shape operator specifies a linear operator $S : \mathcal{H}_p \rightarrow \mathcal{H}_p$, at any point $p \in M$ and for each $v \in \mathcal{H}_p$, $Sv = -\nabla_v N$.

Remark 2.3. If the vertical vector field N (which may be locally defined) is replaced with $-N$, then the sign of S changes. So even if M lacks a vector field that is vertical throughout, then the shape operator S is defined globally up to sign. The sign of ambiguity should be removed from the inherent formulas.

Symmetric and antisymmetric components of $B^{\mathcal{H}}$ which is denoted by $B_s^{\mathcal{H}}$ and $B_a^{\mathcal{H}}$, respectively are defined as follows:

$$B_s^{\mathcal{H}}(E, F) = \frac{1}{2} (B^{\mathcal{H}}(E, F) + B^{\mathcal{H}}(F, E)),$$

$$B_a^{\mathcal{H}}(E, F) = \frac{1}{2} (B^{\mathcal{H}}(E, F) - B^{\mathcal{H}}(F, E)),$$

where $E, F \in \mathcal{X}(M)$. Therefore $B^{\mathcal{H}} = B_s^{\mathcal{H}} + B_a^{\mathcal{H}}$. Motivated by this, we offer the following definition.

Definition 2.4. Symmetric and antisymmetric components of S , which is denoted by S_s and S_a , respectively are defined by

$$\langle S_s X, Y \rangle = \langle B_s^{\mathcal{H}}(X, Y), N \rangle,$$

$$\langle S_a X, Y \rangle = \langle B_a^{\mathcal{H}}(X, Y), N \rangle,$$

where X and Y , are horizontal vector fields. As a result $S = S_s + S_a$, where

$$S_s = \frac{1}{2} (S + S^t),$$

$$S_a = \frac{1}{2} (S - S^t),$$

and S^t denotes the transpose of S .

Proposition 2.5. For each $v \in \mathcal{H}_p$, the following relationships are established:

$$S_s v = -\frac{1}{2} (\nabla_v N + H((\nabla N)^t v))$$

$$= -\frac{1}{2} (\nabla_v N + (\nabla N)^t v - \langle v, \nabla_N N \rangle N),$$

and

$$S_a v = -\frac{1}{2} (\nabla_v N - H((\nabla N)^t v))$$

$$= -\frac{1}{2} (\nabla_v N - (\nabla N)^t v + \langle v, \nabla_N N \rangle N).$$

Similar to what was stated in [3, 12], we arrive at the following proposition.

Proposition 2.6. For any horizontal vector field X, Y , we have

$$\langle S_s X, Y \rangle = \langle B_s^{\mathcal{H}}(X, Y), N \rangle$$

$$= -\frac{1}{2} (\mathcal{L}_N g)(X, Y).$$

Definition 2.7. We call $\mu^{\mathcal{H}}$ mean curvature and it is defined in the following form

$$\begin{aligned}\mu^{\mathcal{H}} &= \frac{1}{n-1} \operatorname{tr} B^{\mathcal{H}} \\ &= \frac{1}{n-1} \operatorname{tr} B_s^{\mathcal{H}} \\ &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} B_s^{\mathcal{H}}(e_i, e_i),\end{aligned}$$

where $\{e_i\}_{i=1}^{n-1}$ is a local orthogonal frame for $\mathcal{H}$.

Corollary 2.8. The mean curvature $\mu^{\mathcal{H}}$ has the following properties

(a)

$$\begin{aligned}\mu^{\mathcal{H}} &= \frac{1}{n-1} (\operatorname{tr} S) N \\ &= -\frac{1}{2(n-1)} (\operatorname{tr} \mathcal{L}_N g) N.\end{aligned}$$

(b) $\mu^{\mathcal{H}} = 0$, if and only if $\operatorname{tr} S = 0$, also $\operatorname{tr} S = 0$ if and only if $\operatorname{tr} \mathcal{L}_N g = 0$.

The following definition is similar to the definition which was stated in [3]

Definition 2.9. Let $\mathcal{H}$ be an $(n-1)$ -dimensional distribution.

(a) We call $\mathcal{H}$ totally umbilic if for all horizontal vector fields X, Y ,

$$B_s^{\mathcal{H}}(X, Y) = \langle X, Y \rangle \mu^{\mathcal{H}}.$$

(b) We call $\mathcal{H}$ totally geodesic if for all horizontal vector fields X, Y ,

$$B_s^{\mathcal{H}}(X, Y) = 0.$$

(c) We call $\mathcal{H}$ minimal if

$$\mu^{\mathcal{H}} = 0.$$

Based on the above definition, we conclude the following propositions.

Proposition 2.10. The distribution $\mathcal{H}$ is totally geodesic, if and only if it is totally umbilic and minimal.

Proposition 2.11. The distribution $\mathcal{H}$ is totally umbilic, if and only if for each selection N , tensor S_s be a scalar. Especially $\mathcal{H}$ it is totally geodesic If and only if for each selection N , $S_s = 0$.

Proposition 2.12. Let W be a nowhere zero Killing vector field. Then the distribution $\mathcal{H} = \langle W \rangle^{\perp}$ is totally geodesic and its symmetric shape operator is zero.

A discussion similar to the proposition 2.11 and knowing that the integrability of a distribution is equivalent to the symmetry of its second fundamental form (see [12] for more details), will lead to the following proposition.

Proposition 2.13. *Let $\mathcal{H}$ be an $(n - 1)$ -dimensional distribution.*

- (a) *The distribution $\mathcal{H}$ is integrable if and only if distribution shape operator, for each selection N , be symmetrical. Hence $S_s = S$ and $S_a = 0$.*
- (b) *The distribution $\mathcal{H}$ is totally umbilic and integrable if and only if the distribution shape operator, for each choice N , be a scalar and therefore each leaf of its foliation is a totally umbilic hypersurface.*

In the following, we assume that the vertical vector field N , be defined throughout manifold and therefore the shape operator obtained from N , without sign of ambiguously defined throughout manifold. Let $R^n(c)$ be a simply connected Riemannian space form with fixed sectional curvature c which is the Euclidean space $\mathbb{R}^n$ for $c = 0$, is the Euclidean sphere $\mathbb{S}^n$ for $c = 1$, and is the Hyperbolic space $\mathbb{H}^n$ for $c = -1$. A hypersurface in $R^n(c)$ is called an isoparametric if its principal curvatures are constant everywhere, counting multiplicities. In this case, we have the following proposition.

Proposition 2.14. *Let $\mathcal{H}$ be an $(n - 1)$ -dimensional distribution on $R^n(c)$ and $S = \alpha I$, where α is an arbitrary constant. Then either $c = 0$ or $c = -1$ and $\mathcal{H}$ is totally umbilic and integrable. If $c = 0$, then $\alpha = 0$, the distribution is totally geodesic, and each leaf of its foliation is a hyperplane. If $c = -1$, then $\alpha = \pm 1$, the distribution is non-minimal and each leaf of its foliation is a parabolic hypersurface.*

Corollary 2.15. *There is no $(n - 1)$ -dimensional distribution which is integrable and totally geodesic on $\mathbb{S}^n$ or $\mathbb{H}^n$.*

Proposition 2.16. *Let $\mathcal{H}$ be an $(n - 1)$ -dimensional distribution on $R^n(c)$, with $n > 2$, and $S = fI$, in which f is a smooth function on $R^n(c)$. Then either $c = 0$ or $c = -1$, and $\mathcal{H}$ is totally umbilic and integrable. If $c = 0$, then the distribution is totally geodesic and all leaves are hyperplanes and the function f is zero. If $c = -1$, then the distribution is non-minimal and each leaf is a hyperbolic or parabolic hypersurface. Also for all $x \in \mathbb{H}^n$, non-zero vector $a \in \mathbb{R}_1^{n+1}$, it is found that $\langle a, a \rangle \in \{0, 1\}$, and $f(x) = -\frac{\langle a, x \rangle}{\sqrt{\langle a, a \rangle + \langle a, x \rangle^2}}$.*

Corollary 2.17. *There is no $(n - 1)$ -dimensional distribution which is integrable and totally umbilic on $\mathbb{S}^n$, $n > 2$.*

Proposition 2.18. *There is no $(n - 1)$ -dimensional distribution which is integrable on $R^n(c)$ that its shape operator has only two distinct constant eigenvalues.*

Isoparameter hypersurfaces of $\mathbb{R}^n$ and $\mathbb{H}^n$ have at most two constant principal curvatures, and so, according to the propositions 2.14–2.18, we obtain the following result.

Corollary 2.19. *The only $(n - 1)$ -dimensional distribution on $\mathbb{R}^n$, which is integrable and all eigenvalues of its shape operator are constant, is generated by $n - 1$ linearly independent constant vector fields and so the distribution is totally geodesic and every leaf of its foliation is a hyperplane and the distribution shape operator is zero.*

Corollary 2.20. *There is no $(n - 1)$ -dimensional distribution on $\mathbb{H}^n$, which is integrable and all eigenvalues of its shape operator be constant and has at least two eigenvalues.*

3. Conclusion

In this paper, we studied the shape operator of a distribution and its properties, especially its decomposition into symmetric and antisymmetric parts. We showed that a distribution is totally umbilic if and only if the symmetric component of its shape operator is scalar, we also proved that it is totally geodesic if and only if the symmetric component of its form operator is zero. Finally, we considered the classification of $(n - 1)$ -dimensional distributions and studied simply connected space forms with a shape operator having at most two eigenvalues.

REFERENCES

- [1] L. J. Alías and S. M. B. Kashani, Hypersurfaces in space forms satisfying the condition $L_k x = Ax + b$, *Taiwanese J. Math.*, **14** no. 5 (2010) 1957–1977.
- [2] I. Androulidakis and M. Zambon, Stefan-Sussmann singular foliations, singular subalgebroids and their associated sheaves, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, **13** (2016) 17 pp.
- [3] P. Baird and J. C. Wood, *Harmonic morphisms between Riemannian manifolds*, London Mathematical Society Monographs. New Series, no. 29, The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2003.
- [4] F. Bullo and A. D. Lewis, *Geometric control of mechanical systems: modeling, analysis, and design for simple mechanical control systems*, **49**, Springer, 2019.
- [5] T. E. Cecil and P. J. Ryan, Isoparametric hypersurfaces, in: *Geometry of hypersurfaces*, Springer, New York, (2015) 85–184.
- [6] A. del Pino Gomez, Topological aspects in the study of tangent distributions, 13th Young Researchers Workshop on Geometry, Mechanics and Control, 3–67, *Textos Mat./Math. Texts*, **48**, Univ. Coimbra, Coimbra, 2019.
- [7] M. P. Do Carmo and J. Flaherty Francis, *Riemannian geometry*, **6**, Springer, 1992.
- [8] O. Gil-Medrano, Geometric properties of some classes of Riemannian almost-product manifolds, *Rend. Circ. Mat. Palermo (2)*, **32** no. 3 (1983) 315–329.
- [9] A. Gray, Pseudo-Riemannian almost product manifolds and submersions, *J. Math. Mech.*, **16** (1967) 715–737.
- [10] N. J. Hicks, *Notes on differential geometry*, no. 3, D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N. J.-Toronto-London, 1965.

- [11] J. M. Lee, *Introduction to Riemannian manifolds*, Second edition, Graduate Texts in Mathematics, **176**, Springer, Cham, 2018.
- [12] M. C. Muñoz Lecanda, On some aspects of the geometry of non integrable distributions and applications, *J. Geom. Mech.*, **10** no. 4 (2018) 445–465.
- [13] H. Nijmeijer and A. Van der Schaft, *Nonlinear dynamical control systems*, **464**, Springer-Verlag, New York, 1990.
- [14] B. O’neill, *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*, Academic press, 1983.
- [15] B. L. Reinhart, The second fundamental form of a plane field, *J. Differential Geometry*, **12** no. 4 (1977) 619–627.
- [16] B. L. Reinhart, *Differential geometry of foliations. The fundamental integrability problem*, **99**, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [17] H. J. Sussmann, Orbits of families of vector fields and integrability of distributions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **180** (1973) 171–188.

Mehran Aminian

Department of Mathematics, Faculty of Mathematics, Vali-e-Asr University, Rafsanjan, Iran.
mehran.aminian@vru.ac.ir

Mehran Namjoo

Department of Mathematics, Faculty of Mathematics, Vali-e-Asr University, Rafsanjan, Iran.
namjoo@vru.ac.ir

عملگر شکلی توزیع $(n-1)$ - بعدی روی خمینه n - بعدی و دسته‌بندی آن‌ها

مهران امینیان*^{ID} و مهران نامجو^{ID}

چکیده. هدف از این مقاله، بررسی عملگر شکلی یک توزیع $(n-1)$ - بعدی روی یک خمینه n - بعدی هموار است. در این مطالعه ابتدا فرمول‌هایی را برای عملگر شکلی و مؤلفه‌های متقارن و پادمتقارن آن ارائه می‌کنیم و در ادامه ارتباط آن‌ها با مفاهیمی مانند انتگرال‌پذیری، تماماً نافی و ژنودزیک را نشان می‌دهیم. سرانجام، با در نظر گرفتن حداکثر دو مقدار ویژه برای عملگر شکلی، به دسته‌بندی این توزیع‌ها و برگ‌بندی آن‌ها در فضا فرم‌های ساده‌همبند می‌پردازیم.

۱. مقدمه

مطالعه رویه‌ها در فضای سه بعدی معمولی، توسط گاوس در اوایل قرن نوزدهم با معرفی مفاهیم فرم اساسی اول، دوم و خمیدگی گسترش یافت. این رویکرد با مطالعه زیرخمینه‌های یک خمینه ریمانی تعمیم پیدا کرد، جزئیات این موضوع در [۱۰، ۷، ۱۱] مورد مطالعه قرار گرفته است. اما جنبه‌های دیگری وجود دارد که نیازمند مطالعه هست و در این مقاله قصد داریم آن‌ها را بررسی کنیم.

در هندسه دیفرانسیل یک توزیع روی یک خمینه، تخصیصی از زیرفضاهای برداری است که خواص ویژه‌ای را دارا هستند و اغلب این توزیع زیرکلافی از کلاف مماس است. توزیع‌هایی که شرط انتگرال‌پذیری را دارا هستند، یک برگ‌بندی روی خمینه به وجود می‌آورند، یعنی خمینه را به زیرخمینه‌های کوچکتر افراز می‌کنند. این مفاهیم کاربردهای متعددی در حوزه‌های مختلف ریاضیات، نظیر دستگاه‌های انتگرال‌پذیر، هندسه پواسن، توپولوژی دیفرانسیل و غیره دارند [۱۷، ۲، ۶].

مطالعه هندسه توزیع‌های منظم، تعمیم طبیعی از مطالعه هندسه زیرخمینه‌ها است. حالت توزیع‌های انتگرال‌پذیر مطابق با مطالعه برگ‌بندی‌ها است، برای جزئیات بیشتر [۱۶] را ببینید.

اگر توزیع انتگرال‌پذیر نباشد، آنگاه میدان تانسوری عملگر شکلی آن متقارن نیست و تجزیه آن به قسمت‌های متقارن و پادمتقارن در ارتباط با خواص هندسی توزیع است. فرم اساسی دوم و همچنین عملگر شکلی، ابزار اصلی و پایه‌ای این پژوهش است که به مطالعه و اثبات خواص مختلف مؤلفه‌های متقارن و پادمتقارن می‌پردازیم.

عبارات و کلمات کلیدی: توزیع، عملگر شکلی، فرم اساسی دوم.

دبیرتخصصی رابط: محمدرضا پوریای ولی

نوع مقاله: پژوهشی

*نویسنده مسئول

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۵/۲۰ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۱۰/۱۰ تاریخ انتشار آنلاین: ۱۴۰۳/۰۲/۰۴

ارجاع به مقاله: م. امینیان و م. نامجو، عملگر شکلی توزیع $(n-1)$ - بعدی روی خمینه n - بعدی و دسته‌بندی آن‌ها، ریاضی و جامعه، ۹ شماره ۱ (۱۴۰۳) ۳۳-۵۰.
<http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.138841.1600>

قسمت پادمتقارن مرتبط با انتگرال ناپذیری توزیع است. درحقیقت نشان می‌دهیم قسمت پادمتقارن صفر است اگر و تنها اگر توزیع برگشتی باشد. از طرف دیگر با استفاده از قسمت متقارن به دسته‌بندی چندین فرم، نظیر توزیع‌های تماماً نافی و ژئودزیک، می‌پردازیم. این دسته‌بندی‌ها کاملاً جدید و از دیدگاه هندسی جذاب می‌باشند.

برخی پژوهش‌گران در [۸، ۱۵، ۱۶، ۱۸] به مطالعه توزیع‌هایی می‌پرداخته‌اند که در آن‌ها فرم اساسی دوم تنها شامل قسمت متقارن بوده است و بنابراین خواص هندسی میدان‌های تانسوری متناظر برشمرده نمی‌شود. نه تنها از لحاظ هندسی این مطالعه جذاب هست، بلکه کاربردهای آن‌ها در حوزه‌هایی مانند سامانه‌های پویا و کنترلی نیز قابل توجه است. این کنترل‌ها به عنوان میدان‌های برداری روی فضای فاز سامانه مدل‌بندی می‌شوند. بنابراین تا جایی که امکان‌پذیر باشد شخص نیازمند شناسایی توزیعی است که این میدان‌های برداری را تولید می‌کنند. به‌ویژه در کنترل‌پذیری یا دسترس‌پذیری این سامانه‌ها، که خاصیت تماماً ژئودزیک برای توزیع کنترل اساسی است [۴، ۱۳]، خواص این توزیع‌ها ضروری است.

ساختار اصلی این مقاله به شرح پایین است. در بخش دوم، پیش‌نیازهای مورد نیاز را بیان می‌کنیم. در بخش سوم، نخست ابزار مطالعه و نمادگذاری‌ها معرفی می‌شوند، سپس عملگر شکلی یک توزیع را معرفی می‌کنیم و خواص آن‌را به‌ویژه تجزیه آن به قسمت‌های متقارن و پادمتقارن مطالعه می‌کنیم و نشان می‌دهیم یک توزیع تماماً نافی است اگر و تنها اگر مؤلفه متقارن عملگر شکلی آن اسکالر باشد، علاوه بر این تماماً ژئودزیک است اگر و تنها اگر مؤلفه متقارن عملگر شکلی آن صفر باشد. سرانجام در بخش چهارم، دسته‌بندی توزیع‌های $(n-1)$ -بعدی روی فضا فرم‌های ساده‌ی همبند با عملگر شکلی دارای حداکثر دو مقدار ویژه را مطالعه می‌کنیم و در این راستا برگ‌بندی‌های آن‌ها را معرفی می‌کنیم.

۲. پیش‌نیازها

در این بخش پیش‌نیازهایی از [۷، ۱۱، ۱۴] را بیان می‌کنیم که در ادامه از آن‌ها استفاده می‌کنیم. یک توزیع هموار D روی خمینه هموار M^n ، تخصیصی است که به هر نقطه $x \in M$ ، یک زیرفضای برداری $D_x \subset T_x M$ ، به‌طور هموار نسبت می‌دهد. به بیان دقیق‌تر، D متشکل از گردایه $\{D_x \subset T_x M\}_{x \in M}$ ، از زیرفضاهای برداری با این خاصیت است که حول هر $x \in M$ ، همسایگی $N_x \subset M$ و گردایه‌ای از میدان‌های برداری $X_1, \dots, X_k$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر نقطه $y \in N_x$ ،

$$D_y = \langle X_1(y), \dots, X_k(y) \rangle.$$

توزیع D منظم از رتبه یا بعد k نامیده می‌شود هرگاه تمام زیرفضاهای $D_x \subset T_x M$ ، دارای بعد k باشند. درحقیقت، یک توزیع منظم زیرکلاف برداری $D \subset TM$ ، از رتبه k است. یک توزیع را انتگرال‌پذیر گویند اگر از هر نقطه $x \in M$ ، یک خمینه انتگرال بگذرد. از این‌رو M افزای از خمینه‌های انتگرال، همبند، بیشینه و مجزا بنام برگ است؛ یعنی D یک برگ‌بندی k -بعدی از M تعریف می‌کند. به‌طور موضعی انتگرال‌پذیر، بدان مفهوم است که برای هر نقطه $x \in M$ ، نقشه موضعی $\{U, (x^1, \dots, x^n)\}$ یافت می‌شود طوری‌که برای هر $y \in U$ ،

$$D_y = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^1}(y), \dots, \frac{\partial}{\partial x^k}(y) \right\rangle.$$

به عبارت دیگر، هر نقطه یک نقشه برگ‌بندی دارد و توزیع، مماس به برگ‌های برگ‌بندی است. قضیه فروبنیوس^۱ بیان می‌کند یک توزیع انتگرال‌پذیر است اگر و تنها اگر برگشتی باشد، یعنی گروه لی هر دو میدان برداری توزیع، متعلق به توزیع باشد.

^۱Frobenius

یک متریک ریمانی g ، روی خمینه هموار n -بعدی M ، تناظری است که به هر نقطه x از M ، یک ضرب داخلی (یعنی یک فرم دوخطی، متقارن و مثبت معین) $\langle \cdot, \cdot \rangle_{g_x}$ روی فضای مماس $T_x M$ ، نسبت می‌دهد که به‌طور هموار تغییر می‌کند به عبارتی دیگر اگر $(x^1, \dots, x^n)$ مختصات موضعی M ، در همسایگی U حول نقطه x باشد آنگاه برای هر $i, j = 1, \dots, n$ ،

$$g_{ij}(q) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle_{g_q},$$

که $q \in U$ ، تابعی هموار روی U است، در این حالت جفت (M, g) را یک خمینه ریمانی می‌نامند؛ بدیهی است که این تعریف وابسته به انتخاب دستگاه مختصات نیست.

یک هموستار آفین روی خمینه هموار M ، نگاشتی است چون

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M),$$

که در خواص پایین صدق کند:

$$(i) \quad \nabla_{fX+lY}Z = f\nabla_XZ + l\nabla_YZ,$$

$$(ii) \quad \nabla_X(Y+Z) = \nabla_XY + \nabla_XZ,$$

$$(iii) \quad \nabla_X(fY) = f\nabla_XY + X(f)Y,$$

که $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ (میدان‌های برداری هموار روی خمینه M)، l و f توابعی هموار روی M هستند. هر خمینه ریمانی (M, g) را می‌توان به یک هموستار آفین‌یکتا (لوی-چویتا^۲) مجهز کرد به‌طوری‌که آن متقارن و سازگار با متریک ریمانی g باشد. یعنی دارای خواص پایین باشد:

$$(iv) \quad \nabla_XY - \nabla_YX = [X, Y],$$

$$(v) \quad Z\langle X, Y \rangle = \langle \nabla_ZX, Y \rangle + \langle X, \nabla_ZY \rangle.$$

۳. عملگر شکلی توزیع و خواص آن

فرض کنیم (M^n, g) یک خمینه ریمانی، $\mathcal{H}$ یک توزیع منظم $(n-1)$ -بعدی (توزیع افقی) روی M و $\mathcal{V}$ توزیع متمم متعامد آن نسبت به متریک ریمانی g (توزیع عمودی) باشد. بنابراین $TM = \mathcal{H} \oplus \mathcal{V}$. فرض کنیم H و V ، $(1, 1)$ -میدان‌های تانسور همواری باشند که به‌ترتیب به یک میدان برداری (به یک بردار) قسمت افقی و عمودی آن را نسبت می‌دهد، یعنی $H(E) = E - \langle E, N \rangle N$ و $V(E) = \langle E, N \rangle N$ ، که N میدان برداری یکه عمود بر توزیع افقی است که ممکن است موضعاً تعریف شود، نماد $\langle \cdot, \cdot \rangle$ نشان‌گر ضرب داخلی حاصل از متریک g است، و فرم اساسی دوم از $\mathcal{H}$ به فرم پایین تعریف می‌شود

$$B^{\mathcal{H}}(E, F) = V(\nabla_{H(E)}H(F)),$$

که ∇ هموستار لوی-چویتا متریک g است و $E, F \in \mathcal{X}(M)$.

تعریف ۱۰.۳ [۱۲] فرض کنیم N یک میدان برداری یکه عمودی باشد. عملگر شکلی S به‌دست آمده از N ، با رابطه

$$\langle SX, Y \rangle = \langle B^{\mathcal{H}}(X, Y), N \rangle,$$

تعریف می‌شود که X, Y ، میدان‌های برداری افقی می‌باشند.

²Levi-Civita

حال گزاره‌ای ارائه می‌کنیم که مشابه آن را می‌توان در [۱۲] یافت.

گزاره ۲.۳. عملگر شکلی، یک عملگر خطی $S: \mathcal{H}_p \rightarrow \mathcal{H}_p$ در هر نقطه $p \in M$ مشخص می‌کند و برای هر $v \in \mathcal{H}_p$ ، $Sv = -\nabla_v N$.

اثبات. داریم $\langle N, N \rangle = 1$ ، چون برابر یک است با توجه به شرط (v) هموستار لوی-چویتا برای هر میدان برداری افقی X ، $\langle \nabla_X N, N \rangle = 0$. پس $\nabla_X N$ یک میدان برداری افقی است. اگر Y یک میدان برداری افقی باشد آنگاه

$$(1) \quad \langle SX, Y \rangle = \langle B^{\mathcal{H}}(X, Y), N \rangle = \langle \nabla_X Y, N \rangle.$$

با توجه به اینکه $\langle Y, N \rangle = 0$ ، پس $\langle \nabla_X Y, N \rangle + \langle Y, \nabla_X N \rangle = 0$. اینک با استفاده از (۱)، داریم

$$\langle SX, Y \rangle = -\langle \nabla_X N, Y \rangle,$$

□

و بنابراین $SX = -\nabla_X N$.

تبصره ۳.۳. اگر میدان برداری یکه عمودی N (که ممکن است موضعاً تعریف شود) با $-N$ جایگزین شود، آنگاه S تغییر علامت می‌دهد. بنابراین حتی اگر M ، فاقد یک میدان برداری یکه عمودی سراسری باشد، آنگاه عملگر شکلی S ، تا حد علامت، سراسری تعریف می‌شود. این ابهام علامت، مزاحمتی است که در فرمول‌های ذاتی بایستی حذف شود.

مؤلفه‌های متقارن و پادمتقارن از $B^{\mathcal{H}}$ ، را به ترتیب با $B_s^{\mathcal{H}}$ و $B_a^{\mathcal{H}}$ ، نشان می‌دهیم که چنین تعریف می‌شوند:

$$B_s^{\mathcal{H}}(E, F) = \frac{1}{2} (B^{\mathcal{H}}(E, F) + B^{\mathcal{H}}(F, E)),$$

$$B_a^{\mathcal{H}}(E, F) = \frac{1}{2} (B^{\mathcal{H}}(E, F) - B^{\mathcal{H}}(F, E)),$$

که در آن $E, F \in \mathcal{X}(M)$ و بنابراین $B^{\mathcal{H}} = B_s^{\mathcal{H}} + B_a^{\mathcal{H}}$. از این مطلب به تعریف زیر می‌رسیم.

تعریف ۴.۳. مؤلفه‌های متقارن و پادمتقارن S را به ترتیب با S_s و S_a ، نشان می‌دهیم که توسط روابط پایین داده می‌شوند:

$$\langle S_s X, Y \rangle = \langle B_s^{\mathcal{H}}(X, Y), N \rangle,$$

$$\langle S_a X, Y \rangle = \langle B_a^{\mathcal{H}}(X, Y), N \rangle,$$

که در آن X و Y ، میدان‌های برداری افقی می‌باشند. بنابراین $S = S_s + S_a$ و همچنین

$$S_s = \frac{1}{2} (S + S^t),$$

$$S_a = \frac{1}{2} (S - S^t),$$

که علامت t نشان‌گر ترانزاده یک تبدیل خطی نسبت به ضرب داخلی حاصل از متریک ریمان است.

گزاره ۵.۳. برای هر $v \in \mathcal{H}_p$ ، روابط زیر برقرارند:

$$\begin{aligned} S_s v &= -\frac{1}{2} (\nabla_v N + H((\nabla N)^t v)) \\ &= -\frac{1}{2} (\nabla_v N + (\nabla N)^t v - \langle v, \nabla_N N \rangle N) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_a v &= -\frac{1}{\gamma} (\nabla_v N - H((\nabla N)^t v)) \\ &= -\frac{1}{\gamma} (\nabla_v N - (\nabla N)^t v + \langle v, \nabla_N N \rangle N). \end{aligned}$$

اثبات. چون $\langle N, N \rangle = 1$ ، برای هر میدان برداری افقی X ، $\langle \nabla_X N, N \rangle = 0$. پس $\nabla_X N$ ، یک میدان برداری افقی است. اگر Y یک میدان برداری افقی باشد، آنگاه

$$(2) \quad \langle S_s X, Y \rangle = \langle B_s^H(X, Y), N \rangle = \frac{1}{\gamma} \langle \nabla_X Y + \nabla_Y X, N \rangle.$$

از طرفی چون $\langle X, N \rangle = \langle Y, N \rangle = 0$ ، پس

$$\langle \nabla_Y X, N \rangle + \langle X, \nabla_Y N \rangle = \langle \nabla_X Y, N \rangle + \langle Y, \nabla_X N \rangle = 0.$$

اکنون با استفاده از معادله (۲)، داریم

$$\begin{aligned} \langle S_s X, Y \rangle &= -\frac{1}{\gamma} (\langle \nabla_X N, Y \rangle + \langle \nabla_Y N, X \rangle) \\ &= -\frac{1}{\gamma} (\langle \nabla_X N, Y \rangle + \langle (\nabla N)^t X, Y \rangle) \\ &= -\frac{1}{\gamma} (\langle \nabla_X N, Y \rangle + \langle H((\nabla N)^t X), Y \rangle). \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} S_s X &= -\frac{1}{\gamma} (\nabla_X N + H((\nabla N)^t X)) \\ &= -\frac{1}{\gamma} (\nabla_X N + ((\nabla N)^t X - \langle (\nabla N)^t X, N \rangle N)) \\ &= -\frac{1}{\gamma} (\nabla_X N + (\nabla N)^t X - \langle X, \nabla_N N \rangle N). \end{aligned}$$

به طریق مشابه داریم

$$\begin{aligned} S_a X &= -\frac{1}{\gamma} (\nabla_X N - H((\nabla N)^t X)) \\ &= -\frac{1}{\gamma} (\nabla_X N - (\nabla N)^t X + \langle X, \nabla_N N \rangle N). \end{aligned}$$

□

در پایین گزاره‌ای ارائه می‌شود که مشابه آنرا در [۳، ۱۲] پیدا می‌کنید.

گزاره ۶.۳. برای هر میدان برداری افقی X, Y ، داریم

$$\begin{aligned} \langle S_s X, Y \rangle &= \langle B_s^H(X, Y), N \rangle \\ &= -\frac{1}{\gamma} (\mathcal{L}_N g)(X, Y). \end{aligned}$$

تعریف ۷.۳. $\mu^{\mathcal{H}}$ را خمیدگی میانگین $\mathcal{H}$ می‌نامیم که به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}\mu^{\mathcal{H}} &= \frac{1}{n-1} \text{tr} B^{\mathcal{H}} \\ &= \frac{1}{n-1} \text{tr} B_s^{\mathcal{H}} \\ &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} B_s^{\mathcal{H}}(e_i, e_i),\end{aligned}$$

که در آن $\{e_i\}_{i=1}^{n-1}$ یک کنج یک متعامد موضعی برای $\mathcal{H}$ است.

نتیجه ۸.۳. برای خمیدگی میانگین $\mu^{\mathcal{H}}$ داریم
(۱)

$$\begin{aligned}\mu^{\mathcal{H}} &= \frac{1}{n-1} (\text{tr} S) N \\ &= -\frac{1}{2(n-1)} (\text{tr} \mathcal{L}_N g) N;\end{aligned}$$

(ب) $\mu^{\mathcal{H}} = 0$ ، اگر و تنها اگر $\text{tr} S = 0$ ، همچنین $\text{tr} S = 0$ اگر و تنها اگر $\text{tr} \mathcal{L}_N g = 0$.

اثبات. داریم $\mu^{\mathcal{H}} = \langle \mu^{\mathcal{H}}, N \rangle N$ بنابراین

$$\begin{aligned}\mu^{\mathcal{H}} &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \langle B_s^{\mathcal{H}}(e_i, e_i), N \rangle N \\ &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \langle S_s e_i, e_i \rangle N \\ &= \frac{1}{n-1} (\text{tr} S_s) N \\ &= \frac{1}{n-1} (\text{tr} S) N.\end{aligned}$$

□

اکنون با توجه به گزاره ۶.۳، حکم ثابت می‌شود.

در پایین تعریفی ارائه می‌شود که مشابه آن را در [۳] می‌توان یافت.

تعریف ۹.۳. فرض کنیم $\mathcal{H}$ یک توزیع $(n-1)$ -بعدی باشد.

(۱) $\mathcal{H}$ را تماماً نافی می‌نامیم هرگاه برای هر میدان برداری افقی X, Y ،

$$B_s^{\mathcal{H}}(X, Y) = \langle X, Y \rangle \mu^{\mathcal{H}};$$

(ب) $\mathcal{H}$ را تماماً ژئودزیک می‌نامیم هرگاه برای هر میدان برداری افقی X, Y ،

$$B_s^{\mathcal{H}}(X, Y) = 0;$$

(پ) $\mathcal{H}$ را کمین می‌نامیم هرگاه

$$\mu^{\mathcal{H}} = 0.$$

با توجه به تعریف بالا، به سادگی گزاره پایین را نتیجه‌گیری می‌کنیم.

گزاره ۱۰.۳. توزیع $\mathcal{H}$ تماماً ژئودزیک است اگر و تنها اگر تماماً نافی و کمین باشد.

گزاره ۱۱.۳. توزیع $\mathcal{H}$ تماماً نافی است اگر و تنها اگر برای هر انتخاب N ، تانسور S_s اسکالر باشد. به ویژه $\mathcal{H}$ تماماً ژئودزیک است اگر و تنها اگر برای هر انتخاب N ، $S_s = 0$.

اثبات. فرض کنیم S عملگر شکلی به دست آمده از N باشد. بنابراین برای هر میدان برداری افقی X, Y داریم

$$\begin{aligned}\langle S_s X, Y \rangle &= \langle B_s^{\mathcal{H}}(X, Y), N \rangle \\ &= \langle \langle X, Y \rangle \mu^{\mathcal{H}}, N \rangle \\ &= \langle \mu^{\mathcal{H}}, N \rangle \langle X, Y \rangle.\end{aligned}$$

پس $S_s X = \langle \mu^{\mathcal{H}}, N \rangle X$ و بنابراین S_s اسکالر است. برعکس، فرض کنیم برای هر انتخاب N ، تانسور S_s اسکالر باشد، یعنی یک تابع k_N روی دامنه N موجود باشد به طوری که برای هر میدان برداری افقی X ، $S_s X = k_N X$. از این رو

$$\begin{aligned}B_s^{\mathcal{H}}(X, Y) &= \langle B_s^{\mathcal{H}}(X, Y), N \rangle N \\ &= \langle X, Y \rangle (k_N N).\end{aligned}$$

چون $k_{-N} = -k_N$ ، میدان برداری عمودی $k_N N$ ، به طور سراسری تعریف شده است. داریم $k_N = \frac{1}{n-1} \text{tr} S_s$ و بنابراین $\mathcal{H}$ توزیع تماماً نافی است. $\square$

یک میدان برداری کیلینگ^۳، یک میدان برداری است که متریک را حفظ می‌کند. به عبارت دیگر، میدان برداری W را کیلینگ می‌نامیم اگر مشتق لی نسبت به W از متریک g صفر شود، یعنی $\mathcal{L}_W g = 0$.

گزاره ۱۲.۳. فرض کنیم W یک میدان برداری کیلینگ همه‌جا ناصفر باشد. توزیع $\mathcal{H} = \langle W \rangle^{\perp}$ ، تماماً ژئودزیک است و عملگر شکلی متقارن آن صفر است.

اثبات. برای هر میدان برداری افقی X, Y داریم

$$\begin{aligned}|W| \langle S_s X, Y \rangle &= |W| \left\langle B_s^{\mathcal{H}}(X, Y), \frac{W}{|W|} \right\rangle \\ &= -\frac{1}{4} (\mathcal{L}_W g)(X, Y).\end{aligned}$$

$\square$

بنابراین توزیع $\mathcal{H}$ ، تماماً ژئودزیک است و $S_s = 0$.

بحثی مشابه گزاره ۱۱.۳ و دانستن اینکه انتگرال‌پذیری یک توزیع، معادل با متقارن بودن فرم اساسی دوم آن است [۱۲]، گزاره زیر را نتیجه خواهد داد.

³Killing

گزاره ۱۳.۳. فرض کنیم $\mathcal{H}$ یک توزیع $(n-1)$ -بعدی، روی خمینه ریمانی M^n باشد.

(آ) توزیع $\mathcal{H}$ انتگرال‌پذیر است اگر و تنها اگر عملگر شکلی توزیع، برای هر انتخاب N ، متقارن باشد. از این رو $S_s = S$ و $S_a = 0$ ؛

(ب) توزیع $\mathcal{H}$ تماماً نافی و انتگرال‌پذیر است اگر و تنها اگر عملگر شکلی توزیع، برای هر انتخاب N ، اسکالر باشد و بنابراین هر برگ از برگ‌بندی آن، یک ابرویه تماماً نافی است.

مثال ۱۴.۳. فرض کنیم $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ ، یک بردار ثابت یکه باشد. برای $x \in \mathbb{S}^n \setminus \{\pm a\}$ ، قرار دهید

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \langle a, x \rangle^2}} (a - \langle a, x \rangle x),$$

که یک میدان برداری یکه هموار روی $\mathbb{S}^n \setminus \{\pm a\}$ است. توزیع افقی $\mathcal{H} = \langle N \rangle^\perp$ یک توزیع انتگرال‌پذیر، تماماً نافی و غیرکمین روی $\mathbb{S}^n \setminus \{\pm a\}$ است و عملگر شکلی آن در هر نقطه x به فرم

$$S = \frac{\langle a, x \rangle}{\sqrt{1 - \langle a, x \rangle^2}} I,$$

است. هر برگ از برگ‌بندی توزیع $\mathcal{H}$ ، به شکل

$$M_\tau = \{x \in \mathbb{S}^n : \langle a, x \rangle = \tau\},$$

است که در آن τ در بازه $(-1, 1)$ قرار دارد و بنابراین پس از یک حرکت صلب فضای محیط (طولپایی فضای $\mathbb{R}^{n+1}$)، برابر با $\mathbb{S}^{n-1}(\sqrt{1 - \tau^2})$ خواهد شد.

مشابه مثال ۱۴.۳ برای کره اقلیدسی، برای فضای هذلولوی $\mathbb{H}^n$ ، مثال پایین را داریم.

مثال ۱۵.۳. فرض کنیم a ، یک بردار ثابت ناصفر در فضای مینکوفسکی^۴ $\mathbb{R}_1^{n+1}$ باشد به طوری که $\langle a, a \rangle \in \{-1, 0, 1\}$. اگر $\langle a, a \rangle \in \{0, 1\}$ ، فرض کنیم $M = \mathbb{H}^n$ و اگر $\langle a, a \rangle = -1$ ، فرض کنیم $M = \mathbb{H}^n \setminus \{\pm a\}$. برای $x \in M$ ، قرار می‌دهیم

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{\langle a, a \rangle + \langle a, x \rangle^2}} (a + \langle a, x \rangle x),$$

که یک میدان برداری یکه هموار روی M است. توزیع افقی $\mathcal{H} = \langle N \rangle^\perp$ یک توزیع انتگرال‌پذیر، تماماً نافی و غیرکمین روی M است و عملگر شکلی آن در هر نقطه x به فرم

$$S = -\frac{\langle a, x \rangle}{\sqrt{\langle a, a \rangle + \langle a, x \rangle^2}} I,$$

است. هر برگ از برگ‌بندی توزیع $\mathcal{H}$ ، به شکل

$$M_\tau = \{x \in M : \langle a, x \rangle = \tau\},$$

⁴Minkowski

می‌باشد، برای یک (الف) $\tau \in \mathbb{R}$ ، اگر $\langle a, a \rangle = 1$ ، و در این حالت M_τ ، هذلولی‌گون است، (ب) $\tau \neq 0$ (همه τ ها هم علامت هستند)، اگر $\langle a, a \rangle = 0$ ، و در این حالت M_τ ، سهمی‌گون است، (ج) $|\tau| > 1$ ، اگر $\langle a, a \rangle = -1$ ، و در این حالت M_τ ، بیضی‌گون است.

۴. دسته‌بندی توزیع‌های $(n-1)$ -بعدی روی فضا فرم‌ها با عملگر شکلی دارای حداکثر دو مقدار ویژه

در این بخش فرض می‌کنیم که میدان برداری یکه عمودی N ، در سراسر خمینه تعریف شده باشد و بنابراین عملگر شکلی به دست آمده از N ، بدون ابهام علامت در سراسر خمینه تعریف شده است. فرض کنیم $R^n(c)$ یک فضا فرم ریمانی ساده‌ی همبند با خمیدگی برشی ثابت c باشد که با انتخاب $c = 0$ ، فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ ، و برای $c = 1$ ، کره اقلیدسی $\mathbb{S}^n$ ، و سرانجام برای $c = -1$ ، فضای هذلولی $\mathbb{H}^n$ ، است. یک ابر رویه در $R^n(c)$ را ایزوپارامتر می‌نامند هرگاه خمیدگی‌های اصلی آن با احتساب چندگانگی همه‌جا ثابت باشند. در این صورت گزاره پایین را داریم.

گزاره ۱.۴. فرض کنیم $\mathcal{H}$ یک توزیع $(n-1)$ -بعدی روی $R^n(c)$ باشد و $S = \alpha I$ ، که α ثابت دلخواهی است. آنگاه $c = 0$ ، $c = 1$ و توزیع $\mathcal{H}$ تماماً نافی و انتگرال‌پذیر است. اگر $c = 0$ ، آنگاه $\alpha = 0$ ، توزیع تماماً ژئودزیک، و هر برگ از برگ‌بندی آن، یک ابر صفحه است. اگر $c = -1$ ، آنگاه $\alpha = \pm 1$ ، توزیع غیرکمین و هر برگ از برگ‌بندی توزیع، یک سهمی‌گون است.

اثبات. بنابر گزاره ۱۳.۳، $\mathcal{H}$ انتگرال‌پذیر است. چون $S = \alpha I$ و α ثابت است، هر برگ از برگ‌بندی $\mathcal{H}$ ، یک ابر رویه تماماً نافی و ایزوپارامتر است. بر طبق [۵، ۱]، ابر رویه‌های تماماً نافی، ایزوپارامتر، همبند و تمام از $\mathbb{R}^n$ ، ابر صفحه‌ها و ابر کره‌ها، از $\mathbb{S}^n$ ، ابر کره‌ها، از $\mathbb{H}^n$ ، بیضی‌گون‌ها، سهمی‌گون‌ها و هذلولی‌گون‌ها هستند. فرض کنیم $c = 0$. ابر صفحه‌های $\mathbb{R}^n$ ، تماماً ژئودزیک و عملگر شکلی آنها صفر است، پس $\alpha = 0$. ابر کره‌های $\mathbb{R}^n$ ، تماماً نافی و عملگر شکلی آنها $\frac{1}{r}I$ است که r شعاع آن است، پس $\alpha = \frac{1}{r}$ ، که با ثابت بودن α در تناقض است. همچنین اگر $c = 1$ ، با بحثی مشابه به نتیجه می‌رسیم ([۱]، مثال‌های ۲.۳ و ۳.۳) را ببینید. □

نتیجه ۲.۴. هیچ توزیع $(n-1)$ -بعدی انتگرال‌پذیر و تماماً ژئودزیک روی $\mathbb{S}^n$ یا $\mathbb{H}^n$ وجود ندارد.

گزاره ۳.۴. فرض کنیم $\mathcal{H}$ یک توزیع $(n-1)$ -بعدی روی $R^n(c)$ ، با $n > 2$ ، و $S = fI$ ، که f تابعی هموار روی $R^n(c)$ است. آنگاه $c = 0$ ، $c = 1$ و توزیع $\mathcal{H}$ تماماً نافی و انتگرال‌پذیر است. اگر $c = 0$ ، آنگاه توزیع تماماً ژئودزیک و همه برگ‌ها ابر صفحه هستند و f تابع صفر است. اگر $c = -1$ ، آنگاه توزیع غیرکمین بوده و هر برگ یک هذلولی‌گون یا سهمی‌گون است. همچنین برای هر $x \in \mathbb{H}^n$ ، بردار ناصفر $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ ، یافت می‌شود که $\langle a, a \rangle \in \{0, 1\}$ ، و $f(x) = -\frac{\langle a, x \rangle}{\sqrt{\langle a, a \rangle + \langle a, x \rangle^2}}$.

اثبات. بنابر گزاره ۱۳.۳، $\mathcal{H}$ انتگرال‌پذیر است و هر برگ از برگ‌بندی آن، تماماً نافی و دارای عملگر شکلی fI است که f تحدید به برگ شده است. چون $n > 2$ ، می‌دانیم که f بایستی روی برگ ثابت باشد ([۱۴]، لم ۳۵.۴). پس هر برگ از برگ‌بندی $\mathcal{H}$ ، یک ابر رویه تماماً نافی و ایزوپارامتر است.

قرار می‌دهیم $c = 0$. همانند گزاره ۱.۴، برگ‌های $\mathcal{H}$ ، همبند و تمام، ابر صفحه یا ابر کره هستند. فرض کنید یک برگ ابر کره باشد. برگ‌ها اشتراک ندارند، پس همه برگ‌های داخل ابر کره، ابر کره هستند. وقتی شعاع به صفر میل کند، توزیع به فضای برداری صفر منقبض می‌شود که تناقض است. بنابراین f ، تابع صفر است و همه برگ‌ها ابر صفحه هستند. قرار می‌دهیم $c = 1$. در این صورت همه برگ‌های $\mathcal{H}$ ، ابر کره‌های همبند و تمام هستند. وقتی شعاع به صفر میل کند، توزیع به فضای برداری صفر منقبض می‌شود، که تناقض است.

- قرار می‌دهیم $c = -1$. بنابر [۱، مثال ۳.۳] و بحثی مشابه، هر برگ، یک هذلولی‌گون یا سهمی‌گون است.
- نتیجه ۴.۴. هیچ توزیع $(n-1)$ -بعدی، انتگرال‌پذیر و تماماً نافی روی S^n ، $n > 2$ ، وجود ندارد.
- گزاره ۵.۴. هیچ توزیع $(n-1)$ -بعدی و انتگرال‌پذیر روی $R^n(c)$ وجود ندارد که عملگر شکلی آن تنها دارای دو مقدار ویژه ثابت متمایز باشد.
- اثبات. عملگر شکلی توزیع، مطابق با عملگر شکلی برگ‌ها است، پس هر برگ یک ابرروی ایزوپارامتر با دو خمیدگی اصلی ثابت است. ابرروی‌های ایزوپارامتر، همبند و تمام از $\mathbb{R}^n$ و S^n ، با دو خمیدگی اصلی ثابت، به‌ترتیب عبارتند از $S^m(r) \times \mathbb{R}^{n-m-1}$ ، $S^m(r) \times \mathbb{H}^{n-m-1}(-\sqrt{1+r^2})$ و $S^m(r) \times S^{n-m-1}(\sqrt{r^2-1})$ ، [۱، ۵]. وقتی که شعاع تغییر می‌کند، مقادیر ویژه عملگر شکلی توزیع، تغییر می‌کند که تناقض است.
- ابرروی‌های ایزوپارامتر از $\mathbb{R}^n$ و $\mathbb{H}^n$ ، دارای حداکثر دو خمیدگی اصلی ثابت هستند. بنابراین طبق گزاره‌های ۵.۴-۱.۴ به نتیجه پایین می‌رسیم.
- نتیجه ۶.۴. تنها توزیع $(n-1)$ -بعدی و انتگرال‌پذیر روی $\mathbb{R}^n$ ، که همه مقادیر ویژه عملگر شکلی آن ثابت می‌باشند، توسط $n-1$ میدان برداری ثابت مستقل خطی تولید می‌شود و لذا توزیع تماماً ژئودزیک، هر برگ از برگ‌بندی آن ابرصفحه و عملگر شکلی توزیع صفر می‌باشد.
- نتیجه ۷.۴. هیچ توزیع $(n-1)$ -بعدی و انتگرال‌پذیر روی $\mathbb{H}^n$ ، وجود ندارد که عملگر شکلی آن تنها دارای مقادیر ویژه ثابت و حداقل دو مقدار ویژه باشد.

مراجع

- [1] L. J. Alías and S. M. B. Kashani, Hypersurfaces in space forms satisfying the condition $L_k x = Ax + b$, *Taiwanese J. Math.*, **14** no. 5 (2010) 1957–1977.
- [2] I. Androulidakis and M. Zambon, Stefan-Sussmann singular foliations, singular subalgebroids and their associated sheaves, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, **13** (2016) 17 pp.
- [3] P. Baird and J. C. Wood, *Harmonic morphisms between Riemannian manifolds*, London Mathematical Society Monographs. New Series, no. 29, The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2003.
- [4] F. Bullo and A. D. Lewis, *Geometric control of mechanical systems: modeling, analysis, and design for simple mechanical control systems*, **49**, Springer, 2019.
- [5] T. E. Cecil and P. J. Ryan, Isoparametric hypersurfaces, in: *Geometry of hypersurfaces*, Springer, New York, (2015) 85–184.
- [6] A. del Pino Gomez, Topological aspects in the study of tangent distributions, 13th Young Researchers Workshop on Geometry, Mechanics and Control, 3–67, *Textos Mat./Math. Texts*, **48**, Univ. Coimbra, Coimbra, 2019.
- [7] M. P. Do Carmo and J. Flaherty Francis, *Riemannian geometry*, **6**, Springer, 1992.
- [8] O. Gil-Medrano, Geometric properties of some classes of Riemannian almost-product manifolds, *Rend. Circ. Mat. Palermo (2)*, **32** no. 3 (1983) 315–329.
- [9] A. Gray, Pseudo-Riemannian almost product manifolds and submersions, *J. Math. Mech.*, **16** (1967) 715–737.

- [10] N. J. Hicks, *Notes on differential geometry*, no. 3, D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N. J.-Toronto-London, 1965.
- [11] J. M. Lee, *Introduction to Riemannian manifolds*, Second edition, Graduate Texts in Mathematics, **176**, Springer, Cham, 2018.
- [12] M. C. Muñoz Lecanda, On some aspects of the geometry of non integrable distributions and applications, *J. Geom. Mech.*, **10** no. 4 (2018) 445–465.
- [13] H. Nijmeijer and A. Van der Schaft, *Nonlinear dynamical control systems*, **464**, Springer-Verlag, New York, 1990.
- [14] B. O'Neill, *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*, Academic press, 1983.
- [15] B. L. Reinhart, The second fundamental form of a plane field, *J. Differential Geometry*, **12** no. 4 (1977) 619–627.
- [16] B. L. Reinhart, *Differential geometry of foliations. The fundamental integrability problem*, **99**, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [17] H. J. Sussmann, Orbits of families of vector fields and integrability of distributions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **180** (1973) 171–188.

مهران امینیان

گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، دانشگاه ولیعصر (عج)، رفسنجان، ایران

mehran.aminian@vru.ac.ir

مهران امینیان متولد اسفند ماه ۱۳۶۱ در شهر رفسنجان است. وی در سال ۱۳۸۰ وارد مقطع کارشناسی رشته ریاضی محض دانشگاه شهید باهنر شد و در سال ۱۳۸۴ وارد مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض دانشگاه صنعتی شریف شد و در سال‌های ۱۳۹۳-۱۳۹۰ مدرک دکتری را در رشته ریاضی گرایش هندسه از دانشگاه تربیت مدرس دریافت کرد.



مهران نامجو

گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، دانشگاه ولیعصر (عج)، رفسنجان، ایران

namjoo@vru.ac.ir

مهران نامجو متولد شهریور ماه ۱۳۵۱ در شهر زاهدان است. وی در سال ۱۳۷۰ وارد مقطع کارشناسی رشته ریاضی کاربردی دانشگاه شهید باهنر شد و در سال ۱۳۷۵ وارد مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی دانشگاه سیستان و بلوچستان شد و در سال‌های ۱۳۸۶-۱۳۸۰ مدرک دکتری را در رشته ریاضی گرایش آنالیز عددی از دانشگاه سیستان و بلوچستان دریافت کرد.

