

## A SUBCLASS OF STRONGLY STARLIKE FUNCTIONS

VALI SOLTANI MASIH<sup>id</sup>

**ABSTRACT.** Let's denote  $\mathcal{S}^*(f_c)$  as a family of analytic functions  $f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots$  in the open unit disk  $\mathbb{D}$  that satisfy the following relation for  $c \in (0, 1)$ :

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec f_c(z) = \frac{1}{\sqrt{1-cz}}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

First, we introduce the analytic functions  $f_c(z)$  and examine their starlike and positivity properties of the real part. Then, we obtain their images in the open unit disk  $\mathbb{D}$ , which are Cassini ovals. Cassini ovals, due to their properties, have applications in solving various problems in fields such as geometry, physics, and mathematics. These curves are used in studying the motion of waves and electromagnetic waves in interstellar spaces, as well as in the design of engineering structures such as telescopes. In this article, with the help of integrals, we investigate the structure of mappings in this family and some properties including maximum and minimum moduli, bounds of the real part of these functions. Moreover, we obtain the relationships between the defined geometric ranks with this family, including the order of starlikeness and order of strong starlikeness.

### 1. Introduction

Let  $\mathcal{A}$  be a set of analytic functions of the form  $f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots$  in the open unit disc  $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ . A function  $f \in \mathcal{A}$  is called univalent if it is one-to-one.

Keywords: Analytic functions, Starlike functions, Strongly starlike functions, Cassini Ovals.

Communicated by Mohamad Reza Pouryayevali.

Article Type: Promotional Paper.

Received: 2023-09-06, Accepted: 2023-12-11, Published Online: 10-01-2024.

Cite this article: V. Soltani Masih, A subclass of strongly starlike functions, Journal of Mathematics and Society, **8** no. 4 (2023) 81–91. <http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.139034.1604>.

In [5], two classes of starlike and convex functions with order  $0 \leq \beta < 1$  are defined as follows:

$$(1.1) \quad \mathcal{S}^*(\beta) := \left\{ f \in \mathcal{A} : \Re \left( \frac{zf'(z)}{f(z)} \right) > \beta \right\}, \quad \mathcal{K}(\beta) := \{ f \in \mathcal{A} : zf'(z) \in \mathcal{S}^*(\beta) \}.$$

Similarly, in [2], the class of functions called strongly starlike with order  $0 < \alpha \leq 1$  is defined as:

$$\mathcal{SS}^*(\alpha) = \left\{ f \in \mathcal{A} : \left| \operatorname{Arg} \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| < \frac{\alpha\pi}{2} \right\}.$$

If  $f$  and  $g$  are two analytic functions in  $\mathbb{D}$ , we say that  $f$  is subordinate to  $g$  [3], denoted by  $f \prec g$ , if and only if there exists an analytic function  $w$  with  $w(0) = 0$  such that for all  $z \in \mathbb{D}$ :

$$|w(z)| < 1, \quad f(z) = g(w(z)).$$

If  $g$  is univalent, we have:

$$f(z) \prec g(z) \iff f(0) = g(0), \quad f(\mathbb{D}) \subset g(\mathbb{D}).$$

Given  $c \in (0, 1)$ , analytic functions  $f_c$  are defined as follows:

$$(1.2) \quad f_c(z) := \frac{1}{\sqrt{1-cz}} = 1 + \frac{c}{2}z + \frac{3c^2}{8}z^2 + \dots$$

in the principal branch of the complex logarithm, where  $\log 1 = 0$ . These functions are univalent in  $\mathbb{D}$  and map the open unit disc  $\mathbb{D}$  into the interior of the Cassinian ovals given by the Cartesian equation:

$$(1.3) \quad (x^2 + y^2)^2 - \frac{2}{1-c^2}(x^2 - y^2) + \frac{1}{1-c^2} = 0,$$

or the polar equation:

$$(1.4) \quad r^4 - \frac{2r^2}{1-c^2} \cos(2\theta) = \frac{1}{c^2-1}.$$

In Figure 1, the boundary of  $f_c(\mathbb{D})$  and some of its properties are shown.

## 2. Main Results

In this section, we will first derive the structure of functions in the class  $\mathcal{S}^*(f_c)$ , and then using the stated theorems, we will determine the order of starlikeness and strongly starlikeness of functions in the class  $\mathcal{S}^*(f_c)$ .

**Theorem 2.1.** *A function  $f$  belongs to the class  $\mathcal{S}^*(f_c)$  if and only if there exists a function  $p \prec f_c$  such that*

$$(2.1) \quad f(z) = z \exp \left( \int_0^z \frac{p(t)-1}{t} dt \right), \quad z \in \mathbb{D}.$$

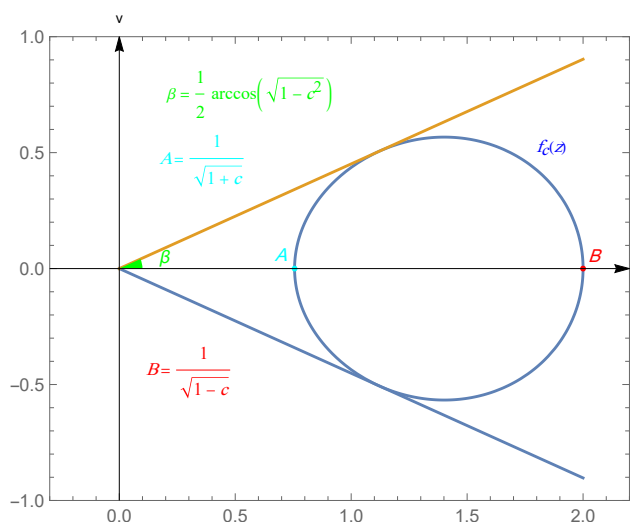


FIGURE 1. The boundary of  $f_c(\mathbb{D})$

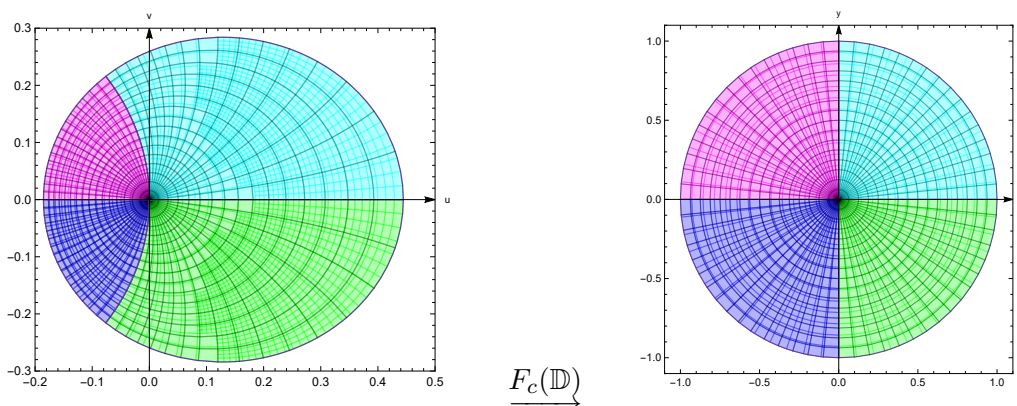


FIGURE 2. The image of the open unit disk  $\mathbb{D}$  under the mapping  $F_c(z)$ .

If we set  $p(z) = f_c(z)$  in theorem (2.1), then we get

$$(2.2) \quad F_c(z) := z \exp \left( \int_0^z \frac{f_c(t) - 1}{t} dt \right) = \frac{4z}{(1 + \sqrt{1 - cz})^2}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

This function  $F_c(z)$  is an extreme function for the class  $\mathcal{S}^*(f_c)$ . Figure 2 illustrates the image of the open unit disk  $\mathbb{D}$  under the mapping  $F_c(z)$  for  $c = 3/4$ .

**Theorem 2.2.** Let  $f_c$  be the given function described in (1.2). Then  $f_c$  is convex and satisfies the following conditions:

$$(2.3) \quad \max_{|z|=r<1} |f_c(z)| = f_c(r), \quad \min_{|z|=r<1} |f_c(z)| = f_c(-r).$$

In the following theorem, we obtain bounds for the real part and strongly starlike mappings of the functions  $f_c$ .

**Theorem 2.3.** Suppose  $c \in (0, 1)$ . Then we have the following:

(1)

$$f_c(\mathbb{D}) \subset \left\{ w \in \mathbb{C} : \frac{1}{\sqrt{1+c}} < \Re(w) < \frac{1}{\sqrt{1-c}} \right\},$$

(2)

$$f_c(\mathbb{D}) \subset \left\{ w \in \mathbb{C} : |\text{Arg}(w)| < \frac{1}{2} \arccos \sqrt{1-c^2} \right\}.$$

**Theorem 2.4.** If  $f \in \mathcal{S}^*(f_c)$  and  $|z| = r < 1$ , then the following hold:

(1)

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \frac{zF'_c(z)}{F_c(z)}, \quad \frac{f(z)}{z} \prec \frac{F_c(z)}{z},$$

(2)

$$F'_c(-r) \leq |f'(z)| \leq F'_c(r),$$

(3)

$$-F_c(-r) \leq |f(z)| \leq F_c(r),$$

(4)

$$|\arg(f(z)/z)| \leq \max |z| = r \arg \left( \frac{1}{(1 + \sqrt{1-cz})^2} \right),$$

(5) Either  $f$  is a rotation of  $F_c$  or

$$\left\{ w \in \mathbb{C} : |w| \leq -F_c(-1) = \frac{4}{(1 + \sqrt{1+c})^2} \right\} \subset f(\mathbb{D}),$$

where in all cases, the function  $F_c$  is defined as per equation (2.2).

In the following theorem, we determine the subordination order and strong subordination order for the class of functions  $\mathcal{S}^*(f_c)$ .

**Theorem 2.5.** The class of functions  $\mathcal{S}^*(f_c)$  has the following properties:

(1) For  $0 \leq \beta \leq \frac{1}{\sqrt{1+c}}$ , we have

$$\mathcal{S}^*(f_c) \subset \mathcal{S}^*(\beta).$$

(2) For  $\frac{1}{\pi} \arccos \sqrt{1-c^2} \leq \alpha \leq 1$ , we have

$$\mathcal{S}^*(f_c) \subset \mathcal{SS}^*(\alpha).$$

### 3. Conclusions

The class  $\mathcal{S}^*(f_c)$  consists of functions that can be represented in a specific form involving the function  $f_c$ , which is a special function related to the starlikeness property. The function  $F_c(z)$ , derived from  $f_c(z)$ , is an extreme function for the class  $\mathcal{S}^*(f_c)$  and has specific properties, including convexity and bounds on its maximum and minimum modulus on the unit circle.

The presented theorems provide bounds for the real part of the functions  $f_c$  and establish relationships related to subordination and strong subordination order for the class of functions  $\mathcal{S}^*(f_c)$ . Overall, the obtained theorems and their proofs contribute to understanding the structural properties, order of starlikeness and strongly starlikeness, as well as subordination order within the class of functions  $\mathcal{S}^*(f_c)$ , for different values of the parameter  $c$ .

### REFERENCES

- [1] M. K. Aouf, J. Dziok and J. Sokół, On a subclass of strongly starlike functions, *Appl. Math. Lett.*, **24** no. 1 (2011) 27–32.
- [2] D. A. Brannan and W. E. Kirwan, On some classes of bounded univalent functions, *J. London Math. Soc.* (2), **1** (1969) 431–443.
- [3] P. L. Duren, *Univalent functions*, **259**, Springer Science & Business Media, 2001.
- [4] W. C. Ma and D. Minda, A unified treatment of some special classes of univalent functions, *Proceeding of the Conference on Complex Analysis*, Z. Li, F. Ren, L. Yang and S. Zhang (Eds), Int. Press, (1994) 157–169.
- [5] M. I. Robertson, On the theory of univalent functions, *Ann. of Math.* (2), **37** no. 2 (1936) 374–408.
- [6] J. Sokół, On some subclass of strongly starlike functions, *Demonstratio Math.*, **31** no. 1 (1998) 81–86.

**Vali Soltani Masih**

Department of Mathematics, University of Payame Noor, P.O.Box 3697-19395, Tehran, Iran

Email: [v\\_soltani@pnu.ac.ir](mailto:v_soltani@pnu.ac.ir)

## زیردهی توابع به طور قوی ستارهگون

ولی سلطانی مسیح<sup>id</sup>

**چکیده.** فرض کنیم  $S^*(f_c)$  خانواده‌ای از توابع تحلیلی  $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$  در دیسک واحد باز  $\mathbb{D}$  باشند که برای  $(\circ, 1)$ ،  $c \in$  در رابطه‌ی زیر صدق می‌کنند:

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec f_c(z) = \frac{1}{\sqrt{1-cz}}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

ابتدا، توابع تحلیلی  $f_c(z)$  را معرفی کرده و ویژگی ستاره‌گونی و مثبت بودن قسمت حقیقی آن‌ها را بررسی می‌کنیم، و سپس نگاهی به آنها در دیسک واحد باز  $\mathbb{D}$ ، که بیضی‌های کاسینی می‌باشند، را به دست می‌آوریم. بیضی‌های کاسینی به دلیل ویژگی‌هایی که دارند، برای حل مسائل گوناگونی در حوزه‌های مانند هندسه، فیزیک و ریاضیات، کاربرد دارند. این منحنی‌ها در بررسی حرکت موج‌ها و امواج الکترومغناطیسی در فضاها بین ستاره‌ای و نیز در طراحی سازه‌های مهندسی مانند تلسکوپ‌ها، به کار می‌روند. در این مقاله به کمک انتگرال، ساختار نگاشت‌ها در این خانواده و برخی خواص شامل بیشینه و کمینه قدرمطلق، و کران‌های قسمت حقیقی این توابع را، بررسی می‌کنیم. همچنین روابط بین رده‌های هندسی تعریف شده با این خانواده، که شامل مرتبه ستاره‌گونی و مرتبه به طور قوی ستاره‌گونی می‌باشند، را به دست می‌آوریم.

### ۱. مقدمه

$\mathcal{A}$  را به عنوان گردایه‌ای از توابع تحلیلی به فرم

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$

در دیسک واحد باز  $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  در نظر می‌گیریم. تابع تحلیلی  $f \in \mathcal{A}$  را تک‌ارز می‌گوییم هرگاه یک‌به‌یک باشد.

در مقاله [۵]، دو رده از توابع ستاره‌گون و محدب با مرتبه  $1 < \beta \leq \circ$ ، به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$(1) \quad S^*(\beta) := \left\{ f \in \mathcal{A} : \Re \left( \frac{zf'(z)}{f(z)} \right) > \beta \right\}, \quad \mathcal{K}(\beta) := \{ f \in \mathcal{A} : zf'(z) \in S^*(\beta) \}.$$

عبارات و کلمات کلیدی: توابع تحلیلی، توابع ستاره‌گون، توابع به طور قوی ستاره‌گون، بیضی‌های کاسینی.  
دبیرتخصصی رابط: محمدرضا پوریای ولی  
نوع مقاله: ترویجی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۶/۱۵ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۹/۲۰ تاریخ انتشار آنلاین: ۱۴۰۲/۱۰/۲۰  
ارجاع به مقاله: و. سلطانی مسیح، زیردهی توابع به طور قوی ستاره‌گون، نشریه ریاضی و جامعه، ۸ شماره ۴ (۱۴۰۲) ۹۱-۸۱.  
<http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.139034.1604>

همین طور در مقاله [۲]، رده توابع به طور قوی ستارهگون با مرتبه  $0 < \alpha \leq 1$ ، به شکل زیر تعریف شده است:

$$SS^*(\alpha) = \left\{ f \in \mathcal{A} : \left| \operatorname{Arg} \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| < \frac{\alpha\pi}{2} \right\}.$$

اگر  $f$  و  $g$  دو تابع تحلیلی در  $\mathbb{D}$  باشند، تابع  $f$  را مطیع [۳] تابع  $g$  می نامیم و با نماد  $f \prec g$  نشان می دهیم، اگر و تنها اگر تابع تحلیلی  $w$  با ویژگی  $w(0) = 0$  موجود باشد که برای هر  $z \in \mathbb{D}$  داشته باشیم:

$$|w(z)| < 1, \quad f(z) = g(w(z)).$$

در صورتی که تابع  $g$  تک ارز باشد، داریم:

$$f(z) \prec g(z) \iff f(0) = g(0), \quad f(\mathbb{D}) \subset g(\mathbb{D}).$$

اگر  $c \in (0, 1)$  داده شده باشد، توابع تحلیلی  $f_c$  را با فرم

$$(2) \quad f_c(z) := \frac{1}{\sqrt{1-cz}} = 1 + \frac{c}{2}z + \frac{3c^2}{8}z^2 + \dots$$

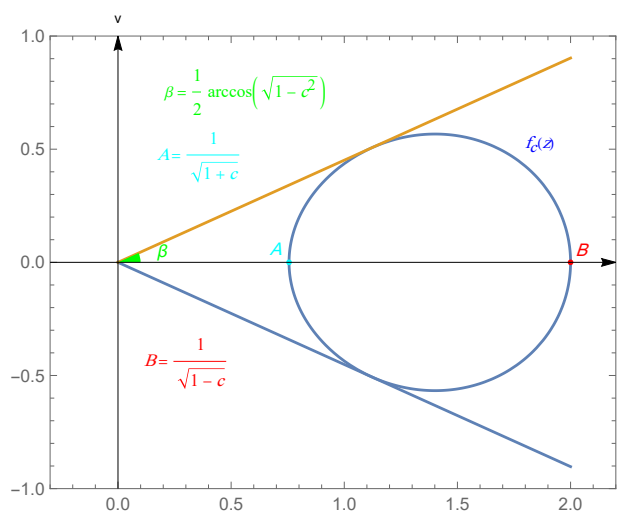
در شاخه اصلی لگاریتم مختلط در نظر می گیریم، یعنی  $\log 1 = 0$ . این توابع در  $\mathbb{D}$  تک ارز هستند و دیسک واحد باز  $\mathbb{D}$  را به داخل ناحیه بیضی کاسینی با معادله دکارتی

$$(3) \quad (x^2 + y^2)^2 - \frac{2}{1-c^2}(x^2 - y^2) + \frac{1}{1-c^2} = 0$$

یا معادله قطبی

$$(4) \quad r^4 - \frac{2r^2}{1-c^2} \cos(2\theta) = \frac{1}{c^2-1}$$

می نگارند. در شکل ۱، نگاره مرز  $f_c(\mathbb{D})$  و برخی ویژگی های آن نمایش داده شده است:



شکل ۱. نگاره مرز  $f_c(\mathbb{D})$

Figure 1: The boundary of  $f_c(\mathbb{D})$

با بهره‌گیری از تعریف در (۱) و تابعیت، می‌توان شرایط جدیدی از ویژگی توابع را در نظر گرفت و رده‌های جدیدی از توابع تحلیلی را تعریف کرد. به این منظور، تعریف زیر را ارائه می‌دهیم:

$$\mathcal{S}^*(f_c) := \left\{ f \in \mathcal{A} : \frac{zf'(z)}{f(z)} \prec f_c(z), \quad z \in \mathbb{D} \right\}.$$

همچنین داریم:

$$\begin{aligned} f_c(\mathbb{D}) &= \{w \in \mathbb{C} : \Re(w) > 0, \quad |w^2 - 1| < c|w|^2\} \\ &= \left\{ w = u + iv : u > 0, \quad (u^2 + v^2)^2 - \frac{2}{1-c^2}(u^2 - v^2) + \frac{1}{1-c^2} < 0 \right\}, \end{aligned}$$

که در آن مرز  $f_c(\mathbb{D})$  شامل حلقه سمت راست معادله بیضی‌های کاسینی داده شده در (۳) است. در مقالات [۱، ۶]، رده توابع ستاره‌گون وابسته به دامنه بیضی کاسینی برای تابع  $q_c(z) = \sqrt{1+cz}$  با  $c \in (0, 1)$ ، مورد بررسی قرار گرفته است. هدف ما در این مقاله بررسی رده توابع ستاره‌گون وابسته به دامنه بیضی کاسینی با تابع داده شده در (۲) است.

## ۲. نتایج اصلی

در این بخش ابتدا ساختار توابع در رده  $\mathcal{S}^*(f_c)$  را به دست خواهیم آورد، سپس با استفاده از قضیه‌هایی که بیان شده است، مرتبه ستاره‌گونی و مرتبه به‌طور قوی ستاره‌گونی توابع رده  $\mathcal{S}^*(f_c)$  را تعیین خواهیم کرد.

**قضیه ۱.۲.** تابع  $f$  در  $\mathcal{S}^*(f_c)$  قرار دارد اگر و تنها اگر تابع  $p \prec f_c$  موجود باشد به‌طوری‌که

$$(5) \quad f(z) = z \exp \left( \int_0^z \frac{p(t) - 1}{t} dt \right), \quad z \in \mathbb{D}.$$

**اثبات.** فرض کنیم  $f \in \mathcal{S}^*(f_c)$ . در این صورت  $p \prec f_c$  موجود است به‌طوری‌که

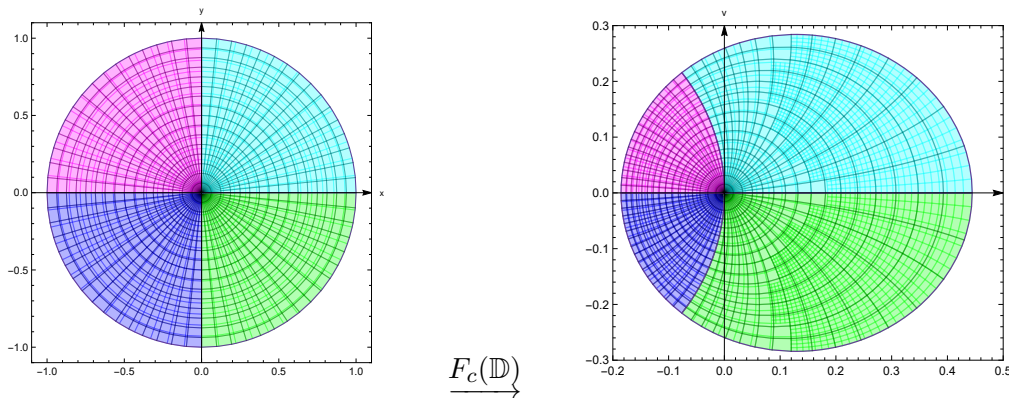
$$(6) \quad \frac{zf'(z)}{f(z)} = p(z) \prec f_c(z), \quad z \in \mathbb{D},$$

که هم‌ارز معادله (۵) می‌باشد. همچنین معادله به فرم (۵) با  $p \prec f_c$  در شرط (۶) صدق می‌کند، پس در  $\mathcal{S}^*(f_c)$  قرار دارد.  $\square$

اگر در قضیه (۶) قرار دهیم  $p(z) = f_c(z)$ ، آنگاه

$$(7) \quad F_c(z) := z \exp \left( \int_0^z \frac{f_c(t) - 1}{t} dt \right) = \frac{4z}{(1 + \sqrt{1 - cz})^2}, \quad z \in \mathbb{D},$$

یک تابع اکستریمال برای رده  $\mathcal{S}^*(f_c)$  می‌باشد. در شکل ۲، نگاره دیسک واحد باز  $\mathbb{D}$  تحت نگاشت  $F_c$  برای  $c = 3/4$  رسم شده است:



شکل ۲. نگاره دیسک واحد باز  $\mathbb{D}$  تحت نگاشت  $F_c(z)$ .

Figure 2: The image of the open unit disk  $\mathbb{D}$  under the mapping  $F_c(z)$ .

قضیه ۲.۲. فرض کنیم  $f_c$  تابع داده شده در (۲) باشد. در این صورت  $f_c$  محدب است و در شرایط زیر صدق می کند:

$$(A) \quad \max_{|z|=r<1} |f_c(z)| = f_c(r), \quad \min_{|z|=r<1} |f_c(z)| = f_c(-r).$$

اثبات. اگر  $g_c(z) := \frac{1}{c}(f_c(z) - 1)$  آنگاه  $g_c \in \mathcal{A}$  و

$$1 + \frac{zg_c''(z)}{g_c'(z)} = \frac{2 - cz}{2(1 - cz)}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

بنابراین  $g_c$  محدب است و در نتیجه  $f_c$  نیز محدب است. برای  $z = se^{i\eta}$  با  $0 < s < 1$  و  $0 \leq \eta < 2\pi$  داریم:

$$|f_c(se^{i\eta})|^2 = \frac{1}{1 + c^2 s^2 - 2cs \cos \eta} =: T_c(\eta).$$

کمترین و بیشترین مقدار تابع  $T_c(\eta)$  به ترتیب در نقاط  $\eta = 0$  و  $\eta = \pi$  رخ می دهد. بنابراین روابط (۸) برقرار هستند.  $\square$

در قضیه زیر کران های قسمت حقیقی و به طور قوی ستاره گونی توابع  $f_c$  به دست می آوریم.

قضیه ۳.۲. فرض کنیم  $c \in (0, 1)$ ، آنگاه داریم:

(۱)

$$f_c(\mathbb{D}) \subset \left\{ w \in \mathbb{C} : \frac{1}{\sqrt{1+c}} < \Re(w) < \frac{1}{\sqrt{1-c}} \right\},$$

(۲)

$$f_c(\mathbb{D}) \subset \left\{ w \in \mathbb{C} : |\operatorname{Arg}(w)| < \frac{1}{c} \arccos \sqrt{1-c^2} \right\}.$$

اثبات. با توجه به قضیه ۲.۲ و شکل ۱، به وضوح (۱) برقرار است. برای به دست آوردن رابطه (۲)، معادله مرزی  $f_c(\mathbb{D})$  را در حالت قطبی (یعنی معادله (۴)) در نظر می گیریم، داریم:

$$(9) \quad \cos(2\theta) = \frac{1-c^2}{2} \left[ r^2 + \frac{1}{r^2(1-c^2)} \right] =: R(r)$$

چون کمترین مقدار تابع  $R(r)$  در نقطه  $1/\sqrt[3]{1-c^2}$  رخ می‌دهد، بنابراین داریم:

$$\min_{r>0} R(r) = R\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-c^2}}\right) = \sqrt{1-c^2}.$$

□

حال از رابطه (۹)، حالت (۲) به دست می‌آید.

با استفاده از قضیه ۲.۲ و قضیه‌های مرجع [۴]، قضیه زیر را به دست می‌آوریم.

قضیه ۴.۲. اگر  $f \in \mathcal{S}^*(f_c)$  و  $|z| = r < 1$ ، آنگاه

(۱)

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \frac{zF'_c(z)}{F_c(z)}, \quad \frac{f(z)}{z} \prec \frac{F_c(z)}{z},$$

(۲)

$$F'_c(-r) \leq |f'(z)| \leq F'_c(r),$$

(۳)

$$-F_c(-r) \leq |f(z)| \leq F_c(r),$$

(۴)

$$|\arg(f(z)/z)| \leq \max_{|z|=r} \arg\left(\frac{1}{(1+\sqrt{1-cz})^2}\right),$$

(۵) یا  $f$  دورانی از  $F_c$  است، یا

$$\left\{w \in \mathbb{C}: |w| \leq -F_c(-1) = \frac{4}{(1+\sqrt{1+c})^2}\right\} \subset f(\mathbb{D}),$$

که در همه موارد ذکر شده، تابع  $F_c$  توسط (۷) داده شده است.

در قضیه زیر مرتبه ستاره‌گونی و مرتبه به‌طور قوی ستاره‌گونی رده‌ی توابع  $\mathcal{S}^*(f_c)$  را به دست می‌آوریم.

قضیه ۵.۲. رده‌ی توابع  $\mathcal{S}^*(f_c)$  دارای خواص زیر هستند.

(۱) برای  $0 \leq \beta \leq \frac{1}{\sqrt{1+c}}$ ، داریم:

$$\mathcal{S}^*(f_c) \subset \mathcal{S}^*(\beta).$$

(۲) برای  $1 \geq \alpha \geq \frac{1}{\pi} \arccos \sqrt{1-c^2}$ ، داریم:

$$\mathcal{S}^*(f_c) \subset \mathcal{SS}^*(\alpha).$$

□

اثبات. با توجه به قضیه ۳.۲ به‌وضوح می‌توان (۱) و (۲) را نتیجه گرفت.

## مراجع

- [1] M. K. Aouf, J. Dziok and J. Sokół, On a subclass of strongly starlike functions, *Appl. Math. Lett.*, **24** no. 1 (2011) 27–32.
- [2] D. A. Brannan and W. E. Kirwan, On some classes of bounded univalent functions, *J. London Math. Soc. (2)*, **1** (1969) 431–443.
- [3] P. L. Duren, *Univalent functions*, **259**, Springer Science & Business Media, 2001.
- [4] W. C. Ma and D. Minda, A unified treatment of some special classes of univalent functions, *Proceeding of the Conference on Complex Analysis*, Z. Li, F. Ren, L. Yang and S. Zhang (Eds), Int. Press, (1994) 157–169.
- [5] M. I. Robertson, On the theory of univalent functions, *Ann. of Math. (2)*, **37** no. 2 (1936) 374–408.
- [6] J. Sokół, On some subclass of strongly starlike functions, *Demonstratio Math.*, **31** no. 1 (1998) 81–86.

ولی سلطانی مسیح

گروه ریاضی، دانشگاه پیام‌نور، صندوق پستی ۳۶۹۷-۱۹۳۹۵، تهران، ایران  
v\_soltani@pnu.ac.ir

ولی سلطانی مسیح، عضو هیأت علمی و استادیار بخش ریاضی محض، دانشگاه پیام‌نور، دانش‌آموخته کارشناسی ریاضی محض، از دانشگاه تبریز و دکترای ریاضی محض گرایش آنالیز مختلط از تحصیلات تکمیلی دانشگاه پیام‌نور تبریز است. علائق پژوهشی وی، «نظریه توابع هندسی»، «توابع تک‌ارز» و «زیررده‌های توابع تک‌ارز» است.

