

REAL-WORLD APPLICATIONS OF NUMBER THEORY*

JIRI KLAŠKA

TRANSLATOR: RAHIM RAHMATI-ASGHAR 

ABSTRACT. The present paper is concerned with practical applications of the number theory and is intended for all readers interested in applied mathematics. Using examples we show how human creativity can change the results of the pure mathematics into a practical usable form. Some historical notes are also included.

1. Introduction

German mathematician Johann Carl Friedrich Gauss (30 April 1777-23 February 1855), regarded as one of the greatest mathematicians of all time, claimed: “*Mathematics is the queen of the sciences and number theory is the queen of mathematics.*” However, for many years number theory had only few practical applications. It is well known that the great English number theorist Godfrey Harold Hardy (7 February 1877-1 December 1947) believed that number theory had no practical applications. See his essay “*A Mathematician’s Apology*” [16]. Over the 20th and 21st centuries, this situation has changed significantly. Contrary to Hardy’s opinion, many practical and interesting applications of number theory have been discovered. The present paper brings some remarkable examples of number theory applications in the real world. The paper can be regarded as a loose continuation of the author’s preceding work [19] and [20].

Keywords: number theory, applications, Diophantine equations, partitions, history.

Communicated by Bijan Davvaz.

Article Type: Translation Paper.

Received: 2023-01-17, Accepted: 2023-12-10, Published Online: 16-01-2024.

*The above abstract has been extracted by the translator from the original article (J. Klaška, Real-world applications of number theory, *South Bohemia Mathematical Letters*, **25** no. 1 (2017) 39–47.)

<http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.136490.1555> .

Let n be a positive integer, ≥ 2 . Then, the equation

$$(1.1) \quad a_1x_1 + \dots + a_nx_n = m$$

is said to be a linear Diophantine equation if all unknowns $x_1, \dots, x_n$ and all coefficients $a_1, \dots, a_n, m$ are integers. For general methods for solving 1.1, see for example [5], [25], and [24, pp. 27-31].

In the following we give some interesting examples of using Diophantine equations in the natural sciences.

2. THE RESULTS

As the first example we show some applications of a linear Diophantine equation to problems in chemistry. In particular, we will deal with the balancing of chemical equations. See [6]. Consider a chemical equation written in the form

$$(2.1) \quad x_1A_{a_1}B_{b_1}C_{c_1} \dots + x_2A_{a_2}B_{b_2}C_{c_2} \dots + \dots \rightarrow x'_1A'_{a'_1}B'_{b'_1}C'_{c'_1} \dots + x'_2A'_{a'_2}B'_{b'_2}C'_{c'_2} \dots + \dots$$

where $A, B, C, \dots$ are the elements occurring in the reaction, $a_1, b_1, c_1, \dots, a'_1, b'_1, c'_1, \dots$ are positive integers or 0, and $x_1, x_2, \dots, x'_1, x'_2, \dots$ are the unknown coefficients of the reactants and products. Then, we have

$$(2.2) \quad \begin{aligned} x_1a_1 + x_2a_2 + \dots &= x'_1a'_1 + x'_2a'_2 + \dots \\ x_1b_1 + x_2b_2 + \dots &= x'_1b'_1 + x'_2b'_2 + \dots \\ x_1c_1 + x_2c_2 + \dots &= x'_1c'_1 + x'_2c'_2 + \dots \\ &\dots \end{aligned}$$

Clearly, each equation of (2.2) expresses the law of conservation of the number of atoms for any particular element $A, B, C, \dots$. Finding all integer solutions $[x_1, x_2, \dots, x'_1, x'_2, \dots]$ of (2.2) is a nice elementary problem of Diophantine analysis.

In the second example we show how linear Diophantine equations can be used to determine the molecular formula [6]. Assume that a substance with a molecular weight of m contains elements $A, B, C, \dots$ with atomic weights $a, b, c, \dots$ and that $x, y, z, \dots$ represent the numbers of atoms of $A, B, C, \dots$ in a molecule. Then, we have

$$(2.3) \quad ax + by + cz + \dots = m.$$

Let $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ denote the integers nearest the values $a, b, c, \dots$ and μ denote the integer nearest m . Then, (2.3) can be replaced by the linear Diophantine equation

$$(2.4) \quad \alpha x + \beta y + \gamma z + \dots = \mu.$$

If we require that the values $x, y, z, \dots$ in (2.4) should be reasonably small, we can solve (2.4) under a condition

$$(2.5) \quad -\frac{1}{2} < (a - \alpha)x + (b - \beta)y + (c - \gamma)z + \dots < \frac{1}{2}.$$

If more solutions of (2.4) are obtained, the true values may be found by substituting into (2.3) and finding which of them satisfies (2.3) with minimum deviation from m .

In the third example we focus on an interesting problem in virology. Recall, that virus particles consist of protein subunits ordered geometrically according to strict symmetry rules. These rules highly depend on the chemical properties of the protein.

As the last example we establish the number $p(n)$ which is the number of partitions of n and it is known under the name of *partitio numerorum*. Two interesting connections between the problem *partitio numerorum* and physics will now be mentioned.

First recall that the Hardy-Ramanujan formula

$$(2.6) \quad p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} \cdot \exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right) \text{ for } n \rightarrow \infty$$

has been used, with great success, in quantum physics. The formula (2.6) was discovered in 1917 by G. H. Hardy and the brilliant Indian mathematician Srinivasa Ramanujan (22 December 1887-26 April 1920). The second very important application of Hardy-Ramanujan formula can be found in the problems of statistical mechanics.

3. Conclusions

Finally, some further significant applications of the number theory will be shortly mentioned. Above all, it is well known that the theory of Fibonacci numbers has many applications in physics, chemistry, biology, economy, and architecture. Listing 163 chronological references to papers published from 1611 to 2011, paper [19] can serve as an introduction to this field. Further fields of number theory with important applications include the theory of sequences over finite fields [20]. This theory found an application in the testing of Einstein's general relativity or in testing the global warming of oceans. Furthermore, using methods of elementary number theory, practical problems have been solved concerning to the splicing of telephone cables [21]. Many further interesting applications can be found in the book *Number Theory and the Periodicity of Matter* [3]. Lastly, new attractive applications of the number theory include cryptography, coding theory, and random number generation. With the rise of computers, these fields develop very rapidly with their importance continuously increasing.

Rahim Rahmati-Asghar

Department of Mathematics, Faculty of Science, University of Maragheh, P. O. Box 55136-553, Maragheh, Iran

Email: rahmatiasghar.r@gmail.com

کاربردهایی از نظریه اعداد در جهان واقعی*

جری کلاسکا

مترجم: رحیم رحمتی اصغر^{id}

چکیده. مقاله حاضر به کاربردهای عملی نظریه اعداد می‌پردازد و مخاطب آن هم علاقمندان به ریاضیات کاربردی هستند. با مثال‌هایی نشان می‌دهیم که چگونه خلاقیت می‌تواند دستاوردهای ریاضیات محض را به دستاوردهایی مفید و کاربردی بدل کند. اشاره‌های تاریخی چندی نیز در مقاله گنجانده شده است.

۱. مقدمه

ریاضیدان آلمانی، یوهان کارل فریدریش گاوس (۳۰ آوریل ۱۷۷۷-۲۳ فوریه ۱۸۵۵)، یکی از بزرگترین ریاضیدان‌های همه دوران چنین گفته است که ”ریاضیات ملکه علوم است و نظریه اعداد ملکه ریاضیات“. با این حال، برای سال‌های زیادی نظریه اعداد کاربردهای عملی بسیار کمی داشت. مشهور است که نظریه اعداددان بزرگ انگلیسی، گاد فری هارولد هاردی (۷ فوریه ۱۸۷۷-۱ دسامبر ۱۹۴۷)، معتقد بود که نظریه اعداد هیچ کاربرد عملی ندارد. نوشته او با نام ”دفاعیه یک ریاضیدان“ را ببینید [۱۶]. این تصور از نظریه اعداد در طی قرن‌های ۲۰ و ۲۱، به نحو بارزی تغییر کرد و بر خلاف نظر هاردی، کاربردهای عملی و جالب فراوانی از نظریه اعداد کشف شد. مقاله حاضر، چند مثال برجسته از کاربردهای نظریه اعداد در دنیای واقعی ارائه می‌دهد. این مقاله را می‌توان در ادامه کارهای [۱۹] و [۲۰] از نویسنده در نظر گرفت.

۲. معادلات دیوفانتی

آنالیز دیوفانتی شاخه‌ای از نظریه اعداد است که به مطالعه معادلات چندجمله‌ای دو یا چند مجهولی می‌پردازد که باید برای آن‌ها جواب‌هایی در مجموعه اعداد صحیح یافت. خود این معادلات را معادلات دیوفانتی نامند؛ کلمه دیوفانتی برگرفته از نام ریاضیدان یونانی به نام دیوفانتیوس اسکندرانی است که در قرن سوم پیش از میلاد مسیح می‌زیسته است. پیدا کردن جواب‌های معادلات چندجمله‌ای در مجموعه اعداد صحیح یکی از قدیمی‌ترین مسئله‌های ریاضی است. به‌طور سنتی در معادلات دیوفانتی این‌گونه پرسش‌ها حل می‌شوند:

عبارات و کلمات کلیدی: نظریه اعداد، کاربردها، معادلات دیوفانتی، افزاها، تاریخچه.

دبیرتخصصی رابط: بیژن دواز

نوع مقاله: ترجمه‌ای

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۱۰/۲۷ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۹/۱۹ تاریخ انتشار آنلاین: ۱۴۰۲/۱۰/۲۰

* نوشته حاضر ترجمه مقاله زیر است:

J. Kłaska, Real-world applications of number theory, *South Bohemia Mathematical Letters*, 25 no. 1 (2017) 39–47.

<http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.136490.1555>

(۱) آیا معادله داده شده دارای حداقل یک جواب صحیح هست؟

(۲) آیا تعداد جواب‌ها متناهی است یا نامتناهی؟

(۳) تعیین همه جواب‌های معادله داده شده.

همچنین طبیعی است این پرسش هم مطرح شود که آیا الگوریتمی برای پیدا کردن جواب‌های هر معادله دیوفانتی داده شده‌ای وجود دارد؟ این پرسش به مسئله دهم هیلبرت معروف است. در سال ۱۹۷۰، ریاضیدان روسی یوری ویلادیمیرویچ ماتياسویچ نشان داد چنین الگوریتم کلی وجود ندارد [۲۴]. اگرچه برای تعداد زیادی معادله دیوفانتی خاص، الگوریتم کلی ارائه شده است. به عنوان مثال، می‌توان به نظریه معادلات دیوفانتی خطی اشاره کرد.

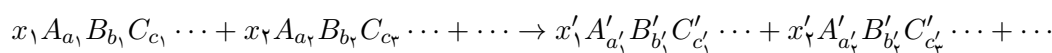
فرض کنیم n یک عدد صحیح مثبت و $n \geq 2$ در این صورت معادله

$$(۱) \quad a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = m$$

یک معادله دیوفانتی خطی نامیده می‌شود هرگاه همه مجهول‌های $x_1, \dots, x_n$ و همه ضرایب $a_1, \dots, a_n$ و m صحیح باشند. معادله (۱) دارای یک جواب صحیح است اگر و تنها اگر بزرگترین مقسوم علیه مشترک $a_1, \dots, a_n$ عدد m را بشمارد. برای دیدن روش‌های عمومی حل معادله (۱) به [۵]، [۲۵] و [۲۷، ص. ۳۱-۲۷] رجوع کنید. در بخش‌های بعد سه مثال جالب از کاربرد معادلات دیوفانتی در علوم طبیعی ارائه می‌دهیم.

۳. موازنه واکنش‌های شیمیایی

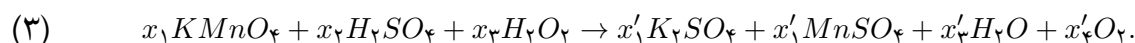
به عنوان اولین مثال، کاربردهایی از یک معادله دیوفانتی خطی در مسائل شیمی ارائه می‌دهیم، به ویژه به موازنه معادلات شیمیایی می‌پردازیم. معادله شیمیایی زیر را در نظر بگیرید:



که $A, B, C, \dots$ و $A', B', C', \dots$ عناصر واکنش و $x_1, x_2, \dots, x'_1, x'_2, \dots$ ضرایب مجهول واکنش دهنده‌ها و محصولات هستند. در این صورت داریم

$$(۲) \quad \begin{aligned} x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots &= x'_1 a'_1 + x'_2 a'_2 + \dots \\ x_1 b_1 + x_2 b_2 + \dots &= x'_1 b'_1 + x'_2 b'_2 + \dots \\ x_1 c_1 + x_2 c_2 + \dots &= x'_1 c'_1 + x'_2 c'_2 + \dots \\ &\dots \end{aligned}$$

به وضوح، هر معادله از (۲) به قانون پایستگی عدد اتمی برای هر عنصر $A, B, C, \dots$ اشاره می‌کند. پیدا کردن همه جواب‌های صحیح $[x_1, x_2, \dots, x'_1, x'_2, \dots]$ از (۲) یک مسئله مقدماتی خوب در آنالیز دیوفانتی است. معادله شیمیایی زیر را در نظر بگیرید:



از (۳) نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned} 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 4x'_1 + 4x'_2 + x'_3 + 2x'_4 & \text{برای } O \\ x_1 &= x'_4 & \text{برای } Mn \\ x_1 &= 2x'_1 & \text{برای } K \\ x_2 &= x'_1 + x'_4 & \text{برای } S \\ 2x_2 + 2x_3 &= 2x'_3 & \text{برای } H \end{aligned}$$

دستگاه معادلات فوق به‌سادگی به‌معادله زیر فروکاسته می‌شود:

$$(5) \quad 5x_1 + 2x_3 - 4x'_4 = 0.$$

به‌وضوح، (۵) یک معادله دیوفانتی خطی سه‌متغیره با جواب $[x_1, x_3, x'_4] = [2, 1, 3]$ است. در نتیجه،

$$[x_1, x_2, x_3, x'_1, x'_2, x'_3, x'_4] = [2, 3, 1, 1, 2, 4, 3].$$

و در نهایت،



آشکار است که رابطه (۶) تنها جواب مسئله موازنه‌سازی نیست. در واقع، بعد از محاسبات کوتاهی نتیجه می‌شود که مجموعه S شامل تمام جواب‌های صحیح مثبت (۴) یک مجموعه نامتناهی است و می‌توان آن را به‌صورت زیر نوشت:

$$S = \{[2u, 3u, v, u, 2u, 3u + v, (\Delta u + v)/2] : u, v, (\Delta u + v)/2 \in \mathbb{N}\}.$$

توجه کنید که جواب (۶) را می‌توان با قرار دادن $u = v = 1$ در نمایش فوق از مجموعه جواب S به‌دست آورد. پس (۶) کوچکترین جواب ممکن مسئله موازنه‌سازی (۳) است. از طرفی $(\Delta u + v)/2 \in \mathbb{N}$ اگر و تنها اگر $u \equiv v$ به پیمانه ۲. بنابراین، می‌توان نتیجه گرفت $S = S_1 \cup S_2$ که در آن:

$$S_1 = \{[4r - 2, 6r - 3, 2s - 1, 2r - 1, 4r - 2, 6r + 2s - 4, \Delta r + s - 3] : r, s \in \mathbb{N}\}$$

و

$$S_2 = \{[4r, 6r, 2s, 2r, 4r, 6r + 2s, \Delta r + 2] : r, s \in \mathbb{N}\}.$$

برای دیدن مثال‌های بیشتری از معادلات موازنه‌سازی مرجع [۶] را ببینید.

۴. تعیین فرمول مولکولی

در این بخش نشان می‌دهیم که چطور معادلات دیوفانتی خطی می‌توانند برای تعیین فرمول مولکولی به‌کار روند [۶]. فرض کنیم ماده‌ای با جرم مولکولی m ، عناصر $A, B, C, \dots$ را به ترتیب با جرم اتمی $a, b, c, \dots$ داشته باشد و $x, y, z, \dots$ تعداد اتم‌های $A, B, C, \dots$ را در مولکول ماده نشان دهند. داریم

$$(7) \quad ax + by + cz + \dots = m.$$

فرض کنیم $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ و μ نزدیکترین اعداد صحیح، به‌ترتیب به‌مقادیر $a, b, c, \dots$ و m باشند. در این صورت معادله (۷) می‌تواند با معادله دیوفانتی خطی

$$(8) \quad \alpha x + \beta y + \gamma z + \dots = \mu.$$

جایگزین شود. در صورت نیاز در معادله (۸)، با در نظر گرفتن مقادیر $x, y, z, \dots$ تا حد امکان کوچک، می توان معادله را تحت شرط

$$(9) \quad -\frac{1}{p} < (a - \alpha)x + (b - \beta)y + (c - \gamma)z + \dots < \frac{1}{p}.$$

حل کرد. اگر جواب های بیشتری از معادله (۸) به دست آید در این صورت مقادیری که در (۷) صدق کنند و معادله را با اختلاف خیلی کمی از m برقرار کنند به عنوان جواب های درست در نظر گرفته می شوند.

حال مسئله زیر را می توان حل کرد: جرم مولکولی ماده ای با عناصر هیدروژن و گوگرد برابر است با ۶۶/۱۴۶. فرمول مولکولی این ماده را بیابید.

فرض کنیم a جرم اتمی هیدروژن و b جرم اتمی گوگرد را نشان دهند. از جدول تناوبی عناصر داریم $a = 1.008$ و $b = 32.065$. در نتیجه $1.008x + 32.065y = 66.146$. قرار می دهیم $\alpha = 1$ ، $\beta = 32$ و $\mu = 66$ و همچنین $x \leq 32$ و $y \leq 2$. در این صورت معادله دیوفانتی $x + 32y = 66$ تنها دو جواب صحیح مثبت دارد: $[x, y] = [34, 1]$ و $[x, y] = [2, 2]$. با توجه به اینکه مولکولی با یک اتم گوگرد و ۳۴ اتم هیدروژن وجود ندارد، پس جواب $[x, y] = [2, 2]$ قابل قبول است و مولکول مورد نظر H_2S_2 است. اگرچه در حل این مسئله روش موثرتری می توان در پیش گرفت. معادله $1.008x + 32.065y = 66.146$ را می توان به صورت معادله دیوفانتی $1008x + 32065y = 66146$ تبدیل کرد که به تعداد نامتناهی جواب صحیح $[x, y] = [2 + 32065k, 2 - 1008k]$ با $k \in \mathbb{Z}$ دارد. از اینکه $x, y \in \mathbb{N}$ و $x \leq 34$ و $y \leq 2$ جواب $[x, y] = [2, 2]$ به دست می آید.

۵. ساختار ویروس ها

در این بخش به بررسی مسئله جالبی در ویروس شناسی می پردازیم. توجه کنید که ذرات ویروس از زیرواحدهای پروتئینی تشکیل شده اند که با توجه به قواعد متقارن محدودی به صورت هندسی مرتب می شوند. این قواعد تا حد زیادی به خواص شیمیایی پروتئین مربوط است. به عنوان مثال، ویروس های کروی تقارن بیست وجهی را ترجیح می دهند و اگر تعداد زیرواحدهای تقریباً یکسان، که می توانند بر رویه بیست وجهی به طور منظم مرتب شوند را N قرار دهیم در این صورت N از فرمول گلدبرگ

$$(10) \quad N = 10(a^2 + ab + b^2) + 2 = 10T + 2, \quad a, b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

به دست می آید [۸]. به عبارتی

$$N \in \{2, 12, 32, 42, 72, 92, 122, 132, \dots\}.$$

از طرفی، یک بیست وجهی دارای ۳۰ محور از تقارن دو پارچه، ۲۰ محور از تقارن سه پارچه و ۱۲ محور از تقارن ۵ پارچه است. بنابراین همه زیرواحدها بر سطح یک ویروس بیست وجهی می توانند به ۳۰ گروه یکسان، که هر یک دارای تقارن دو پارچه است، ۲۰ گروه با تقارن های سه پارچه و ۱۲ گروه با تقارن های پنج پارچه، تقسیم شوند. این گروه ها به ترتیب دومتقارن، سه متقارن و پنج متقارن نامیده می شوند. فرض کنیم هر دو متقارن دارای d_u زیرواحد باشند و هر سه متقارن شامل t_v زیرواحد و هر پنج متقارن شامل p_w زیرواحد باشند. در این صورت، بنابر [۲۲] داریم

$$(11) \quad N = 30d_u + 20t_v + 12p_w = 10T + 2,$$

که

$$(12) \quad d_u = u - 1, \quad t_v = \frac{(v-1)v}{2}, \quad p_w = \frac{5(w-1)w}{2} + 1; \quad u, v, w \in \mathbb{N}.$$

برای هر مقدار N تعریف شده در (۱۰) عدد $f(N)$ ، روی همه جواب‌های (۱۱)، به تعداد روش‌های ممکن برای به‌وجود آمدن یک ویروس با N زیرواحد با ترکیبات متفاوتی از تقارن‌ها متناظر است. به‌عنوان مثال، اگر $N = ۴۲$ در این صورت (۱۱) دارای تجزیه منحصر بفرد $۱۲۰۱ + ۲۰۰۰ + ۳۰۰۱ = ۴۲$ است و اگر $N = ۷۲$ در این صورت (۱۱) دارای سه تجزیه زیر است:

$$۷۲ = ۳۰۰۲ + ۲۰۰۰ + ۱۲۰۱ = ۳۰۰۰ + ۲۰۰۳ + ۱۲۰۱ = ۳۰۰۰ + ۲۰۰۰ + ۱۲۰۶.$$

حال قرار می‌دهیم $x = ۲v - ۱$ ، $y = ۲w - ۱$ و $z = u - ۱$. با استفاده از معادله (۱۲) و بعد از کمی محاسبات، معادله (۱۱) به‌صورت هم‌ارز زیر در می‌آید:

$$(۱۳) \quad x^2 + 3y^2 + 12z = 4T.$$

در این صورت مسئله توصیف ساختار ویروس‌ها به‌وسیله تقارن‌های هندسی به‌مسئله دیوفانتی زیر تبدیل می‌شود: همه اعداد صحیح مثبت فرد x و y و همه اعداد صحیح نامنفی z را که در شرط $x^2 + 3y^2 + 12z = 4(a^2 + ab + b^2)$ برای هر مقدار $a, b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ صدق کند، پیدا کنید. این مسئله هیچ جواب ساده‌ای ندارد. در [۲۲] یوگرن ثابت کرد که عدد $f(N)$ از جواب‌های (۱۳) برابر است با

$$(۱۴) \quad f(N) = \frac{\pi\sqrt{3}}{180}N + k\sqrt{N},$$

که k کراندار و مستقل از N است. به‌علاوه، از (۱۴) نتیجه می‌شود که $f(N)$ بر حسب N به‌طور خطی افزایش می‌یابد. به‌طور هندسی، این معنی می‌دهد که اگر $[x, y, z]$ یک جواب (۱۳) باشد در این صورت $[x, y]$ دقیقاً در همسایگی یکی از دو خط $y = 0.۱5x$ و $y = 0.۳x$ می‌افتد. جزئیات این مبحث را در [۲۲، صص. ۵۴-۵۶] ببینید. در [۱۰] گریتزوک روشی برای تعیین همه جواب‌های (۱۳)، با اعداد صحیح مثبت فرد x و y و اعداد صحیح نامنفی z ارائه کرد. همچنین در [۱۱] ثابت کردند که (۱۳) می‌تواند به‌صورت

$$(۱۵) \quad x^2 + 3y^2 = 4(R^2 + 3S^2), \quad (R, S) = 1$$

تبدیل شود و جواب‌های (۱۵) در اعداد صحیح مثبت فرد x و y به‌صورت

$$(۱۶) \quad x = |R - 3S|, y = R + S \quad \text{یا} \quad x = |R + 3S|, y = |R - S|$$

در می‌آیند. در نتیجه جواب کاملی از مسئله دیوفانتی به‌دست می‌آید. توجه کنید که جواب (۱۶)، به تازگی توسط زیروهیکس در [۳۰، ص ۱۰۲] بررسی شد. در پایان همین بخش توصیفی ریاضیاتی از بعضی ویروس‌ها با استفاده از نظریه بالا (با استفاده از مسئله دیوفانتی بالا و فرمول گلدبرگ) می‌توان ارائه داد (به [۱۲] و [۱۳] رجوع کنید). به‌خصوص، پارو ویروس $N = ۱۲$ ، $T = ۱$ ، پلوی ویروس $N = ۳۲$ ، $T = ۳$ ، تگا ویروس $N = ۴۲$ ، $T = ۴$ ، رنو ویروس $N = ۱۳۲$ ، $T = ۱۳$ ، هرپو ویروس $N = ۱۶۲$ ، $T = ۱۶$ ، آدنو ویروس $N = ۲۵۲$ ، $T = ۲۵$ ؛ با جزئیات مطالعه گردیده و مدل‌های هندسی آن‌ها ارائه می‌شوند.

۶. عدد افراز و فیزیک کوانتوم

یک افراز از عدد طبیعی n عبارت است از هر دنباله نزولی اعداد طبیعی که مجموعشان n است. تعداد افرازهای n را با $p(n)$ نمایش می‌دهند. برای مثال، اگر $n = 5$ در این صورت $5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ و در نتیجه $p(5) = 7$. مسئله بررسی عدد $p(n)$ تاریخچه ای خیلی طولانی دارد و به عدد افراز معروف است. از سال ۱۶۷۴، که مسئله تعیین $p(n)$ توسط گوت فرید و یلهلم لایبنیتس (۱ جولای ۱۶۴۶-۱۴ نوآمبر ۱۷۱۶) مطرح شد، نتایج زیادی در این مورد ارائه شد. (رجوع کنید به [۲] و [۱۷]). برخی نتایج روی $p(n)$ توسط نویسنده در [۱۸] ارائه شده است.

برای مقادیر کوچکتر n می‌توان نتیجه گرفت

$$\{p(n)\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, 22, 30, 42, 56, \dots\}.$$

حدود سال ۱۹۱۶، پرسی الکساندر مک‌ماهون (۲۶ سپتامبر ۱۸۵۴-۲۵ دسامبر ۱۹۲۹) مقدار $p(n)$ را برای هر $n \leq 200$ تعیین کرد [۱۵]. برای مثال او نتایج زیر را به‌دست آورد:

$$p(100) = 1905698892 \text{ و } p(200) = 3972999029388.$$

در سال ۱۹۳۴، ه. گوپتا [۱۴] جدول مک‌ماهون را تا $n = 300$ توسعه داد [۱۷، ص. ۳۹۱]. در حال حاضر، با استفاده از رایانه می‌توان نتایج زیر را به‌دست آورد:

$$p(1000) = 24061467864032622473692149727991 \approx 2,40615 \cdot 10^{31}$$

و

$$p(10000) \approx 3,61673 \cdot 10^{106}.$$

با توجه به نتایج فوق، رشد $p(n)$ بسیار سریع است. بنابراین، طبیعی است که در مورد اندازه $p(n)$ سوال شود. پاسخ به این سوال با استفاده از فرمول تقریبی

$$(17) \quad p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} \cdot \exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right) \text{ برای } n \rightarrow \infty$$

داده شده است که نشان می‌دهد رشد $p(n)$ نمایی است. فرمول (۱۷) در سال ۱۹۱۷ توسط ج. هاردی و ریاضیدان برجسته‌ی هندی، سرینیواسا رامانوجان (۲۲ دسامبر ۱۸۸۷-۲۶ آوریل ۱۹۲۰) ارائه شد. برای برهانی از (۱۷) به [۱۵] رجوع کنید. فرمول (۱۷) بسیار دقیق است و کاربردهای مهمی در فیزیک دارد. در ادامه به دو رابطه جالب بین مسئله عدد افراز و فیزیک اشاره می‌شود.

در ابتدا یادآوری می‌کنیم که فرمول هاردی-رامانوجان، به‌طرز موفقیت‌آمیزی در فیزیک کوانتوم استفاده می‌شود. ارتباط بین نظریه افرازا و فیزیک کوانتوم ابتدا توسط نیلز هنریک بوهر (۷ اکتبر ۱۸۸۵-۱۸ نوآمبر ۱۹۶۲) و فیزیکدان با استعداد فریتز کلکار (۱۳ فوریه ۱۹۱۰-۶ ژانویه ۱۹۳۸) در مقاله مشهور [۴] کشف شد. در [۴]، با استفاده از فرمول رامانوجان-هاردی (۱۷)، بوهر و کلکار یک پیشرفت اساسی در فیزیک کوانتوم به‌دست آوردند: آن‌ها تجزیه هسته اتمی سنگین را توصیف کردند. بعداً بوهر به ارتباط بین تجزیه اورانیوم ۲۳۵ با نظریه افراز اعداد طبیعی پی‌برد و ایده اصلی بمب هسته‌ای را مطرح کرد. بدین ترتیب، نیلز بوهر خالق ایدئولوژیکی بمب هسته‌ای لقب گرفت [۲۳، ص. ۲۴۹].

دومین کاربرد مهم فرمول هاردی-رامانوجان را می‌توان در مسائل مکانیک آماری یافت. نقش مهم فرمول (۱۷) در این شاخه توسط نویسندگان زیادی مورد بحث قرار گرفته است. برای مثال، مقالات س. ون لیر و گ. اولنیک [۲۹]، ف. س.

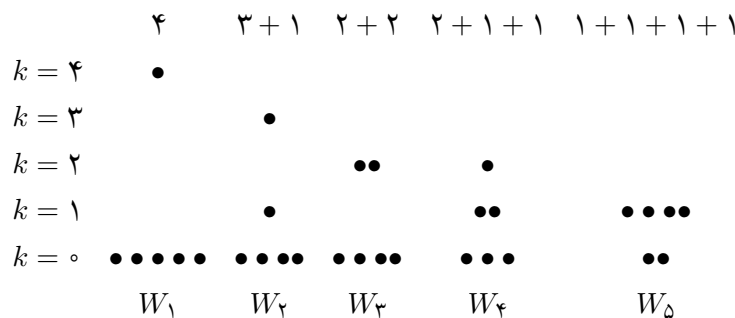
آلوک و د. س. کتاری [۱]، ن. ه. ر. تمپرلی [۲۸] و ل. دبناس [۷] را ببینید. حال ما جزئیاتی در مورد یکی از این مسائل ارائه می‌دهیم. در نظریه کوآنتوم، یک بوزون ذره‌ای است که در آمار بوز-اینشتین صدق کند. مثال‌هایی از بوزون‌ها ذراتی مانند فوتون‌ها، گلوئون‌ها، بوزون‌های دابلیو و زد و نیز بوزون هیگس که اخیراً کشف شد، می‌باشند. برای تعاریف پایه به [۹، ص. ۷۴-۷۸] رجوع کنید.

حال دستگاه کوآنتومی از N بوزون همسان را در نظر بگیرید. رایج است که چنین دستگاهی را می‌توان به‌عنوان خانواده‌ای از نوسان سازهای همگن یک بعدی در نظر گرفت. سطوح انرژی یک نوسان ساز همگن کوآنتوم با معادله $E_k = (k + 1/2)\hbar\omega$ مشخص می‌شود، که k عدد صحیح نامنفی، $\hbar = 2\pi\hbar$ ثابت پلانک و ω فرکانس زاویه‌ای است. برای $k = 0$ انرژی حالت پایه و برای $k = 1, 2, \dots$ حالت‌های برانگیخته به‌دست می‌آید. بنابراین در حالت پایه دستگاه، بوزون‌ها پایین‌ترین سطح با $k = 0$ تجربه می‌کنند. زمانی که انرژی برانگیخته به دستگاه داده می‌شود به چندین روش این انرژی بین N بوزون توزیع می‌شود. حال، مسئله اساسی تعیین این عدد است. در واقع، این مسئله همان پیدا کردن عدد $p(n)$ است. این موضوع، از این واقعیت نتیجه می‌شود که تمییزناپذیری ذرات بوزون هم‌ارز است با این خاصیت که مرتبه جمع‌وندها در افزاها مهم نیست. فرض کنیم تعداد تمام روش‌های ممکن توزیع انرژی برانگیخته $E = n\hbar\omega$ بین N بوزون را با $w(N, n)$ نشان دهیم. اگر $n \leq N$ ، در این صورت $w(N, n) = p(n)$ و برای $1 < N < n$ داریم $w(N, n) = p_N(n)$ که $p_N(n)$ تعداد افزاهای n به N یا کمتر از N بخش است. در نتیجه، رشد تقریبی $w(N, n)$ برای $n \leq N$ دقیقاً فرمول هاردی-رامانوجان (۱۷) است. حال با یک مثال کوتاه، ایده پایه تناظر بین عدد $p(n)$ و عدد $w(N, n)$ از حالت‌های دستگاه کوآنتوم N نوسان ساز همگن بوزونیک را بیان می‌کنیم. فرض کنیم $N = 6$ و $n = 4$. در این صورت داریم

$$4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1,$$

که نتیجه می‌دهد $p(4) = 5$. حال تمام حالت‌های ممکن از سطح انرژی $E = 4\hbar\omega$ در دستگاهی از ۶ نوسان ساز همساز را در نظر بگیرید. آشکار است دقیقاً ۵ روش $(W_1 - W_5)$ برای به‌دست آوردن انرژی $E = 4\hbar\omega$ وجود دارد: (W_1) قرار دادن یک بوزون در سطح برانگیخته با $k = 4$ ، (W_2) قرار دادن یک بوزون در سطح $k = 3$ و یک بوزون در سطح $k = 1$ ، (W_3) قرار دادن دو بوزون در سطح $k = 2$ ، (W_4) قرار دادن یک بوزون در سطح $k = 2$ و دو بوزون در سطح $k = 1$ ، (W_5) قرار دادن چهار بوزون در سطح $k = 1$. همه بوزون‌های غیربرانگیخته باقیمانده در $(W_1 - W_5)$ در سطح پایه $k = 0$ می‌مانند.

در شکل پایین تناظر بین $p(4)$ و $w(6, 4)$ به‌صورت نموداری بیان می‌شود.



خوانندگان علاقمند به رابطه بین مکانیک آماری و مسئله عدد افزا می‌توانند به منابع ذکر شده در مقالات [۷]، [۲۳] و [۲۳] مراجعه کنند.

۷. نکات پایانی

در پایان، به کاربردهای دیگری از نظریه اعداد به طور خلاصه اشاره می‌کنیم. پیشتر، کاربردهای نظریه اعداد فیوناتچی در فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی، اقتصاد و معماری بر همه روشن است. فهرستی از ۱۶۳ ارجاع به مقالات ارائه شده طی سال‌های ۱۶۱۱ تا ۲۰۱۱ و همچنین مقاله [۱۹] می‌تواند به عنوان مقدمه‌ای به این موضوع کمک کنند. زمینه‌های پرکاربرد دیگر نظریه اعداد، نظریه دنباله‌ها روی میدان‌های متناهی می‌باشد [۲۰]. برای این نظریه، کاربردی در آزمون نسبیت عام انیشتین یا آزمون گرمایش جهانی اقیانوس‌ها پیدا کردند. به علاوه، با استفاده از روش‌های ابتدایی نظریه اعداد، مسائلی کاربردی در مورد اتصال کابل‌های تلفن حل شد [۲۱]. کاربردهای جالب بیشتر را می‌توان در کتاب نظریه اعداد و تناوب ماده پیدا کرد [۳]. اخیراً کاربردهای جذاب نظریه اعداد، شامل کریپتوگرافی، نظریه کدگذاری و تولید عدد تصادفی نیز می‌شود. با ظهور رایانه‌ها این بخش‌ها، با رشد مداوم اهمیتشان، به سرعت توسعه می‌یابند.

تشکر و قدردانی

مترجم مایل است از داور ناشناس بخاطر مطالعه دقیق مقاله و پیشنهادات مفیدشان تشکر کند.

مراجع

- [1] F. C. Auluck, D. S. Kothari, *Statistical mechanics and the partitions of numbers*, Proc. Camb. Phil. Soc. **42** (1946), 272–277.
- [2] G. E. Andrews, *The Theory of Partitions*, Cambridge University Press (1998).
- [3] J. C. A. Boeysens, D. C. Levendis, *Number Theory and the Periodicity of Matter*, Springer (2008).
- [4] N. Bohr, F. Kalckar, *On the transmutation of atomic nuclei by impact of material particles. I. General theoretical remarks*, Kgl. Danske Vid. Selskab. Math. Phys. Medd. **14.10** (1937), 1–40.
- [5] J. Bond, *Calculating the general solution of a linear Diophantine equation*, American Math. Monthly **74.8** (1967), 955–957.
- [6] R. Crocker, *Application of Diophantine equations to problems in chemistry*, Journal of Chemical Education **45.11** (1968), 731–733.
- [7] L. Debnath, *Srinivasa Ramanujan (1887-1920) and the theory of partitions of numbers and statistical mechanics. A centennial tribute*, Internat. J. Math. and Mat. Sci. **10.4** (1987), 625–640.
- [8] M. Goldberg, *A class of multi-symmetric polyhedral*, Tohoku Math. Journal Soc. **43** (1937), 104–108.
- [9] D. Greenberger, K. Hentschel, F. Weinert, *Compendium of Quantum Physics*, Springer, (2009).
- [10] A. Grytczuk, *Ljunggren's Diophantine problem connected with virus structure*, Annales Mathematicae et Informaticae **33** (2006), 69–75.
- [11] A. Grytczuk, K. Grytczuk, *Application of Ljunggren's Diophantine equation to the description of the viruses structure*, International J. of Applied Math. and Applications **2.1** (2010), 35–42.
- [12] A. Grytczuk, *On some connections between virology and mathematics*, Vesnik VDU **74.2** (2013), 14–17.
- [13] A. Grytczuk, K. Grytczuk, *On some application of the mathematical technics to virology*, Asian Journal of Mathematics and Applications (2013), Article ID ama 0025, 8 pages.
- [14] H. Gupta, *A table of partitions*, Proc. London Math. Soc. **39** (1935), 47–53.

- [15] G. H. Hardy, S. Ramanujan, *Asymptotic formulae in combinatory analysis*, Proc. London Math. Soc. (2) **17** (1918), 75–115.
- [16] G. H. Hardy, *A Mathematician's Apology*, Cambridge University Press (1940).
- [17] G. H. Hardy, E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford University Press, sixth edition (2008).
- [18] J. Klaška, *Partitions, compositions and divisibility*, Ann. Univ. Mariae Curie - Sklodovska, Sect. A **49** (1995), 117–125.
- [19] J. Klaška, *Applications of Fibonacci numbers and the golden ratio in physics, chemistry, biology and economy*, 7th Conference on Mathematics and Physics on Technical Universities, Brno (2011), 243-254.
- [20] J. Klaška, *Applications of sequences over finite fields*, MITAV, Brno (2014), p. 26.
- [21] H. P. Lawther Jr., *An application of number theory to the splicing of telephone cables*, Bell System Technical Journal **14.2** (1935), 273–284.
- [22] W. Ljunggren, *Diophantine analysis applied to virus structure*, Math. Scand. **34** (1974), 51–57.
- [23] V. P. Maslov, *Topological phase transitions in the theory of partitions of integers*, Russian J. Math. Physics **24.2** (2017), 249–260.
- [24] Y. V. Matiyasevich, *Hilbert's 10th Problem*, Cambridge, MIT Press (1993).
- [25] S. Morito, H. M. Salkin, *Finding the general solution of a linear Diophantine equation*, The Fibonacci Quarterly **17.4** (1979), 361–368.
- [26] A. Rovenchak, *Statistical mechanics approach in the counting of integer partitions*, arXiv:1603.01049v1 (2016), 17 pages.
- [27] W. Sierpinski, *Elementary Theory of Numbers*, Warszawa (1964).
- [28] H. N. V. Temperley, *Statistical mechanics and the partition of numbers. I. The transition of liquid helium*, Proc. R. Soc. London, Series A **199** (1949), 361–375.
- [29] C. Van Lier, G. E. Uhlenbeck, *On the statistical calculation of the density of the energy levels of the nuclei*, Physica **4** (1937), 531–542.
- [30] G. Xeroudakes, *A Diophantine equation in virus structure*, Math. Scand. **37** (1975), 102–104.

رحیم رحمتی اصغر

گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه مراغه، مراغه، ایران

rahmatiasghar.r@gmail.com

اینجانب رحیم رحمتی اصغر متولد مرداد ماه ۱۳۶۳، در سال ۱۳۸۱ در مقطع کارشناسی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی قبول شدم. چهار سال بعد از فارغ التحصیلی، یعنی در سال ۱۳۸۵ در دانشگاه تهران در مقطع کارشناسی ارشد رشته جبر شروع به تحصیل نمودم. در سال ۱۳۸۷ از مقطع کارشناسی ارشد فارغ التحصیل شدم و همان سال مشغول به تحصیل در مقطع دکتری ریاضی گرایش جبر جابجایی دانشگاه تهران شدم. از سال ۱۳۹۱ پس از فارغ التحصیلی از مقطع دکتری، تا کنون عضو هیات علمی دانشگاه مراغه هستم.

