

EXISTENCE OF THE SOLUTIONS OF AN INTERVAL TENSOR COMPLEMENTARITY PROBLEM

ROZITA BEHESHTI, JAVAD FATHI* AND MOSTAFA ZANGIABADI

ABSTRACT. In this paper, we consider a general tensor complementarity problem with interval parameters, and study the conditions under which, the existence and uniqueness of the solution of the problem are guaranteed. Furthermore, we proved that the solution set of the interval tensor complementarity problem is not necessarily convex.

1. Introduction

Interval analysis is a branch of numerical analysis that was born in the 1960's. It consists of computing with intervals of reals instead of reals, providing a framework for handling uncertainties and verified computations. The result of an interval computation is an interval, a pair of numbers, an upper and a lower bound, and this pair of numbers guarantees to enclose the exact answer. Maybe we still don't know the truth, but at least we know how much we don't know! [4]. How is it possible for interval analysis to guarantee that a computational result is true? The answer is very simple. Using the interval analysis we estimate at each calculation step all kinds of errors: inputs errors, rounding

Keywords: Tensor, Interval tensor, interval tensor complementarity problem.

Communicated by Soghra Nobakhtian.

Article Type: Research Paper.

*Corresponding author.

Received: 24-05-2023, Accepted: 09-12-2023, Published Online: 05-05-2024.

Cite this article: R. Beheshti, J. Fathi and M. Zangiabadi, Existence of the solutions of an interval tensor complementarity problem, *Journal of Mathematics and Society*, **9** no. 1 (2024) 51–50.

<http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.137807.1579> .

errors and truncation errors. One of the most famous references on IA is probably Moore's Interval Analysis book.

Throughout the paper, vectors are written as $\{x, y, \dots\}$, matrices are shown by $\{A, B, \dots\}$ and tensors are written as $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}, \dots\}$. Let $[n]$, $\mathbb{R}(\mathbb{C})$, and $\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$ denote the set $\{1, 2, \dots, n\}$, the set of all real (complex) numbers, and the set of all n -dimensional real (complex) vectors; respectively. $x \geq 0$ ($x > 0$) means $x_i \geq 0$ ($x_i > 0$) for all $i \in [n]$. Let $\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0\}$ be the positive cone in $\mathbb{R}^n$. An order m dimension n real tensor $\mathcal{A} = (a_{i_1 i_2 \dots i_m})$, denoted by $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{n_1 \times \dots \times n_m}$, consists of n^m entries:

$$a_{i_1 i_2 \dots i_m} \in \mathbb{R}, \quad \forall i_j = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m.$$

If $n_1 = \dots = n_m = n$, then it is said $\mathcal{A}$ is an m -order n -dimensional cubical tensor or for simplicity just m -order n -dimensional tensor. A vector is a tensor of order 1 and a matrix is a tensor of order 2. A tensor $\mathcal{A} = (a_{i_1 i_2 \dots i_m}) \in \mathbb{R}^{n_1 \times \dots \times n_m}$ is called nonnegative (positive) if

$$a_{i_1 i_2 \dots i_m} \geq 0 \quad (a_{i_1 i_2 \dots i_m} > 0), \quad \forall i_j = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m.$$

A tensor $\mathcal{A}$ is said to be symmetric if its entries $a_{i_1 i_2 \dots i_m}$ are invariant under any permutation of m indices $(i_1 i_2 \dots i_m)$. All the tensors discussed in this paper are real.

For any two tensors, $\mathcal{A} = (a_{i_1 \dots i_m})$, and $\mathcal{B} = (b_{i_1 \dots i_m}) \in \mathbb{R}^{n_1 \times \dots \times n_m}$ of identical orders and dimensions, their inner product is defined as

$$\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle = \sum_{i_1 \dots i_m} a_{i_1 \dots i_m} b_{i_1 \dots i_m}.$$

Definition 1.1. If $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{n_1 \times \dots \times n_m}$ is an m -order tensor and $B \in \mathbb{R}^{J \times n_k}$ is a matrix, then $\mathcal{A} \times_k B$ denotes the mode- k product of $\mathcal{A}$ with B , which is of size $n_1 \times \dots \times n_{k-1} \times J \times n_{k+1} \times \dots \times n_m$, and each element of it is defined as follows

$$(\mathcal{A} \times_k B)_{i_1, \dots, i_{k-1}, j, i_{k+1}, \dots, i_m} = \sum_{i_k=1}^{n_k} a_{i_1 \dots i_m} b_{j, i_k}.$$

If we do the mode- k product of $\mathcal{A}$ and B for all possible $k \in [m]$ as

$$\mathcal{A} \times_1 B \times_2 \dots \times_m B,$$

and B is reduced to some row vector, say $x^T = (x_1, \dots, x_n)$, the following notations are frequently used in this paper:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} x^m &\equiv \mathcal{A} \times_1 x^T \times_2 \dots \times_m x^T = \sum_{i_1 \dots i_m=1}^n a_{i_1 \dots i_m} x_{i_1} \dots x_{i_m} \in \mathbb{R}, \\ \mathcal{A} x^{m-1} &\equiv \mathcal{A} \times_2 x^T \times_3 \dots \times_m x^T = \sum_{i_2 \dots i_m=1}^n a_{i_1 i_2 \dots i_m} x_{i_2} \dots x_{i_m} \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

We call a number $\lambda \in \mathbb{C}$ an eigenvalue of $\mathcal{A}$ if it and a nonzero vector $x \in \mathbb{C}^n$ are solutions of the following homogeneous polynomial equations:

$$(1.1) \quad (\mathcal{A}x^{m-1})_i = \lambda x_i^{m-1}, \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

and call the solution x an eigenvector of $\mathcal{A}$ associated with the eigenvalue λ . If we denote $x^{[m-1]}$ as a vector in $\mathbb{C}^n$ such that its i th component is x_i^{m-1} , then (1.1) can be simply expressed as

$$\mathcal{A}x^{m-1} = \lambda x^{[m-1]}.$$

The set of all the eigenvalues of $\mathcal{A}$ is called the spectrum of $\mathcal{A}$. The largest modulus of the elements in the spectrum of $\mathcal{A}$ is called the spectral radius of $\mathcal{A}$, denoted as $\rho(\mathcal{A})$.

Definition 1.2. Let $\mathcal{A}$ be an m -order and n -dimensional cubical tensor, then

(1) $\mathcal{A}$ is called an $\mathcal{Z}$ -tensor if all of its non-diagonal elements are non-positive. This definition is equivalent to having $\mathcal{A} = s\mathcal{I} - \mathcal{B}$, where $s > 0$, $\mathcal{B}$ is a non-negative tensor and $\mathcal{I} = (I_{i_1 \dots i_m})$, is the identity tensor with entries

$$I_{i_1 \dots i_m} = \begin{cases} 1, & i_1 = \dots = i_m, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(2) $\mathcal{A}$ is called an $\mathcal{M}$ -tensor if $\mathcal{A}$ is an $\mathcal{Z}$ -tensor and $\mathcal{A} = s\mathcal{I} - \mathcal{B}$, $s \geq \rho(\mathcal{B})$. If $s > \rho(\mathcal{B})$, then $\mathcal{A}$ is called a strong (nonsingular) $\mathcal{M}$ -tensor.

Definition 1.3. An m -order n -dimensional tensor $\mathcal{A}$ is said to be P -tensor, if for each nonzero $x \in \mathbb{R}^n$, there exists some index i such that

$$(1.2) \quad x_i (\mathcal{A}x^{m-1})_i > 0.$$

The tensor $\mathcal{M}(\mathcal{A}) = (m_{i_1 \dots i_m})$ is called the comparison tensor of $\mathcal{A}$ if

$$m_{i_1 \dots i_m} = \begin{cases} -|a_{i_1 \dots i_m}|, & \text{if } (i_2, \dots, i_m) \neq (i_1, \dots, i_1) \\ |a_{i_1 \dots i_m}|, & \text{if } (i_2, \dots, i_m) = (i_1, \dots, i_1) \end{cases}$$

Definition 1.4. A tensor $\mathcal{A}$ is called an $\mathcal{H}$ -tensor, if its comparison tensor is an $\mathcal{M}$ -tensor, and it is called a nonsingular $\mathcal{H}$ -tensor, if its comparison tensor is nonsingular.

The tensor complementarity problem denoted by the $\text{TCP}(\mathbf{q}, \mathcal{A})$, is to find a vector $\mathbf{x}$ such that:

$$\mathbf{x} \geq 0, \quad \mathcal{A}\mathbf{x}^{m-1} + \mathbf{q} \geq 0, \quad \langle \mathbf{x}, \mathcal{A}\mathbf{x}^{m-1} + \mathbf{q} \rangle = 0,$$

where $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denotes the inner product.

Theorem 1.5. [6] Tensor $\mathcal{A}$ is P -tensor if and only if $\text{TCP}(\mathbf{q}, \mathcal{A})$ has a unique solution for every $\mathbf{q} > 0$.

2. Main Results

Interval linear algebra is a mathematical field developed from classical linear algebra. The only difference is that we do not work with real numbers but we deal with the real closed intervals $x^I := [\underline{x}, \bar{x}]$, where $\underline{x} \leq \bar{x}$. An interval tensor is a tensor which every of its elements is interval. An m -order n -dimensional cubical interval tensor is denoted by $\mathcal{A}^I := [\underline{\mathcal{A}}, \bar{\mathcal{A}}]$, where $\underline{\mathcal{A}}$ and $\bar{\mathcal{A}}$ are real tensors, and

$$\mathcal{A}^I(i_1, \dots, i_m) = [\underline{\mathcal{A}}(i_1, \dots, i_m), \bar{\mathcal{A}}(i_1, \dots, i_m)].$$

The set of all interval tensors of size $n_1 \times \dots \times n_m$, is denoted by $\mathbb{IR}^{n_1 \times \dots \times n_m}$. The parametric form of interval, interval vector and interval tensor can be expressed as follows, respectively.

$$a^I = \{a(t) \in \mathbb{R} : a(t) = \underline{a} + t(\bar{a} - \underline{a}), \underline{a} \in \mathbb{R}, \bar{a} \in \mathbb{R}, t \in [0, 1]\},$$

$$x^I = \{x(t) \in \mathbb{R}^n : x(t) = \underline{x} + t(\bar{x} - \underline{x}), \underline{x} \in \mathbb{R}^n, \bar{x} \in \mathbb{R}^n, t \in [0, 1]\},$$

$$\mathcal{A}^I = \{\mathcal{A}(t) \in \mathbb{R}^{n \times n \times \dots \times n} : \mathcal{A}(t) = \underline{\mathcal{A}} + t(\bar{\mathcal{A}} - \underline{\mathcal{A}}), \underline{\mathcal{A}} \in \mathbb{R}^{n \times n \times \dots \times n}, \bar{\mathcal{A}} \in \mathbb{R}^{n \times n \times \dots \times n}, t \in [0, 1]\}.$$

Definition 2.1. For $\mathcal{A}^I = [a_{i_1 \dots i_m}] \in \mathbb{IR}^{n \times n \times \dots \times n}$, we define the comparison tensor of $\mathcal{A}^I$ and it is represented as $\mathcal{M}(\mathcal{A}^I) = (m_{i_1 \dots i_m}) \in \mathbb{R}^{n \times n \times \dots \times n}$ by setting

$$m_{i_1 \dots i_m} = \begin{cases} -|[a_{i_1 \dots i_m}]|, & \text{if } (i_2, \dots, i_m) \neq (i_1, \dots, i_1) \\ |[a_{i_1 \dots i_m}]|, & \text{if } (i_2, \dots, i_m) = (i_1, \dots, i_1) \end{cases}$$

Definition 2.2. An interval tensor $\mathcal{A}^I \in \mathbb{IR}^{n \times n \times \dots \times n}$ is called an interval p -tensor, $\mathcal{Z}$ -tensor, $\mathcal{M}$ -tensor and $\mathcal{H}$ -tensor, if all $\mathcal{A} \in \mathcal{A}^I$ are p -tensor, $\mathcal{Z}$ -tensor, $\mathcal{M}$ -tensor and $\mathcal{H}$ -tensor, respectively.

Let $\mathcal{A}^I$ be an m -order and n -dimensional interval tensor and $q^I \in \mathbb{IR}^n$ be an n dimensional interval vector. Then we consider the family of $TCP(\mathcal{A}, q)$'s

$$q + \mathcal{A}x^{m-1} \geq 0, \quad x \geq 0, x^T(q + \mathcal{A}x^{m-1}) = 0, \text{ where } \mathcal{A} \in \mathcal{A}^I, q^I$$

This is equivalent to the following family of $TCP(\mathcal{A}, q)$'s

$$w - \mathcal{A}x^{m-1} = q, \quad x \geq 0, w \geq 0, x^T w = 0, \text{ where } \mathcal{A} \in \mathcal{A}^I, q^I.$$

The family of $TCP(\mathcal{A}, q)$'s is represented as interval tensor complementarity problem and it is denoted by $ITCP(\mathcal{A}^I, q^I) \cdot \sum_x(\mathcal{A}^I, q^I)$ is denoted as solutions set of $ITCP(\mathcal{A}^I, q^I)$ and it is defined as

$$\{x \in \mathbb{R}^n : q + \mathcal{A}x^{m-1} \geq 0, x \geq 0, x^T(q + \mathcal{A}x^{m-1}) = 0, \mathcal{A} \in \mathcal{A}^I, q^I\}$$

The parametric form of $ITCP(\mathcal{A}^I, q^I)$ is represented as $TCP(\mathcal{A}(t), q(t)), t \in [0, 1]$ and its solution set is defined as for some fixed t ,

$$\sum_x(\mathcal{A}(t), q(t)) = \{x \in \mathbb{R}^n : q(t) + \mathcal{A}(t)x^{m-1} \geq 0, x \geq 0, x^T(q(t) + \mathcal{A}(t)x^{m-1}) = 0\}$$

Lemma 2.3. For any $\text{ITCP}(\mathcal{A}^I, q^I)$, $\sum_x(\underline{\mathcal{A}}, \underline{q})$ and $\sum_x(\overline{\mathcal{A}}, \overline{q})$ are subsets of $\sum_x(\mathcal{A}^I, q^I)$.

Theorem 2.4. Suppose that $\text{TCP}(\underline{\mathcal{A}}, \underline{q})$ and $\text{TCP}(\overline{\mathcal{A}}, \overline{q})$ have unique solutions, then $\sum_x(\mathcal{A}(t), q(t))$ is a singleton set, for every $t \in [0, 1]$.

Proof. Suppose that $\text{TCP}(\underline{\mathcal{A}}, \underline{q})$ and $\text{TCP}(\overline{\mathcal{A}}, \overline{q})$ have unique solutions, then from Theorem 1.5 we get that $\underline{\mathcal{A}}$ and $\overline{\mathcal{A}}$ are P -tensors. Since the positive convex combination of P -tensors is also a P -tensor, then $\mathcal{A}(t) = t\underline{\mathcal{A}} + (1-t)\overline{\mathcal{A}}$, $t \in [0, 1]$, is a P -tensor. Hence $\text{TCP}(\mathcal{A}(t), q(t))$ has unique solution for each t . Therefore, $\sum_x(\mathcal{A}(t), q(t))$ is a singleton set, for every $t \in [0, 1]$. $\square$

Theorem 2.5. The set $\sum_{(w,x)}(\mathcal{A}^I, q^I)$ is not convex.

Proof. Let $(w^1, x^1)^T, (w^2, x^2)^T \in \sum_{(w,x)}(\mathcal{A}^I, q^I)$. Then,

$$(2.1) \quad \begin{aligned} w_i^j - \sum_{i_2 \cdots i_m=1}^n \overline{a}_{ii_2 \cdots i_m} x_{i_2}^j \cdots x_{i_m}^j &\leq \overline{q}_i, w_i^j - \sum_{i_2 \cdots i_m=1}^n \underline{a}_{ii_2 \cdots i_m} x_{i_2}^j \cdots x_{i_m}^j \geq \underline{q}_i, \\ x_{i_2}^j \cdots x_{i_m}^j &\geq 0, w_i^j \geq 0, w_i^j x_i^j = 0, i_1, \cdots, i_m = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2. \end{aligned}$$

Let $0 \leq \lambda \leq 1$. Then multiplying (2.1) by λ for $j = 1$, and multiplying (2.1) by $(1 - \lambda)$ for $j = 2$, and adding up these inequalities, we get

$$\begin{aligned} (\lambda w_i^1 + (1 - \lambda)w_i^2) - \sum_{i_2 \cdots i_m=1}^n \overline{a}_{ii_2 \cdots i_m} (\lambda x_{i_2}^1 \cdots x_{i_m}^1 + (1 - \lambda)x_{i_2}^2 \cdots x_{i_m}^2) &\leq \overline{q}_i, i = 1, 2, \dots, n, \\ (\lambda w_i^1 + (1 - \lambda)w_i^2) - \sum_{i_2 \cdots i_m=1}^n \underline{a}_{ii_2 \cdots i_m} (\lambda x_{i_2}^1 \cdots x_{i_m}^1 + (1 - \lambda)x_{i_2}^2 \cdots x_{i_m}^2) &\geq \underline{q}_i, i = 1, 2, \dots, n, \\ (\lambda x_{i_2}^1 \cdots x_{i_m}^1 + (1 - \lambda)x_{i_2}^2 \cdots x_{i_m}^2) &\geq 0, (\lambda w_i^1 + (1 - \lambda)w_i^2) \geq 0, i_1, \cdots, i_m = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

On the other hand, $(\lambda w_i^1 + (1 - \lambda)w_i^2) (\lambda x_{i_2}^1 \cdots x_{i_m}^1 + (1 - \lambda)x_{i_2}^2 \cdots x_{i_m}^2) = 0$ only for $t = 0$ and $t = 1$. Since convex combination of complementarity variables are not complementarity variables. This gives that $(\lambda w^1 + (1 - \lambda)w^2, \lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2)^T \notin \sum_{(w,x)}(\mathcal{A}^I, q^I)$, and so $\sum_{(w,x)}(\mathcal{A}^I, q^I)$ is not a convex set. $\square$

Theorem 2.6. Let $\mathcal{A}^I$ be an m -order and n -dimensional interval H -tensor. Then, $\text{ITCP}(\mathcal{A}^I, q^I)$ has a solution for every $q^I \in \mathbb{R}^n$, that is, $\sum_x(\mathcal{A}^I, q^I)$ is a non-empty set.

Proof. Let $\mathcal{A}^I$ be an m -order and n -dimensional interval H -tensor. Then each $\mathcal{A} \in \mathcal{A}^I$ is an H -tensor, and so $\text{TCP}(\mathcal{A}, q)$ has a solution. Also, $\sum_x(\mathcal{A}, q) \subseteq \sum_x(\mathcal{A}^I, q^I)$, which yields that $\sum_x(\mathcal{A}^I, q^I)$ is non-empty. $\square$

3. Conclusion

A methodology is developed to discuss the existence of the solution of tensor complementarity problem, where the parameters are closed intervals. We also proved that the solution set of the interval tensor complementarity problem is not necessarily convex.

REFERENCES

- [1] A. K. Bhurjee, P. Kumar, S. Panigrahi and G. Panda, Existence of the solutions of an interval linear complementarity problem and its application, *AIP Conf. Proc.*, **2277** no. 1 (2020) 200001-200011.
- [2] R. Beheshti, J. Fathi and M. Zangiabadi, Some classes of interval tensors and their properties, *Wavelet and Linear Algebra*, **9** no. 1 (2022) 49–65.
- [3] H. Bozorgmanesh, M. Hajarian and A. T. Chronopoulos, Interval tensors and their application in solving multi-linear systems of equations, *Comput. Math. Appl.*, **79** no. 3. (2020) 697–715.
- [4] B. Hayes, A Lucid Interval, *American Scientist*, **91** no. 6 (2003) 484–488.
- [5] R. E. Moore, *Interval Analysis*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1966.
- [6] Y. Song and L. Qi, Tensor complementarity problem and semi-positive tensors, *J. Optim. Theory Appl.*, **169** no. 3 (2016) 1069–1078.

Rozita Beheshti

Department of Mathematics, University of Hormozgan, P.O.Box 3995, Bandar abbas, Iran

Email: rozita.beheshti@gmail.com

Javad Fathi

Department of Mathematics, University of Hormozgan, P.O.Box 3995, Bandar abbas, Iran

Email: fathi@hormozgan.ac.ir

Mostafa Zangiabadi

Department of Mathematics, University of Hormozgan, P.O.Box 3995, Bandar abbas, Iran

Email: zangiabadi@hormozgan.ac.ir

وجود جواب‌های مسئله مکمل تنسور بازه‌ای

رزیتا بهشتی، جواد فتحی مورجانی* و مصطفی زنگی‌آبادی

چکیده. در این مقاله یک مسئله مکمل تانسوری را با پارامترهای بازه‌ای در نظر می‌گیریم و شرایط وجود و یکتایی جواب مسئله را بررسی می‌کنیم. علاوه بر این ثابت می‌کنیم که مجموعه جواب مسئله مکمل تانسور، بازه‌ای نامحدب است.

۱. مقدمه

آنالیز بازه‌ای شاخه‌ای از آنالیز عددی است که به جای اعداد، از بازه بسته از اعداد حقیقی برای محاسبه استفاده می‌کند. از آنالیز بازه‌ای برای به دست آوردن نتایج محاسباتی که مطمئناً درست هستند، استفاده می‌شود. نتیجه یک محاسبه معمولی یک عدد تنها است، یک نقطه روی خط حقیقی، که در فاصله‌ای نامعلوم از پاسخ درست قرار دارد و سؤال این است: این فاصله چقدر است؟ در بسیاری از موارد بسیار کوچک است، اما معلوم نیست چقدر کوچک! در این موارد مهم است که طول این فاصله را بدانیم. برای این منظور باید خطاهای محاسباتی را به صورت پسینی ارزیابی کنیم. نتیجه یک محاسبه بازه‌ای یک بازه، یک جفت عدد، یک کران بالا و پایین است و این جفت اعداد پاسخ دقیق را تضمین می‌کنند. شاید هنوز حقیقت را نمی‌دانیم، اما حداقل می‌دانیم که چقدر نمی‌دانیم [۸]! چگونه ممکن است آنالیز بازه‌ای درستی یک نتیجه محاسباتی را تضمین کند؟ پاسخ بسیار ساده است. معمولاً سه منبع خطا در حین انجام محاسبات عددی وجود دارد (خطاهای ورودی^۱، خطاهای گردکردن^۲ و خطاهای کوتاه کردن^۳). با استفاده از تجزیه و تحلیل بازه‌ای، در هر مرحله از محاسبه باید هر سه نوع خطا را تخمین بزنیم. یک مثال معروف و بسیار قدیمی از ایجاد یک بازه بسته به روشی منسوب به ارشمیدس است، که به صورت زیر می‌باشد.

مثال: او چند ضلعی‌های محاطی و محیطی یک دایره با شعاع ۱ را در نظر گرفت و دنباله‌ای صعودی از کران‌های پایینی و در عین حال دنباله‌ای نزولی از کران‌های بالایی برای مساحت این دایره به دست آورد. سپس با متوقف کردن این فرآیند با یک n ضلعی محاطی و یک n ضلعی محیطی، بازه‌ای حاوی عدد π به دست آورد. با انتخاب n به اندازه کافی بزرگ، می‌توان بازه‌ای با طول کوچک دلخواه پیدا کرد که شامل π باشد.

عبارات و کلمات کلیدی: تنسور، تنسور بازه‌ای، مسئله مکمل تنسور بازه‌ای، وجود جواب.

دبیر تخصصی رابط: صغری نوبختیان

نوع مقاله: پژوهشی

* نویسنده مسئول

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۳/۰۳ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۹/۰۷ تاریخ انتشار آنلاین: ۱۴۰۳/۰۲/۱۶

ارجاع به مقاله: ر. بهشتی، ج. فتحی مورجانی و م. زنگی‌آبادی، وجود جواب‌های مسئله مکمل تنسور بازه‌ای، ریاضی و جامعه، ۹ شماره ۱ (۱۴۰۳) ۷۵-۵۱.

<http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.137807.1579>

¹inputs errors ²rounding errors ³truncation errors

هرچند مثال فوق نشان می‌دهد که تاریخچه حساب بازه‌ای حداقل به دوران ارشمیدس برمی‌گردد، اما رامون ای مور^۴ در سال ۱۹۵۷، زمانی که کارمند شرکت موشک‌های فضایی لاکهید بود، حساب بازه‌ای را به‌عنوان رویکردی برای خطاهای گردکردن محدود در محاسبات ریاضی تصور کرد. چهل سال بعد، در یک برنامه تحقیق و توسعه حساب بازه‌ای در دانشگاه، او تفکر خود را به شرح زیر توضیح داد:

در سال ۱۹۵۷ به این می‌اندیشید که دانشمندان و مهندسان چگونه اندازه‌گیری‌ها و نتایج را به‌صورت $\hat{x} + \epsilon$ نشان می‌دهند، که در آن $\hat{x}$ نتیجه به‌دست آمده و ϵ تحمل خطا است؛ در حالی که نمایش مقادیر خطاپذیر با استفاده از نماد $\hat{x} \pm \epsilon$ کار ساده‌ای است اما محاسبه با آنها، حتی در موارد ساده‌ای مانند محاسبه مساحت یک اتاق، کار چندان راحتی نیست. اگر خطاهای ناشی از محاسبات دقیق محدود به‌طور همزمان در نظر گرفته شوند، پیچیدگی بیشتر افزایش می‌یابد. همچنین تجزیه و تحلیل خطاهای الگوریتم‌های بزرگ علمی، مهندسی و تجاری به اندازه کافی پیچیده است، به‌طوری‌که اغلب انجام نمی‌شود. نتیجه این است که محاسبات ماشینی با محاسبات ممیز شناور^۵ ارتباط محکمی با ریاضیات، علوم، بازرگانی یا مهندسی ندارد.

مور ایده بهتری داشت، او استدلال کرد از آنجایی که $\hat{x} \pm \epsilon$ از دو عدد $\hat{x}$ و ϵ تشکیل شده است، چرا از دو عدد متفاوت برای نمایش اطلاعات دقیقاً یکسان استفاده نمی‌کنید؟ به این معنا که، به جای $\hat{x} \pm \epsilon$ ، از $\hat{x} - \epsilon$ و $\hat{x} + \epsilon$ استفاده کنید که نقاط پایانی یک بازه شامل مقدار دقیق مورد نظر، یعنی x است. این ایده ساده و در عین حال عمیق بود که منجر به محاسبات بازه‌ای و تجزیه و تحلیل بازه‌ای شد، شاخه‌ای از ریاضیات کاربردی که برای تجزیه و تحلیل عددی الگوریتم‌های بازه‌ای توسعه یافته است؛ یکی از مشهورترین مراجع در مورد تجزیه و تحلیل بازه‌ای کتاب آنالیز بازه‌ای مور است.

در دنیای واقعی رقابتی، بیشتر مسائل شامل عدم قطعیت در مجموعه داده‌ها، به دلیل وجود عدم قطعیت در بازار و محیط است. این نوع عدم قطعیت را می‌توان به راحتی با فرض نمودن این پارامترهای نامشخص به‌عنوان بازه بسته کنترل کرد، و مسائل نامطمئن مربوطه را می‌توان با استفاده از تحلیل بازه‌ای مطالعه کرد. در تحلیل بازه‌ای به جای اعداد، محاسبات با استفاده از بازه‌ها انجام می‌شود. استفاده از تحلیل بازه‌ای برای تخمین خطا و مشکلات عدم قطعیت مفید است. از زمان معرفی آنها، ماتریس‌های بازه‌ای در سامانه‌های پویا، مکانیک، مهندسی و غیره، استفاده شده‌اند. برای پایداری سامانه‌های پویا، حساب بازه‌ای ابزارهای تحلیل مفیدی را فراهم می‌کند.

مسئله مکمل^۶ که با $CP(F)$ نشان داده می‌شود، یافتن بردار x است به‌طوری‌که:

$$x \geq 0, F(x) \geq 0, \langle x, F(x) \rangle = 0.$$

که در آن $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ضرب درونی را نشان می‌دهد. وقتی $F(x) = Ax + q$ که $A \in \mathbb{R}^{[1,n]}$ و $q \in \mathbb{R}^n$ ، آنگاه مسئله مکمل به مسئله مکمل خطی (LCP) تقلیل می‌یابد، یعنی یافتن بردار x به‌طوری‌که:

$$x \geq 0, A(x) + q \geq 0, \langle x, A(x) + q \rangle = 0.$$

هنگامی که تابع $F(x)$ غیرخطی باشد، $CP(F)$ را مسئله مکمل غیرخطی (NCP) می‌نامند [۱۶]. وقتی $F(x) = Ax^{m-1} + q$ ، که $A \in \mathbb{R}^{[m,n]}$ و $q \in \mathbb{R}^n$ ، آنگاه مسئله مکمل غیرخطی به مسئله مکمل تانسوری $TCP(q, A)$ تبدیل می‌گردد؛ یعنی یافتن بردار x به‌طوری‌که:

$$x \geq 0, Ax^{m-1} + q \geq 0, \langle x, Ax^{m-1} + q \rangle = 0,$$

⁴Ramon E. Moore ⁵floating-point arithmetic ⁶complementarity Problem

که Ax^{m-1} به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Ax^{m-1} = \sum_{i_1 \dots i_m = 1}^n a_{i_1, i_2, \dots, i_m} x_{i_1} \dots x_{i_m} \in \mathbb{R}^n.$$

ماتریس‌های مختلف با ساختارهای ویژه نقش مهمی در مطالعه (TCP) دارند و انواع مختلف توابع خاص نقش مهمی در مطالعه (NCP) دارند. مسئله مکمل غیرخطی توسط کوتل^۷ در رساله دکترای خود مطرح شد. در دهه‌های گذشته، بسیاری از ریاضی‌دانان توجه خود را بر روی این مسئله کلاسیک متمرکز نموده‌اند؛ برای جزئیات بیشتر [۱۳، ۱۴، ۱۶] و منابع موجود در آن‌ها را ببینید. مسئله مکمل خطی حالت خاصی از مسئله مکمل غیرخطی است و کاربردهای گسترده و مهمی در مهندسی و اقتصاد دارد (کوتل و همکاران [۱۰]؛ هان^۸ و همکاران [۱۶]). کوتل و دنسیگ^۹ [۱۱] وجود جواب مسئله مکمل خطی را با کمک ساختار ماتریس مطالعه کردند. ایوز^{۱۰} [۱۲]، کارامردیان^{۱۱} [۱۷]، پانگ^{۱۲} [۲۰، ۲۱] و گودا^{۱۳} [۱۵]، ارتباط بین وجود و یکتایی جواب مسئله مکمل خطی و نیمه یکنوایی ماتریس‌ها را نشان دادند.

مسئله مکمل تانسور، به عنوان یک نوع خاص از مسائل مکمل غیرخطی، موضوع جدیدی است که از مبحث تانسوری پدیدار شده است که از تحقیقات رو به رشد در مورد تانسورهای ساختاریافته الهام گرفته شده است. در عین حال، به نظر می‌رسد مسئله مکمل تانسور به عنوان بسط طبیعی مسئله مکمل خطی دارای ویژگی‌های مشابه با آن مسئله و ویژگی‌های خاص و زیبایی، غیر از ویژگی‌های مسئله مکمل خطی کلاسیک، می‌باشد. بنابراین چگونگی به دست آوردن خواص خوب و کاربردهای مسئله مکمل تانسوری با استفاده از ساختار ویژه تانسور (ابر ماتریس)، بسیار جالب خواهد بود.

مفهوم مسئله مکمل تانسور ابتدا توسط سونگ و کی^{۱۴} [۲۲] استفاده شد و آن‌ها وجود جواب را برای چنین مسئله‌ای با برخی از کلاس‌های تانسوری با ساختار خاص مورد بررسی قرار دادند. چه^{۱۵} و همکاران [۹] وجود جواب را برای مسئله مکمل تانسور معین مثبت متقارن و تانسورهای هم‌مثبت بررسی کردند. لو^{۱۶} و همکاران [۱۸] پراکندگی جواب‌ها را برای مسائل مکمل تانسور مطالعه کردند. بهورجی^{۱۷} و همکاران وجود جواب را برای مسئله مکمل خطی بازه‌ای و کاربردهای آن را مورد مطالعه قرار دادند [۲].

ادامه این مقاله به صورت زیر سازماندهی شده است: در بخش دوم تعاریف و مفاهیم اولیه تانسوری معرفی می‌شوند. در بخش سوم به معرفی بردار، ماتریس و تانسور بازه‌ای پرداخته می‌شود. در بخش چهارم به تعریف مسئله مکمل تانسور بازه‌ای می‌پردازیم و وجود جواب این مسئله را تحت ساختار تانسور زمینه، مورد بررسی قرار می‌دهیم. در بخش پنجم با ارائه یک مثال کارایی نتایج را نشان می‌دهیم و در بخش ششم نتایج مقاله ارائه گردیده است.

۲. تعاریف و مفاهیم اولیه تانسور

در ابتدا به معرفی تانسورها می‌پردازیم. یک تانسور مختلط (حقیقی)، $\mathcal{A} = (a_{i_1 i_2 \dots i_m})$ از مرتبه m و بعد $n_1 \times \dots \times n_m$ به صورت $\mathcal{A} = (a_{i_1 \dots i_m}) \in \mathbb{C}^{n_1 \times \dots \times n_m} (\mathbb{R}^{n_1 \times \dots \times n_m})$ نمایش داده می‌شود. در حالت خاص $n_1 = \dots = n_m = n$ تانسور $\mathcal{A}$ ، به صورت $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{[m, n]} (\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{[m, n]})$ نمایش داده می‌شود و شامل n^m درایه به صورت زیر می‌باشد:

$$a_{i_1 i_2 \dots i_m} \in \mathbb{C}(\mathbb{R}), \quad i_j = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m.$$

بردار، یک تانسور از مرتبه ۱ و ماتریس یک تانسور از مرتبه ۲ است. تانسور $\mathcal{A} = (a_{i_1 i_2 \dots i_m}) \in \mathbb{R}^{[m, n]}$ نامنفی (مثبت) نامیده می‌شود، هرگاه

$$a_{i_1 i_2 \dots i_m} \geq 0 \quad (a_{i_1 i_2 \dots i_m} > 0), \quad i_j = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m,$$

⁷Cottle ⁸Han ⁹Dantzig ¹⁰Eaves ¹¹Karamardian ¹²Pang ¹³Gowda ¹⁴Song and Qi ¹⁵Che ¹⁶Luo ¹⁷Bhurjee

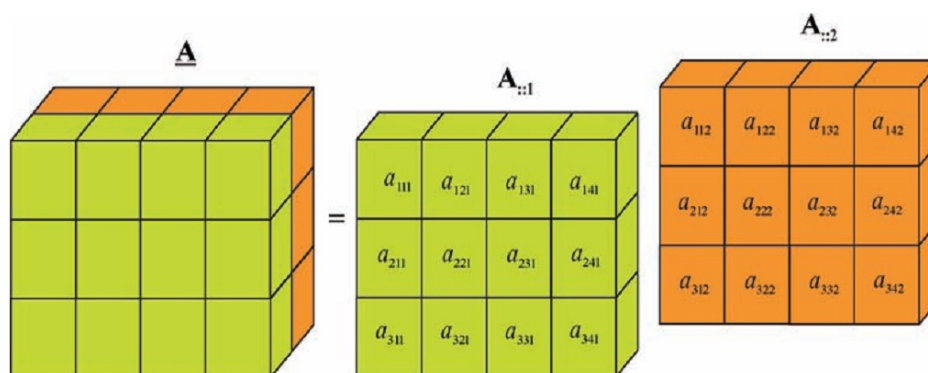
و متقارن نامیده می‌شود هرگاه درایه‌های آن، یعنی $a_{i_1 i_2 \dots i_m}$ تحت هر جایگشتی از m اندیس $(i_1, i_2, \dots, i_m)$ ، پایا باشند. به عبارت دیگر، به ازای هر جایگشت π ،

$$a_{\pi(i_1, i_2, \dots, i_m)} = a_{i_1 i_2 \dots i_m}.$$

شکل ۱، مثالی از تانسور $\mathcal{A}$ با مرتبه ۳ است که $i = 1, 2, 3$ و $j = 1, 2, 3, 4$ و $k = 1, 2$ می‌باشد. تانسورها از بردارها و ماتریس‌ها تشکیل می‌شوند. یک فیبر را می‌توان یک بردار یا قطعه‌ای یک بعدی از تانسور در نظر گرفت که با ثابت نگاه داشتن همه ابعاد به جز یکی از آنها، شکل می‌گیرد؛ در حالی که برش، یک ماتریس یا یک قطعه دو بعدی از یک تانسور است که با ثابت نگاه داشتن همه ابعاد به جز دوتای آنها به وجود می‌آید.

تعریف ۱.۲ (فیبر تانسور): فیبر^{۱۸} قطعه‌ای یک بعدی از تانسور است که با ثابت گرفتن همه اندیس‌ها به جز یک مورد به دست می‌آید.

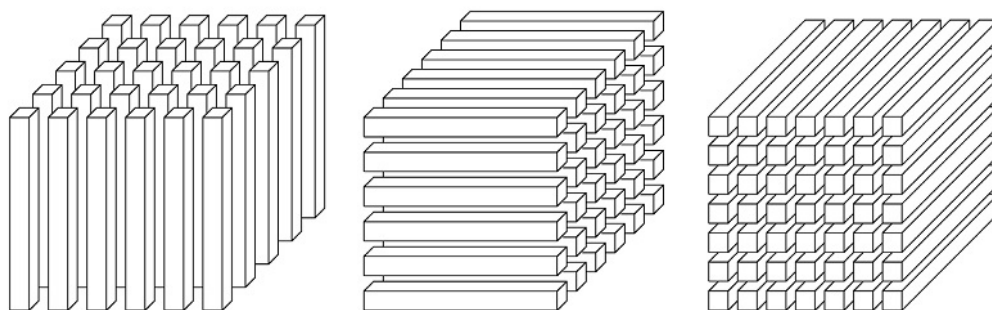
تانسورهای مرتبه سوم دارای فیبرهای ستونی، سطری و عمقی هستند که به ترتیب با $a_{i:k}$ ، $a_{i:j}$ و $a_{i:j}$ نشان داده می‌شوند (شکل ۲). توجه داشته باشید که فیبرها همیشه به عنوان بردارهای ستونی به کارگیری می‌شوند.



شکل ۱. تانسور $\mathcal{A}$ با مرتبه ۳ که $i = 1, 2, 3$ و $j = 1, 2, 3, 4$ و $k = 1, 2$.

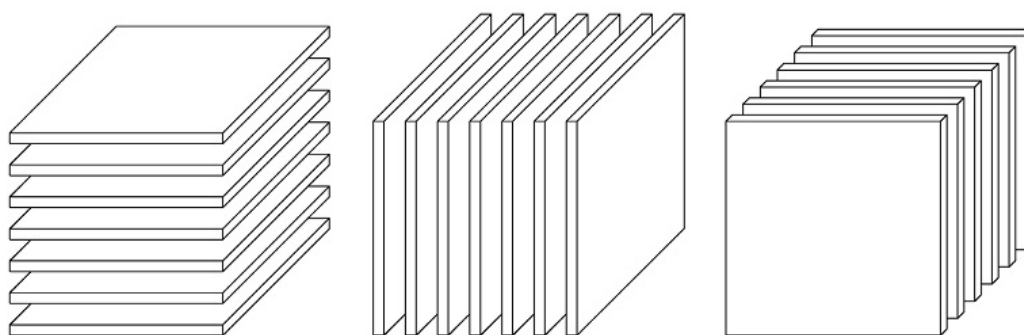
Figure 1: $\mathcal{A}$ third order tensor where $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3, 4$ and $k = 1, 2$.

¹⁸fiber



شکل ۲. از چپ به راست به ترتیب فیبرهای ستونی، سطری و عمقی یک تانسور ۳ مرتبه ۳

Figure 2: From left to right column, row and depth fibers of a 3rd-order tensor, respectively.



شکل ۳. از چپ به راست به ترتیب برش‌های افقی، جانبی و جلویی از یک تانسور ۳ مرتبه ۳

Figure 3: From left to right horizontal, lateral, and frontal slices of a 3rd-order tensor, respectively.

برش^{۱۹} بخش ۲ بعدی تانسورهای مرتبه ۳ است که در آن فقط یک اندیس ثابت است و به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$a_{i::}, a_{:j:}, a_{::k}$$

تعریف ۲.۲. تانسور $\mathcal{I} \in \mathbb{R}^{[m,n]}$ همانی^{۲۰} نامیده می‌شود، هرگاه درایه‌های آن، برای اندیس‌های $i_1 = i_2 = \dots = i_m$ مساوی یک و سایر جاها صفر باشند.

تعریف ۳.۲. ضرب k -حالت تانسور $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{n_1 \times \dots \times n_m}$ با ماتریس $B \in \mathbb{R}^{J \times n_k}$ را با $\mathcal{A} \times_k B$ نمایش می‌دهند و حاصل آن تانسوری است از مرتبه m و بعد $n_1 \times \dots \times n_{k-1} \times J \times n_{k+1} \times \dots \times n_m$ که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(\mathcal{A} \times_k B)_{i_1, \dots, i_{k-1}, j, i_{k+1}, \dots, i_m} = \sum_{i_k=1}^{n_k} a_{i_1 \dots i_m} b_{j, i_k}.$$

اگر ضرب k -حالت تانسور $\mathcal{A}$ و ماتریس B برای تمام $k \in [m]$ به صورت

$$\mathcal{A} \times_1 B \times_2 \dots \times_m B$$

¹⁹slice ²⁰identity tensor

انجام گیرد و ماتریس B به برداری سطری به صورت $x^T = (x_1, \dots, x_n)$ کاهش یابد، آنگاه نمادهای زیر را داریم:

$$Ax^m \equiv \mathcal{A} \times_1 x^T \times_2 \cdots \times_m x^T = \sum_{i_1 \cdots i_m=1}^n a_{i_1 \cdots i_m} x_{i_1} \cdots x_{i_m} \in \mathbb{R},$$

$$Ax^{m-1} \equiv \mathcal{A} \times_2 x^T \times_3 \cdots \times_m x^T = \sum_{i_2 \cdots i_m=1}^n a_{i_1 i_2 \cdots i_m} x_{i_2} \cdots x_{i_m} \in \mathbb{R}^n.$$

تعریف ۴.۲. برای بردار $x \in \mathbb{C}^n$ ، مؤلفه i ام آن با نماد x_i نمایش داده می‌شود و $x^{[m-1]}$ برداری در $\mathbb{C}^n$ است که مؤلفه i ام آن به صورت $x_i^{[m-1]} = x_i^{m-1}$ تعریف می‌شود.

تعریف ۵.۲. برای هر تانسور $\mathcal{A}$ ، جفت $(\lambda, x) \in \mathbb{C} \times (\mathbb{C}^n \setminus \{0\})$ جفت ویژه (مقدار ویژه و بردار ویژه) تانسور $\mathcal{A}$ نامیده می‌شود، هرگاه

$$\mathcal{A}x^{m-1} = \lambda x^{[m-1]}.$$

مجموعه تمام مقادیر ویژه تانسور $\mathcal{A}$ با $\sigma(\mathcal{A})$ نمایش داده می‌شود و همچنین شعاع طیفی تانسور $\mathcal{A}$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\rho(\mathcal{A}) = \max \{ |\lambda| : \lambda \in \sigma(\mathcal{A}) \}.$$

تعریف ۶.۲. تانسور $\mathcal{A}$ یک $\mathcal{Z}$ -تانسور نامیده می‌شود، هرگاه تمام درایه‌های غیرقطری آن نامثبت باشند، که معادل است با این که

$$\mathcal{A} = s\mathcal{I} - \mathcal{B},$$

به طوری که $s \in \mathbb{R}$ ، $\mathcal{I}$ تانسور همانی و $\mathcal{B}$ یک تانسور نامنفی ($\mathcal{B} \geq 0$) می‌باشد.

تعریف ۷.۲. یک $\mathcal{Z}$ -تانسور $\mathcal{A} = s\mathcal{I} - \mathcal{B}$ ، با $\mathcal{B} \geq 0$ ، یک $\mathcal{M}$ -تانسور نامیده می‌شود هرگاه $s \geq \rho(\mathcal{B})$. همچنین یک $\mathcal{M}$ -تانسور نامنفرد (یا $\mathcal{M}$ -تانسور قوی) نامیده می‌شود هرگاه $s > \rho(\mathcal{B})$.

تعریف ۸.۲. فرض کنیم $\mathcal{A} = (a_{i_1 i_2 \cdots i_m})$ یک تانسور از مرتبه m و بعد n باشد. در این صورت تانسور مقایسه $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ ($m_{i_1 i_2 \cdots i_m}$) برای تانسور $\mathcal{A}$ به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$m_{i_1 i_2 \cdots i_m} = \begin{cases} +|a_{i_1 i_2 \cdots i_m}|, & \delta_{i_1 i_2 \cdots i_m} = 1, \\ -|a_{i_1 i_2 \cdots i_m}|, & \delta_{i_1 i_2 \cdots i_m} = 0, \end{cases}$$

به طوری که

$$\delta_{i_1 i_2 \cdots i_m} = \begin{cases} 1, & i_1 = i_2 = \cdots = i_m, \\ 0, & \text{در غیر این صورت.} \end{cases}$$

تعریف ۹.۲. تانسور $\mathcal{A}$ یک $\mathcal{H}$ -تانسور (نامنفرد) نامیده می‌شود، هرگاه تانسور مقایسه آن یک $\mathcal{M}$ -تانسور (نامنفرد) باشد.

تعریف ۱۰.۲. تانسور $\mathcal{A}$ نیمه-مثبت^{۲۱} نامیده می‌شود، هرگاه بردار $x > 0$ وجود داشته باشد به طوری که $\mathcal{A}x^{m-1} > 0$.

قضیه ۱۱.۲. [۱] یک $\mathcal{Z}$ -تانسور یک $\mathcal{M}$ -تانسور قوی است اگر و فقط اگر نیمه مثبت باشد.

²¹Semi-positive tensor

نتیجه ۱۲.۲. فرض کنید A, B هر دو Z -تانسور باشند. اگر $A \leq B$ و A یک M -تانسور قوی باشد آنگاه B نیز یک M -تانسور قوی است.

اثبات. چون A یک M -تانسور قوی است، بردار $x > 0$ وجود دارد به‌طوری‌که $Ax^{m-1} > 0$. از آنجا که بردار x نامنفی است، پس $Ax^{m-1} \leq Bx^{m-1}$ در نتیجه $Bx^{m-1} > 0$ و بنابراین B یک M -تانسور قوی است. $\square$

تبصره ۱۳.۲. واضح است که یک M -تانسور، یک $\mathcal{H}$ -تانسور است و یک $\mathcal{M}$ -تانسور نامنفرد، یک $\mathcal{H}$ -تانسور نامنفرد است.

تعریف ۱۴.۲. تانسور $A = (a_{i_1 i_2 \dots i_m})$ از مرتبه m و بعد n را یک P -تانسور نامند، اگر به ازای هر بردار ناصفر $x \in \mathbb{R}^n$ اندیس i وجود داشته باشد، به‌طوری‌که

$$(1) \quad x_i (Ax^{m-1})_i > 0.$$

۳. بردار، ماتریس و تانسور بازه‌ای

هنگامی‌که عدم قطعیت روی یک مقدار مشخص $x \in \mathbb{R}$ اعمال می‌شود، یک بازه روی اعداد حقیقی حاصل می‌شود که شامل x است به‌عنوان نقطه وسط بازه؛ و دارای شعاعی برابر با مقدار عدم قطعیت آن است. تمرکز اصلی آنالیز بازه‌ای بر بازه‌های بسته است. در اینجا، برای سادگی از اصطلاح “بازه” برای یک بازه بسته استفاده می‌شود. به‌طورکلی بازه‌ها به‌صورت زیر نمایش داده می‌شوند:

$$x^I = [\underline{x}, \bar{x}], \quad \underline{x}, \bar{x} \in \mathbb{R}, \quad \underline{x} \leq \bar{x}.$$

و مجموعه همه بازه‌های حقیقی با نماد $\mathbb{IR}$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۱.۳. هر عدد حقیقی $x \in \mathbb{R}$ را می‌توان به‌صورت بازه $x^I = [x, x]$ نمایش داد که آن را یک بازه تباهیده می‌نامیم.

تعریف ۲.۳. قدر مطلق بازه x^I به‌صورت

$$|x^I| = \max\{|x| : x \in x^I\} = \max\{|\underline{x}|, |\bar{x}|\}$$

تعریف می‌شود.

تعریف ۳.۳. برای بازه $a^I \in \mathbb{IR}$ ، $m(a^I)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$m(a^I) := \min\{|a| : a \in a^I\} = \begin{cases} \min\{|\underline{a}|, |\bar{a}|\}, & 0 \notin a^I \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

تعریف ۴.۳. نقطه میانی بازه با $x^c = \frac{1}{2}(\bar{x} + \underline{x})$ و شعاع بازه با $x^\Delta = \frac{1}{2}(\bar{x} - \underline{x})$ نمایش داده می‌شوند.

تعریف ۵.۳. $x \in \mathbb{IR}^n$ را یک بردار بازه‌ای گوئیم، هرگاه هر درایه آن یک بازه باشد، یعنی

$$x = (x_1, \dots, x_n)^T : \quad x_i = [\underline{x}_i, \bar{x}_i] \in \mathbb{IR}, \quad i = 1, \dots, n.$$

نقطه میانی و شعاع بردار بازه‌ای به‌ترتیب به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$x^c = (x_1^c, \dots, x_n^c)^T,$$

$$x^\Delta = (x_1^\Delta, \dots, x_n^\Delta)^T.$$

۱.۳. ماتریس‌های بازه‌ای.

تعریف ۶.۳. ماتریس A^I را ماتریس بازه‌ای گوئیم، هرگاه همه درایه‌های آن بازه باشند، یعنی

$$A^I = (a_{ij}^I)_{m \times n} : a_{ij}^I = [\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}] \in \mathbb{IR}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n.$$

به عبارت دیگر، می‌توان گفت:

$$A^I = [\underline{A}, \overline{A}] = \{A \in \mathbb{R}^{m \times n} : \underline{A} \leq A \leq \overline{A}\},$$

که در آن،

$$\underline{A} = \inf(A^I) = (\underline{a}_{ij})_{m \times n}, \quad \overline{A} = \sup(A^I) = (\overline{a}_{ij})_{m \times n},$$

که منظور از $\inf$ و $\sup$ به صورت مؤلفه‌ای است؛ هم‌چنین، منظور از $\leq$ یا $\geq$ ، نامساوی مؤلفه‌ای می‌باشد. مجموعه همه ماتریس‌های $m \times n$ بازه‌ای، با $\mathbb{IR}^{m \times n}$ نشان داده می‌شود.

با توجه به تعریف ماتریس‌های بازه‌ای، ملاحظه می‌شود که در یک ماتریس بازه‌ای با خانواده گسترده‌ای از ماتریس‌های حقیقی روبه‌رو هستیم. این موضوع، یکی از دلایلی است که پیاده‌سازی مفاهیم و روش‌های عددی معمول برای این ماتریس‌ها را مشکل می‌سازد و هم‌چنین سبب می‌شود که بیشتر مسائل مربوط به ماتریس‌های بازه‌ای، حتی در ابعاد کوچک، دارای پیچیدگی محاسباتی بالایی باشند و جزء مسایل NP -دشوار قرار بگیرند. منظور از مسایل NP -دشوار، مسایلی هستند که پیچیدگی محاسباتیشان از مرتبه چندجمله‌ای نیست.

تعریف ۷.۳. اگر $A^I \in \mathbb{IR}^{m \times n}$ یک ماتریس بازه‌ای باشد، آنگاه ماتریس مرکزی آن را با نماد A^c نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A^c = (a_{ij}^c)_{m \times n} = \frac{1}{2}(\overline{A} + \underline{A}).$$

هم‌چنین، ماتریس شعاعی برای این ماتریس بازه‌ای عبارتست از

$$A^\Delta = (a_{ij}^\Delta)_{m \times n} = \frac{1}{2}(\overline{A} - \underline{A}).$$

با توجه به تعریف بالا، ماتریس بازه‌ای A^I را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$A^I = [A^c - A^\Delta, A^c + A^\Delta].$$

برای جزئیات بیشتر در مورد آنالیز بازه‌ای [۷، ۱۹] را ببینید.

۲.۳. تانسورهای بازه‌ای. تانسورهای بازه‌ای اولین بار توسط بزرگمنش^{۲۲} و همکارانش تعریف شده است [۶].

تعریف ۸.۳. تانسور بازه‌ای، تانسوری است که همه درایه‌های آن بازه باشند. یک تانسور بازه‌ای مربعی از مرتبه m و بعد n با $\mathcal{A}^I := [\underline{\mathcal{A}}, \overline{\mathcal{A}}]$ نشان داده می‌شود، که در آن $\underline{\mathcal{A}}$ و $\overline{\mathcal{A}}$ تانسورهای حقیقی هستند و

$$\mathcal{A}^I(i_1, \dots, i_m) = [\underline{\mathcal{A}}(i_1, \dots, i_m), \overline{\mathcal{A}}(i_1, \dots, i_m)].$$

هم‌چنین می‌توان $\mathcal{A}^I$ را به صورت زیر نشان داد:

$$\mathcal{A}^I = [\mathcal{A}^c - \mathcal{A}^\Delta, \mathcal{A}^c + \mathcal{A}^\Delta],$$

²²Bozorgmanesh

که در آن

$$\mathcal{A}^c = \frac{1}{2}(\underline{\mathcal{A}} + \overline{\mathcal{A}}), \quad \mathcal{A}^\Delta = \frac{1}{2}(\overline{\mathcal{A}} - \underline{\mathcal{A}}).$$

با این تعریف داریم $\mathcal{A}^\Delta \geq 0$. مجموعه همه تانسورهای بازه‌ای از اندازه $n_1 \times \dots \times n_m$ ، با $\mathbb{IR}^{n_1 \times \dots \times n_m}$ نشان داده می‌شود، که در آن $1 \leq j \leq m$ ، $1 \leq i_j \leq n_j$.

مثال ۹.۳. تانسور بازه‌ای $2 \times 2 \times 2$ زیر را در نظر بگیرید:

$$\mathcal{A}_{::,1}^I = \begin{pmatrix} [2, 20] & [14, 100] \\ [0, 1] & [5, 21] \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_{::,2}^I = \begin{pmatrix} 3 & [-9, -7] \\ [0, 6] & [-3, -2] \end{pmatrix}.$$

آن‌گاه $\mathcal{A}^c$ و $\mathcal{A}^\Delta$ به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\mathcal{A}_{::,1}^c = \begin{pmatrix} 11 & 57 \\ 0.5 & 13 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_{::,2}^c = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 3 & -2.5 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{A}_{::,1}^\Delta = \begin{pmatrix} 9 & 43 \\ 0.5 & 8 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_{::,2}^\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

تعریف ۱۰.۳. تانسور بازه‌ای $\mathcal{A}^I \in \mathbb{IR}^{n \times n \times \dots \times n}$ را به ترتیب یک $\mathcal{Z}$ -تانسور، $\mathcal{M}$ -تانسور و $\mathcal{H}$ -تانسور می‌نامند، هرگاه هر $\mathcal{A} \in \mathcal{A}^I$ ، به ترتیب یک $\mathcal{Z}$ -تانسور، $\mathcal{M}$ -تانسور و $\mathcal{H}$ -تانسور باشند.

تعریف ۱۱.۳. برای تانسور بازه‌ای $\mathcal{A}^I = (a_{i_1 \dots i_m}^I) \in \mathbb{IR}^{n \times n \times \dots \times n}$ ، تانسور مقایسه آن با نماد $\mathcal{M}(\mathcal{A}^I) = (m_{i_1 \dots i_m}) \in \mathbb{R}^{n \times n \times \dots \times n}$ نمایش داده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$m_{i_1 \dots i_m} = \begin{cases} -|a_{i_1 \dots i_m}^I|, & (i_2, \dots, i_m) \neq (i_1, \dots, i_1) \\ m(a_{i_1 \dots i_m}^I), & (i_2, \dots, i_m) = (i_1, \dots, i_1). \end{cases}$$

با استفاده از تانسور مقایسه و نتیجه ۱۲.۲ لم زیر به دست می‌آید.

لم ۱۲.۳. فرض کنیم $\mathcal{A}^I$ یک تانسور بازه‌ای از مرتبه m و بعد n باشد. در این صورت،

- (آ) اگر $\underline{\mathcal{A}}$ یک $\mathcal{M}$ -تانسور و $\overline{\mathcal{A}}$ یک $\mathcal{Z}$ -تانسور باشد، آن‌گاه $\mathcal{A}^I$ یک $\mathcal{M}$ -تانسور است.
 (ب) اگر $\mathcal{M}(\mathcal{A}^I)$ یک $\mathcal{M}$ -تانسور باشد، آن‌گاه $\mathcal{A}^I$ یک $\mathcal{H}$ -تانسور است.

برای آشنایی بیشتر با خواص تانسورهای بازه‌ای [۳] را ببینید.

۳.۳. مسائل مکمل خطی بازه‌ای. یک دسته از مسائل پراهمیت در حساب بازه‌ای، مسائل مکمل خطی بازه‌ای هستند. اکنون که آشنایی لازم با ماتریس‌ها و بردارهای بازه‌ای حاصل شد، بحث مختصری در مورد مسائل مکمل خطی بازه‌ای ارائه می‌کنیم، تا هم صورت‌های کاربردی‌تر مسائل مکمل خطی بازه‌ای مطرح شوند و هم در عمل محدودیت‌های زیادی که در مسائل مکمل خطی بازه‌ای وجود دارند، دیده شوند. مسئله مکمل خطی بازه‌ای با ماتریس ضرایب $\mathcal{A}^I \in \mathbb{IR}^{m \times n}$ و بردار $q^I \in \mathbb{IR}^n$ خانواده‌ای از مسائل مکمل خطی $LCP(\mathcal{A}, q)$ به صورت

$$(2) \quad \mathcal{A} \in \mathcal{A}^I, \quad q \in q^I, \quad \text{که در آن} \quad q + Ax \geq 0, \quad x \geq 0, \quad x^T(q + Ax) = 0$$

است، که با نماد $ILCP(A^I, q^I)$ نشان داده می‌شود. چنین به نظر می‌رسد که برای حل مسائل مکمل خطی بازه‌ای باید به دنبال یافتن بردار بازه‌ای مانند $[x]$ باشیم، اما در حقیقت این‌گونه نیست. مجموعه جواب این مسائل مکمل خطی بازه‌ای به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(۳) \quad \{x \in \mathbb{R}^n : q + Ax \geq 0, \quad x \geq 0, \quad x^T(q + Ax) = 0, \quad A \in A^I, \quad q \in q^I\},$$

این مجموعه الزاماً یک بردار بازه‌ای را نتیجه نمی‌دهد و حتی مجموعه تعریف شده الزاماً محدب نیست. در عمل، تعریف بالا به منزله حل تعداد بی‌شمار دستگاه حقیقی می‌باشد که کاملاً دشوار و پیچیده است. به طور مشابه در مقایسه با تانسورهای معمولی، در کارکردن با تانسورهای بازه‌ای نیز با محدودیت‌های زیادی مواجه هستیم. گاهی می‌توان با استفاده از بعضی روش‌ها، حل‌پذیری مسائل مکمل بازه‌ای را بررسی کرد، ولی در بسیاری موارد این کار دشوار و حتی در بعضی موارد نشدنی است. اما از آن‌جا که عدم قطعیت در ذات همه روش‌های علمی موجود است، پرداختن به مسائل بازه‌ای و مواجه شدن با دشواری‌های آن اجتناب‌ناپذیر است. در سال‌های اخیر، مسئله مکمل خطی بازه‌ای^{۲۳} و حل‌پذیری آن توجه بسیاری را به خود جلب کرده است و در این زمینه تحقیقات بسیاری صورت گرفته است [۵، ۴، ۲].

۴. مسئله مکمل تانسور بازه‌ای

یکی از مسائل محوری در نظریه مسائل مکمل، بررسی حل‌پذیری مسئله است. در این بخش، یک مسئله مکمل تانسوری را با پارامترهای بازه‌ای در نظر می‌گیریم و شرایط وجود جواب مسئله را بررسی می‌کنیم. به طور کلی یک مسئله مکمل تانسوری^{۲۴} که با $TCP(A, q)$ نمایش داده می‌شود، یافتن $x \in \mathbb{R}^n$ است، به طوری که

$$(۴) \quad q + Ax^{m-1} \geq 0, \quad x \geq 0, \quad x^T(q + Ax^{m-1}) = 0$$

که در آن $A \in \mathbb{R}^{[m,n]}$ و $q \in \mathbb{R}^n$. مجموعه جواب مسئله $TCP(A, q)$ به صورت

$$(۵) \quad \sum_x (A, q) = \{x \in \mathbb{R}^n : q + Ax^{m-1} \geq 0, \quad x^T(q + Ax^{m-1}) = 0, \quad x \geq 0\}$$

نشان داده می‌شود.

در ابتدا، شکل پارامتری بازه، بردار بازه‌ای، ماتریس بازه‌ای و تانسور بازه‌ای را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$a^I = \{a(t) \in \mathbb{R} : a(t) = \underline{a} + t(\bar{a} - \underline{a}), \underline{a} \in \mathbb{R}, \bar{a} \in \mathbb{R}, t \in [0, 1]\},$$

$$x^I = \{x(t) \in \mathbb{R}^n : x(t) = \underline{x} + t(\bar{x} - \underline{x}), \underline{x} \in \mathbb{R}^n, \bar{x} \in \mathbb{R}^n, t \in [0, 1]\},$$

$$A^I = \{A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n} : A(t) = \underline{A} + t(\bar{A} - \underline{A}), \underline{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \bar{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}, t \in [0, 1]\},$$

$$A^I = \{A(t) \in \mathbb{R}^{[m,n]} : A(t) = \underline{A} + t(\bar{A} - \underline{A}), \underline{A} \in \mathbb{R}^{[m,n]}, \bar{A} \in \mathbb{R}^{[m,n]}, t \in [0, 1]\}.$$

فرض کنیم A^I یک تانسور بازه‌ای از مرتبه m و بعد n و $q^I \in \mathbb{R}^n$ یک بردار بازه‌ای از بعد n باشد. آنگاه خانواده‌ای از $TCP(A, q)$ را در نظر می‌گیریم

$$A \in A^I, \quad q \in q^I \quad \text{که در آن} \quad q + Ax^{m-1} \geq 0, \quad x \geq 0, \quad x^T(q + Ax^{m-1}) = 0,$$

²³interval linear complementarity problem ²⁴tensor complementarity problem

که هم‌ارز خانواده $TCP(\mathcal{A}, q)$ زیر است:

$$\mathcal{A} \in \mathcal{A}^I, \quad q \in q^I \text{ که در آن } w - \mathcal{A}x^{m-1} = q, \quad x \geq \circ, \quad w \geq \circ, \quad x^T w = \circ.$$

خانواده $TCP(\mathcal{A}, q)$ را به‌عنوان مسئله مکمل تانسور بازه‌ای معرفی می‌کنیم و با نماد $ITCP(\mathcal{A}^I, q^I)$ نشان می‌دهیم. مجموعه جواب‌های این خانواده بزرگ را با نماد $\sum_x(\mathcal{A}^I, q^I)$ نشان می‌دهیم و به‌صورت

$$\{x \in \mathbb{R}^n : q + \mathcal{A}x^{m-1} \geq \circ, \quad x \geq \circ, \quad x^T(q + \mathcal{A}x^{m-1}) = \circ, \quad \mathcal{A} \in \mathcal{A}^I, \quad q \in q^I\},$$

تعریف می‌کنیم. که این تعریف هم‌ارز با

$$\sum_{(w,x)}(\mathcal{A}^I, q^I) = \{(w, x)^T \in \mathbb{R}^{2n} : w - \mathcal{A}x^{m-1} = q, x \geq \circ, w \geq \circ, x^T w = \circ, \mathcal{A} \in \mathcal{A}^I, q \in q^I\}.$$

می‌باشد. اکنون فرض کنیم $(w, x)^T \in \sum_{(w,x)}(\mathcal{A}^I, q^I)$ ، آنگاه

$$w - \mathcal{A}^I x = q^I, \quad w \geq \circ, \quad x \geq \circ, \quad x^T w = \circ$$

$$\Leftrightarrow w_i - \sum_{i_1 \dots i_m=1}^n a_{ii_1 \dots i_m}^I x_{i_1} \dots x_{i_m} = q_i^I,$$

$$x_{i_1}, \dots, x_{i_m} \geq \circ, w_i \geq \circ, x_i w_i = \circ, i, i_1, \dots, i_m = 1, 2, \dots, n.$$

$$\Leftrightarrow \left[w_i - \sum_{i_1 \dots i_m=1}^n \bar{a}_{ii_1 \dots i_m} x_{i_1} \dots x_{i_m}, w_i - \sum_{i_1 \dots i_m=1}^n \underline{a}_{ii_1 \dots i_m} x_{i_1} \dots x_{i_m} \right] = [\underline{q}_i, \bar{q}_i],$$

$$x_{i_1}, \dots, x_{i_m} \geq \circ, \quad w_i \geq \circ, \quad x_i w_i = \circ, \quad i, i_1, \dots, i_m = 1, 2, \dots, n.$$

از آنجا که $a^I = b^I$ و $a^I, b^I \in \mathbb{IR}$ پس $\underline{a} \leq \bar{a}$ و $\underline{a} \geq \bar{a}$ ، بنابراین روابط فوق معادل روابط زیر است،

$$w_i - \sum_{i_1 \dots i_m=1}^n \bar{a}_{ii_1 \dots i_m} x_{i_1} \dots x_{i_m} \leq \bar{q}_i, w_i - \sum_{i_1 \dots i_m=1}^n \underline{a}_{ii_1 \dots i_m} x_{i_1} \dots x_{i_m} \geq \underline{q}_i,$$

$$x_{i_1} \dots x_{i_m} \geq \circ, \quad w_i \geq \circ, \quad x_i w_i = \circ, \quad i, i_1, \dots, i_m = 1, 2, \dots, n.$$

به‌دلیل ویژگی مکمل بودن در متغیرها، باید 2^n مورد را در نظر بگیریم. مجموعه $\sum_{(w,x)}(\mathcal{A}^I, q^I)$ هم‌ارز است با

$$\sum_{(w,x)}(\mathcal{A}^I, q^I) \triangleq \bigcup_{2^n} \left\{ (w, x)^T \in \mathbb{R}^{2n} : w_i - \sum_{i_1 \dots i_m=1}^n \bar{a}_{ii_1 \dots i_m} x_{i_1} \dots x_{i_m} \leq \bar{q}_i \right\}$$

که در آن،

$$w_i - \sum_{i_1 \dots i_m=1}^n \underline{a}_{ii_1 \dots i_m} x_{i_1} \dots x_{i_m} \geq \underline{q}_i, x_{i_1} \dots x_{i_m} \geq 0, \\ w_i \geq 0, x_i w_i = 0, i, i_1, \dots, i_m = 1, 2, \dots, n.$$

شکل پارامتری $ITCP(\mathcal{A}^I, q^I)$ را برای $t \in [0, 1]$ به صورت $TCP(\mathcal{A}(t), q(t))$ نمایش می‌دهیم و مجموعه جواب آن برای بعضی t های ثابت به صورت

$$\sum_x (\mathcal{A}(t), q(t)) = \{x \in \mathbb{R}^n : q(t) + \mathcal{A}(t)x^{m-1} \geq 0, x \geq 0, x^T(q(t) + \mathcal{A}(t)x^{m-1}) = 0\}$$

تعریف می‌کنیم.

در ادامه، به بررسی شرایط وجود جواب مسئله مکمل بازدهای می‌پردازیم، بدین منظور ابتدا قضیه زیر را به عنوان یک پیش نیاز مطرح می‌کنیم.

قضیه ۱.۴. [۲۳] تانسور $\mathcal{A}$ یک P -تانسور است، اگر و تنها اگر مسئله $TCP(q, \mathcal{A})$ برای هر $q \geq 0$ ، جواب یکتا داشته باشد.

لم ۲.۴. برای هر $ITCP(\mathcal{A}^I, q^I)$ ، $\sum_x (\underline{\mathcal{A}}, \underline{q})$ و $\sum_x (\overline{\mathcal{A}}, \overline{q})$ زیرمجموعه‌هایی از $\sum_x (\mathcal{A}^I, q^I)$ می‌باشند.

اثبات. فرض کنیم $(w, x)^T \in \sum_{(w, x)} (\underline{\mathcal{A}}, \underline{q})$. این نتیجه می‌دهد که

$$w - \underline{\mathcal{A}}x^{m-1} = \underline{q}, \quad x \geq 0, \quad w \geq 0, \quad x^T w = 0.$$

$$w_i - \sum_{i_1 \dots i_m=1}^n \underline{a}_{ii_1 \dots i_m} x_{i_1} \dots x_{i_m} = \underline{q}_i, x_{i_1}, \dots, x_{i_m} \geq 0, \\ w_i \geq 0, x_i w_i = 0, i, i_1, \dots, i_m = 1, 2, \dots, n.$$

از آنجا که $\underline{q}_i \leq \overline{q}_i$ و $\underline{a}_{ii_1 \dots i_m} \leq \overline{a}_{ii_1 \dots i_m}$ بنابراین،

$$(6) \quad w_i - \sum_{i_1 \dots i_m=1}^n \overline{a}_{ii_1 \dots i_m} x_{i_1} \dots x_{i_m} \leq \overline{q}_i, \quad w_i - \sum_{i_1 \dots i_m=1}^n \underline{a}_{ii_1 \dots i_m} x_{i_1} \dots x_{i_m} \geq \underline{q}_i,$$

$$x_{i_1}, \dots, x_{i_m} \geq 0, \quad w_i \geq 0, \quad x_i w_i = 0, \quad i, i_1, \dots, i_m = 1, 2, \dots, n.$$

دستگاه نامساوی‌های (۶) دلالت بر این دارد که $(w, x)^T \in \sum_{(w, x)} (\mathcal{A}^I, q^I)$. از این رو، $\sum_x (\overline{\mathcal{A}}, \overline{q}) \subseteq \sum_x (\mathcal{A}^I, q^I)$ به طور مشابه، می‌توان نشان داد که $\sum_x (\underline{\mathcal{A}}, \underline{q}) \subseteq \sum_x (\mathcal{A}^I, q^I)$. □

قضیه ۳.۴. فرض کنیم $TCP(\underline{\mathcal{A}}, \underline{q})$ و $TCP(\overline{\mathcal{A}}, \overline{q})$ برای $q \geq 0$ ، جواب‌های یکتا داشته باشند، آنگاه برای هر $t \in [0, 1]$ ، $\sum_x (\mathcal{A}(t), q(t))$ یک مجموعه تک عضوی است.

اثبات. اگر $TCP(\bar{A}, \bar{q})$ و $TCP(A, q)$ جواب‌های یکتا داشته باشند، با استفاده از قضیه ۱.۴ $\bar{A}$ و $\bar{q}$ و P -تانسور هستند. چون ترکیب محدب مثبت از P -تانسورها یک P -تانسور است، بنابراین $A(t) = t\bar{A} + (1-t)A$ ، $t \in [0, 1]$ ، یک P -تانسور است. از این‌رو، $TCP(A(t), q(t))$ برای هر t ، دارای جواب یکتا می‌باشد. پس، برای هر $t \in [0, 1]$ ، $\sum_x(A(t), q(t))$ یک مجموعه تک‌عضوی است. $\square$

قضیه ۴.۴. مجموعه جواب $\sum_{(w,x)}(A^I, q^I)$ ، محدب نیست.

اثبات. فرض کنیم $(w^1, x^1)^T, (w^2, x^2)^T \in \sum_{(w,x)}(A^I, q^I)$ ، بنابراین،

$$(Y) \quad w_i^1 - \sum_{i_2 \dots i_m=1}^n \bar{a}_{ii_2 \dots i_m} x_{i_2}^1 \dots x_{i_m}^1 \leq \bar{q}_i, \quad w_i^1 - \sum_{i_2 \dots i_m=1}^n \underline{a}_{ii_2 \dots i_m} x_{i_2}^1 \dots x_{i_m}^1 \geq \underline{q}_i, \\ x_{i_2}^1 \dots x_{i_m}^1 \geq 0, \quad w_i^1 \geq 0, \quad w_i^1 x_i^1 = 0, \quad i, i_2, \dots, i_m = 1, 2, \dots, n.$$

$$(A) \quad w_i^2 - \sum_{i_2 \dots i_m=1}^n \bar{a}_{ii_2 \dots i_m} x_{i_2}^2 \dots x_{i_m}^2 \leq \bar{q}_i, \quad w_i^2 - \sum_{i_2 \dots i_m=1}^n \underline{a}_{ii_2 \dots i_m} x_{i_2}^2 \dots x_{i_m}^2 \geq \underline{q}_i, \\ x_{i_2}^2 \dots x_{i_m}^2 \geq 0, \quad w_i^2 \geq 0, \quad w_i^2 x_i^2 = 0, \quad i, i_2, \dots, i_m = 1, 2, \dots, n.$$

برای $0 \leq \lambda \leq 1$ و $i = 1, 2, \dots, n$ ، با ضرب λ در (Y) و ضرب $(1-\lambda)$ در (A) و جمع دو رابطه، داریم:

$$(\lambda w_i^1 + (1-\lambda)w_i^2) - \sum_{i_2 \dots i_m=1}^n \bar{a}_{ii_2 \dots i_m} (\lambda x_{i_2}^1 \dots x_{i_m}^1 + (1-\lambda)x_{i_2}^2 \dots x_{i_m}^2) \leq \bar{q}_i, \\ (\lambda w_i^1 + (1-\lambda)w_i^2) - \sum_{i_2 \dots i_m=1}^n \underline{a}_{ii_2 \dots i_m} (\lambda x_{i_2}^1 \dots x_{i_m}^1 + (1-\lambda)x_{i_2}^2 \dots x_{i_m}^2) \geq \underline{q}_i,$$

$$(\lambda x_{i_2}^1 \dots x_{i_m}^1 + (1-\lambda)x_{i_2}^2 \dots x_{i_m}^2) \geq 0, \quad (\lambda w_i^1 + (1-\lambda)w_i^2) \geq 0, \\ i, i_2, \dots, i_m = 1, 2, \dots, n.$$

اگرچه، $(\lambda w_i^1 + (1-\lambda)w_i^2) (\lambda x_{i_2}^1 \dots x_{i_m}^1 + (1-\lambda)x_{i_2}^2 \dots x_{i_m}^2) = 0$ ، تنها برای $t = 1$ و $t = 0$ صحیح است و برای تمام مقادیر $0 < t < 1$ صحیح نمی‌باشد. از آنجایی‌که، ترکیب محدب متغیرهای مکمل، متغیرهای مکمل نیستند، این نشان می‌دهد که $(\lambda w^1 + (1-\lambda)w^2, \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2)^T \notin \sum_{(w,x)}(A^I, q^I)$ از این‌رو، $\sum_{(w,x)}(A^I, q^I)$ یک مجموعه محدب نیست. $\square$

قضیه ۵.۴. اگر A^I یک $\mathcal{H}$ -تانسور بازه‌ای از مرتبه m و بعد n باشد، آنگاه برای هر $q^I \in \mathbb{R}^n$ ، $ITCP(A^I, q^I)$ دارای جواب است. یعنی، مجموعه جواب $\sum_x(A^I, q^I)$ ناتهی است.

اثبات. فرض کنیم A^I یک $\mathcal{H}$ -تانسور بازه‌ای از مرتبه m و بعد n باشد. این نشان می‌دهد که هر $A \in A^I$ یک $\mathcal{H}$ -تانسور است، از این‌رو $TCP(A, q)$ دارای جواب است. همچنین، $\sum_x(A, q) \subseteq \sum_x(A^I, q^I)$ ، پس، $\sum_x(A^I, q^I)$ مجموعه‌ای ناتهی است. $\square$

۵. مثال عددی

مثال ۱.۵. مسئله $ITCP(A^I, q^I)$ را در نظر می‌گیریم، که در آن

$$A^I(:, :, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^I(:, :, 2) = \begin{pmatrix} 1 & [0, 1/2] \\ [0, 1/3] & 1 \end{pmatrix}, \quad q^I = \begin{pmatrix} [0, 1] \\ [0, 1] \end{pmatrix}$$

مجموعه جواب‌های $ITCP(A^I, q^I)$ توسط جواب‌های دستگاه نامعادلات زیر به دست می‌آید:

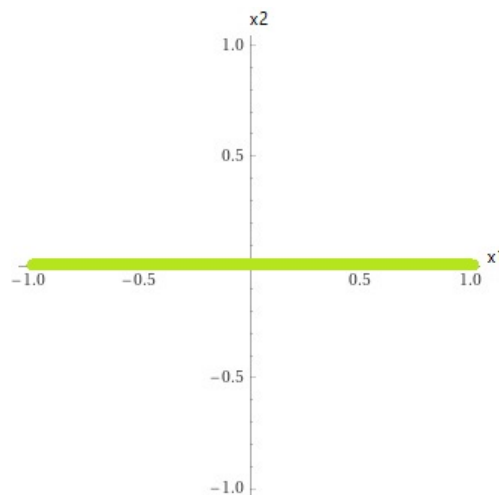
$$\begin{cases} w_1 - (x_1 x_2 + 0.5 x_2^2) \leq 1, \\ w_1 - x_1 x_2 \geq 0, \\ w_2 - (0.33 x_1 x_2 + x_2^2) \leq 1, \\ w_2 - x_2^2 \geq 0. \end{cases}$$

چهار حالت را در نظر می‌گیریم:

۱. $w_1 = 0, w_2 = 0$. در نتیجه دستگاه نامعادلات زیر را داریم:

$$\begin{cases} x_1 x_2 + 0.5 x_2^2 \geq -1, \\ 0.33 x_1 x_2 + x_2^2 \geq -1, \\ x_1 x_2 \leq 0, \\ x_2^2 \leq 0. \end{cases}$$

مجموعه جواب‌های دستگاه در ناحیه سایه‌دار شکل ۴ نشان داده شده است.



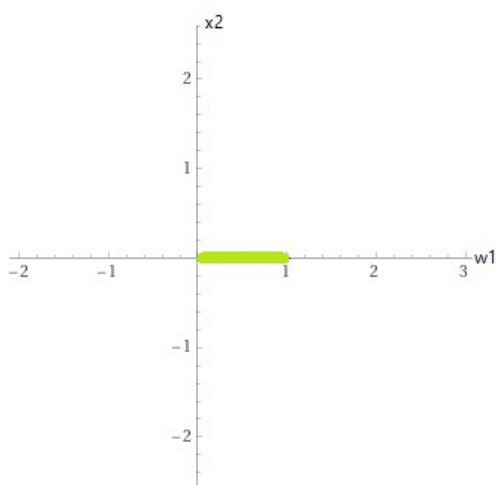
شکل ۴. ناحیه $w_1 = 0, w_2 = 0$.

Figure 4: Region for $w_1 = 0, w_2 = 0$.

۲. $w_2 = 0, x_1 = 0$ ، در نتیجه دستگاه نامعادلات زیر را داریم:

$$\begin{cases} x_2 \geq -1, \\ x_2 \leq 0, \\ w_1 - 0.5x_2 \leq 1, \\ w_1 \geq 0. \end{cases}$$

مجموعه جواب‌های دستگاه در ناحیه سایه‌دار شکل ۵ نشان داده شده است.



شکل ۵. ناحیه $w_2 = 0, x_1 = 0$.

Figure 5: Region for $w_2 = 0, x_1 = 0$.

۳. $x_1 = 0, x_2 = 0$ ، در نتیجه دستگاه نامعادلات زیر را داریم:

$$\begin{cases} w_1 \leq 1, \\ w_1 \geq 0, \\ w_2 \geq 0, \\ w_2 \leq 1. \end{cases}$$

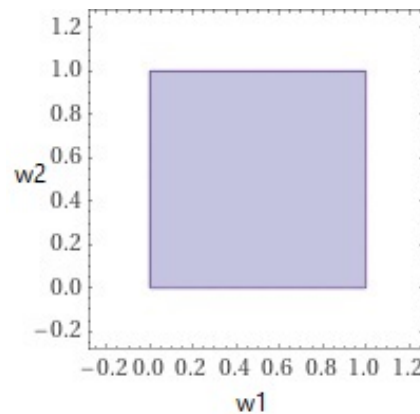
مجموعه جواب‌های دستگاه در ناحیه سایه‌دار شکل ۶ نشان داده شده است.

۴. $w_1 = 0, x_2 = 0$ ، در نتیجه دستگاه نامعادلات زیر را داریم:

$$\begin{cases} w_2 \geq 0, \\ w_2 \leq 1. \end{cases}$$

که در این حالت مجموعه جواب دستگاه برابر است با

$$(9) \quad \{(x_1, w_2) | 0 \leq w_2 \leq 1\}.$$



شکل ۶. ناحیه $x_2 = 0, x_1 = 0$.

Figure 6: Region for $x_2 = 0, x_1 = 0$.

بنابراین، مجموعه جواب $TCP(\mathcal{A}^I, q^I)$ از رابطه زیر به دست می آید.

$$\begin{aligned} \sum_{(w,x)} (\mathcal{A}^I, q^I) &= \left\{ (\circ, \circ, x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^4 : (x_1, x_2) \in \text{شکل ۴ ناحیه سایه دار} \right\} \\ &\cup \left\{ (w_1, \circ, \circ, x_2)^T \in \mathbb{R}^4 : (w_1, x_2) \in \text{شکل ۵ ناحیه سایه دار} \right\} \\ &\cup \left\{ (w_1, w_2, \circ, \circ)^T \in \mathbb{R}^4 : (w_1, w_2) \in \text{شکل ۶ ناحیه سایه دار} \right\} \\ &\cup \left\{ (\circ, w_2, x_1, \circ)^T \in \mathbb{R}^4 : (w_2, x_1) \in \text{دستگاه (۹)} \right\} \end{aligned}$$

از این رو،

$$\sum_x (\mathcal{A}^I, q^I) = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 x_2 + \circ.5 x_1^2 \geq -1, \circ.33 x_1 x_2 + x_1^2 \geq -1, x_1 x_2 \leq \circ, x_1^2 \leq \circ\}.$$

همچنین، جواب مسئله $TCP(\underline{\mathcal{A}}, \underline{q})$ ، که در آن $\underline{q} = \begin{pmatrix} \circ \\ \circ \end{pmatrix}$ و

$$\underline{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \circ \\ \circ & 1 \end{pmatrix}$$

به صورت زیر می باشد:

$$\sum_x (\underline{\mathcal{A}}, \underline{q}) = u = \begin{pmatrix} \circ \\ \circ \end{pmatrix}$$

جواب مسئله $TCP(\bar{A}, \bar{q})$ ، که در آن، $\bar{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ و

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

عبارت است از:

$$\sum_x (\bar{A}, \bar{q}) = v = \begin{pmatrix} \circ \\ \circ \end{pmatrix}$$

می‌توان مشاهده کرد که هر دو $\bar{A}$ و $\underline{A}$ ، P -تنسور هستند. بنابراین، $TCP(\bar{A}, \bar{q})$ و $TCP(\underline{A}, \underline{q})$ جواب یکتا دارند. در اینجا می‌توان مشاهده نمود که $u \in \sum_x (\mathcal{A}^I, q^I)$ و $v \in \sum_x (\mathcal{A}^I, q^I)$ پس، $\sum_x (\underline{A}, \underline{q}) \subseteq \sum_x (\mathcal{A}^I, q^I)$ و $\sum_x (\bar{A}, \bar{q}) \subseteq \sum_x (\mathcal{A}^I, q^I)$.

۶. نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک روش برای بحث در مورد وجود جواب مسئله مکمل تنسوری، که در آن پارامترها بازه‌های بسته هستند، توسعه داده شده است. در واقع یک مسئله مکمل تنسوری را با پارامترهای بازه‌ای در نظر می‌گیریم و شرایط وجود جواب مسئله را بررسی می‌کنیم. ابتدا نشان می‌دهیم که اگر کران‌های بالا و پایین تنسور بازه‌ای $\mathcal{A}^I = [\underline{A}, \bar{A}]$ ، p -تنسور باشند آن‌گاه برای $q \geq \circ$ و برای هر $t \in [0, 1]$ ، $\sum_x (\mathcal{A}(t), q(t))$ ، یک مجموعه تک عضوی است. علاوه بر این ثابت کردیم که مجموعه جواب نظیر مسئله مکمل تنسور بازه‌ای نامحدب است و اگر $\mathcal{A}^I$ یک $\mathcal{H}$ -تنسور بازه‌ای باشد، مجموعه جواب نظیر مسئله مکمل تنسور بازه‌ای ناتهی است. در پایان نیز با ارائه یک مثال، کارایی نتایج را نشان دادیم.

مراجع

- [1] W. Ding, L. Qi and Y. Wei, M -tensors and nonsingular M -tensors, *Linear Algebra Appl.*, **439** no. 10 (2013) 3264–3278.
- [2] A. K. Bhurjee, P. Kumar, S. Panigrahi and G. Panda, Existence of the solutions of an interval linear complementarity problem and its application, *AIP Conf. Proc.*, **2277** no. 1 (2020) 200001-200011.
- [3] R. Beheshti, J. Fathi and M. Zangiabadi, Some classes of interval tensors and their properties, *Wavelet and Linear Algebra*, **9** no. 1 (2022) 49–65.
- [4] G. Alefeld and U. Schäfer, Iterative methods for linear complementarity problems with interval data, *Computing*, **70** no. 3 (2003) 235–259.
- [5] G. Alefeld, Z. Wang and Z. Shen, Enclosing solutions of linear complementarity problems for H -matrices, *Reliab. Comput.*, **10** no. 6 (2004) 423–435.
- [6] H. Bozorgmanesh, M. Hajarian and A. T. Chronopoulos, Interval tensors and their application in solving multi-linear systems of equations, *Comput. Math. Appl.*, **79** no. 3. (2020) 697–715.
- [7] N. Dăneț, Interval analysis - a powerful trend in numerical analysis, *International Conference "Trends and Challenges in Applied Mathematics" ICTCAM*, (2007) 6 p.
- [8] B. Hayes, A Lucid Interval, *American Scientist*, **91** no. 6 (2003) 484–488.

- [9] M. Che, L. Qi and Y. Wei, Positive-definite tensors to nonlinear complementarity problems, *J. Optim. Theory Appl.*, **168** no. 2 (2016) 475–487.
- [10] R. W. Cottle, J. S. Pang and R. E. Stone, *The linear complementarity problem*, Computer Science and Scientific Computing. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1992.
- [11] R. W. Cottle and G. B. Dantzig, Complementary pivot theory of mathematical programming, *Mathematics of the Decision Sciences, Parts 1, 2*, (Seminar, Stanford, Calif., 1967), Lectures in Applied Mathematics, **11**, **12**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1968) 115–136.
- [12] B. C. Eaves, The linear complementarity problem, *Management Sci.*, **17** (1971) 612–634.
- [13] F. Facchinei and J. S. Pang, *Finite-dimensional variational inequalities and complementarity problems, I & II*, Springer Series in Operations Research, Springer-Verlag, New York, 2003.
- [14] M. C. Ferris and J. S. Pang, Engineering and economic applications of complementarity problems, *SIAM Rev.*, **39** no. 4 (1997) 669–713.
- [15] M. S. Gowda, On Q -matrices, *Math. Programming*, **49** no. 1 (1990/91) 139–141.
- [16] J. Y. Han, N. H. Xiu and H. D. Qi, *Nonlinear complementarity theory and algorithm*, Shanghai Science and Technology Press, Shanghai, 2006.
- [17] S. Karamardian, The complementarity problem, *Math. Programming*, **2** no. 1 (1972) 107–129.
- [18] Z. Luo, L. Qi and N. Xiu, The sparsest solutions to Z -tensor complementarity problems, *Optim. Lett.*, **11** no. 3 (2017) 471–482.
- [19] R. E. Moore, *Interval Analysis*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1966.
- [20] J. S. Pang, A unification of two classes of Q -matrices, *Math. Programming*, **20** no. 3 (1981) 348–352.
- [21] J. S. Pang, On Q -matrices, *Math. Programming*, **17** no. 2 (1979) 243–247.
- [22] Y. Song and L. Qi, Properties of tensor complementarity problem and some classes of structured tensors, *Ann. Appl. Math.*, **33** no. 3 (2017) 308–323.
- [23] Y. Song and L. Qi, Tensor complementarity problem and semi-positive tensors, *J. Optim. Theory Appl.*, **169** no. 3 (2016) 1069–1078.

رزیتا بهشتی

گروه ریاضی، دانشگاه هرمزگان، هرمزگان، بندرعباس.
rozita.beheshti@gmail.com

رزیتا بهشتی در سال ۱۳۸۵ وارد مقطع کارشناسی رشته ریاضی محض دانشگاه بابلسرشد و در سال ۱۳۹۱ وارد مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش آنالیز این دانشگاه شد و در سال ۱۴۰۱ از دانشگاه هرمزگان دکتری ریاضی گرفت و هم‌اکنون در آموزش و پرورش استان هرمزگان مشغول به خدمت می‌باشد.



جواد فتحی

گروه ریاضی، دانشگاه هرمزگان، هرمزگان، بندرعباس.

fathi@hormozgan.ac.ir

جواد فتحی مورجانی در سال ۱۳۷۶ وارد مقطع کارشناسی رشته ریاضی کاربردی دانشگاه شیراز شد. مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض را در سال ۱۳۸۳ در دانشگاه سیستان و بلوچستان به پایان رساند و در سال ۱۳۹۱ از این دانشگاه دکترای ریاضی گرفت و هم‌اکنون عضو هیات علمی گروه ریاضی دانشگاه هرمزگان می‌باشد.



مصطفی زنگی‌آبادی

گروه ریاضی، دانشگاه هرمزگان، هرمزگان، بندرعباس.

zangiabadi@hormozgan.ac.ir

مصطفی زنگی‌آبادی در سال ۱۳۷۸ وارد مقطع کارشناسی رشته ریاضی کاربردی دانشگاه سیستان و بلوچستان شد و در سال ۱۳۸۳ وارد مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض دانشگاه ولی‌عصر رفسنجان شد و در سال ۱۳۹۲ از این دانشگاه در مقطع دکتری فارغ التحصیل گردید و هم‌اکنون عضو هیات علمی گروه ریاضی دانشگاه هرمزگان می‌باشد.

