

THE CLIQUE NUMBER OF THE INTERSECTION GRAPH OF A CYCLIC GROUP OF ORDER WITH AT MOST THREE PRIME FACTORS

SEYYED MAJID JAFARIAN AMIRI* AND AREZOO BEHESHTIPOUR

ABSTRACT. Let G be a finite non-trivial group. The intersection graph $\Gamma(G)$, is a graph whose vertices are all proper non-trivial subgroups of G , and there is an edge between two distinct vertices H and K if and only if $H \cap K \neq 1$. In this paper, we determine the clique number of the intersection graph of the cyclic groups of orders having at most three primes in their decomposition.

1. Introduction

Let G be a finite group. There are several ways to associate a graph to G (see [7] and the references therein). The one we will consider in this paper, is denoted by $\Gamma(G)$ and is called the intersection graph of G . The intersection graph $\Gamma(G)$ of a nontrivial group G is an undirected graph without loops and multiple edges defined as follows: the vertex set is the set of all proper non-trivial subgroups of G , and there is an edge between two distinct vertices H and K if and only if $H \cap K \neq 1$ where 1 denotes the trivial subgroup of G . The graph $\Gamma(G)$ has been extensively studied (see, for example, [1, 8, 11, 12]).

Currently, the present authors in [4], have determined all groups G such that the clique number of $\Gamma(G)$ is less than 5, and also they have given a criterion for solvability of finite groups G , by the clique

Keywords: Finite group, Cyclic group, Intersection graph, Clique number.

Communicated by Saeid Maghsoudi.

Article Type: Research Paper.

*Corresponding author.

Received: 24-10-2023, Accepted: 20-11-2023, Published Online: 31-12-2023.

Cite this article: S. M. Jafarian Amiri and A. Beheshtipour, The clique number of the intersection graph of a cyclic group of order with at most three prime factors, *Journal of Mathematics and Society*, 8 no. 4 (2023) 71–79.

<http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.139575.1618> .

number of $\Gamma(G)$. More precisely, it has been proved that if G is a finite group such that the clique number of $\Gamma(G)$ is less than 13, then G is solvable. Note that 13 is the clique number of $\Gamma(A_5)$, where A_5 is the alternating group on 5 letters.

Other researches in this topic are intersection graphs of a semigroup, a module, and ideals of a ring, were investigated in [5], [2] and [6, 10], respectively.

2. Main Results

We start this section with the following definition:

Definition 2.1. The subset X of vertices of a finite graph Γ is called a clique, if the induced subgraph by X is a complete graph. The maximum size of a clique, among all cliques of Γ , is called the clique number of Γ and we denote it by $\omega(\Gamma)$. If Γ is empty (without vertex), then we define $\omega(\Gamma) = 0$ and $\omega(\Gamma) = 1$ if Γ is null (with a non-empty vertex set with no edges). A clique X in Γ is called maximal if there is no clique Y in Γ such that $X \subsetneq Y$.

Note that the maximum size, among all maximal cliques in $\Gamma(G)$, is $\omega(\Gamma(G))$.

To prove the main theorems, we need the following result that its proof can be found in the most valid book of group theory.

Proposition 2.2. If $G = \langle g \rangle$ is a cyclic group of order n , then for any divisor s of n , there is a unique subgroup $H = \langle g^{\frac{n}{s}} \rangle$ of G of order s .

The following result is a consequence of the above proposition.

Corollary 2.3. Let G be a finite cyclic group. Then, the intersection of two proper subgroups of G is non-trivial if and only if their orders are not relatively prime.

For a natural number n , we denote by C_n the cyclic group of order n , $\pi(n)$ the set of prime divisors of n and $d(n)$ the number of all divisors of n . Note that if p is a prime number and n is a multiple of p , then the number of divisors of n with multiple p is $d(\frac{n}{p})$. If $V(\Gamma(G))$ is the set of vertices of $\Gamma(G)$, then by Proposition 2.2, we have $|V(\Gamma(C_n))| = d(n) - 2$. In this paper, we obtain $\omega(\Gamma(C_n))$, where $|\pi(n)| = 3$.

3. Summary of Proofs/Conclusions

Now, we state and prove our main results. First, we find the clique number of a cyclic group of a prime power order.

Proposition 3.1. If p is a prime and m is a positive integer, then $\omega(\Gamma(C_{p^m})) = m - 1$.

Proof. Since $|V(\Gamma(C_n))| = d(n) - 2$ and $d(p^m) = m + 1$, we get the conclusion. $\square$

In the sequel, assume that p_1, p_2 and p_3 are distinct primes. Also assume that n_1, n_2 and n_3 are positive integers such that $n_1 \geq n_2 \geq n_3$.

In the following results, we obtain the clique number of the intersection graph of group $C_{p_1^{n_1} p_2^{n_2}}$. We recall that $d(p_1^{n_1} p_2^{n_2}) = (n_1 + 1)(n_2 + 1)$.

Proposition 3.2. *We have $\omega(\Gamma(C_{p_1^{n_1} p_2^{n_2}})) = d(p_1^{n_1} p_2^{n_2}) - 2 - d(p_2^{n_2}) = n_1 n_2 + n_1 - 1$.*

Proof. Suppose that $G = C_{p_1^{n_1} p_2^{n_2}}$. Then, we define the subsets of $V(\Gamma(G))$ as follows:

- For $1 \leq i \leq 2$, $V_{p_i}(\Gamma(G))$ is the set of all proper subgroups H of G such that $\pi(|H|) = \{p_i\}$.
- $V_{p_1 p_2}(\Gamma(G))$ is the set of all proper subgroups H of G such that $\pi(|H|) = \{p_1, p_2\}$.

It is clear that $\{V_{p_1}(\Gamma(G)), V_{p_2}(\Gamma(G)), V_{p_1 p_2}(\Gamma(G))\}$ forms a partition for $V(\Gamma(G))$.

By Proposition 2.2, we have $|V_{p_i}(\Gamma(G))| = d(p_i^{n_i}) - 1 = n_i$ and $|V_{p_1 p_2}(\Gamma(G))| = d(\frac{n}{p_1 p_2}) - 1 = n_1 n_2 - 1$. By Corollary 2.3, in $\Gamma(G)$, each element of the clique $V_{p_1}(\Gamma(G))$ does not join to any element of the clique $V_{p_2}(\Gamma(G))$ and moreover all elements of $V_{p_i}(\Gamma(G))$ for $i = 1, 2$ join to all elements of the clique $V_{p_1 p_2}(\Gamma(G))$. Therefore $V_{p_1}(\Gamma(G)) \cup V_{p_1 p_2}(\Gamma(G))$ and $V_{p_2}(\Gamma(G)) \cup V_{p_1 p_2}(\Gamma(G))$ are the only maximal cliques of $\Gamma(G)$ and since $n_1 \geq n_2$, we have the result. $\square$

Now we state the last main result.

Theorem 3.3. *Let $G = C_n$ where $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3}$. Then*

- (1) *If $n_1 \geq n_2 n_3$, then $\omega(\Gamma(G)) = d(\frac{n}{p_1}) - 1 = n_1 + n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_1 n_2 n_3 - 1$.*
- (2) *If $n_1 \leq n_2 n_3$, then $\omega(\Gamma(G)) = d(\frac{p_1^{n_1} p_2^{n_2}}{p_1 p_2}) + d(\frac{p_1^{n_1} p_3^{n_3}}{p_1 p_3}) + d(\frac{p_2^{n_2} p_3^{n_3}}{p_2 p_3}) + d(\frac{n}{p_1 p_2 p_3}) - 1$*

$$= n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_2 n_3 + n_1 n_2 n_3 - 1.$$

Proof. Similar to the proof of Proposition 3.2, we define the subsets of $V(\Gamma(G))$ as follows:

- For $1 \leq i \leq 3$, $V_{p_i}(\Gamma(G))$ is the set of all subgroups H of G such that $\pi(|H|) = \{p_i\}$. Therefore, $|V_{p_i}(\Gamma(G))| = d(p_i^{n_i}) - 1 = n_i$.
- $V_{p_i p_j}(\Gamma(G))$ is the set of all subgroups H of G such that $\pi(|H|) = \{p_i, p_j\}$ for $1 \leq i < j \leq 3$. Therefore, $|V_{p_i p_j}(\Gamma(G))| = d(\frac{p_i^{n_i} p_j^{n_j}}{p_i p_j}) - 1 = n_i n_j$ where $i \neq j$.
- $V_{p_1 p_2 p_3}(\Gamma(G))$ is the set of all proper subgroups H of G such that $\pi(|H|) = \{p_1, p_2, p_3\}$. So, we have $|V_{p_1 p_2 p_3}(\Gamma(G))| = d(\frac{n}{p_1 p_2 p_3}) - 1 = n_1 n_2 n_3 - 1$.

By Proposition 2.2, the above sets forms a partition for $V(\Gamma(G))$. By Corollary 2.3, in $\Gamma(G)$, each element of the clique $V_{p_i}(\Gamma(G))$ does not join to any element of the clique $V_{p_j}(\Gamma(G)) \cup V_{p_j p_k}(\Gamma(G))$ for all distinct i, j, k and moreover all elements of $V_{p_i}(\Gamma(G))$ for $i = 1, 2, 3$, join to all elements of the clique $V_{p_1 p_2 p_3}(\Gamma(G)) \cup V_{p_i p_j}(\Gamma(G))$, where $1 \leq i \neq j \leq 3$. Since $|G|$ has three prime divisors, the intersection of every two subgroups of G of orders with two distinct prime divisors, is non-trivial (by Corollary 2.3).

It follows that $V_{p_1 p_2}(\Gamma(G)) \cup V_{p_1 p_3}(\Gamma(G)) \cup V_{p_2 p_3}(\Gamma(G))$ is a cloque in $\Gamma(G)$. Now, we define W_i as follows for $1 \leq i \leq 4$:

$$W_1 = V_{p_1}(\Gamma(G)) \cup V_{p_1 p_2}(\Gamma(G)) \cup V_{p_1 p_3}(\Gamma(G)) \cup V_{p_1 p_2 p_3}(\Gamma(G)), \quad |W_1| = n_1 + n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_1 n_2 n_3 - 1$$

$$W_2 = V_{p_2}(\Gamma(G)) \cup V_{p_1 p_2}(\Gamma(G)) \cup V_{p_2 p_3}(\Gamma(G)) \cup V_{p_1 p_2 p_3}(\Gamma(G)), \quad |W_2| = n_2 + n_1 n_2 + n_2 n_3 + n_1 n_2 n_3 - 1$$

$$W_3 = V_{p_3}(\Gamma(G)) \cup V_{p_1 p_3}(\Gamma(G)) \cup V_{p_2 p_3}(\Gamma(G)) \cup V_{p_1 p_2 p_3}(\Gamma(G)), \quad |W_3| = n_3 + n_1 n_3 + n_2 n_3 + n_1 n_2 n_3 - 1$$

$$W_4 = V_{p_1 p_2}(\Gamma(G)) \cup V_{p_1 p_3}(\Gamma(G)) \cup V_{p_2 p_3}(\Gamma(G)) \cup V_{p_1 p_2 p_3}(\Gamma(G)), \quad |W_4| = n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_2 n_3 + n_1 n_2 n_3 - 1.$$

It is easy to see that W_1, W_2, W_3 and W_4 are the only maximal cliques in $\Gamma(G)$. Therefore,

$$\omega(\Gamma(G)) = \max\{|W_1|, |W_2|, |W_3|, |W_4|\}.$$

Since $n_1 \geq n_2 \geq n_3$, we have $|W_1| \geq |W_2| \geq |W_3|$. Thus

$$\omega(\Gamma(G)) = \max\{|W_1|, |W_4|\} = \max\{n_1 + n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_1 n_2 n_3 - 1, n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_2 n_3 + n_1 n_2 n_3 - 1\},$$

this completes the proof. $\square$

Seyyed Majid Jafarian Amiri

Department of Mathematics, University of Zanjan, P. O. Box 45371-38791, Zanjan, Iran

Email: sm_jafarian@znu.ac.ir

Arezo Beheshtipour

Department of Mathematics, University of Zanjan, P. O. Box 45371-38791, Zanjan, Iran

Email: arezoo.b1010@yahoo.com

عدد خوشه گراف اشتراک گروه‌های دوری با حداکثر سه عامل اول در مرتبه

سید مجید جعفریان امیری*^{id} و آرزو بهشتی‌پور

چکیده. فرض کنیم G یک گروه متناهی نابدیهی باشد. گراف اشتراک $\Gamma(G)$ ، گرافی است که رأس‌هایش تمام زیرگروه‌های سره نابدیهی G هستند و در آن دو رأس متمایز H و K به هم وصل می‌شوند اگر $H \cap K \neq 1$. در این مقاله، عدد خوشه گراف اشتراک گروه‌های دوری‌ای تعیین می‌شود که در تجزیه مرتبه آنها به اعداد اول، حداکثر سه عامل اول موجود باشد.

۱. مقدمه

امروزه نظریه گراف کاربردهای زیادی در شاخه‌های مختلف ریاضیات پیدا کرده است، از جمله در نظریه گروه‌ها. مثلاً می‌توان به یک گروه، به روش‌های گوناگونی یک گراف نظیر کرد؛ برای جزئیات بیشتر [۷] و مراجع آن را ببینید. اولین بار در سال ۱۹۶۹ در [۸] گراف اشتراک گروه تعریف شد؛ این ایده از بوساک^۱ [۵] الهام گرفته شده بود که در آن گراف اشتراک نیم‌گروه‌ها مطالعه شده بود. در سراسر این مقاله، فرض می‌کنیم G یک گروه متناهی نابدیهی باشد. گراف اشتراک G ، گرافی ساده است که مجموعه رأس‌های آن همه زیرگروه‌های سره نابدیهی G هستند و دو رأس آن به شرطی به هم وصل می‌شوند که اشتراکشان نابدیهی باشد؛ این گراف را با $\Gamma(G)$ نشان می‌دهیم.

مطالعه گراف اشتراک برای گروه‌های آبلی متناهی توسط زلینکا^۲ در [۱۲] ادامه یافت. همچنین، طائری و احمدی^۳ [۱] گروه‌های با گراف اشتراک مسطح را مطرح و بررسی کردند. از جمله تحقیقات دیگر در این باره، مقاله اکبری و همکارانش^۴ [۲] است که در آن، برخی ویژگی‌های گراف اشتراک گروه‌های حل‌پذیر را به دست آوردند.

در سال ۲۰۱۰، شن^۵ [۱۱] ثابت کرد که گراف‌های اشتراک گروه‌های ساده ناآبلی، همبند هستند، همچنین او گروه‌های غیرساده‌ای که گراف اشتراک ناهمبند دارند را نیز مشخص کرد. او در همان مقاله این سؤال را مطرح کرد که آیا کران بالایی برای قطرهای گراف اشتراک گروه‌های ساده ناآبلی وجود دارد. در سال ۲۰۱۶ در [۹] به این سؤال پاسخ داده شد، در واقع ثابت شد که قطرهای گراف اشتراک چنین گروه‌هایی دارای کران بالای ۲۸ هستند.

عبارات و کلمات کلیدی: گروه متناهی، گروه دوری، گراف اشتراک، عدد خوشه

دبیرتخصصی رابط: سعید مقصودی

نوع مقاله: پژوهشی

* نویسنده مسئول

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۸/۰۲ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۸/۲۹ تاریخ انتشار آنلاین: ۱۴۰۲/۱۰/۱۰

ارجاع به مقاله: س. م. جعفریان امیری و آ. بهشتی‌پور، عدد خوشه گراف اشتراک گروه‌های دوری با حداکثر سه عامل اول در مرتبه، نشریه ریاضی و جامعه، ۸ شماره ۴ (۱۴۰۲) ۷۹-۷۱.

<http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.139575.1618>

¹Bosák ²Zelinka ³Ahmadi and Taeri ⁴Akbari et al ⁵Shen

اخیراً، نویسندگان در [۴] همه گروه‌های G را که گراف اشتراک آن‌ها دارای عدد خوشه حداکثر ۴ است مشخص کرده‌اند و همچنین محکی را برای حل‌پذیری گروه‌های متناهی توسط عدد خوشه گراف اشتراک ارائه داده‌اند. به عبارت دقیق‌تر ثابت شده است که اگر عدد خوشه گراف اشتراک گروه G کمتر از ۱۳ باشد، آنگاه G حل‌پذیر خواهد بود. توجه کنید که ۱۳، عدد خوشه گراف اشتراک گروه A_5 (گروه متناوب روی پنج حرف) است [۴]. ما همچنین در [۱۳]، عدد خوشه برخی گروه‌های آبدلی را به دست داده‌ایم. از جمله دیگر تحقیقات قابل ذکر در این رابطه، می‌توان به گراف اشتراک نیم‌گروه‌ها، مدول‌ها و حلقه‌ها با رأس‌های ایده‌آل، به ترتیب در [۵]، [۳] و [۶، ۱۰]، اشاره کرد.

۲. نتایج اصلی

با تعریف زیر این بخش را شروع می‌کنیم.

تعریف ۱.۲. زیرمجموعه X از رأس‌های گراف متناهی Γ ، یک خوشه نامیده می‌شود، اگر زیرگراف القا شده توسط X یک گراف کامل باشد. اندازه بیشترین تعداد رأس‌های یک خوشه در میان همه خوشه‌های گراف Γ ، را عدد خوشه نامیده و آن را با $\omega(\Gamma)$ نشان می‌دهیم. اگر گراف Γ ، تهی (بدون رأس) باشد، آنگاه تعریف می‌کنیم $\omega(\Gamma) = 0$ و اگر گراف Γ ، پوچ (با مجموعه رأس‌های ناتهی و بدون یال) باشد، آنگاه تعریف می‌کنیم $\omega(\Gamma) = 1$. یک خوشه در Γ را بیشین گوئیم هرگاه به‌طور سره مشمول در هیچ خوشه‌ای نباشد.

توجه کنید که بزرگترین عدد در میان اندازه همه خوشه‌های بیشین گراف $\Gamma(G)$ همان $\omega(\Gamma(G))$ می‌باشد. برای اثبات قضیه اصلی این مقاله، به حکم زیر نیاز داریم که اثبات آن در بیشتر کتاب‌های معتبر نظریه گروه یافت می‌شود.

گزاره ۲.۲. اگر $G = \langle g \rangle$ یک گروه دوری از مرتبه n باشد، آنگاه به ازای هر شمارنده s از n زیرگروه $\langle g^{\frac{n}{s}} \rangle = H$ ، یکتا زیرگروه از مرتبه s است.

از گزاره فوق، نتیجه زیر به دست می‌آید:

نتیجه ۳.۲. فرض کنید G گروه دوری متناهی باشد. اشتراک دو زیرگروه از G نابدهی است اگر و تنها اگر مرتبه‌های آنها نسبت به هم اول نباشند.

به ازای عدد طبیعی n ، گروه دوری از مرتبه n را با C_n نشان می‌دهیم، مجموعه تمام عوامل اول n را با $\pi(n)$. همچنین، $d(n)$ نشان دهنده تعداد شمارنده‌های n است. توجه شود که اگر p یک عدد اول و n مضربی از آن باشد، آنگاه تعداد شمارنده‌های n با مضرب p برابر $d(\frac{n}{p})$ است. اگر $V(\Gamma(G))$ مجموعه ی رأس‌های گراف اشتراک گروه G باشد، آنگاه بنابه گزاره ۲.۲، داریم $|V(\Gamma(C_n))| = d(n) - 2$.

حال نتایج اصلی مقاله را بیان و اثبات می‌کنیم. ابتدا عدد خوشه گراف اشتراک گروه دوری از مرتبه توانی از عدد اول را، معین می‌کنیم.

گزاره ۴.۲. هرگاه p عدد اول و m عدد طبیعی باشد، آنگاه $d(p^m) - 2 = m - 1 = \omega(\Gamma(C_{p^m}))$.

□

اثبات. حکم به راحتی از گزاره بالا به دست می‌آید.

در ادامه، فرض کنیم p_1, p_2 و p_3 اعداد اول متمایز بوده و n_1, n_2 و n_3 اعداد طبیعی باشند به طوری که $n_1 \geq n_2 \geq n_3$. در نتیجه زیر، عدد خوشه گراف اشتراک گروه $C_{p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3}}$ را به دست می‌آوریم. یادآوری می‌کنیم که $d(p_1^{n_1} p_2^{n_2}) = (n_1 + 1)(n_2 + 1)$.

گزاره ۵.۲. داریم $\omega(\Gamma(C_{p_1^{n_1} p_2^{n_2}})) = d(p_1^{n_1} p_2^{n_2}) - 2 - d(p_2^{n_2}) = n_1 n_2 + n_1 - 1$.

اثبات. فرض کنیم $G = C_{p_1^{n_1} p_2^{n_2}}$ و زیرمجموعه‌های زیر از $V(\Gamma(G))$ را، به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

• به ازای $1 \leq i \leq 2$ ، $V_{p_i}(\Gamma(G))$ ، مجموعه‌ی همه‌ی زیرگروه‌های نابديهی H از G است به طوری که $\pi(|H|) = \{p_i\}$.

• $V_{p_1 p_2}(\Gamma(G))$ مجموعه‌ی همه‌ی زیرگروه‌های سره H از G است به طوری که $\pi(|H|) = \{p_1, p_2\}$.

واضح است که خانواده $\{V_{p_1}(\Gamma(G)), V_{p_2}(\Gamma(G)), V_{p_1 p_2}(\Gamma(G))\}$ افزای برای $V(\Gamma(G))$ تشکیل می‌دهند. بنا به گزاره

۲.۲،

$$|V_{p_i}(\Gamma(G))| = d(p_i^{n_i}) - 1 = n_i$$

و

$$|V_{p_1 p_2}(\Gamma(G))| = d\left(\frac{n}{p_1 p_2}\right) - 1 = n_1 n_2 - 1.$$

بنا به نتیجه ۳.۲، در گراف $\Gamma(G)$ عناصر خوشه‌ی $V_{p_1}(\Gamma(G))$ به عناصر خوشه‌ی $V_{p_2}(G)$ وصل نمی‌شوند، همچنین همه عناصر هر کدام از خوشه‌های $V_{p_i}(\Gamma(G))$ برای $i = 1, 2$ ، به همه عناصر خوشه‌ی $V_{p_1 p_2}(G)$ وصل می‌شوند. بنابراین $V_{p_1}(\Gamma(G)) \cup V_{p_1 p_2}(\Gamma(G))$ و $V_{p_2}(\Gamma(G)) \cup V_{p_1 p_2}(\Gamma(G))$ تنها خوشه‌های بیشین گراف $\Gamma(G)$ هستند و چون $n_1 \geq n_2$ ، خوشه

$$V_{p_1}(\Gamma(G)) \cup V_{p_1 p_2}(\Gamma(G)),$$

□

دارای بیشترین عضو می‌باشد، و اثبات تمام است.

و اکنون آخرین قضیه اصلی را بیان می‌کنیم.

قضیه ۶.۲. فرض کنیم $G = C_n$ ، که در آن $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3}$.

(الف) اگر $n_1 \geq n_2 n_3$ ، آنگاه

$$\omega(\Gamma(G)) = d\left(\frac{n}{p_1}\right) - 1 = n_1 + n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_1 n_2 n_3 - 1.$$

(ب) اگر $n_1 \leq n_2 n_3$ ، آنگاه

$$\begin{aligned} \omega(\Gamma(G)) &= d\left(\frac{p_1^{n_1} p_2^{n_2}}{p_1 p_2}\right) + d\left(\frac{p_1^{n_1} p_3^{n_3}}{p_1 p_3}\right) + d\left(\frac{p_2^{n_2} p_3^{n_3}}{p_2 p_3}\right) + d\left(\frac{n}{p_1 p_2 p_3}\right) - 1 \\ &= n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_2 n_3 + n_1 n_2 n_3 - 1. \end{aligned}$$

اثبات. مشابه اثبات گزاره قبل، زیرمجموعه‌های زیر از مجموعه رئوس گراف $V(\Gamma(G))$ را، به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

• به ازای $1 \leq i \leq 3$ ، $V_{p_i}(\Gamma(G))$ مجموعه‌ی همه‌ی زیرگروه‌های نابديهی H از G است به طوری که $\pi(|H|) = \{p_i\}$.

مانند قضیه قبل داریم $|V_{p_i}(\Gamma(G))| = d(p_i^{n_i}) - 1 = n_i$.

• $V_{p_i p_j}(\Gamma(G))$ مجموعه‌ی همه‌ی زیرگروه‌های H از G است به طوری که $\pi(|H|) = \{p_i, p_j\}$ برای $1 \leq i < j \leq 3$.

پس $|V_{p_i p_j}(\Gamma(G))| = d\left(\frac{p_i^{n_i} p_j^{n_j}}{p_i p_j}\right) = n_i n_j$ که در آن $i \neq j$.

• $V_{p_1 p_2 p_3}(\Gamma(G))$ مجموعه‌ی همه‌ی زیرگروه‌های سره H از G است به طوری که $\pi(|H|) = \{p_1, p_2, p_3\}$. پس داریم

$$|V_{p_1 p_2 p_3}(\Gamma(G))| = d\left(\frac{n}{p_1 p_2 p_3}\right) - 1 = n_1 n_2 n_3 - 1$$

بنا به گزاره ۲.۲، مجموعه‌های معرفی شده در بالا افزایی برای $V(\Gamma(G))$ تشکیل می‌دهند. بنا به نتیجه ۳.۲، در گراف $\Gamma(G)$ به ازای هر i, j, k متمایز، عناصر خوشه $V_{p_i}(\Gamma(G))$ به عناصر خوشه $V_{p_j}(G) \cup V_{p_j p_k}(G)$ وصل نمی‌شوند؛ همچنین، همه‌ی عناصر هر کدام از خوشه‌های $V_{p_i}(\Gamma(G))$ برای $i = 1, 2, 3$ ، به همه‌ی عناصر خوشه $V_{p_1 p_2 p_3}(G) \cup V_{p_i p_j}(G)$ که در آن $i \neq j$ وصل می‌شوند. چون تعداد عوامل اول $|G|$ سه است، بنابراین اشتراک هر دو زیرگروه که مرتبه آنها دارای دو عامل اول متمایز باشد، نابديهی است (بنا به نتیجه ۳.۲). بنابراین $V_{p_1 p_2}(\Gamma(G)) \cup V_{p_1 p_3}(\Gamma(G)) \cup V_{p_2 p_3}(\Gamma(G))$ یک خوشه در $\Gamma(G)$ است. در نتیجه هر کدام از مجموعه‌های W_i در پایین یک خوشه بیشین می‌باشد:

$$W_1 = V_{p_1}(\Gamma(G)) \cup V_{p_1 p_2}(\Gamma(G)) \cup V_{p_1 p_3}(\Gamma(G)) \cup V_{p_1 p_2 p_3}(\Gamma(G)), \quad |W_1| = n_1 + n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_1 n_2 n_3 - 1$$

$$W_2 = V_{p_2}(\Gamma(G)) \cup V_{p_1 p_2}(\Gamma(G)) \cup V_{p_2 p_3}(\Gamma(G)) \cup V_{p_1 p_2 p_3}(\Gamma(G)), \quad |W_2| = n_2 + n_1 n_2 + n_2 n_3 + n_1 n_2 n_3 - 1$$

$$W_3 = V_{p_3}(\Gamma(G)) \cup V_{p_1 p_3}(\Gamma(G)) \cup V_{p_2 p_3}(\Gamma(G)) \cup V_{p_1 p_2 p_3}(\Gamma(G)), \quad |W_3| = n_3 + n_1 n_3 + n_2 n_3 + n_1 n_2 n_3 - 1$$

$$W_4 = V_{p_1 p_2}(\Gamma(G)) \cup V_{p_1 p_3}(\Gamma(G)) \cup V_{p_2 p_3}(\Gamma(G)) \cup V_{p_1 p_2 p_3}(\Gamma(G)), \quad |W_4| = n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_2 n_3 + n_1 n_2 n_3 - 1.$$

به راحتی می‌توان بررسی کرد که W_1, W_2, W_3 و W_4 ، تنها خوشه‌های بیشین در گراف اشتراک G هستند. بنابراین،

$$\omega(\Gamma(G)) = \max\{|W_1|, |W_2|, |W_3|, |W_4|\}.$$

از طرفی بنا به فرض داریم $n_1 \geq n_2 \geq n_3$ ، و در نتیجه $|W_1| \geq |W_2| \geq |W_3|$. بنابراین

$$\begin{aligned} \omega(\Gamma(G)) &= \max\{|W_1|, |W_4|\} \\ &= \max\{n_1 + n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_1 n_2 n_3 - 1, n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_2 n_3 + n_1 n_2 n_3 - 1\}, \end{aligned}$$

□

و اثبات کامل است.

مراجع

- [1] H. Ahmadi and B. Taeri, Planarity of the intersection graph of subgroups of a finite groups, *J. Algebra Appl.*, **15** no. 3 (2016) 19 pp.
- [2] S. Akbari, F. Heydari and M. Maghasedi, The intersection graph of a group, *J. Algebra Appl.*, **14** no. 5 (2015) 9 pp.
- [3] S. Akbari, H. A. Tavallayee and S. Khalashi Ghezalahmad, Intersection graph of submodules of a module, *J. Algebra Appl.*, **11** no. 1 (2012) 8 pp.
- [4] A. Beheshtipour and S. M. Jafarian Amiri, The clique number of the intersection graph of a finite group, *Bull. Iranian Math. Soc.*, **49** no. 5 (2023) 16 pp.

- [5] J. Bosák, *Theory of Graphs and its Applications*, (Proc. Sympos. Smolenice, 1963), Publ. House Czech. Acad. Sci., Prague, 1964 119–125.
 - [6] I. Chakrabarty, S. Ghosh, T. K. Mukherjee and M. K. Sen, Intersection graphs of ideals of rings, *Discrete Math.*, **309** no. 17 (2009) 5381–5392.
 - [7] P. J. Cameron, Graphs defined on groups, *Int. J. Group Theory*, **11** no. 2 (2022) 53–107.
 - [8] B. Csákány and G. Pollák, The graph of subgroups of a finite group, (Russian) *Czechoslovak Math. J.*, **19** (1969) 241–247.
 - [9] X. Ma, On the diameter of the intersection graph of a finite simple group, *Czechoslovak Math. J.*, **66** no. 2 (2016) 365–370.
 - [10] F. Moh'd, M. Ahmed, Simple-intersection graphs of rings, *AIMS Math.*, **8** no. 1 (2023) 1040–1054.
 - [11] R. Shen, Intersection graphs of subgroups of finite groups, *Czechoslovak Math. J.*, **60** no. 4 (2010) 945–950.
 - [12] B. Zelinka, Intersection graphs of finite abelian groups, *Czechoslovak Math. J.*, **25** (1975) 171–174.
- [۱۳] آ. بهشتی‌پور و م. جعفریان امیری، عدد خوشه گراف اشتراک گروه‌های آبلی از مرتبه pqr ، ۵۴مین کنفرانس ریاضی ایران-زنجان، (۱۴۰۲) ۱۸۲–۱۸۵.

سید مجید جعفریان امیری

گروه ریاضی، دانشگاه زنجان، زنجان، ایران

jafarian@znu.ac.ir-sm

سید مجید جعفریان امیری متولد خرداد ۱۳۵۶ در شهرستان بابل است. وی در سال ۱۳۷۴ وارد مقطع کارشناسی رشته ریاضی محض دانشگاه صنعتی اصفهان، در سال ۱۳۷۸ وارد مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض دانشگاه اصفهان و در سال ۱۳۸۰ وارد مقطع دکتری شد و در حال حاضر هیات علمی دانشگاه زنجان می‌باشد.



آرزو بهشتی‌پور

گروه ریاضی، دانشگاه زنجان، زنجان، ایران

arezoo.b1010@yahoo.com

آرزو بهشتی‌پور متولد دی ماه ۱۳۶۲ شهرستان گیلان غرب استان کرمانشاه است. وی در سال ۱۳۸۲ وارد مقطع کارشناسی رشته ریاضی کاربردی پیام نور اسلام آباد غرب استان کرمانشاه شد و در سال ۱۳۸۹ وارد مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض-جبر دانشگاه اصفهان شد.

