http://math-sci.ui.ac.ir

Journal of Mathematics and Society
ISSN (print): 2345-6493, ISSN (on-line): 2345-6507
Vol. 8 No. 4 (2023), pp. 23-36.

http://www.ui.ac.ir

ON THE MELNIKOV FUNCTION

MAJID KARIMI AMALEH

Abstract. In this article, we introduce one of the most important topics in the subject of dynamical systems, namely the Melnikov function, in simple language. Melnikov function is one of the tools that can express the effect of the small perturbation on the homoclinic orbits. This issue is also related to breaking a homoclinic orbit under the effect of some small perturbations. When a small perturbation occurs in a dynamical system, some dynamical behaviors of the system may change. Here, we try to explain how to compute the formula of this function fluently. Therefore, in the first part, we will introduce some preliminary concepts and properties, and then in the second part, we will describe the construction of the Melnikov function. Finally, by stating the results of the fundamental matrix solutions and then using them, we will construct the Melnikov function near a homoclinic or hetroclinic orbit.

1. Introduction

One of the fundamental issues that have recently attracted the attention of researchers in the field of theoretical research is the issue of dynamical systems. The phenomenon of touching stable and unstable manifolds is an example of behavior in a dynamical system that results in the existence of special solutions. If the stable and unstable curves of an equilibrium point touch each other, then the solution is homoclinic, and if the stable curves of one equilibrium point intersect with the unstable curve of another equilibrium point, then we will have a heteroclinic solution. Investigating the existence of such solutions for a specific dynamical system has always been one of the important issues, and

Keywords: Melnikov function; fundamental matrix of solution; differential equations.

Communicated by Saeid Maghsoudi.

Article Type: Promotional Paper.

Received: 08/06/2023, Accepted: 19/11/2023, Published Online: 13-12-2023.

Cite this article: M. Karimi Amaleh, On the Melnikov function, *Journal of Mathematics and Society*, **8** no. 4 (2023) 23–36.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.137973.1584 .

therefore many people have done good research in this field [8, 4, 3]. In addition, many researchers have tried to solve certain cases of Hilbert's 16th problem using the Melnikov function [2, 5, 6]. The subject of this article is related to the breaking of a homoclinic orbit. When a perturbation occurs in a dynamic system, some dynamical behaviors of the system may change, say, homoclinic orbit may break in the phase space. One of the tools that, can express the effect of small perturbations on the homoclinic orbit, is the Melnikov function, which in this article we try to explain how to make it fluently.

In the next section, we first give some basic definitions, and introduce some preliminary concepts, and then, we will describe the construction of the Melnikov function.

2. Main Results

We consider the differential equation $\dot{x} = f(x, \mu)$, where $x \in \mathbb{R}^2$, $\mu \in \mathbb{R}$ and f is C^2. Suppose there are two hyperbolic saddles $p_-(\mu)$ and $p_+(\mu)$ and that for $\mu = 0$ there is a solution of this equation in the form of $x_*(t)$ such that

$$\lim_{t \to -\infty} x_*(t) = p_-(0), \ \lim_{t \to +\infty} x_*(t) = p_+(0).$$

Our goal is to check that when μ changes, how this connection (that is, the saddle connection between $p_-(t)$ and $p_+(t)$) is broken.

We put $x_*(0) = x_0$. The velocity vector $x_*(t)$ at $t = 0$ is:

$$\dot{x}_*(0) = f(x_0, 0) = (f_1(x_0, 0), f_2(x_0, 0)).$$

If we put

$$u_0 = \frac{1}{\|f(x_0, 0)\|^2}(-f_2(x_0, 0), f_1(x_0, 0)),$$

then obviously, the vector u_0 is perpendicular to $f(x_0, 0)$. We consider a line segment Σ, passing through x_0 and in the direction of u_0. Therefore, Σ with the formula $x = x_0 + \xi u_0$ where $|\xi| < \alpha$ for some $\alpha > 0$. Suppose $x_-(t, \mu)$ is a solution of $\dot{x} = f(x, \mu)$ such that

$$(1)\ x_-(0, \mu) \in \Sigma,$$

$$(2)\ \lim_{t \to -\infty} x_-(t, \mu) = p_-(\mu),$$

$$(3)\ x_-(t, 0) = x_*(t).$$

This answer is on the unstable manifold $p_-(\mu)$. Similarly, suppose that $x_+(t, \mu)$ is a solution of $\dot{x} = f(x, \mu)$ such that

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.137973.1584

$$(1)\ x_+(0,\mu) \in \Sigma,$$

$$(2)\ \lim_{t\to+\infty} x_+(t,\mu) = p_+(\mu),$$

$$(3)\ x_+(t,0) = x_*(t).$$

This solution is also placed inside the stable manifold $p_+(\mu)$ (pay attention to the Figures 1 and 2).

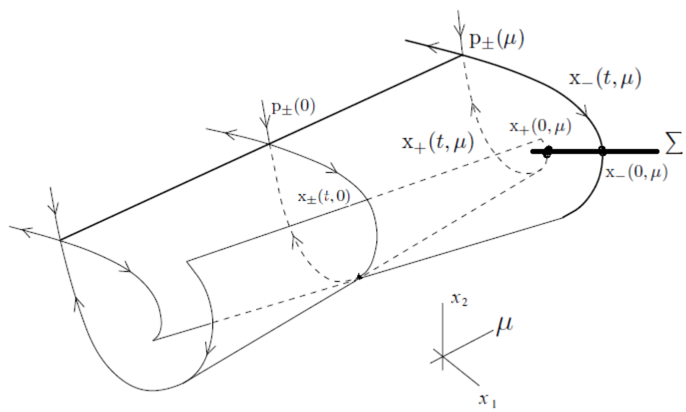


FIGURE 1. The conditions of the problem for the case where two hyperbolic saddles coincide, that is, $p_+ = p_-$

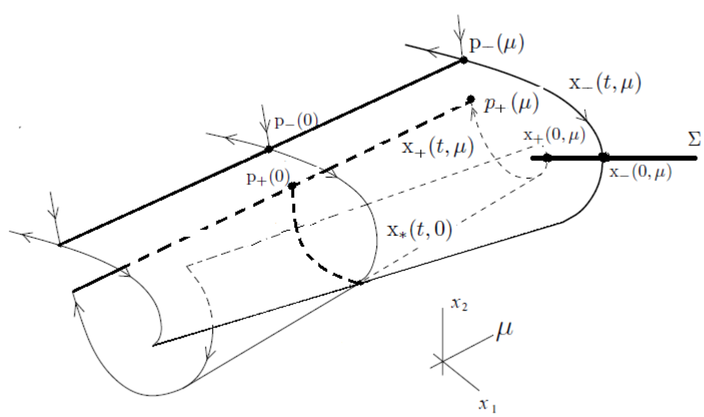


FIGURE 2. The conditions of the problem for the case where two hyperbolic saddles do not coincide, that is, $p_+ \neq p_-$

We define the separation function as follows:

$$s(\mu) = \xi_-(\mu) - \xi_+(\mu).$$

We put $\psi_0 = (-f_2(x_0,0), f_1(x_0,0))$, then $\dot{x}_*(t) = (\dot{x}_{*1}(t), \dot{x}_{*2}(t))$ is a solution of the equation $\dot{v}(t) = A(t)v$ and so,

$$\psi(t) = exp\left(-\int_0^t div f(x_*(s),0)ds\right)(-\dot{x}_{*2}(t), \dot{x}_{*1}(t)),$$

is a solution of the adjoint equation $\dot{w} = -wA(t)$, with the initial condition

$$\psi(0) = (-\dot{x}_{*2}(0), \dot{x}_{*1}(0)) = (-f_2(x_0,0), f_1(x_0,0)) = \psi_0.$$

Since $\psi_0 u_0 = 1$, it follows that,

$$\frac{d\xi_\pm}{d\mu}(0) = \psi_0 \frac{d\xi_\pm}{d\mu}(0)u_0 = \psi_0 \frac{\partial x_\pm}{\partial \mu}(0,0).$$

Also $\frac{\partial x_\pm}{\partial \mu}(t,0)$ is a solution of the following equation:

$$\dot{v} = D_x f(x_*(t),0)v + \frac{\partial f}{\partial \mu}(x_*(t),0). \tag{2.1}$$

Assume that the state transition matrix of the homogeneous linear system

$$\dot{v} = D_x f(x_*(t),0)v,$$

is $\phi(t,s)$. Now, according to the parameter change formula, we have

$$\frac{\partial x_+}{\partial \mu}(0,0) = \phi(0,T)\frac{\partial x_+}{\partial \mu}(T,0) - \int_0^T \phi(0,s)\frac{\partial f}{\partial \mu}(x_*(s)ds,0),$$

and

$$\frac{\partial x_-}{\partial \mu}(0,0) = \phi(0,-T)\frac{\partial x_-}{\partial \mu}(-T,0) - \int_{-T}^0 \phi(0,s)\frac{\partial f}{\partial \mu}(x_*(s),0)ds.$$

So

$$\begin{aligned}
&\frac{d\xi_-}{d\mu}(0) = \psi_0 \frac{\partial x_-}{\partial \mu}(0,0) \\
&= \psi(0)(\phi(0,-T)\frac{\partial x_-}{\partial \mu}(-T,0) + \int_{-T}^0 \phi(0,s)\frac{\partial f}{\partial \mu}(x_*(s),0)ds) \\
&= \psi(-T)\frac{\partial x_-}{\partial \mu}(-T,0) + \int_{-T}^0 \psi(s)\frac{\partial f}{\partial \mu}(x_*(s),0)ds.
\end{aligned}$$

Now, if $t \to \infty$, we obtain

$$\lim_{T\to+\infty} \psi(-T)\frac{\partial x_-}{\partial \mu}(-T,0) = 0.$$

So

$$\frac{d\xi_-}{d\mu}(0) = \int_{-\infty}^0 \psi(s)\frac{\partial f}{\partial \mu}(x_*(s),0)ds.$$

Similarly, we get

$$\frac{d\xi_+}{d\mu}(0) = \int_0^{+\infty} \psi(s)\frac{\partial f}{\partial \mu}(x_*(s),0)ds,$$

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.137973.1584

and so

$$s'(0) = \xi'_-(0) - \xi'_+(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(s) \frac{\partial f}{\partial \mu}(x_*(s), 0).ds$$

The recent integral is called the Melnikov integral if the function f is dependent on t, that is, the right side of the differential equation is $f(x, \mu, t)$, then the value of the Melnikov integral will also depend on t.

3. Conclusions

This article presents a unique perspective on constructing the Melnikov integral, different from what is typically found in textbooks. The problem's assumptions are presented in a way that accounts for both homoclinic and heteroclinic states. By following the method outlined in the article, interested readers can calculate Melnikov integral formula in the time-dependent mode, by considering the time-dependent perturbation on the system.

References

[1] C. Chicone, *Ordinary differential equations with applications*, Second edition, Texts in Applied Mathematics, **34**, Springer, New York, 2006.

[2] J. Gruendler, Homoclinic solutions for autonomous ordinary differential equations with nonautonomous perturbations, *J. Differential Equations*, **122** no. 1 (1995) 1–26.

[3] M. Han, Z. Wang and H. Zang, Limit cycles by Hopf and homoclinic bifurcations for near-Hamiltonian systems, *Chinese J. Contemp. Math*, **28** no. 4 (2007) 423–434.

[4] M. Han, J. Yang, A. Tarta and Y. Gao, Limit cycles near homoclinic and heteroclinic loops, *J. Dynam. Differential Equations*, **20** no. 4 (2008) 923–944.

[5] R. Johnson, X. B. Pan and Y. F. Yi, The Melnikov method and elliptic equations with critical exponent, *Indiana Univ. Math. J.*, **43** (1994) 1045–1077

[6] P. Kuku¡cka, Melnikov method for discontinuous planar systems, *Nonlin. Anal.*, **66** (2007) 2698–2719.

[7] L. Perko, *Differential equations and dynamical systems*, Springer-Verlag, New York, 2012.

[8] J. Yang and M. Han, Limit cycle bifurcations of some Liénard systems with a cuspidal loop and a homoclinic loop, *Chaos Solitons Fractals*, **44** (2011) 269–289.

Majid Karimi Amaleh

Department of Mathematics, University of Hormozgan Bandar Abbas, Iran

Email: karimi@hormozgan.ac.ir

ریاضی و جامعه
شاپا (چاپی): ۲۳۴۵-۶۴۹۳، شاپا(الکترونیکی): ۲۳۴۵-۶۵۰۷
جلد ۸، شماره ۴ (۱۴۰۲)، صص. ۲۳-۳۶.

http://math-sci.ui.ac.ir
http://www.ui.ac.ir

مروری بر تابع ملنیکُف

مجید کریمی عمله

چکیده. در این مقاله سعی شده است با زبانی ساده، یکی از مهمترین موضوعات در مبحث سامانه‌های پویا (سیستم‌های دینامیکی)، یعنی تابع ملنیکُف، را معرفی نماییم. تابع ملنیکُف یکی از ابزارهایی است که می‌تواند اثر اختلالات کوچک بر مدار هموکلینیک را، بیان نماید. در این‌جا سعی داریم نحوه ساختن این تابع را به‌بیانی روان شرح دهیم. در بخش اول یک سری مفاهیم مقدماتی را معرفی می‌نماییم و سپس در بخش دوم، چگونه ساختن تابع ملنیکُف را شرح خواهیم داد. سرانجام با استفاده از نتایجی پیرامون ماتریس اساسی جواب و سپس استفاده از آنها، تابع ملنیکُف را در نزدیکی یک مدار هموکلینیک خواهیم ساخت.

۱. مقدمه

یکی از موضوعات مهم و اساسی که به‌تازگی در حوزه تحقیقات نظری توجه پژوهشگران را به خود معطوف ساخته است، موضوع سامانه‌های پویا است. کاربردهای وسیعی که این مبحث در سایر علوم دارد بر تمامی دانشمندان آشکار شده است، و بنابراین هر پژوهشگری در حوزه علوم کاربردی که آشنایی اندکی با این موضوع داشته باشد سعی می‌کند تا تحقیقات خود را با زبان ریاضی و به‌ویژه به‌وسیله علم سامانه‌های پویا دقیق‌سازی نماید و اعتبار دوچندان ببخشد.

یکی از پدیده‌های مهم در میان رفتارهای یک سامانه‌ی پویا، مماس شدن خمینه‌های پایدار و ناپایدار بر هم می‌باشد که نتیجه آن وجود یک سری جواب‌های خاص در سامانه می‌باشد. اگر خمینه‌های پایدار و ناپایدار یک نقطه تعادل بر هم مماس شوند، آنگاه جواب هموکلینیک داریم، و اگر خمینه‌های پایدار یک نقطه تعادل با خمینه ناپایدار نقطه تعادل دیگری بر هم مماس شوند، آن‌گاه جواب هتروکلینیک خواهیم داشت. بررسی وجود این‌گونه جواب‌ها برای یک سامانه پویای خاص همواره یکی از موضوعات مهم بوده است و بنابراین افراد بسیاری در این زمینه تحقیقات خوبی انجام داده اند، مثلاً چند نمونه از این‌گونه تحقیقات را می‌توان در [۸، ۴، ۳] مشاهده نمود. به‌علاوه پژوهش‌های زیادی وجود دارند که در آن‌ها سعی شده تا با استفاده از تابع ملنیکُف، حالات خاصی از مسئله شانزدهم هیلبرت را حل نمایند، برای نمونه می‌توان به [۲، ۵، ۶] اشاره نمود. موضوعی را که در این مقاله به آن خواهیم پرداخت مربوط به شکسته‌شدن یک مدار هموکلینیک می‌باشد. وقتی یک اختلال در یک سامانه‌ی پویا ایجاد می‌شود، ممکن است برخی از رفتارهای پویای سامانه تغییر کنند؛ یکی از این تغییرات می‌تواند شکسته‌شدن مدار هموکلینیک موجود در فضای فاز باشد. نوع شکسته‌شدن نیز در این‌جا بسیار مهم است و برای آن

عبارات و کلمات کلیدی: تابع ملنیکُف؛ ماتریس اساسی جواب؛ معادلات دیفرانسیل.
دبیرتخصصی رابط: سعید مقصودی
نوع مقاله: ترویجی
تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۸/۲۸ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۳/۱۸ تاریخ انتشار آنلاین: ۱۴۰۲/۰۹/۲۲
ارجاع به مقاله: م. کریمی عمله، مروری بر تابع ملنیکُف، نشریه ریاضی و جامعه، ۸ شماره ۴ (۱۴۰۲) ۲۳-۳۶.
http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.137973.1584 .

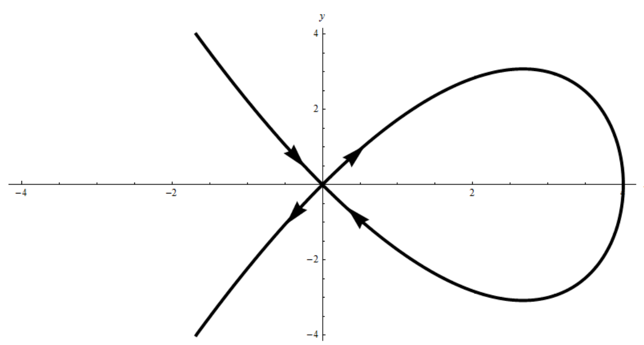
حالات مختلفی وجود دارند که از حوصله این بحث خارج است. یکی از ابزارهایی که می‌تواند اثر اختلالات کوچک را بر مدار هموکلینیک برای ما بیان نماید، تابع ملنیکُف است که در این نوشتار سعی داریم نحوه ساختن آن‌را به‌بیانی روان شرح دهیم. برای آنکه بحث خود را راحت‌تر ادامه دهیم، لازم است تا خواننده را با یک سری از مفاهیم اولیه آشنا سازیم، بنابرین در بخش دوم، یک سری مفاهیم مقدماتی را معرفی می‌نماییم و سپس در بخش سوم، ساخت تابع ملنیکُف را شرح خواهیم داد.

۲. ابزارها و مفاهیم مورد نیاز

تعریف ۱.۲ (مدار هموکلینیک). فرض کنیم x_0 نقطه تعادل برای دستگاه $\dot{x} = f(x)$ باشد، که $x \in \mathbb{R}^n$ و $f \in C^1$، و φ جوابی از دستگاه با مدار Γ باشد به‌طوری‌که برای هر $x \in \Gamma$، داشته باشیم

$$\lim_{t\to\pm\infty} \varphi(t,x) = x,$$

آن‌گاه Γ را یک مدار هموکلینیک[1] می‌نامند.



شکل ۱. نمونه‌ای از یک مدار هموکلینیک

Figure 1: An example of a homoclinic orbit

تعریف ۲.۲ (ماتریس اساسی جواب [۱]). ماتریس اساسی جواب دستگاه خطی $\dot{x} = Ax$، یک ماتریس $n \times n$ معکوس‌پذیر می‌باشد که درایه‌های آن توابعی بر حسب t می‌باشند و، اگر آن را با $\phi(t)$ نمایش دهیم، در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند:

$$\forall t \in \mathbb{R} : \phi'(t) = A\phi(t).$$

معادله دیفرانسیل خطی $\dot{x} = A(t)x$ که در آن x یک بردار ستونی $n \times 1$ است و $A(t)$ یک ماتریس $n \times n$ است را در نظر می‌گیریم. معادله الحاقی نظیر به آن عبارت است از $\dot{y} = -yA(t)$، که y یک بردار سطری $1 \times n$ است.

گزاره ۳.۲. اگر $x(t)$ جواب معادله خطی و $y(t)$ جواب معادله الحاقی نظیر به آن باشد آن‌گاه $y(t)x(t)$ ثابت است.

اثبات.

$$\frac{d}{dt}y(t)x(t) = \dot{y}x(t) + y(t)\dot{x}(t) = -yA(t)x(t) + y(t)A(t)x(t) = 0.$$

□

[1] orbit Homoclnic

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.137973.1584

گزاره ۴.۲. اگر $\phi(t)$ ماتریس اساسی جواب معادله خطی باشد آن‌گاه، $\phi^{-1}(t)$ ماتریس اساسی جواب معادله الحاقی است.

اثبات.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}I = \frac{d}{dt}(\phi^{-1}(t)\phi(t)) = \frac{d}{dt}(\phi^{-1}(t))\phi(t) + \phi^{-1}(t)\frac{d}{dt}\phi(t) \\ &= \frac{d}{dt}\phi^{-1}(t)\phi(t) + \phi^{-1}(t)A(t)\phi(t) \Longrightarrow \frac{d}{dt}\phi^{-1}(t) = -\phi^{-1}(t)A(t). \end{aligned}$$

درنتیجه، $\phi^{-1}(t)$ ماتریس اساسی جواب برای معادله الحاقی است، و این حکم را ثابت می‌کند. $\square$

نتیجه ۵.۲. اگر $n = 2$ و

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$$

یک ماتریس اساسی جواب از دستگاه خطی $\dot{x} = A(t)x$ باشد، آن‌گاه ماتریس اساسی جواب دستگاه الحاقی $\dot{y} = -yA(t)$ برابر است با

$$\phi^{-1}(t) = \frac{1}{\det \phi(t)} \begin{pmatrix} d(t) & -b(t) \\ -c(t) & a(t) \end{pmatrix}.$$

گزاره ۶.۲ (فرمول تغییر پارامتر [7]). اگر $\Phi(t)$ ماتریس اساسی جواب دستگاه $\dot{x} = A(t)x$ باشد آن‌گاه جواب یکتای دستگاه خطی ناهمگن $\dot{x} = A(t)x + b(t)$، با شرط اولیه $x(0) = x_0$، برابر است با،

$$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)x_0 + \int_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)ds,$$

گزاره ۷.۲ (فرمول لیوویل [1]). فرض کنیم $\Phi(t)$ یک ماتریس جواب دستگاه خطی همگن $\dot{x} = A(t)x,\ x \in \mathbb{R}^n$، بر بازه $J \subset \mathbb{R}$ باشد. اگر $t_0 \in J$، آن‌گاه

$$\det \Phi(t) = \det \Phi(0) exp\left(\int_{t_0}^t tr A(s)ds\right).$$

نکته مهم در نتیجه بالا این است که برای $n = 2$، اگر یک جواب از معادله‌ی $\dot{x} = A(t)x$ را بدانیم، یعنی یک ستون از $\phi(t)$ و همچنین $\det \phi(t)$ را بدانیم که البته با فرمول لیوویل محاسبه می‌شود، آن‌گاه یک سطر از $\phi^{-1}(t)$ به‌عنوان یک جواب از معادله الحاقی $\dot{y} = -yA(t)$ شناخته می‌شود.

تعریف ۸.۲. اگر با دانستن $x(s)$، یعنی جواب در زمان s، جواب در زمان t را از فرمول $x(t) = \phi(t,s)x(s)$ بیابیم، آن‌گاه $\phi(t,s)$ را ماتریس انتقال مکان می‌نامیم. همچنین برای معادله الحاقی نیز ماتریس انتقال مکان به‌صورت $\psi(t,s)$ است که برای آن داریم، $y(t)\psi(t,s) = y(s)$.

گزاره ۹.۲. $\psi(t,s) = \phi(t,s)$.

اثبات. کافی است نشان دهیم $\psi(t,s)\phi(s,t) = I$. داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s}(\psi(t,s)\phi(s,t)) &= (\frac{\partial}{\partial s}\psi(t,s))\phi(s,t) + \psi(t,s)(\frac{\partial}{\partial s}\phi(s,t)) \\ &= -\psi(t,s)A(s)\phi(s,t) + \psi(t,s)A(s)\phi(s,t) = 0 \end{aligned}$$

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.137973.1584

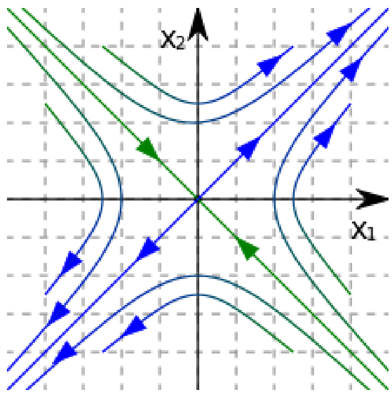
در نتیجه $\psi(t,s)\phi(s,t)$ باید ثابت باشد. از آن‌جائیکه برای هر t داریم $\psi(t,t)\phi(t,t)=I$ بنابراین $\psi(t,s)\phi(t,s)=I$ پس

$$\psi(t,s)=\phi(s,t)^{-1}=\phi(t,s).$$

□

۳. انتگرال ملنیکُف

تعریف ۱.۳ (زین هذلولوی [۷]). نقطه تعادل p از دستگاه دو بعدی $\dot{x}=f(x)$ را یک زین هذلولوی گویند، هرگاه ماتریس ژاکوبین متناظر با آن دارای یک مقدار ویژه حقیقی منفی و یک مقدار ویژه حقیقی مثبت باشد.



شکل ۲. نمونه یک زین هذلولوی

Figure 2: An example of a hyperbolic saddle

معادله دیفرانسیل $\dot{x}=f(x,\mu)$ را در نظر می‌گیریم که در آن $x\in\mathbb{R}^2$، $\mu\in\mathbb{R}$ و f حداقل C^2 است. فرض کنیم دو زین هذلولوی $p_-(\mu)$ و $p_+(\mu)$ موجود باشند. فرض کنیم برای $\mu=0$ جوابی از این معادله به‌صورت $x_*(t)$، با شرایط مطابق با شکل ۳، موجود باشد یعنی

$$\lim_{t\to-\infty}x_*(t)=p_-(0),\ \ \lim_{t\to+\infty}x_*(t)=p_+(0)$$

هدف ما بررسی این است که وقتی μ تغییر می‌کند این اتصال (یعنی ارتباط زینی بین $p_-(t)$ و $p_+(t)$) چگونه شکسته می‌شود.

قرار می‌دهیم $x_*(0)=x_0$. بردار سرعت $x_*(t)$ در $t=0$ عبارت است از

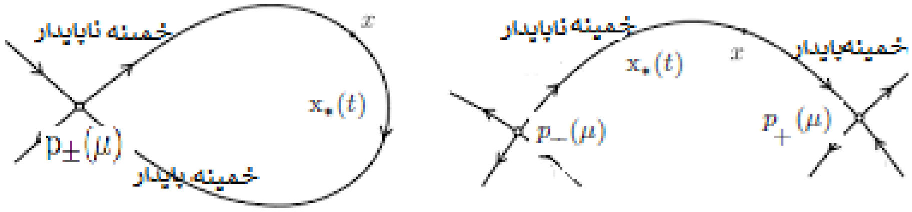
$$\dot{x}_*(0)=f(x_0,0)=(f_1(x_0,0),f_2(x_0,0)).$$

(توجه شود که $x_*(t)$ جواب خاص دستگاه $\dot{x}=f(x,0)$ بوده است.)

قرار می‌دهیم

$$u_0=\frac{1}{\|f(x_0,0)\|^2}(-f_2(x_0,0),f_1(x_0,0)),$$

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.137973.1584



شکل ۳. اتصال بین دو زین هذلولوی، سمت راست برای حالتی‌که $p_- \neq p_+$ و سمت چپ برای حالتی‌که $p_- = p_+$

Figure 3: Connection between two hyperbolic saddles, the right side for the case where $p_- \neq p_+$ and the left side for the case where $p_- = p_+$

بدیهی است که بردار $u_\circ$ بر $f(x_\circ, \circ)$ عمود است. یک پاره‌خط Σ گذرنده از $x_\circ$ و در جهت $u_\circ$ را در نظر می‌گیریم. بنابراین، Σ با عبارت $x = x_\circ + \xi u_\circ$، که در آن $|\xi| < \alpha$ برای یک $\alpha > \circ$، نمایش داده می‌شود. (در این بند، بردارها را به‌صورت ستونی در نظر می‌گیریم). فرض کنیم $x_-(t,\mu)$ جوابی از $\dot{x} = f(x,\mu)$ باشد که برای آن

$$x_-(\circ,\mu) \in \Sigma \quad (۱)$$

$$\lim_{t\to-\infty} x_-(t,\mu) = p_-(\mu) \quad (۲)$$

$$x_-(t,\circ) = x_*(t) \quad (۳)$$

این جواب درون خمینه ناپایدار $p_-(\mu)$ قرار می‌گیرد. به‌طور متشابه فرض کنیم $x_+(t,\mu)$ جوابی از $\dot{x} = f(x,\mu)$ باشد که

$$x_+(\circ,\mu) \in \Sigma \quad (۱)$$

$$\lim_{t\to+\infty} x_+(t,\mu) = p_+(\mu) \quad (۲)$$

$$x_+(t,\circ) = x_*(t) \quad (۳)$$

این جواب نیز درون خمینه پایدار $p_+(\mu)$ قرار می‌گیرد (به شکل‌های ۴ و ۵ توجه کنید).

با توجه به فرض‌های بالا، داریم

$$x_-(\circ,\mu) = x_\circ + \xi_-(\mu)u_\circ, \ \ x_+(\circ,\mu) = x_\circ + \xi_+(\mu)u_\circ,$$

به‌طوری‌که

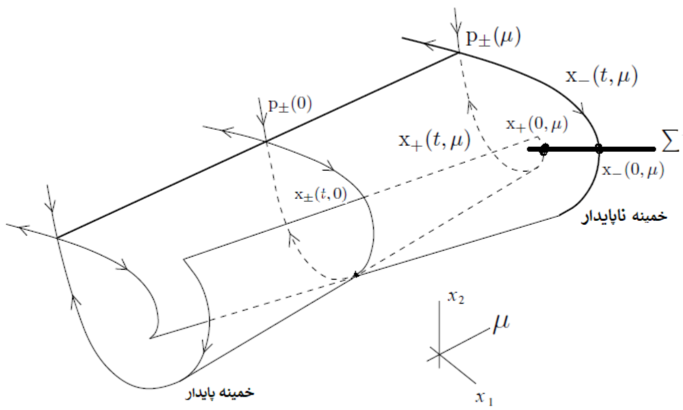
$$\xi_-(\circ) = \xi_+(\circ) = \circ.$$

تابع جداسازی را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$s(\mu) = \xi_-(\mu) - \xi_+(\mu).$$

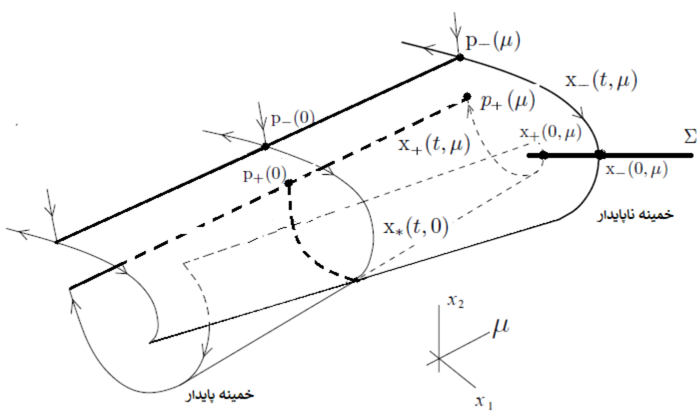
اگر $s(\mu) = \circ$ آن‌گاه جوابی از $\dot{x} = f(x,\mu)$ وجود دارد که از $p_-(\mu)$ به $p_+(\mu)$ می‌رود. به‌عبارت دیگر خمینه ناپایدار $p_-(\mu)$ و خمینه پایدار $p_+(\mu)$ یکدیگر را قطع می‌کنند. داریم $s(\circ) = \circ$، می‌خواهیم $s'(\circ)$ را محاسبه کنیم. قرار می‌دهیم $\psi_\circ = (-f_۲(x_\circ,\circ), f_۱(x_\circ,\circ))$، آنگاه

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.137973.1584



شکل ۴. شرایط مسأله برای حالتیکه دو زین هذلولوی بر هم منطبق باشند یعنی $p_+ = p_-$

Figure 4: The conditions of the problem for the case where two hyperbolic saddles coincide, that is, $p_+ = p_-$



شکل ۵. شرایط مسأله برای حالتیکه دو زین هذلولوی بر هم منطبق نباشند یعنی $p_+ \neq p_-$

Figure 5: The conditions of the problem for the case where two hyperbolic saddles do not coincide, that is, $p_+ \neq p_-$

گزاره ۲.۳. چون $\dot{x}_*(t) = (\dot{x}_{*۱}(t), \dot{x}_{*۲}(t))$ جوابی از معادله $\dot{v}(t) = A(t)v$ است، پس

$$\psi(t) = exp\left(-\int_{۰}^{t} div f(x_*(s), ۰)ds\right)(-\dot{x}_{*۲}(t), \dot{x}_{*۱}(t))$$

جوابی از معادله الحاقی نظیر $\dot{w} = -wA(t)$ می‌باشد که در شرط اولیه

$$\psi(۰) = (-\dot{x}_{*۲}(۰), \dot{x}_{*۱}(۰)) = (-f_۲(x_۰, ۰), f_۱(x_۰, ۰)) = \psi_۰,$$

صدق می‌کند.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.137973.1584

اثبات. یک جواب از دستگاه خطی همگن $\dot{v} = D_x f(x_*(t), \circ)v$، عبارت است از $\dot{x}_*(t) = (\dot{x}_{*1}(t), \dot{x}_{*2}(t))$. فرض کنیم ماتریس اساسی جواب‌ها به شکل

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_{*1}(t) & v_1(t) \\ \dot{x}_{*2}(t) & v_2(t) \end{pmatrix}$$

باشد که در $t = \circ$ با دترمینان یک است. طبق فرمول لیوویل داریم،

$$\det \phi(t) = \det \phi(\circ) exp\left(\int_\circ^t trD_x f(x_*(s), \circ)ds\right) = exp\int_\circ^t divf(x_*(s), \circ)ds.$$

بنابراین سطر دوم ماتریس وارون $\phi(t)^{-1}$ که همان $\psi(t)$ است، جوابی از معادله الحاقی خواهد بود. (به نتیجه ۵.۲ مراجعه شود.) □

با توجه به این‌که $\psi_\circ u_\circ = 1$, داریم:

$$\frac{d\xi_\pm}{d\mu}(\circ) = \psi_\circ \frac{d\xi_\pm}{d\mu}(\circ)u_\circ = \psi_\circ \frac{\partial x_\pm}{\partial \mu}(\circ, \circ).$$

هم‌چنین،

$$\frac{\partial^2 x_\pm}{\partial t \partial \mu}(t, \mu) = \frac{\partial^2 x_\pm}{\partial \mu \partial t}(t, \mu) = \frac{\partial}{\partial \mu} f(x_\pm(t, \mu), \mu) = D_x f(x_\pm(t, \mu), \mu)\frac{\partial x_\pm}{\partial \mu}(t, \mu) + \frac{\partial f}{\partial \mu}(x_\pm(t, \mu), \mu).$$

با قرار دادن $\mu = \circ$ در معادله بالا، داریم

$$\frac{\partial^2 x_\pm}{\partial t \partial \mu}(t, \circ) = D_x f(x_*(t), \circ)\frac{\partial x_\pm}{\partial \mu}(t, \circ) + \frac{\partial f}{\partial \mu}(x_*(t), \circ).$$

پس توابع $\frac{\partial x_\pm}{\partial \mu}(t, \circ)$، در معادله‌ی زیر صدق می‌کنند:

$$\dot{v} = D_x f(x_*(t), \circ)v + \frac{\partial f}{\partial \mu}(x_*(t), \circ). \tag{1}$$

فرض کنیم ماتریس انتقال مکان دستگاه خطی همگن $\dot{v} = D_x f(x_*(t), \circ)v$ به‌صورت $\phi(t, s)$ باشد. حال طبق فرمول تغییر پارامتر داریم،

$$\frac{\partial x_+}{\partial \mu}(\circ, \circ) = \phi(\circ, T)\frac{\partial x_+}{\partial \mu}(T, \circ) - \int_\circ^T \phi(\circ, s)\frac{\partial f}{\partial \mu}(x_*(s), \circ)ds,$$

و

$$\frac{\partial x_-}{\partial \mu}(\circ, \circ) = \phi(\circ, -T)\frac{\partial x_-}{\partial \mu}(-T, \circ) - \int_{-T}^\circ \phi(\circ, s)\frac{\partial f}{\partial \mu}(x_*(s), \circ)ds.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_-}{d\mu}(\circ) = \psi_\circ \frac{\partial x_-}{\partial \mu}(\circ, \circ) &= \psi(\circ)(\phi(\circ, -T)\frac{\partial x_-}{\partial \mu}(-T, \circ) + \int_{-T}^\circ \phi(\circ, s)\frac{\partial f}{\partial \mu}(x_*(s), \circ)ds) \\ &= \psi(-T)\frac{\partial x_-}{\partial \mu}(-T, \circ) + \int_{-T}^\circ \psi(s)\frac{\partial f}{\partial \mu}(x_*(s), \circ)ds. \end{aligned}$$

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.137973.1584

حال وقتی $t \to \infty$ خواهیم داشت،

$$\lim_{T \to +\infty} \psi(-T) \frac{\partial x_-}{\partial \mu}(-T, ۰) = ۰,$$

زیرا $\psi(t)$ وقتی $t \to \infty$، به این دلیل که $x_*(t)$ در بینهایت به یک نقطه هذلولوی نزدیک می‌شود، به‌طور نمایی به صفر میل می‌کند. بنابراین

$$\frac{d\xi_-}{d\mu}(۰) = \int_{-\infty}^{۰} \psi(s) \frac{\partial f}{\partial \mu}(x_*(s), ۰) ds.$$

به‌نحو مشابه

$$\frac{d\xi_+}{d\mu}(۰) = \int_{۰}^{+\infty} \psi(s) \frac{\partial f}{\partial \mu}(x_*(s), ۰) ds.$$

$$s'(۰) = \xi'_-(۰) - \xi'_+(۰) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(s) \frac{\partial f}{\partial \mu}(x_*(s), ۰) ds.$$

به انتگرال اخیر انتگرال ملنیکُف گویند که چنانچه تابع f وابسته به t باشد، یعنی طرف راست معادله دیفرانسیل به‌صورت $f(x, \mu, t)$ باشد، آنگاه مقدار انتگرال ملنیکُف نیز وابسته به t خواهد بود.

مثال ۳.۳. معادله نوسانگر دافینگ، که به شکل زیر می‌باشد، را در نظر می‌گیریم،

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x - x^{۳} + \mu y, \end{cases} \tag{۴}$$

نقطه $(۰, ۰)$، یک زین هذلولوی برای این معادله می‌باشد و همچنین مدار

$$x_*(t) = \left(\sqrt{۲} sech(t), -\sqrt{۲} sech(t) \tanh(t) \right),$$

یک اتصال هموکلینیک روی این نقطه است. مطابق نماد گذاری‌های انجام شده در بالا، جواب معادله الحاقی نظیرِ دستگاه خطی سازی شده در مدارد هموکلینیک، عبارت است از

$$\psi(s) = \sqrt{۲} \left(sech(s) \tanh^{۲}(s) - sech^{۳}(s), -sech(s) \tanh(s) \right).$$

از طرف دیگر، داریم $\frac{\partial f}{\partial \mu}(x_*(s), ۰) = \left(۰, -\sqrt{۲} sech(s) \tanh(s) \right)$. بنابراین برای محاسبه انتگرال ملنیکُف داریم،

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(-sech(s) \tanh(s) - ۲ sech^{۲}(s) \tanh^{۲}(s) \right) ds = \frac{۴}{۳}.$$

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.137973.1584

مراجع

[1] C. Chicone, *Ordinary differential equations with applications*, Second edition, Texts in Applied Mathematics, **34**, Springer, New York, 2006.

[2] J. Gruendler, Homoclinic solutions for autonomous ordinary differential equations with nonautonomous perturbations, *J. Differential Equations*, **122** no. 1 (1995) 1–26.

[3] M. Han, Z. Wang and H. Zang, Limit cycles by Hopf and homoclinic bifurcations for near-Hamiltonian systems, *Chinese J. Contemp. Math*, **28** no. 4 (2007) 423–434.

[4] M. Han, J. Yang, A. Tarta and Y. Gao, Limit cycles near homoclinic and heteroclinic loops, *J. Dynam. Differential Equations*, **20** no. 4 (2008) 923–944.

[5] R. Johnson, X. B. Pan and Y. F. Yi, The Melnikov method and elliptic equations with critical exponent, *Indiana Univ. Math. J.*, **43** (1994) 1045–1077

[6] P. Kuku¡cka, Melnikov method for discontinuous planar systems, *Nonlin. Anal.*, **66** (2007) 2698–2719.

[7] L. Perko, *Differential equations and dynamical systems*, Springer-Verlag, New York, 2012.

[8] J. Yang and M. Han, Limit cycle bifurcations of some Liénard systems with a cuspidal loop and a homoclinic loop, *Chaos Solitons Fractals*, **44** (2011) 269–289.

مجید کریمی عمله

گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه هرمزگان، هرمزگان، بندرعباس، ایران

karimi@hormozgan.ac.ir

مجید کریمی عمله، متولد مهرماه ۱۳۶۲ در روستای دشت مرغاب، واقع در استان فارس، است. وی در سال ۱۳۸۰ وارد مقطع کارشناسی رشته ریاضی محض دانشگاه شیراز شد، در سال ۱۳۸۴ مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض دانشگاه صنعتی شریف را آغاز نمود، و در سال ۱۳۸۶ وارد مقطع دکتری دانشگاه فردوسی مشهد شد. او هم‌اکنون در دانشگاه هرمزگان به عنوان عضو هیئت علمی گروه ریاضی مشغول فعالیت می‌باشد.