

## INVESTIGATING THE SKILLS OF JUNIOR HIGH SCHOOL STUDENTS IN POSING PROBLEMS IN THE FIELD OF PROPORTIONAL REASONING

HAMIDREZA BARKHORDARI<sup>✉</sup>, EBRAHIM REYHANI\*<sup>✉</sup> AND SAEED HAGHJOO<sup>✉</sup>

**ABSTRACT.** This study investigates the skills of junior high school students in posing problems in the field of proportional reasoning. This study, by considering purpose and implementation consecutively, is applied and descriptive (survey type) in nature. The sample of this study was 442 of Qazvin City's junior high school students, who were chosen based on randomized cluster sampling. The measurement tool was a questionnaire with five problem-posing tasks related to proportional reasoning with its content and face validity were examined by some of the mathematics professors and mathematics education professors. The Cronbach's alpha coefficient for the questionnaire was 0.83. Data analysis was done using SPSS26 software and descriptive and inferential statistics methods. The analysis of the results showed that the student's problem-posing skill was generally evaluated significantly at the level of "replacement" from the theoretical framework of the study. Also, the analysis of data showed that there is a significant difference between the performance of students in 7th, 8th, and 9th grades in problem-posing in the field of proportional reasoning, and with the increasing educational grade, their problem-posing skills will be increased. On the other hand, by studying the effect of students' gender on problem-posing performance, it was found that there was no significant difference between boy and girl students in problem-posing. Also, it was observed that the school type is not an effective factor in problem-posing in proportional reasoning problems and there is no significant difference between the performance of ordinary and gifted school students. The results of this study can be used in teacher Training and textbook authoring.

---

Keywords: Problem-posing, Proportional reasoning, Students, Junior high school.

Communicated by Saeid Maghsoudi.

Article Type: Research Paper.

\*Corresponding author.

Received: 18/05/2023 Accepted: 04/10/2023, Published Online: 03-12-2023.

Cite this article: H. Barkhordari, E. Reyhani and S. Haghjoo, Investigating the skills of junior high school students in posing problems in the field of proportional reasoning, *Journal of Mathematics and Society*, 8 no. 3 (2023) 81-117.

<http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.137726.1575> .

## 1. Introduction

Proportional reasoning is the cornerstone of high school mathematics and is known as the main goal of the elementary mathematics [1, 2]. Proportional reasoning including ratio, proportion, rate, and fraction are among the important concepts of school mathematics that their learning is necessary for students but it is difficult for teachers to teach [4, 5, 2]. Proportional reasoning is a special mathematical topic in mathematics education research because many subjects need knowledge and understanding in mathematics curriculum (e.g. scale, probability, percentage, rate, calculus, algebra, geometry) [16] and science (density, molarity, speed, force) [17, 13]. Problem-posing is one of the most important aspects of pure and applied mathematics and can be a part of the modeling cycle that is required in modeling real-world phenomena. Based on Leung [43], problem-posing is the new organization of the given problem. In this research, according to the part of the literature review (Vistro-Yu model and Leung model) and evaluation and modification of them, we observed that in the Vistro-Yu model, the incorrect problems were not been considered and in the Leung model, a suitable classifier was proposed for incorrect problem posing in this study, we have proposed a suitable classifier for incorrect classification. Therefore, by choosing the three levels of the five levels of the Leung model that were related to incorrect responses and applying some small changes in it and also levels of Vistro-Yu levels, a combination framework composed of 9 levels was formed and the ability of the junior high school students was studied. In this framework, after reviewing and analyzing project issues, first, the performance of the students is divided into two categories correct problem posing and incorrect problem posing. Incorrect problem posing is classified in three levels and the correct problem posing is classified in six levels. The reason for choosing this combination is that the frameworks used in it were complementary and supported each other, and by combining them, a complete classification was achieved that covers the wide range of students' problem-posing.

## 2. Main Results

In this research, five questions related to the concepts need to be provided to the students with different formats and include a specific goal. These five questions were selected as selection criteria and were selected for use in the study to cover all objectives of the study and the extracted data from them were adapted and adapted with the research framework. Therefore, the students' responses to test questions after careful examination and extraction of the results from each of the levels of the proportional problem-posing framework and then the data obtained, led the researchers to the secondary goals of this research, the effect of educational grades, gender, and school type on the performance of students in proportional reasoning. For this purpose, the test questions the target, and the answers provided by students to test questions were analyzed. In general, according to the results of the analysis of students' responses to test questions, the performance of the students in posing proportional

problems is fairly good. However, most of the students responded to test questions and posed a new problem by changing the variables, numbers, and numerical relationships of the problem and their performance was evaluated mainly at the level of substitution. In addition, a considerable portion of the answers were related to the questions that were posed incorrectly and different factors can have caused this matter such as lack of accuracy to problem assumptions, problem posing with rely on intuition and without reasoning, insufficient understanding of rate concept, incorrect comparison of fractions, misunderstanding in the concept of percent and how to use it and so on. On the other hand, a major part of the incorrect responses is related to the lack of understanding of the nature of the problem, because understanding the nature of a problem is the first step in the solution of the problem [37]. As it was observed a considerable portion of the students with collective strategy and vice versa. After careful examination and analysis, the responses of students to test questions were categorized according to their collective or multiplicative understanding and their proportional reasoning and their proportional reasoning and achieve their goal in each of the nine levels of the theoretical framework of the study. Students' correct responses were classified in levels of 4 to 9, (replacement level to reformatting level) and similarly incorrect responses at levels of 1 to 3, (proposition level to the impossible problem level). The results showed that most of the answers were in level 4 (replacement). In conclusion, according to the distribution of students' responses to levels of the research framework, it can be concluded that the performance of students in posing problems related to proportional reasoning is placed at the replacement level. The outcome of this study is that the percent of the answers to the research questions at the second level (irrelevant problem) can be attributed to the inability of students to distinguish between proportional and non-proportional problems and inappropriate use of proportional reasoning in collective and multiplicative situations, which according to [55, 5, 7] is one of the most important weaknesses of the junior high school students in dealing with proportional reasoning. The root of this issue is the lack of understanding of the existing multiplicative or multiplicative relations between the variables and insufficient understanding of concepts such as ratios, fractions, rates, and proportions. According to the results obtained from the study of the frequency of correct and false responses to research questions, it can be found that 86.1% were correct, indicating that most of the students were able to pose problems related to proportional reasoning. The results of the chi-square test and Spearman correlation coefficient at a 95% confidence level showed that there is a direct and significant relationship between the performance of junior high school students in posing problems related to proportional reasoning and their educational grade with increasing the educational grade of students their problem posing skills in proportional reasoning problems increases too. In general, it makes the development of understanding proportional reasoning abilities. It was also observed that there is no significant relationship between students gender and their performance in posing problems related to proportional reasoning. Despite observing the general differences in the

performance of students in gifted and general schools, this difference is not significant in terms of inferential statistics and chi-square correlation coefficients.

### 3. Conclusions

According to the results of the analysis of students' responses to the test questions, it is observed that students in response to test and problem posing displayed a variety of functional levels. Some of the students did not understand the concept of the problem, some posed a new problem by only changing the variables, names, numbers, etc., in the problem, and some other added a new variable. Also, it can be noted that the fundamental changes in the problem, contextualizing the problem and making the problem near to the real world, reversing and shifting of demand and data exchanged with each other. Among the causes of low success and low performance in problem posing in proportional reasoning situations, we can mention the lack of accuracy to the problem assumptions, insufficient understanding of rate concept, incorrect comparison of fractions, misunderstanding of the concept of percent and how to use it, etc. The results showed that more than half of the posed problems were in level five (replacement). Although a considerable portion of the responses was in level two (irrelevant problem). Also, educational grade and school type influence the performance of students in posing problems involving proportional reasoning, and at the 95% confidence level, there was a significant difference between students' problem-posing ability and their educational grades. But there was no significant difference between boy and girl students and also students in general and gifted schools.

#### **Hamidreza Barkhordari**

Faculty of science, Shahid Rajaei Teacher Training University Tehran, Iran

Email: [hamidrezabarkhordary@gmail.com](mailto:hamidrezabarkhordary@gmail.com)

#### **Ebrahim Reyhani**

Faculty of science, Shahid Rajaei Teacher Training University, Tehran, Iran

Email: [e\\_reyhani@sru.ac.ir](mailto:e_reyhani@sru.ac.ir)

#### **Saeid Haghjoo**

Faculty of science, Shahid Rajaei Teacher Training University, Tehran, Iran

Email: [s.haghjoo@sru.ac.ir](mailto:s.haghjoo@sru.ac.ir)

## بررسی مهارت‌های طرح مسئله دانش‌آموزان دوره اول متوسطه در زمینه استدلال تناسبی

حمیدرضا برخورداری<sup>ID</sup>، ابراهیم ریحانی<sup>ID\*</sup> و سعید حق‌جو<sup>ID</sup>

چکیده. پژوهش حاضر مهارت‌های طرح مسئله دانش‌آموزان دوره اول متوسطه در زمینه استدلال تناسبی را بررسی می‌کند. این پژوهش از نظر هدف، کاربردی است، و از نظر ماهیت و نوع مطالعه، توصیفی و پیمایشی است. در این پژوهش، ۴۴۲ نفر از دانش‌آموزان متوسطه اول شهرستان قزوین، پس از انتخاب به روش نمونه‌گیری خوشه‌ای تصادفی، مورد مطالعه قرار گرفتند. ابزار اندازه‌گیری، آزمونی شامل ۵ پرسش طرح مسئله مرتبط با استدلال تناسبی است، که روایی صوری و محتوایی پرسشنامه توسط تعدادی از اساتید ریاضی و آموزش ریاضی تایید شد و ضریب آلفای کرونباخ  $0.83$  به دست آمد. تجزیه و تحلیل داده‌ها، با نرم‌افزار SPSS۲۶ و روش‌های آمار توصیفی و استنباطی انجام شد. تحلیل نتایج حاکی از آن بود که مهارت طرح مسئله دانش‌آموزان به‌طور کلی در سطح «جایگزینی» از چارچوب نظری پژوهش، معنادار ارزیابی می‌شود. همچنین تجزیه و تحلیل داده‌ها نشان داد که بین عملکرد دانش‌آموزان پایه‌های هفتم، هشتم و نهم در طرح مسائل مرتبط با استدلال تناسبی تفاوت معناداری وجود دارد، و با افزایش پایه تحصیلی دانش‌آموزان شاهد افزایش مهارت طرح مسئله هستیم. از طرفی با بررسی تأثیر جنسیت دانش‌آموزان بر عملکرد طرح مسئله مشخص شد تفاوت عملکرد دانش‌آموزان دختر و پسر در طرح مسائل مرتبط با استدلال تناسبی، معنادار نبود. همچنین مشاهده گردید که نوع مدرسه، عامل تأثیرگذاری در طرح مسئله دانش‌آموزان در مسائل مرتبط با استدلال تناسبی محسوب نمی‌شود و بین عملکرد دانش‌آموزان مدارس عادی و تیزهوشان تفاوت معناداری وجود ندارد. نتایج این پژوهش می‌تواند در امر آموزش معلمان و تألیف کتب درسی مورد استفاده قرار گیرد.

### ۱. مقدمه

استدلال تناسبی<sup>۱</sup> سنگ بنای ریاضیات متوسطه و از اهداف والای ریاضیات ابتدایی شناخته می‌شود [۱، ۲]. استدلال تناسبی به عنوان یکی از مفاهیم اساسی ریاضی ابتدایی است که شامل استدلال به کمک نسبت‌ها، نرخ‌ها و بازنمایی‌های چندگانه می‌باشد و این مفاهیم به عنوان پایه‌ای برای ریاضیات دبیرستانی از اهمیت بسیاری برخوردار هستند [۳]. مفاهیم مربوط به استدلال تناسبی از جمله نسبت<sup>۲</sup>، تناسب<sup>۳</sup>، نرخ<sup>۴</sup>، کسر<sup>۵</sup>، از جمله مفاهیم مهم ریاضیات مدرسه‌ای هستند که یادگیری آن برای دانش‌آموزان ضروری است، اما آموزش آن برای معلمان دشوار [۲، ۴، ۵]. امروزه استدلال تناسبی نقش

عبارات و کلمات کلیدی: طرح مسئله، استدلال تناسبی، دانش‌آموزان، دوره اول متوسطه

دبیرتخصصی رابط: سعید مقصودی

نوع مقاله: پژوهشی

\* نویسنده مسئول مقاله

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۷/۲۵ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۹/۱۲ تاریخ انتشار آنلاین: ۱۴۰۲/۰۹/۱۲

ارجاع به مقاله: ح. برخورداری، ا. ریحانی و س. حق‌جو، بررسی مهارت‌های طرح مسئله دانش‌آموزان دوره اول متوسطه در زمینه استدلال تناسبی، نشریه ریاضی و جامعه، ۸ شماره ۳ (۱۴۰۲) ۸۱-۱۱۷.

<http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.137726.1575>

<sup>1</sup>proportional reasoning <sup>2</sup>ratio <sup>3</sup>proportion <sup>4</sup>rate <sup>5</sup>fraction

مهمی در توسعه ریاضیات دانش‌آموزان ایفا می‌کند و به عنوان یک مفهوم مهم در ریاضیات ابتدایی و ریاضیات پیشرفته و یک معیار برای سنجش شایستگی ریاضی دانش‌آموزان در نظر گرفته شده است [۶]. اهمیت و ضرورت موضوع استدلال تناسبی دانش‌آموزان در منابع پژوهشی متعددی مورد تأکید قرار گرفته است [۲، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳]. با این وجود امروزه بسیاری از دانش‌آموزان و حتی معلمان هنوز در درک و فهم مفاهیم مرتبط با استدلال تناسبی با مشکلاتی مواجه هستند [۷، ۸، ۹، ۲، ۱۰]. اگر این مشکلات مرتفع نشوند، موجب ایجاد بدفهمی دانش‌آموزان در درک مباحث سطوح بالاتر، همچون جبر که بر پایه استدلال تناسبی و درک روابط مستقیم است، خواهد شد [۱۴، ۱۵]. همچنین بنابر [۴، ص ۱۳]، شایسته است که برای رشد و موفقیت دانش‌آموزان مقطع متوسطه اول در ریاضیات مدرسه‌ای؛ مهارت استدلال تناسبی آن‌ها توسعه داده شود.

استدلال تناسبی یک مبحث ریاضی ویژه در تحقیقات آموزش ریاضی است؛ زیرا بسیاری از موضوعات در برنامه درسی ریاضی مدرسه‌ای (مانند مقیاس، احتمال، درصد، نرخ، مثلثات، هم‌ارزی، اندازه‌گیری، جبر، هندسه) [۱۶] و علوم (چگالی، مولاریته، سرعت و شتاب، نیرو) نیاز به دانش و درک نسبت و تناسب دارند [۱۳، ۱۷]. ردپای استدلال تناسبی علاوه بر ریاضی در علوم مختلف مانند شیمی، اقتصاد، حسابداری و حتی کارهای روزمره زندگی همچون آشپزی، نیز دیده می‌شود [۱۴]. هنگامی که جهان با پاندمی ویروس کووید ۱۹ روبرو گردید، نقش پررنگ نسبت و تناسب در آمار این بیماری و در مطالعات روز دنیا دیده شد؛ مثلاً نسبت تعداد افرادی که دوز یک واکسن را دریافت کرده‌اند یا احتمال ابتلا به ویروس کرونا در صورت استفاده نکردن از ماسک [۱۱].

در برنامه درسی آموزش ریاضی در ایران، دانش‌آموزان در کتاب‌های درسی ریاضی در پایه‌های مختلفی با مفاهیم مرتبط با تناسب آشنا می‌شوند؛ مثلاً در کتاب درسی ریاضی پایه ششم [۱۸]، بخشی با عنوان «کسر متعارفی- نسبت و تناسب» را مطالعه می‌کنند که پس از یادآوری مفهوم تناسب و کسرها از پایه‌های سوم تا ششم ابتدایی، به یادگیری مطالب جدید می‌پردازند و مسائل متنوع را در مورد نسبت و تناسب حل می‌کنند. همچنین در کتاب درسی ریاضی پایه هشتم [۱۹]، در بخشی به عنوان اعداد گویا، دوباره به معرفی کسرها و خواص آن‌ها اشاره شده است. در کتاب درسی ریاضی پایه نهم متوسطه [۲۰]، با معرفی مثلث‌های متشابه و تناسب بین اضلاع در آن‌ها، دانش‌آموزان با یکی از کاربردهای مهم تناسب آشنا می‌شوند و مسائل گوناگون را حل می‌کنند. تحقیقات زیادی نشان داده‌اند که توانایی استدلال تناسبی دانش‌آموزان به‌طور کلی موضوعی چالش برانگیز است [۴، ۱، ۱۲، ۵، ۲، ۲۱، ۲۲] و پژوهش‌های چندانی در ایران در مورد استدلال تناسبی انجام نشده است.

همچنین طرح مسئله توسط شاگردان و سپس ارزیابی آن‌ها یکی از مباحث مهم در آموزش ریاضی است [۲۳، ۲۴، ۲۵]. طرح مسئله یعنی تولید یک مسئله جدید یا فرمول‌بندی مجدد مسائل داده شده، که می‌تواند قبل از حل مسئله، حین حل مسئله و بعد از آن صورت پذیرد. با توجه به بررسی پژوهش‌های انجام شده و استفاده از تجارب آموزشی، همچنین با توجه به جایگاه مهم استدلال تناسبی در طول پایه‌های مختلف تحصیلی، پژوهش حاضر در پی آن است تا به بررسی توانایی طرح مسئله دانش‌آموزان در مسائل مرتبط با استدلال تناسبی و تأثیر عوامل پایه تحصیلی، جنسیت و نوع مدرسه بر آن بپردازد. مباحث پیرامون این موضوع به تفصیل در ادامه آورده شده است. در این پژوهش برآنیم تا پاسخی به سؤالات زیر بیابیم:

- ۱) عملکرد دانش‌آموزان متوسطه اول در طرح مسائل مرتبط با استدلال تناسبی چگونه است؟
- ۲) عوامل جنسیت، پایه تحصیلی و نوع مدرسه، چه تأثیری بر عملکرد دانش‌آموزان در طرح مسائل مرتبط با استدلال تناسبی دارند؟

## ۲. مبانی نظری و پیشینه پژوهش

مفهوم استدلال تناسبی قابلیت کاربرد گسترده‌ای در آموزش ریاضی دارد. با توجه به [۲۶]، استدلال تناسبی مفهومی عام است؛ زیرا بسیاری از مفاهیم مهم ریاضی مقطع ابتدایی با آن مرتبط هستند. این حقیقت که استدلال تناسبی یک عامل مهم در برقراری روابط بین مفاهیم است، آن را به عنوان یکی از عناصر اساسی که هسته برنامه درسی ریاضی را تشکیل می‌دهد، تبدیل می‌کند [۱]. در ادبیات پژوهشی، تعاریف مختلفی از مفاهیم مرتبط با موضوع استدلال تناسبی ارائه شده است که مختصراً به تعدادی از آن‌ها اشاره می‌شود.

نسبت: عبارت است از مقایسه بین دو یا چند مقدار یا کمیت [۲۷]. نسبت، ارتباط بین دو کمیت را بیان می‌کند و یک شاخص مقایسه‌ای است تا یک عدد [۲۸]. همچنین به عنوان مقایسه ضربی میان دو کمیت با واحدهای یکسان یا متفاوت تعریف می‌شود [۵]. نسبت‌ها به عنوان بازنمایی جزء به کل یا بازنمایی جزء به جزء تعریف می‌شوند [۳۰]. مفهوم نسبت اغلب همراه با مفهوم نرخ به کار می‌رود [۱۴]. زمانی که در یک نسبت، دو کمیت از دو نوع مختلف در نظر گرفته می‌شود، این نسبت، نرخ نامیده می‌شود [۳۰] علاوه بر این تناسب، یک گزاره ریاضی است که برابری دو نسبت را که با هم رابطه دارند، نشان می‌دهد ([۳۱]،  $a/b=c/d$  به عنوان مثال). از جمله دیگر مفاهیم مهم مرتبط با استدلال تناسبی می‌توان به کسرها اشاره نمود. کسرها از انتزاعی‌ترین، پرکاربردترین و با اهمیت‌ترین مفاهیم ریاضی هستند که دانش‌آموزان در دوره ابتدایی با آنها مواجه می‌شوند که در آن دوره باید درک مفهومی دانش‌آموزان از کسرها تقویت گردد. شورای ملی معلمان ریاضی در اصول و استانداردهای ریاضیات مدرسه‌ای<sup>۶</sup> [۲۶] معرفی مفهوم کسر را در پایه‌های اولیه (از پیش دبستان تا پایه دوم) توصیه کرده است. همچنین این شورا توصیه کرده است که در پایه‌های ۳ تا ۵، درک، بازنمایی و مهارت‌های عملیاتی کسرها هرچه بیشتر توسعه یابند و بر ایجاد درک مفهومی دانش‌آموزان از کسرها تمرکز شود [۳۲]. استدلال تناسبی «عبارت است از توانایی تشخیص یک رابطه ضربی بین دو کمیت و همچنین توانایی تعمیم همان رابطه به جفت کمیت‌های دیگر ([۷]، ص ۲۳۸-۲۳۹)». بنابراین، استدلال تناسبی به عنوان یک شکل خاص از استدلال ضربی در نظر گرفته می‌شود [۱]. به عقیده [۴]، ص ۱۲۲، استدلال تناسبی عبارت است از توانایی تشخیص، توضیح، تفکر، استنتاج، ترسیم، تبدیل، مقایسه، قضاوت، بازنمایی و نمادین‌سازی روابط با نسبت‌های مستقیم یا معکوس. وی استدلال تناسبی را به عنوان یک شکل از استدلال ریاضی تعریف می‌کند که شامل درک مشترک و مقایسه‌های چندگانه و توانایی ذخیره ذهنی و پردازش چندین قطعه از اطلاعات است. استدلال تناسبی به عنوان توانایی فرد برای درک، ایجاد و استفاده از رابطه بین دو فضای اندازه‌گیری مختلف یا درون فضاهای اندازه‌گیری تعریف شده است [۳۳، ۷]. در [۷]، استدلال تناسبی را معیاری برای درک مفاهیم ریاضی در برنامه درسی ریاضیات متوسطه می‌داند که زیربنایی برای مفاهیم پیچیده‌تر در دبیرستان محسوب می‌شود. به عقیده وی استدلال تناسبی یکی از بهترین شاخص‌هایی است که نشان می‌دهد یک دانش‌آموز به درک اعداد گویا و مفاهیم مرتبط دست یافته است. استدلال تناسبی از یک سو یک معیار درک فرد از ایده‌های ابتدایی ریاضی است، اما از سوی دیگر بنیانی برای مفاهیم پیچیده‌تر است. در [۲۶]، ص ۸۲ آمده است که مهارت استدلال تناسبی در دانش‌آموزان در پایه‌های پنجم تا هشتم رشد و توسعه می‌یابد و اهمیت استدلال تناسبی آنقدر زیاد است که می‌بایست هرچقدر زمان و تلاش لازم است برای اطمینان از توسعه دقیق آن به کار گرفته شود. بنابر [۱۷]، هم معلمان و هم دانش‌آموزان باید توانایی استدلال تناسبی را داشته باشند که عبارت است از شناخت و درک روابط نظری بین متغیرها و در موقعیت‌های تناسبی و استفاده از آن برای حل مسائل.

طرح مسئله یکی از جنبه‌های مهم در ریاضی محض و کاربردی به شمار می‌آید و می‌تواند بخشی جدایی‌ناپذیر از چرخه‌های مدل‌سازی باشد که در مدل‌سازی پدیده‌های دنیای واقعی مورد نیاز است. دانشمندان به طور مداوم مسائلی را مطرح می‌کنند که

<sup>۶</sup>principles and standards for school mathematics

حل آنها، به پیشبرد وضعیت فعلی دانش در زمینه‌های مختلف می‌انجامد [۳۴، ۳۵]. برای پیشرفت علم ریاضی به تصورات خلاقانه نیاز داریم که می‌توان با افزایش سؤالات جدید، امکانات جدید و همچنین نگاه‌کردن به یک سؤال قدیمی از زاویه جدید، به آن دست یافت [۳۶]. به همین دلیل طرح مسئله و حل مسئله به عنوان موضوعات اصلی در آموزش ریاضی شناسایی شده‌اند [۳۹، ۴۰]. چنان‌که در پیشنهاد‌های اخیر برای بهبود آموزش ریاضی، بیان شده است طرح مسئله را در فرایندهای یاددهی وارد کنیم و دانش‌آموزان علاوه بر اینکه مسائل از قبل فرموله‌بندی شده را حل می‌کنند، فعالیت‌هایی داشته باشند که خودشان مسائل را تولید کنند [۲۶، ۴۱، ۴۲].

طرح مسئله به‌طور متفاوتی در مطالعات تعریف شده است. لیون<sup>۷</sup> [۴۳] معتقد است که طرح مسئله سازماندهی جدید از مسئله داده شده است، شورای ملی معلمان ریاضی [۲۶] نیز طرح مسئله را به‌عنوان تولید مسائل جدید در زمینه ریاضی معرفی می‌کنند. در واقع، برای دانش‌آموزان طرح مسئله، تولید مهارت‌های فکری یا ذهنی است، که می‌توانند از شرایط معین و معلوم در مسئله برای صورت‌بندی مجدد آن استفاده کنند. محققانی مانند انگلیش<sup>۸</sup> [۴۱]، و کای<sup>۹</sup> [۴۴] بیان می‌کنند که طرح مسئله به‌عنوان تولید مسئله جدید و ساختاربندی دوباره از یک مسئله شناخته شده می‌باشد. طی بررسی انجام شده، از بین مطالعات صورت گرفته و مقالات و پژوهش‌های انجام شده در حوزه استدلال تناسبی به موضوع طرح مسئله درحیطه مسائل مرتبط با استدلال تناسبی کمتر توجه شده است و بیشتر پژوهش‌ها با تمرکز بر روی حل مسائل مرتبط با استدلال تناسبی و بررسی بدفهمی‌های آن‌ها صورت گرفته است [۴۵، ۴۶]. وقتی دانش‌آموزان مسائل خود را طرح می‌کنند، می‌توانند دانش ریاضی خود را افزایش دهند، تفکر انتقادی را تحریک کنند و مهارت‌های محاسباتی خود را با کشف حس کنجکاوی در مورد مفاهیم خاص ریاضیات، بهبود بخشند [۲۳]، همچنین طرح مسئله به‌عنوان ابزاری توسعه‌ای، برای تفکر انتقادی در نظر گرفته می‌شود [۴۰]؛ زیرا می‌تواند به دانش‌آموزان کمک کند تا آنچه را که می‌دانند تعمیم دهند تا تسلط ریاضیاتی در آن‌ها ایجاد شود و آن‌ها را درگیر تفکر مرتبه بالاتر کند [۴۷]. با برنامه‌ریزی شایسته و قوی برای فعالیت‌های طرح مسئله، فرصت‌هایی برای دانش‌آموزان ایجاد می‌شود تا دلیل بیاورند، خود را باور کنند، اعتماد به نفسشان بیشتر شود و اتصالات بین ریاضی و دنیای واقعی برقرار کنند [۴۸]. طی بررسی محققین، استدلال تناسبی دانش‌آموزان متوسطه اول می‌تواند حوزه‌ای جذاب برای سنجش مؤلفه‌هایی همچون خلاقیت، نوآوری و به‌طور کلی توانایی طرح مسئله دانش‌آموزان باشد. چنین پژوهشی توسط محققین در بین پژوهش‌های صورت گرفته در حوزه استدلال تناسبی، دیده نشده است. بنابراین بررسی توانایی طرح مسئله دانش‌آموزان در حل تناسبی، موضوعی جالب توجه است. بر اساس نتایج برخی از پژوهش‌های انجام شده در ارتباط با طرح مسئله؛ چارچوب‌ها و دسته‌بندی‌هایی برای مطالعه این موضوع ارائه شده است که در این بخش، برخی از مهم‌ترین آن‌ها به اختصار مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۱.۲. مدل ویسترو- یو. ویسترو یو<sup>۱۰</sup> [۴۹]، با ایده گرفتن از یک روش در ادبیات، به نام «نوآوری در یک داستان، روشی برای نوآوری در طرح مسئله» معرفی کرده است. هر دو روش (نوآوری در داستان و نوآوری در طرح مسئله) در جدول ۱ معرفی و مقایسه شده‌اند.

<sup>7</sup>Leung <sup>8</sup>English <sup>9</sup>Cai <sup>10</sup>Vistro-Yu

جدول ۱. مقایسه روش‌های نوآوری بین داستان‌گویی و تولید مسئله ریاضی [۴۹] نقل شده در [۳۷]

**Table 1:** Comparison of the innovation methods between the story and the production of mathematical problems [49] quoted in [37]

<sup>a</sup>Substitution

<sup>b</sup>Replacement

<sup>c</sup>Addition

<sup>d</sup>Alteration

<sup>e</sup>Modification

<sup>f</sup>Transformation

<sup>g</sup>Contextualizing

<sup>h</sup>Change of viewpoint

<sup>i</sup>Turning the problem around or reversing

<sup>j</sup>Recycling the plot

<sup>k</sup>Change of viewpoint

<sup>l</sup>Situational

| ویژگی مسئله                                                                                                          | نوآوری در مسائل ریاضی                                                                                                                         | نوآوری در داستان‌ها                                                                                                                         |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| مسئله یک مشق تمرینی خواهد بود.                                                                                       | جایگزینی <sup>b</sup> : طرح مسئله مشابه به وسیله تغییر کمیت‌ها، واحدها، شکل‌ها و...                                                           | جانشانی <sup>a</sup> : بازگویی همان داستان با ایجاد چند تغییر ساده مانند نام‌ها، اشیاء و مکان‌ها.                                           |
| مسئله توسعه می‌یابد و می‌تواند پیچیده‌تر شود.                                                                        | افزایش: طرح مسئله مشابه از طریق اضافه کردن داده یا محدودیت جدید و یا افزودن یک مانع.                                                          | افزایش <sup>c</sup> : بازگویی همان داستان اما با اضافه کردن توصیف، گفتگوها و یا حوادث بیشتر.                                                |
| مسئله می‌تواند کاملاً جدید باشد اما ممکن است برای حل نیازمند مسئله اصلی به عنوان یک سکوی پرش باشد.                   | جرح و تعدیل <sup>e</sup> : استفاده از همان داده‌ها اما با جرح و تعدیل کردن مسئله.                                                             | تغییر <sup>d</sup> : انجام تغییراتی که دارای بازتاب هستند به عنوان مثال: تغییر خصوصیات افراد، به روز کردن تنظیمات، تغییر دادن پایان داستان. |
| مسئله مرتب‌تر می‌شود اما اساساً مشابه همان مسئله اصلی است.                                                           | زمینه مدار کردن مسئله <sup>g</sup> : برای اینکه آن را بیشتر به دانش‌آموزان مرتبط سازد.                                                        | انتقال <sup>f</sup> : بازگویی داستان در یک ژانر (نوع) متفاوت.                                                                               |
| مسئله جالب‌تر و چالش برانگیزتر و کاملاً متفاوت می‌شود.                                                               | برگرداندن یا معکوس کردن مسئله <sup>i</sup> : طرح مسئله اصلی ولی با در نظر گرفتن هدف نهایی به عنوان داده و داده به عنوان هدف نهایی.            | تغییر دیدگاه <sup>h</sup> : بازگویی داستان از دید یک شخصیت متفاوت.                                                                          |
| مسئله جدید متفاوت با مسئله اصلی است اما برای فهم و حل آن به دانش مفهوم یا مهارتی که در مسئله اصلی لازم بود نیاز است. | صورت‌بندی مجدد <sup>k</sup> : طرح مسئله اصلی در یک نوع متفاوت (به عنوان مثال بیان یک مسئله اثبات کردنی به صورت یک مسئله موقعیتی) <sup>l</sup> | بازسازی طرح اصلی <sup>j</sup> : استفاده مجدد تنها از الگوی زیرساختی مسئله اصلی.                                                             |

۲.۲. مدل لیون. لیون در مطالعه‌ای به آموزش نحوه اجرای طرح مسئله ریاضی به معلمان، و نتایج اجرای آن در کلاس‌های ریاضی پرداخت [۴۳]. وی در بخشی از جلساتی که با معلمان داشت به عنوان یک معلم عمل می‌کرد و از معلمان

می‌خواست نقش دانش‌آموزان را بازی کنند، تا یک موقعیت واقعی را شبیه‌سازی و اجرا کنند. او جهت کدگذاری مسائل طرح شده توسط دانش‌آموزان، آنها را به پنج دسته تقسیم کرد:

- (۱) مسئله محسوب نمی‌شود؛
- (۲) مسئله ریاضی نیست؛
- (۳) اطلاعات کافی نیست؛
- (۴) اطلاعات کافی ولی حل آن غیر ممکن است؛
- (۵) اطلاعات داده شده کافی نیست؛
- (۶) اطلاعات کافی بوده و مسئله کامل است.

جدول ۲. نمونه طبقه‌بندی مسائل مرتبط با استدلال تناسبی طرح شده توسط دانش‌آموزان متوسطه اول در این پژوهش بر اساس مدل لیون

**Table 2:** The classification of problems related to the proportional reasoning designed by the junior high school students in this research is based on the Leong model

| مثال                                                                                                                                                                                               | کد و نوع پاسخ دانش آموز            |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------|
| دو ماشین در حال مسابقه هستند. سرعت دو ماشین با یکدیگر برابر است. سرعت اولی ۶۰ کیلو متر بر ساعت است.                                                                                                | (۱) مسئله محسوب نمی‌شود.           |
| کدام ماشین حرکت کرده است؟                                                                                                                                                                          | (۲) مسئله ریاضی نیست.              |
| دو ماشین در حال مسابقه هستند سرعت دو ماشین با یکدیگر برابر است. کدامیک زودتر به مقصد می‌رسد؟                                                                                                       | (۳) حل مسئله غیرممکن است.          |
| سرعت دو ماشین با یکدیگر برابر است. سرعت اولی ۶۰ کیلو متر بر ساعت است. ماشین دوم در دو ساعت چه مسافتی را طی می‌کند؟                                                                                 | (۴) اطلاعات داده شده کافی نیست.    |
| سرعت دو ماشین با یکدیگر برابر است. ماشین اول با سرعت ۶۰ کیلومتر بر ساعت است. مسیر را در ۲ ساعت طی میکند. اگر ماشین اول ۲۰ ثانیه زودتر حرکت کند ماشین دوم بعد از یک ساعت چه مسافتی را طی کرده است ؟ | (۵) اطلاعات کافی و مسئله کامل است. |

### ۳. روش پژوهش

پژوهش حاضر از نظر هدف، کاربردی است و از نظر ماهیت و نوع مطالعه از نوع توصیفی و پیمایشی است. برای سنجش میزان توانایی طرح مسئله دانش‌آموزان در این تحقیق از آزمونی شامل ۵ تکلیف، و بر اساس چارچوبی تلفیقی، استفاده شده است. زیرا این چارچوب، با کنار هم قرار گرفتن دو چارچوب مجزا و مرتبط با طرح مسئله می‌تواند حالات مختلف طرح مسئله دانش‌آموزان در مسائل مرتبط با استدلال تناسبی را مورد پوشش قرار دهد. سؤالات آزمون به نحوی انتخاب شده بودند که توانایی طرح مسئله دانش‌آموزان در مسائل مرتبط با استدلال تناسبی را، با توجه به چارچوب پژوهش، مورد سنجش قرار دهند. از دانش‌آموزان خواسته شده بود که با توجه به مسائل داده شده فرض کنند خودشان معلم ریاضی هستند و مسئله‌ای جدید و جذاب مربوط به آن را، برای امتحان ریاضی طرح کنند. پس از گردآوری و تهیه سؤالات اولیه آزمون، ۴۰ مسئله از انواع مسائل مرتبط با استدلال تناسبی و غیر تناسبی انتخاب شدند و با اصلاح و حذف تعدادی از سؤالات و جرح و تعدیل

آنها، ۲۰ سؤال برای اجرای آزمایشی در مرحله اول انتخاب شدند. بعد از اجرای آزمایشی بر روی نمونه اولیه و بررسی نتایج پژوهش بر روی این ۲۰ سؤال و تعیین ضریب سختی و ضریب تمیز، در نهایت ۵ مسئله پس از جرح و تعدیل نهایی به‌عنوان سؤالات پژوهش برگزیده شدند. جامعه آماری پژوهش مورد نظر، شامل کلیه دانش‌آموزان دختر و پسر مشغول به تحصیل در مقطع متوسطه اول در نواحی یک و دو شهرستان قزوین در سال تحصیلی ۱۳۹۹-۱۴۰۰ هستند. علت انتخاب هر سه پایه در مقطع متوسطه اول، بررسی تأثیر پایه تحصیلی بر توانایی طرح مسئله مرتبط با استدلال تناسبی بود. در این تحقیق از دو روش نمونه‌گیری در دسترس و نمونه‌گیری خوشه‌ای ساده استفاده شد. ابتدا از سه پایه تحصیلی هفتم، هشتم و نهم مجموعاً ۴۰ نفر در دو مدرسه که در دسترس محققین قرار داشتند انتخاب شدند و مطالعه مقدماتی بر روی آن‌ها انجام گرفت. هفت مدرسه مقطع متوسطه اول از انواع دخترانه و پسرانه، دولتی و تیزهوشان انتخاب گردیدند و از هر مدرسه یک کلاس به‌طور تصادفی انتخاب شد. در نهایت ۴۴۲ نفر از دانش‌آموزان جامعه آماری مورد نظر به روش نمونه‌گیری تصادفی خوشه‌ای برای اجرای آزمون و تحقیق انتخاب شدند. لازم به ذکر است که از این تعداد ۴۰۸ دانش‌آموز در مدارس عادی و ۳۴ دانش‌آموز در مدارس تیزهوشان مشغول به تحصیل بودند و به تفکیک جنسیت، ۲۶۳ پسر و ۱۷۹ دختر در پژوهش شرکت داشتند. از طرفی با وجود شیوع گسترده بیماری کووید ۱۹ و کاهش ارتباط فیزیکی محققین با دانش‌آموزان و نمونه آزمایشی در مراحل جمع‌آوری و تحلیل داده‌های مرتبط با پژوهش، تمامی فرآیندهای توزیع پرسش‌های پژوهش، جمع‌آوری پاسخ‌های دانش‌آموزان، دریافت بازخوردهای دانش‌آموزان، تحلیل نتایج و غیره، به‌صورت مجازی و در چارچوب نرم‌افزارها و شبکه‌های اجتماعی، که مهم‌ترین آن‌ها شبکه اجتماعی دانش‌آموزی (شاد) بود، اجرا گردید که این امر از نوآوری‌های این پژوهش محسوب می‌گردد. پس از اخذ مجوزهای لازم و هماهنگی با مدیران مدارس و دبیران ریاضی متوسطه اول، سؤالات پژوهش در اختیار دانش‌آموزان قرار داده شد و پس از مدت زمان لازم پاسخگویی پاسخ‌های آن‌ها دریافت شد و تجزیه و تحلیل پاسخ‌ها با استفاده از نرم‌افزارهای آماری همچون SPSS۲۶ انجام گرفت. همچنین به‌منظور پاسخگویی به اهداف فرعی پژوهش از آزمون‌های خی‌دوپیرسون و ضریب همبستگی اسپیرمن استفاده گردیده است؛ چرا که بررسی مستقل یا وابسته بودن متغیرهای پژوهش از توانایی طرح مسئله تناسبی دانش‌آموزان نیازمند استفاده از آزمون‌های ناپارامتری مورد نیاز بود. در این پژوهش روایی-محتوایی، سؤالات آزمون توسط نظرات اساتید آموزش ریاضی و تعدادی از دبیران مجرب ریاضی مورد تأیید قرار گرفت.

**۱.۳. چارچوب نظری پژوهش.** در این پژوهش با توجه به بخشی از پیشینه پژوهشی بررسی شده (مدل ویسترو یو و مدل لیون) و بررسی و جرح و تعدیل آن‌ها مشاهده گردید که در مدل ویسترو یو، به بررسی مسائل طرح شده نادرست پرداخته نشده بود و در عین حال در مدل لیون طبقه‌بندی مناسبی برای طرح مسئله نادرست ارائه گردیده بود. بنابراین انتخاب سه سطح از پنج سطح مدل لیون که مرتبط با پاسخ‌های نادرست بودند و اعمال برخی تغییرات مختصر در آن، به همراه سطوح ویسترو یو چارچوبی تلفیقی متشکل از ۹ سطح تشکیل شد و بررسی توانایی‌های طرح مسئله دانش‌آموزان متوسطه اول بر اساس این چارچوب صورت گرفت. در این چارچوب پس از بررسی و تحلیل مسائل طرح شده دانش‌آموزان، ابتدا عملکرد آن‌ها به دو دسته طرح مسئله درست و طرح مسئله نادرست تقسیم می‌شوند. سپس طرح مسئله نادرست در سه سطح و طرح مسئله درست نیز در شش سطح طبقه‌بندی می‌شوند. علت انتخاب این چارچوب به‌عنوان چارچوب پژوهش در این بود که چارچوب‌های به‌کار رفته در آن به‌گونه‌ای مکمل و حمایت‌کننده یکدیگر بودند و با تلفیق آن‌ها دسته‌بندی کاملی حاصل گردید که طیف گسترده‌ای از مسائل طرح شده، دانش‌آموزان را مورد پوشش قرار می‌داد. این چارچوب ابتدا در مطالعه مقدماتی مورد استفاده قرار گرفت و پس از بررسی و تحلیل پاسخ‌ها و نتایج، روایی آن مورد تأیید اساتید آموزش ریاضی قرار گرفت و صلاحیت استفاده در پژوهش اصلی را کسب نمود. نمای کلی این چارچوب در جدول ۳ مشاهده می‌شود.

جدول ۳. چارچوب ارائه شده توسط محققین از سطوح مختلف طرح مسئله تناسبی و پژوهش‌های حمایت‌کننده از هر سطح

**Table 3:** The framework presented by researchers from different levels of proportional problem posing and supporting researches from each level

|                  |          |                                        |                                                                                                                                                     |                  |
|------------------|----------|----------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|
| طرح مسئله نادرست | سطح یک   | گزاره                                  | دانش‌آموزان طرح مسئله انجام نمی‌دهد یا صرفاً گزاره ای می‌نویسند که مسئله محسوب نمی‌شود.                                                             | لئونگ            |
|                  | سطح دو   | مسئله نامربوط                          | دانش‌آموزان مسئله ای نامربوط طرح می‌کنند که ارتباطی با تناسب ندارد.                                                                                 | لئونگ با تغییرات |
|                  | سطح سه   | مسئله غیر ممکن یا اطلاعات ناکافی مسئله | دانش‌آموزان مسئله ای طرح می‌کنند که وقوع آن در دنیای واقعی امکان ندارد یا به دلیل ناکافی بودن داده ها یا متغیرهای مسئله پاسخ دهی به آن غیرممکن است. | لئونگ            |
| طرح مسئله درست   | سطح چهار | جایگزینی                               | دانش‌آموزان با جایجایی تغییر یک یا چند متغیر، اسامی، اعداد و غیره، مسئله جدیدی طرح می‌کنند.                                                         | ویسترو - یو      |
|                  | سطح پنج  | افزایش                                 | دانش‌آموزان با افزایش یک یا چند متغیر یا محدودیت مسئله را توسعه داده‌اند.                                                                           | ویسترو - یو      |
|                  | سطح شش   | جرح و تعدیل                            | دانش‌آموزان مسئله کاملاً جدیدی با ایجاد تغییرات در مسئله طرح کرده اند.                                                                              | ویسترو - یو      |
|                  | سطح هفت  | زمینه مدار کردن مسئله                  | دانش‌آموزان مسئله‌ای مشابه با مسئله اولیه اما مرتبط و هماهنگ با دانش‌آموز و دنیای واقعی طرح کرده اند                                                | ویسترو - یو      |
|                  | سطح هشت  | معکوس کردن                             | دانش‌آموزان با در نظر گرفتن داده ها و مفروضات مسئله به عنوان حکم و خواسته مسئله مسئله جدیدی طرح می‌کنند.                                            | ویسترو - یو      |
|                  | سطح نه   | صورت بندی مجدد                         | دانش‌آموزان با ایجاد تغییر در ساختار مسئله مسئله ای کاملاً متفاوت و جدید و عین حال مرتبط با مفهوم مسئله اولیه طرح می‌کنند.                          | ویسترو - یو      |

#### ۴. یافته‌های پژوهش

۱.۴. بررسی و تحلیل کیفی پاسخ‌های دانش‌آموزان به سؤالات آزمون. در این بخش به منظور پاسخ به هدف اصلی پژوهش یعنی بررسی عملکرد دانش‌آموزان مقطع متوسطه اول در طرح مسائل مرتبط با استدلال تناسبی به تجزیه و تحلیل داده‌های حاصل از پاسخ‌های دانش‌آموزان به سؤالات آزمون پرداخته شده است. بررسی و تحلیل پاسخ‌های درست و نادرست دانش‌آموزان به سؤالات آزمون می‌تواند تا حدودی نحوه تفکر آنان را منعکس کند و نقاط قوت و ضعف آنان را در فرآیند طرح مسئله نمایان سازد. در این پژوهش پنج سؤال مرتبط با مفاهیم نیازمند استدلال تناسبی که هر کدام از سؤالات در قالبی متفاوت و دربرگیرنده هدفی مشخص بودند، در اختیار دانش‌آموزان قرار گرفته شد این ۵ سؤال به گونه‌ای برای استفاده در پژوهش گزینش شده بودند که تمامی اهداف پژوهش را پوشش دهند و داده‌های مستخرج از آن‌ها با چارچوب پژوهش تطابق و هماهنگی داشته باشند. بنابراین پاسخ‌های دانش‌آموزان به سؤالات آزمون پس از بررسی دقیق و استخراج نتایج از آنان

در هر یک از سطوح چارچوب طرح مسئله تناسبی دسته‌بندی شدند و سپس داده‌های به‌دست آمده، محققین را به اهداف فرعی این پژوهش؛ یعنی تأثیر عوامل پایه تحصیلی، جنسیت و نوع مدرسه بر عملکرد طرح مسئله دانش‌آموزان در مسائل مرتبط با استدلال تناسبی؛ نزدیک نمودند. بدین منظور، در ادامه سؤال‌های آزمون و هدف آن‌ها و پاسخ‌های ارائه شده توسط دانش‌آموزان به سؤالات آزمون مورد تحلیل و بررسی قرار گرفته است. با دقت به مسئله زیر توجه کنید.

سؤال ۱.۴. ماشین (الف) ۱۸۰ کیلومتر را در سه ساعت طی می‌کند. ماشین (ب) ۴۰۰ کیلومتر را در ۷ ساعت طی می‌کند. کدام ماشین سریع تر حرکت می‌کند؟

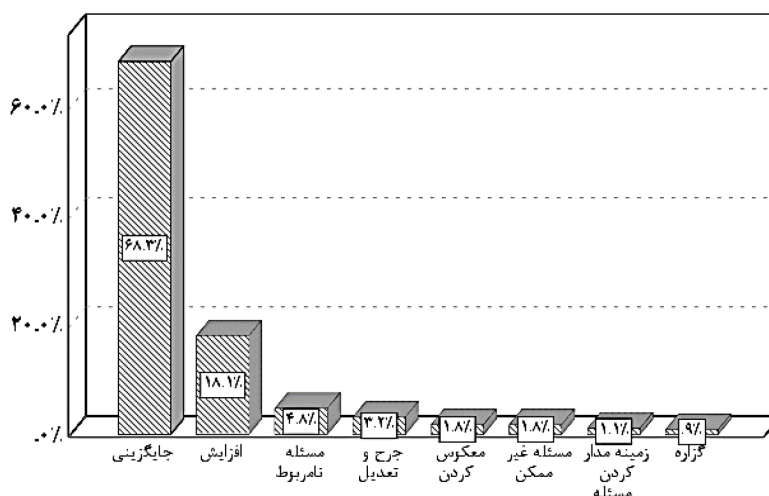
حال فرض کنید شما معلم ریاضی هستید، مسئله‌ای جدید و جذاب برای امتحان ریاضی مرتبط با آن طرح و بنویسید.

سؤال ۱.۴ در قالب مسئله‌ای تناسبی با هدف بررسی توانایی دانش‌آموزان در تشکیل نرخ کمیت‌ها و مقایسه کمیت‌ها با استفاده از آن تهیه شده است. از دانش‌آموزان خواسته شده تا با به دست آوردن نرخ مسافت طی شده بر مدت زمان یعنی کمیت سرعت به مقایسه سرعت دو ماشین بپردازند و پس از درک ماهیت مسئله، از روی آن مسئله‌ای مرتبط طرح کنند.

جدول ۴. فراوانی و درصد فراوانی پاسخ‌های مربوط به سؤال ۱.۴

Table 4: Frequency and frequency percentage of responses related to the question 4.1

| پاسخ‌ها      | فراوانی | درصد فراوانی |
|--------------|---------|--------------|
| مسئله نادرست | ۳۳      | ۷,۵٪         |
| مسئله درست   | ۴۰۹     | ۹۲,۵٪        |



شکل ۱. درصد فراوانی هر یک از سطوح طرح مسئله در سؤال ۱.۴

Figure 1: The frequency percentage of each of the levels of problem posing in question 4.1

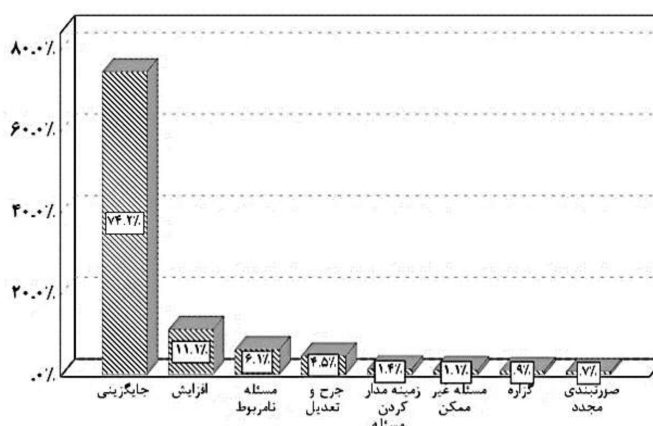
با بررسی پراکندگی پاسخ‌های دانش‌آموزان در این سؤال بر اساس سطوح طرح مسئله می‌توان مشاهده کرد که ۹۲/۵٪ مسائل طرح شده مرتبط با این سؤال مسائل درست بوده‌اند و ۷/۵٪ از پاسخ‌ها مربوط به دانش‌آموزانی بوده است که در درک

ماهیت ضربی مسئله موفق نبوده‌اند و مسئله‌ای نادرست طرح نموده‌اند. همچنین درصد قابل توجهی از پاسخ‌های دانش‌آموزان (۶۸۳٪) به این سؤال در سطح جایگزینی قرار می‌گیرد. بنابراین می‌توان گفت دانش‌آموزان در این سؤال عملکرد قابل قبولی از خود نشان داده‌اند. این می‌تواند نشان دهنده این موضوع باشد که دانش‌آموزان متوسطه اول در مسائل مقایسه عددی به‌خصوص در مسائلی که مرتبط با دنیای واقعی باشند (مثلاً در این سؤال متغیرهای سرعت، اتومبیل، مسافت طی شده و غیره) ارتباط و تعامل بهتری با متغیرهای مسئله برقرار می‌کنند. همان‌طور که در [۵۰، ص ۱۴] بیان شده است مفاهیم زیادی در ریاضیات و سایر علوم ارتباط تنگاتنگی با نسبت و تناسب دارند؛ از جمله کسرها، نرخ‌ها، درصدها و نسبت‌ها. بنابراین وجود متغیرها و زمینه ذهنی دانش‌آموز از مفاهیم سرعت و مسافت در دروسی مانند علوم تجربی و غیره، دانش‌آموز را به سمت تشکیل نرخ و مقایسه آن‌ها سوق می‌دهد. نمونه برخی از مسائل طرح شده دانش‌آموزان مرتبط با این مسئله در جدول ۵ قابل مشاهده است.

بسیاری از دانش‌آموزان با تغییر متغیرها یا مقادیر عددی مسئله، مسائلی جدید طرح نمودند. همچنین مشاهده گردید که برخی دانش‌آموزان به علت تشخیص نادرست نسبت و جدول تناسب یا عدم درک کافی از مفهوم نرخ، به درک درستی از مسئله دست نیافته‌اند و پاسخ‌های آن‌ها عمدتاً در سطح مسائل طرح شده نادرست ارزیابی شدند. با این وجود، برخی از دانش‌آموزان تغییرات اساسی در مسئله داده شده ایجاد کردند و با تبدیل مسئله به مسئله‌ای جدید توانایی بالاتر خود را در طرح مسئله نشان دادند و عملکرد آن‌ها در سطوح جرح و تعدیل ارزیابی می‌شود. البته درصد فراوانی سطوح هفتم و هشتم و نهم چارچوب بسیار اندک بودند. سهم سایر سطوح عملکرد دانش‌آموزان در شکل ۱ قابل مشاهده است.

**سؤال ۲۰۴.** برای تهیه یک کلوچه، باید ۴ فنجان شکر و ۱۰ فنجان آرد را مخلوط کنید. فاطمه می‌خواهد مقدار بیشتری از این کلوچه را تهیه کند. اگر او دو فنجان شکر هم اضافه کند، چند فنجان آرد نیاز خواهد داشت؟  
حال فرض کنید شما معلم ریاضی هستید، مسئله‌ای جدید و جذاب برای امتحان ریاضی مرتبط با آن طرح نمایید و بنویسید.

**سؤال ۲۰۴.** در قالب مسئله‌ای تناسبی و بر اساس موقعیت مسئله‌ای در دنیای واقعی و زندگی روزمره طرح شده است. هدف آن، بررسی توانایی دانش‌آموزان در تشخیص ماهیت ضربی مسئله و طرح مسئله‌ای با ماهیت ضربی از روی موقعیت داده شده در مسئله اصلی است.



شکل ۲. درصد فراوانی هر یک از سطوح طرح مسئله در سؤال ۲۰۴

Figure 2: The frequency percentage of each of the levels of problem posing in question 4.2

### جدول ۵. نمونه‌های طرح مسئله دانش‌آموزان در سؤال ۱.۴

Table 5: Samples of students problem posing in question 4.1

| مسائل        | نمونه های طرح مسئله دانش آموزان                                                                                                                                                                                                                      | سطح                   |
|--------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| مسائل نادرست | دو خودرو داریم خودرو اول سرعت ۵۰ کیلومتر بر ساعت دارد و خودرو دوم سرعتش ۴۰ کیلومتر بر ساعت است. کدام مسافت بیشتری می رود؟                                                                                                                            | گزاره                 |
|              | دو ماشین در مسابقه اتومبیل رانی در حال مسابقه دادن هستند طول زمین ۵۰ کیلومتر است ماشین ها به ترتیب زرد و آبی ۲۸ کیلومتر و ۴۲ کیلومتر حرکت کرده‌اند کدام ماشین تقریباً نصف راه را حرکت کرده است؟                                                      | مسئله نامربوط         |
|              | اگر موتور سواری ۲۰ کیلومتر را در ۲۰ دقیقه طی کند و موتور سوار دیگری ۳۵ کیلومتر را در ۳۰ دقیقه طی کند چقدر موتورسواران سریعتر رسیده‌اند؟                                                                                                              | مسئله غیرممکن         |
| مسائل درست   | علی در ۸ ساعت ۲۰۰ صفحه کتاب می خواند و رضا در ۵ ساعت ۳۵ صفحه کتاب می خواند، کدام یک سریعتر کتاب می خواند؟                                                                                                                                            | جایگزینی              |
|              | ماشین الف ۱۰۰ کیلومتر را در ۲ ساعت طی می کند. سپس به مدت ۳۰ ثانیه می ایستد و دوباره به راه می افتد. این بار مسافت ۲۰۰ کیلومتر را در ۵ ساعت طی می کند. الف) مشخص کنید که ماشین چه سرعت هایی را تجربه کرده است؟ ب) سرعت را به متر بر دقیقه تبدیل کنید. | افزایش                |
|              | دو حوض یکسان از نظر ظرفیت داریم یکی در سه ساعت نیمی از حوض پر می‌شود و دیگری در ۵ ساعت سه چهارم میشود کدام سریعتر پر می شود؟                                                                                                                         | جرح و تعدیل           |
|              | هنگام تولد علی پدرش ۲۸ سال سن داشت اکنون مجموع سن آن‌ها ۵۰ سال است علی چند سال دارد؟                                                                                                                                                                 | زمینه‌مدار کردن مسئله |
|              | سرعت ماشین یک دو برابر ماشین دو است اگر ماشین اول ۲۰۰ کیلومتر را در ۴ ساعت طی کند ماشین دو ۳۰۰ کیلومتر را در چند ساعت طی می کند؟                                                                                                                     | معکوس کردن            |
|              | یک باکتری در هر ۴۰ دقیقه به دو باکتری تبدیل می شود اگر در ساعت ۲۲۵ دقیقه یک باکتری داشته باشیم در چه ساعتی ۱۶ باکتری داریم؟                                                                                                                          | صورتهندی مجدد         |

همان‌طور که در جدول ۶ مشاهده می‌شود با بررسی نتایج حاصل از مسائل طرح شده دانش‌آموزان در سؤال ۲.۴ از بین ۴۴۲ دانش‌آموز، ۴۰۶ نفر مسئله‌ای درست طرح کردند (۹۱/۹٪) و ۳۶ نفر مسئله‌ای نادرست ارائه دادند (۸/۱٪). برخی از دانش‌آموزان سؤالی نامرتبط با مسئله داده شده طراحی نمودند، که این امر می‌تواند ناشی از عدم درک ماهیت مسئله باشد. برخی از دانش‌آموزان با وجود این که مسئله طرح شده آن‌ها در قالب مسئله‌ای درست جای گرفت، بدون توجه به ماهیت ضربی مسئله، با به‌کارگیری تفکر جمعی مسئله‌ای نامربوط طرح نمودند (تقریباً ۷٪). در این سؤال نیز درصد قابل توجهی از پاسخ‌ها در سطح جایگزینی قرار گرفتند (۷۴/۲٪). با توجه به مسائل طرح شده دانش‌آموزان می‌توان دریافت که در این مسئله، دانش‌آموزان دختر کم و بیش عملکرد بهتری در طراحی مسائل داشتند؛ زیرا مسئله در فضایی طرح شده بود که بیشتر مورد علاقه آن‌ها بود و آن‌ها ارتباط بیشتری با مسئله برقرار کرده بودند. همچنین برخی از دانش‌آموزان با تغییر متغیرهای

## جدول ۶. فراوانی و درصد فراوانی پاسخ‌های مربوط به سؤال ۲.۴

Table 6: Frequency and frequency percentage of responses related to the question 4.2

| درصد فراوانی | فراوانی | پاسخ‌ها      |
|--------------|---------|--------------|
| ۸,۱٪         | ۳۶      | مسئله نادرست |
| ۹۱,۹         | ۴۰۶     | مسئله درست   |

مسئله و با استفاده از پیشینه ذهنی خود و بردن مسئله به فضاهای دیگر، اقدام به زمینه مدار کردن مسئله نمودند (۱/۴٪). سهم سایر سطوح عملکرد دانش‌آموزان در شکل ۲ دیده می‌شود، همچنین نمونه برخی از مسائل طرح شده دانش‌آموزان مرتبط با این مسئله در جدول ۷ قابل مشاهده است.

## جدول ۷. نمونه‌های طرح مسئله دانش‌آموزان در سؤال ۲.۴

Table 7: Samples of students problem posing in question 4.2

| مسائل        | نمونه های طرح مسئله دانش آموزان                                                                                                                                                                                                                                                             | سطح                   |
|--------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| مسائل نادرست | اگر از ۷ برابر عددی ۲۰ واحد کم کنیم با سه برابر آن عدد برابر می شود آن عدد را پیدا کنید.                                                                                                                                                                                                    | مسئله نامربوط         |
|              | برای تهیه کیک به ۱۰ کیلو آرد و ۵ کیلو شکر نیاز داریم. برای تهیه کیک برای ۵ نفر چه مقدار مواد را اضافه کنیم؟                                                                                                                                                                                 | اطلاعات ناکافی مسئله  |
| مسائل درست   | برای تهیه نوعی بتن نسبت سیمان به ماسه ۳ به ۷ است. اگر مقدار سیمان را دو برابر کنیم مقدار ماسه چقدر می شود؟                                                                                                                                                                                  | جایگزینی              |
|              | کارخانه ای برای تهیه کلوچه ۱۰ فنجان آرد را با ۴ فنجان شکر ترکیب می کند. اگر قیمت هر فنجان شکر و آرد به ترتیب ۱۰۰ و ۱۵۰ واحد باشد. اگر این کارخانه بخواهد روزی ۲۰۰۰ کلوچه تولید کند و قیمت فروش هر کلوچه ۲۵۰۰ واحد باشد سود حاصل از فروش یک هفته این کارخانه را حساب کنید.                   | افزایش                |
|              | آرش در کتابی خوانده است که برای درست کردن یک لیتر آب نمک به مقدار ۲ قاشق نمک نیاز دارد ولی او به اشتباه پنج قاشق نمک به آب اضافه کرده است. او باید چه مقدار آب به محلول اضافه کند که محلول شورتر از مقدار مورد نیاز نباشد؟                                                                  | جرح و تعدیل           |
|              | پروانه ۱۲ سال و خواهرش ۵ سال دارد بعد از گذشت ۳ سال اختلاف سن آن‌ها چقدر است؟                                                                                                                                                                                                               | زمینه مدار کردن مسئله |
|              | برای تولید هر دیوار بتنی به چهار گونی سیمان و ده گونی مصالح سنگی نیاز داریم. اگر هر تانکر حامل سیمان ۳۰ گونی سیمان به قیمت ۵۵۰۰۰ تومان و هر تانکر حامل مصالح سنگی شامل ۹۰ گونی به قیمت ۹۵ هزار تومان باشد حداقل و حداکثر چند دیوار بتنی می‌توانیم بسازیم اگر بودجه ما یک میلیون تومان باشد؟ | صورتبندی مجدد         |

**سؤال ۳.۴.** علی در ساعت ۸ و محسن ۳۰ ثانیه بعد با سرعت یکسان شروع به دویدن در یک مسیر دایره‌ای شکل می‌کنند. این‌را می‌دانیم که وقتی محسن ۲۰۰ متر دویده باشد علی ۳۰۰ متر دویده است. با توجه به این اطلاعات وقتی که محسن ۴۰۰ متر دویده باشد، علی چند متر دویده است؟

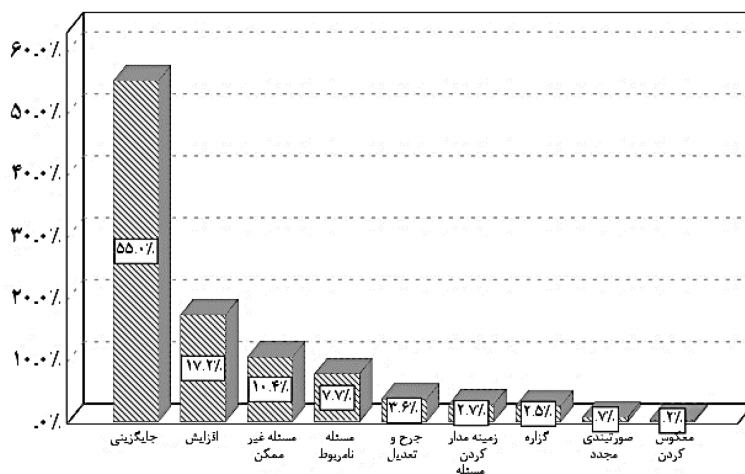
حال فرض کنید شما معلم ریاضی هستید، مسئله‌ای جدید و جذاب برای امتحان ریاضی مرتبط با آن طرح کنید و بنویسید.

**سؤال ۳.۴** با هدف بررسی توانایی دانش‌آموزان در تشخیص و تمیز موقعیت‌های ضربی و جمعی از یکدیگر با بکارگیری ضرایب با نسبت صحیح در مسئله، طرح شده است.

جدول ۸. فراوانی و درصد فراوانی پاسخ‌های مربوط به سؤال ۳.۴

Table 8: Frequency and frequency percentage of responses related to the question 4.3

| درصد فراوانی | فراوانی | پاسخ‌ها      |
|--------------|---------|--------------|
| ۲۰,۶٪        | ۹۱      | مسئله نادرست |
| ۷۹,۴٪        | ۳۵۱     | مسئله درست   |



شکل ۳. درصد فراوانی هر یک از سطوح طرح مسئله در سؤال ۳.۴

Figure 3: The frequency percentage of each of the levels of problem posing in question 4.3

با بررسی پراکندگی پاسخ‌های دانش‌آموزان در این سؤال بر اساس سطوح طرح مسئله، می‌توان مشاهده کرد که ۷۹/۴٪ مسائل طرح شده مرتبط با این سؤال، درست بوده‌اند. و ۲۰/۶٪ از پاسخ‌ها مربوط به دانش‌آموزانی بوده است که در درک ماهیت جمعی مسئله موفق نبوده‌اند و مسئله‌ای نادرست طرح نموده‌اند. سهم سایر سطوح عملکرد دانش‌آموزان در شکل ۳ دیده می‌شود، همچنین نمونه برخی از مسائل طرح شده دانش‌آموزان مرتبط با این مسئله در جدول ۹ قابل مشاهده است.

### جدول ۹. نمونه‌های طرح مسئله دانش‌آموزان در سؤال ۳.۴

Table 9: Samples of students problem posing in question 4.3

| سطح                    | نمونه‌های طرح مسئله دانش‌آموزان                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |              |
|------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|
| گزاره،<br>(مسئله نیست) | سعید و دوستش در حال مسابقه هستند اگر سرعت سعید دو برابر دوستش باشد. مسافت کدام بیشتر است؟                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | مسائل نادرست |
| مسئله نامربوط          | محمد یک مسیر ۴۰۰ متری را دویده است. اصغر نیز ۶۰۰ متر دویده است. این دو روی هم چند متر دویده اند؟                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |              |
| جایگزینی               | محمد و علی در یک مسابقه دو میدانی هستند و با سرعت یکسان حرکت می‌کنند. علی ۴۰ ثانیه زودتر حرکت میکند. اگر علی ۲۰۰ متر رفته باشد محمد ۱۵۰ متر رفته است. حال اگر علی ۴۰۰ متر رفته باشد محمد چند متر رفته است؟<br>محسن در ساعت ده و رضا بیست دقیقه بعد شروع به مطالعه کتاب کردند. این را می‌دانیم که وقتی محسن ۴۵ صفحه کتاب مطالعه کند رضا ۱۵ صفحه کتاب مطالعه کرده است. وقتی محسن ۱۵۰ صفحه کتاب مطالعه کند حسین چند صفحه مطالعه کرده است؟ | مسائل درست   |
| افزایش                 | امیر و امید با هم یک مسیر ۵۴۰ متر را برای دویدن مسابقه دادند امیر در ۹ ثانیه و امید در ۱۲ ثانیه به خط پایان رسید سرعت هر کدام چقدر بوده است اگر همین مسیر را دور یک میدان به روند هر چند ثانیه یکدیگر را می‌بینند                                                                                                                                                                                                                      |              |

با بررسی پراکندگی پاسخ‌های دانش‌آموزان در این سؤال بر اساس سطوح طرح مسئله، می‌توان مشاهده کرد که بیش از ۲۰٪ از پاسخ‌های دانش‌آموزان را مسائل نادرست تشکیل می‌دهد. ریشه این نتیجه را می‌توان در چند عامل جستجو کرد؛ اول، عدم توجه و دقت کافی دانش‌آموزان به روابط بین متغیرها و داده‌های مسئله در مسائل کلامی؛ جایی که دانش‌آموزان به جای اینکه مسئله را به خوبی درک کنند، تنها به اعداد و متغیرهای مسئله و صحیح یا گویا بودن آن‌ها توجه می‌کنند. ون دورن و همکاران<sup>۱۱</sup>، صحت این موضوع را درباره توجه صرف دانش‌آموزان به متغیرهای مسائل کلامی بیان کرده‌اند ([۲۹]، ص ۲۲۲). دوم، صحیح یا گویا بودن نسبت متغیرهای موجود در مسئله تأثیر بسزایی در شکل‌گیری تفکر تناسبی دانش‌آموزان دارد. همان‌طور که ون دورن و همکاران در پژوهش خود به تأثیر این عامل در عملکرد حل مسئله تناسبی پرداخته‌اند و به این نتیجه رسیدند که اگر متغیرهای مسئله از نوع صحیح باشند یا ضریب صحیحی از یکدیگر باشند این موضوع دانش‌آموزان را به سمت تفکر ضربی سوق می‌دهد؛ حتی اگر مسئله از نوع غیرتناسبی یا جمعی باشد ([۲۹]، ص ۲۱۵). در این پژوهش نیز یکی از علل انتخاب این سؤال بررسی همین موضوع بود که مشاهده گردید با این که ماهیت این مسئله جمعی بود؛ بیشتر دانش‌آموزان بدون درک رابطه بین تعداد دورهای زده شده علی و محسن و با استفاده از تفکر ضربی به جای تفکر جمعی اقدام به طرح مسئله‌ای با ماهیت ضربی نموده‌اند و این عامل تأثیر به‌سزایی در عملکرد طرح مسئله دانش‌آموزان به جای گذاشت. وجود اعداد ۲۰۰ و ۴۰۰ دانش‌آموزان را به این واداشت که نسبت دو به یک بین متغیرهای مسئله وجود دارد بنابراین درصد فراوان و قابل توجهی از مسائل طرح شده به سطوح طرح مسئله نادرست تعلق پیدا کردند.

<sup>11</sup>Van Dooren

سؤال ۴.۴. یک لباس ۱۰۰ دقیقه طول می‌کشد تا خشک شود. چقدر طول می‌کشد تا ۵ دست از همین لباس با هم خشک شوند؟

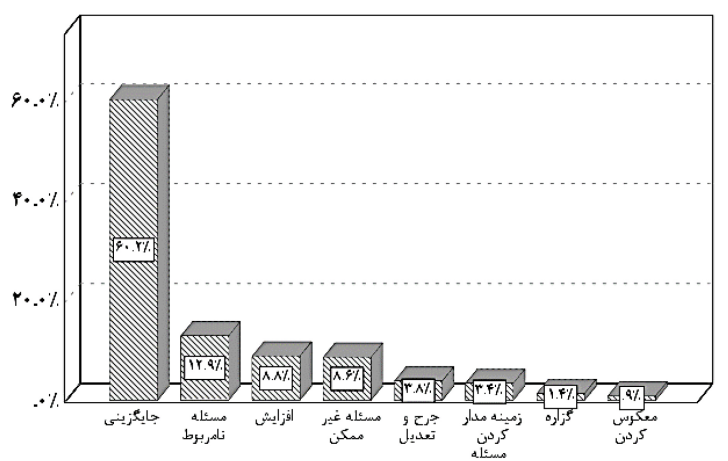
حال فرض کنید شما معلم ریاضی هستید و مسئله‌ای جدید و جذاب برای امتحان ریاضی مرتبط با آن طرح کنید و بنویسید.

سؤال ۴.۴ در قالب مسئله‌ای غیرتناسبی با هدف بررسی توانایی دانش‌آموزان در تشخیص و تمیز ماهیت غیرتناسبی مسئله، طرح گردیده است.

جدول ۱۰. فراوانی و درصد فراوانی پاسخ‌های مربوط به سؤال ۴.۴

Table 10: Frequency and frequency percentage of responses related to the question 4.4

| درصد فراوانی | فراوانی | پاسخ‌ها      |
|--------------|---------|--------------|
| ۲۲,۹٪        | ۱۰۱     | مسئله نادرست |
| ۷۷,۱٪        | ۳۴۱     | مسئله درست   |



شکل ۴. درصد فراوانی هر یک از سطوح طرح مسئله در سؤال ۴.۴

Figure 4: The frequency percentage of each of the levels of problem posing in question 4.4

همان‌طور که در جدول ۱۰ دیده می‌شود از بین ۴۴۲ دانش‌آموز، ۳۴۱ دانش‌آموز به این سؤال پاسخ درستی داده‌اند (۷۷/۱٪) و ۱۰۱ نفر از آن‌ها مسئله نادرستی طرح کردند (۲۲/۹٪). بنابراین عملکرد دانش‌آموزان را در این سؤال می‌توان نسبتاً خوب ارزیابی کرد. در مقایسه پایه‌ها دانش‌آموزان هفتم و نهم عملکرد بهتری از دانش‌آموزان هشتم در حل این سؤال داشتند و میزان پاسخ‌های درست آن‌ها بیشتر از پایه هشتم و میزان پاسخ‌های نادرست آن‌ها کمتر از پایه هشتم در این سؤال بود. همچنین دانش‌آموزان پایه نهم عملکرد بهتری نسبت به سایر پایه‌ها در حل این سؤال داشتند. سهم سایر سطوح عملکرد دانش‌آموزان در شکل ۴ دیده می‌شود و نمونه برخی از مسائل طرح شده دانش‌آموزان مرتبط با این مسئله در جدول ۱۱ قابل مشاهده است.

### جدول ۱۱. نمونه‌های طرح مسئله دانش‌آموزان در سؤال ۴.۴

Table 11: samples of students problem posing in question 4.4

| مسائل        | نمونه های طرح مسئله دانش آموزان                                                                                                                                                                                                                                   | سطح                   |
|--------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| مسائل نادرست | یک نفر با اتومبیل مسیری را در مدت یک ساعت طی می کند. ۴ نفر با چه سرعتی این مسیر را طی می کنند؟                                                                                                                                                                    | مسئله غیر ممکن        |
|              | عرفان کاری را در مدت ۸ ساعت و امید همان کار را در مدت ۴ ساعت انجام می دهد. هردو آن‌ها با هم در چه مدت آن کار را انجام می دهند؟                                                                                                                                    | مسئله نامربوط         |
| مسائل درست   | یک عدد تخم مرغ ۱۵ دقیقه طول میکشد تا پخته شود برای پختن ۷ عدد تخم مرغ چقدر زمان لازم است تا با هم در یک ظرف پخته شوند؟                                                                                                                                            | جایگزینی              |
|              | یک کاپشن پشمی ۱۰۰ دقیقه طول می کشد تا خشک شود. چقدر طول می کشد تا ۵ دست از همین لباس با هم خشک شوند؟                                                                                                                                                              |                       |
|              | یک لباس ۱۰۰ دقیقه طول می کشد تا خشک شود. حال ما ۵ لباس را در لباسشویی می گذاریم و پس از ۳۰ دقیقه متوجه لک روی ۳ تا از این لباس ها می شویم که دوباره آن را در لباسشویی می گذاریم. اگر زمان شستن لباس در لباسشویی ۱۵ دقیقه باشد زمان کل را پس از خشک شدن حساب کنید. | افزایش                |
|              | بانکی ۱۵۰ کارمند فعال دارد. اگر ۱۰ مشتری ۵ دقیقه کار داشته باشند، مدت زمان رسیدگی به ۱۲۰ مشتری چقدر به طول می انجامد؟                                                                                                                                             | زمینه مدار کردن مسئله |
|              | یک لباس مشکی در ۴۰ دقیقه و یک لباس سفید در ۶۰ دقیقه خشک می شود. مخلوطی از لباس های مشکی و سفید در چه مدت خشک می شوند؟                                                                                                                                             | جرح و تعدیل           |
|              | یک شیر آب استخری را در ۴ ساعت پر می کند و شیر دیگری در مدت ۶ ساعت آن را خالی می کند. اگر هردو شیر آب باهم باز باشند استخر در چند ساعت پر می شود؟                                                                                                                  | صورتبندی مجدد         |

بنابر نظر ون دورن و همکاران [۲۹]، مسائل “ثابت” از انواع مسائل غیرتناسبی هستند که در آن‌ها نه رابطه جمعی بین متغیرها و کمیت‌های مسئله وجود دارد نه رابطه ضربی. این سؤال از نوع ثابت طرح گردیده بود، به همین علت در سؤالات پژوهش قرار داده شد تا توانایی دانش‌آموزان متوسطه اول را در تشخیص این نوع مسائل بسنجد. با بررسی پراکندگی پاسخ‌های دانش‌آموزان در این سؤال و بر اساس سطوح طرح مسئله، مشاهده شد که حدوداً ۶۰٪ پاسخ‌های دانش‌آموزان به این سؤال در سطح جایگزینی قرار می‌گیرد؛ اما با این وجود تعداد نسبتاً زیادی از دانش‌آموزان (۱۲/۹٪)، در طراحی مسئله مرتبط با این سؤال به دلیل عدم درک ماهیت مسئله غیرتناسبی ثابت، مسائلی نامرتبط طرح کردند. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که دانش‌آموزان در تشخیص مسائل مرتبط با استدلال تناسبی از نوع ثابت، با ثبت درصد فراوانی که در بالا به آنها اشاره شد، عملکرد نسبتاً مناسبی از خود نشان دادند؛ شکل ۴ درستی این مطلب را نشان می‌دهد.

سؤال ۵.۴. در مقایسه آمار مبتلایان به ویروس کرونا در دو کشور با جمعیتی به ترتیب ۲۰ میلیون نفر و ۳۰ میلیون نفر، تعداد مبتلایان در کشور اول یک میلیون و پانصد هزار نفر و در کشور دوم، دو میلیون نفر شناسایی شده‌اند. کدام کشور وضعیت

بدتری از نظر آلودگی به ویروس کرونا دارد؟

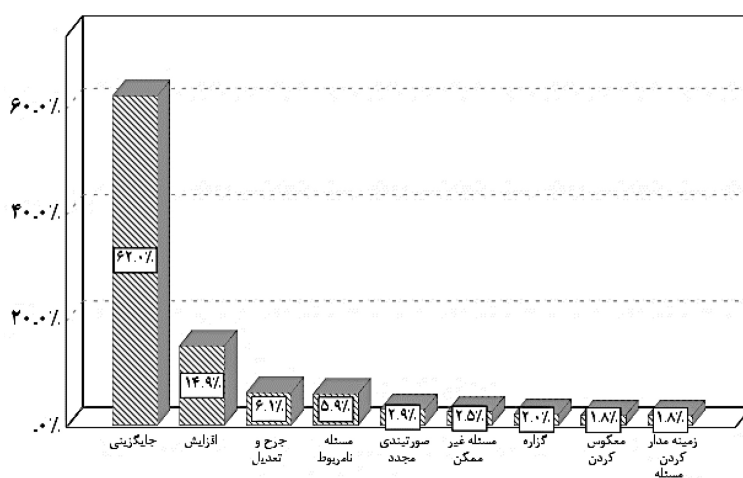
حال فرض کنید شما معلم ریاضی هستید و مسئله‌ای جدید و جذاب برای امتحان ریاضی مرتبط با آن طرح کنید و بنویسید.

سؤال ۵.۴ در قالب مسئله‌ای تناسبی و بر اساس موقعیتی متناسب با شرایط ویژه جامعه از نظر بیماری کووید ۱۹ و با هدف بررسی توانایی دانش‌آموزان در طرح مسئله‌ای تناسبی با تشکیل نرخ، مقایسه نرخ‌ها و بررسی تفکر ضربی دانش‌آموزان، طراحی شده است.

جدول ۱۲. فراوانی و درصد فراوانی پاسخ‌های مربوط به سؤال ۵.۴

Table 12: Frequency and frequency percentage of responses related to the question 4.5

| درصد فراوانی | فراوانی | پاسخ‌ها      |
|--------------|---------|--------------|
| ۱۰,۴٪        | ۴۶      | مسئله نادرست |
| ۸۹,۶٪        | ۳۹۶     | مسئله درست   |



شکل ۵. درصد فراوانی هر یک از سطوح طرح مسئله در سؤال ۵.۴

Figure 5: The frequency percentage of each of the levels of problem posing in question 4.5

همان‌طور که در جدول ۱۲ دیده می‌شود از بین ۴۴۲ دانش‌آموز، ۳۹۶ دانش‌آموز (۸۹/۶٪) به این سؤال پاسخ درستی داده‌اند و ۴۶ دانش‌آموز (۱۰/۴٪) پاسخ نادرستی داده‌اند. در مقایسه پایه‌های هفتم و هشتم و نهم، عملکرد دانش‌آموزان با افزایش پایه تحصیلی افزایش یافته است؛ به‌گونه‌ای که به‌ترتیب دانش‌آموزان نهم و هشتم و هفتم عملکرد بهتری را در طرح مسئله مرتبط با این سؤال از خود نشان دادند. می‌توان گفت دانش‌آموزان در این سؤال عملکرد متوسطی از خود نشان داده‌اند؛ ۸۹/۶٪ مسائل طرح شده درست و ۱۰/۴٪ مسائل طرح شده نادرست بودند که عمدتاً ناشی از درک ناکافی از مفهوم نرخ، تشکیل درصد نادرست و مقایسه کسرها بودند. البته درصد قابل توجهی از دانش‌آموزان (۵/۹٪) نیز به ماهیت ضربی مسئله پی نبردند و صرفاً با تمرکز بر فواصل جمعی اعداد و مقایسه مبتلایان، مسئله‌ای با رویکرد جمعی طراحی کردند که در

سطح مسئله نامربوط طبقه‌بندی شدند. ۲٪ از مسائل طرح شده دانش‌آموزان به این سؤال در سطح یک یعنی سطح گزاره قرار می‌گیرد؛ این بدین معنا است که آن‌ها در تشکیل و طراحی مسئله دچار بدفهمی شدند و عملاً موفق به طرح مسئله نبوده‌اند. نکته قابل توجه این بود که چون این سؤال متناسب با شرایط جامعه و درباره موضوعی طرح گردیده بود که جامعه و دانش‌آموزان با آن درگیر بودند، بیشتر دانش‌آموزان با این سؤال ارتباط خوبی برقرار کرده بودند و تنوع و فراوانی مسائل طرح شده نسبتاً بیشتر از سایر سؤالات بود. سهم سایر سطوح عملکرد دانش‌آموزان در شکل ۵ دیده می‌شود، همچنین نمونه برخی از مسائل طرح شده دانش‌آموزان مرتبط با این مسئله در جدول ۱۳ قابل مشاهده است.

#### جدول ۱۳. نمونه های طرح مسئله دانش‌آموزان در سؤال ۵.۴

Table 13: Samples of students problem posing in question 4.5

| مسائل        | نمونه های طرح مسئله دانش‌آموزان در سوال پنجم                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | سطح                   |
|--------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| مسائل نادرست | حاصل $37 \times 27$ را بصورت عددی تواندار بنویسید.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | مسئله نامربوط         |
|              | کشور اول ۲ میلیون نفر و کشور دوم ۳ میلیون نفر جمعیت دارد. در کدام کشور بیماری بیشتر است؟                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | اطلاعات ناکافی مسئله  |
| مسائل درست   | از بین دانش‌آموزان کلاس الف و ب با جمعیت های به ترتیب ۲۰ و ۲۴ نفر به ترتیب ۱۲ و ۱۶ نفر در امتحان ریاضی نمره قبولی کسب کرده اند. کدام کلاس وضعیت درسی بهتری دارد؟                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | جایگزینی              |
|              | سه کشور در یک جنگ شرکت داشته اند کشور اول ۲۵ درصد جمعیت خود را از دست داده است در کشور دوم از هر ۲۵ نفر ۳ نفر کشته شده اند در کشور سوم سه میلیون کشته بر جای مانده است. اگر جمعیت کشور دوم ۱۲ میلیون نفر باشد و کشور اول سه برابر کشور دوم و کشور سوم یک ششم کشور اول جمعیت داشته باشد، کدام کشور بیشترین جمعیت تلف شده را نسبت به سایر کشور ها دارد؟                                                                                                                                                                                    | افزایش                |
|              | کشور کره جنوبی و ژاپن به ترتیب ۱۰ و ۲۰ میلیون جمعیت دارند به دلیل شروع ویروس کووید ۱۹ کره جنوبی ۱ و ژاپن یک و نیم میلیون مبتلا به این ویروس شناسایی شده‌اند این دو کشور برای کنترل پاندمی شروع این ویروس شروع به واردات واکسن کردند کره جنوبی واکسن کرونا با ایمنی ۹۰ درصد وارد کرده و به ۵۰ درصد از مبتلایان تزریق کرده است ژاپن واکسن فایزر با ایمنی ۹۵ درصد را وارد کرده و به ۴۷ درصد از مبتلایان واکسن تزریق کرده است اگر حساب کنیم که همه کسانی که واکسن تزریق نکرده اند دچار ابتلا به این ویروس شوند. کدام کشور بدتر عمل کرده است؟ | جرح و تعدیل           |
|              | فروشنده ای لباسی به قیمت ۳۰۰ هزار تومان را به قیمت ۱۵۰ هزار تومان و لباس دیگر را که قیمت آن ۴۰۰ هزار تومان است به مبلغ ۲۵۰ هزار تومان به فروش گذاشته است. کدام لباس تخفیف بیشتری دارد؟                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | زمینه مدار کردن مسئله |
|              | جمعیت ایران در پایان سال ۱۳۷۵ تقریباً ۶۰ میلیون نفر بوده است پس از آن در هر سال تقریباً دو درصد اضافه شده است در این صورت دو سال دیگر چقدر به جمعیت اضافه شده است؟                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | معکوس کردن مسئله      |

به‌طور کلی با توجه به نتایج حاصل از تحلیل پاسخ‌های دانش‌آموزان به سؤالات آزمون، عملکرد آن‌ها در طرح مسئله تناسبی نسبتاً خوب ارزیابی می‌شود. با این حال بیشتر دانش‌آموزان در پاسخ دهی به سؤالات آزمون و طراحی مسئله متناسب با هر یک از سؤالات، با تغییر متغیرها، اعداد و روابط عددی مسئله اقدام به طرح مسئله نمودند که عملکرد آن‌ها عمدتاً در سطح جایگزینی ارزیابی گردید. همچنین هر یک از سایر سطوح طرح مسئله، درصد فراوانی به خود اختصاص دادند که در بالا به‌صورت جداگانه در هر ۵ سؤال آزمون مورد بررسی قرار گرفتند. همچنین بخش قابل توجهی از پاسخ‌ها مربوط به مسائلی بودند که نادرست طرح گردیده بودند و عوامل مختلفی می‌تواند موجب این امر شده باشند. به‌طور مثال می‌توان به عواملی چون عدم دقت به مفروضات مسئله، طرح مسئله با تکیه بر حدس و بدون ارائه استدلال، درک ناکافی از مفهوم نرخ، مقایسه نادرست کسرها، بدفهمی در مفهوم درصد و نحوه بکارگیری آن و... اشاره نمود. از سوی دیگر بخش عمده‌ای از پاسخ‌های نادرستی که دانش‌آموزان به سؤالات آزمون دادند مربوط به عدم درک ماهیت مسئله می‌باشد؛ چرا که درک ماهیت یک مسئله اولین گام در مسیر حل مسئله می‌باشد [۲۱]. همان‌طور که در نمونه پاسخ‌های دانش‌آموزان در صفحات قبل مشاهده گردید، بخش قابل توجهی از دانش‌آموزان مسائل ضربی را با راهبرد جمعی پاسخ داده بودند و بالعکس. پاسخ‌هایی که دانش‌آموزان به سؤالات آزمون ارائه دادند پس از بررسی دقیق و تحلیل، متناسب با میزان درک مسئله از نظر جمعی یا ضربی یا ثابت بودن و همچنین نحوه استدلال تناسبی آن‌ها و رسیدن به هدف مسئله در هر یک از نه سطح از چارچوب نظری پژوهش طبقه‌بندی شدند. پاسخ‌های صحیح دانش‌آموزان و مسائل درست طراحی شده متناسب با معیارهایی که اشاره شد در سطوح ۴ تا ۹ یعنی سطح جایگزینی تا سطح صورت‌بندی مجدد و به‌طریق مشابه پاسخ‌های نادرست در سطوح ۱ تا ۳ یعنی سطح گزاره تا سطح مسئله غیرممکن طبقه‌بندی شدند. نتایج نشان داد بیشتر پاسخ‌ها در سطح ۴ (جایگزینی) قرار دارد. البته لازم به ذکر است که بخش نسبتاً قابل توجهی از پاسخ‌ها و مسائل طرح شده توسط دانش‌آموزان نادرست بودند که نمایانگر عدم درک یا درک ناکافی دانش‌آموزان از ماهیت ضربی یا جمعی یا ثابت مسائل مرتبط با استدلال تناسبی بود. هر یک از سطوح دیگر نیز در پاسخ‌ها سهم بودند و کمترین سطح از نظر فراوانی پاسخ‌های تعلق گرفته، سطح نه (صورت‌بندی مجدد) بود؛ چرا که تعداد پاسخ‌های بسیار اندکی مشاهده گردید که خلاقیت بالای دانش‌آموزان در طرح مسئله‌ای از روی مسئله داده شده را نمایان سازد.

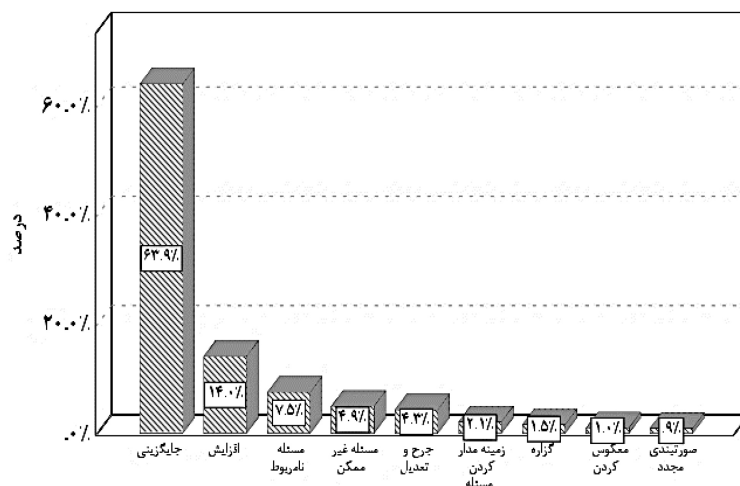
**۲.۴. بررسی و تحلیل کمی عملکرد دانش‌آموزان در طرح مسائل مرتبط با استدلال تناسبی.** در این بخش با استفاده از داده‌های آماری جمع‌آوری شده، پس از کدگذاری داده‌ها و طبقه‌بندی آن‌ها مطابق با چارچوب پژوهش، محققین اقدام به بررسی فراوانی و درصد فراوانی پاسخ‌های دانش‌آموزان به هر یک از سطوح پژوهش پرداختند. نتایج این بررسی‌ها در جدول ۱۴ و شکل ۶ قابل مشاهده است.

در مجموع با توجه به داده‌های شکل ۶ و پراکندگی پاسخ‌های دانش‌آموزان به تفکیک سطوح چارچوب پژوهش، می‌توان به این نتیجه رسید که عملکرد بیشتر دانش‌آموزان در طرح مسائل مرتبط با استدلال تناسبی در سطح جایگزینی قرار گرفت. نتیجه قابل تأمل این است که درصد قابل توجهی از پاسخ‌ها (۷/۵٪) به سؤالات پژوهش در سطح دوم (مسئله نامربوط) قرار داشت، که این موضوع می‌تواند به عدم توانایی دانش‌آموزان در تمیز موقعیت‌های تناسبی از غیرتناسبی و استفاده نابجا از استدلال تناسبی در موقعیت‌های جمعی و ضربی باشد که بنابر [۵، ۵۵] یکی از مهم‌ترین نقاط ضعف دانش‌آموزان متوسطه اول در مواجه با مسائل مرتبط با استدلال تناسبی می‌باشد. ریشه این موضوع را می‌توان در عدم درک روابط جمعی یا ضربی موجود بین متغیرهای مسئله و درک ناکافی از مفاهیمی چون نسبت‌ها، کسرها، نرخ و تناسب دانست [۱، ۱۲، ۲۹]. اکنون به بررسی فراوانی و درصد فراوانی پاسخ‌های درست و نادرست دانش‌آموزان به سؤالات پژوهش می‌پردازیم.

جدول ۱۴. درصد فراوانی پاسخ‌های دانش‌آموزان به سؤالات آزمون به تفکیک سطوح چارچوب پژوهش

**Table 14:** Frequency percentage of students' responses to test questions to separate levels of research framework

| سطوح عملکرد طرح مسئله                  | فراوانی | درصد فراوانی |
|----------------------------------------|---------|--------------|
| گزاره                                  | ۳۴      | ۱.۵          |
| مسئله نامربوط                          | ۱۶۵     | ۷.۵          |
| مسئله غیر ممکن یا اطلاعات ناکافی مسئله | ۱۰۸     | ۴.۹          |
| جایگزینی                               | ۱۴۱۳    | ۶۳.۹         |
| افزایش                                 | ۳۱۰     | ۱۴.۰         |
| جرح و تعدیل                            | ۹۴      | ۴.۳          |
| زمینه مدار کردن مسئله                  | ۴۶      | ۲.۱          |
| معکوس کردن                             | ۲۱      | ۱.۰          |
| صورتبندی مجدد                          | ۱۹      | ۰.۹          |
| کل پاسخ‌ها                             | ۲۲۱۰    | ۱۰۰          |



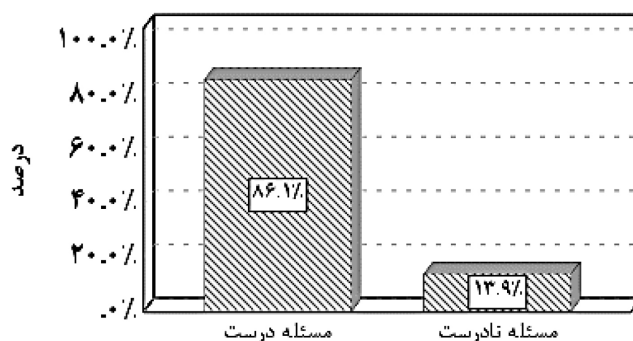
شکل ۶. درصد فراوانی پاسخ‌های دانش‌آموزان به تفکیک سطوح چارچوب پژوهش در طرح مسائل مرتبط با استدلال تناسبی

**Figure 6:** The frequency percentage of students' responses to the separation of the levels of research framework in posing problems related to proportional reasoning

جدول ۱۵. فراوانی و درصد فراوانی پاسخ‌های درست و نادرست دانش‌آموزان در طرح مسائل مرتبط با استدلال تناسبی براساس چارچوب پژوهش

**Table 15:** Frequency and frequency percentage of correct and incorrect responses of students in posing problems related to proportional reasoning based on research framework

| پاسخ‌ها | فراوانی | درصد فراوانی |
|---------|---------|--------------|
| نادرست  | ۳۰۷     | ۱۳.۹         |
| درست    | ۱۹۰۳    | ۸۶.۱         |



شکل ۷. پراکندگی پاسخ‌های درست و نادرست دانش‌آموزان در طرح مسائل مرتبط با استدلال تناسبی براساس چارچوب پژوهش

**Figure 7:** The spread of correct and incorrect responses of students in posing problems related to proportional reasoning based on research framework

با توجه به نتایج به‌دست آمده است از بررسی درصد فراوانی پاسخ‌های درست و نادرست به سؤالات پژوهش، می‌توان دریافت که ۸۶/۱٪ پاسخ‌های دانش‌آموزان درست و بقیه پاسخ‌ها، یعنی ۱۳/۹٪ آن‌ها، نادرست بودند و نشان دهنده این است که بیشتر دانش‌آموزان موفق به طرح مسائل مرتبط با استدلال تناسبی درست مرتبط با مسائل داده شده در آزمون شده بودند. شکل ۷ این مطلب را نمایش می‌دهد.

۳.۴. بررسی تأثیر عوامل پایه تحصیلی، جنسیت و نوع مدرسه بر عملکرد طرح مسئله مرتبط با استدلال تناسبی. اهداف فرعی این پژوهش بررسی تأثیر سه عامل مهم یعنی پایه تحصیلی، جنسیت و نوع مدرسه‌ای که دانش‌آموزان متوسطه اول در آن مشغول به تحصیل بودند (مدارس عادی و تیزهوشان) بر عملکرد دانش‌آموزان در طرح مسائل مرتبط با استدلال تناسبی بود. همچنین معناداری این تأثیر بر عملکرد طرح مسئله دانش‌آموزان در سطح اطمینان ۹۵٪ مطابق با چارچوب پژوهش که توسط محققین و براساس ادبیات پژوهش تهیه و تنظیم شده بود، مورد بررسی قرار گرفت. اکنون به بررسی نتایج تأثیر هریک از عوامل به تفکیک پرداخته می‌شود. نتایج حاصله از بررسی عملکرد طرح مسئله دانش‌آموزان متوسطه اول در مسائل مرتبط با استدلال تناسبی به تفکیک سه عامل پایه تحصیلی، جنسیت و نوع مدرسه، در جدول ۱۶ قابل مشاهده است.

جدول ۱۶. فراوانی پاسخ‌های دانش‌آموزان به تفکیک سه عامل پایه تحصیلی، جنسیت و نوع مدرسه به سؤالات پژوهش مطابق با سطوح عملکرد طرح مسئله برگرفته از چارچوب پژوهش

**Table 16:** The frequency of students' responses to the separation of three factors of school grade, gender and school type to research questions according to the level of problem posing performance based on research framework

| مجموع پاسخ ها | فراوانی پاسخ ها |      |       |      |             |      |      | عملکرد طرح مسئله به تفکیک سطوح چارچوب نظری |
|---------------|-----------------|------|-------|------|-------------|------|------|--------------------------------------------|
|               | نوع مدرسه       |      | جنسیت |      | پایه تحصیلی |      |      |                                            |
|               | تیزهوشان        | عادی | پسر   | دختر | نهم         | هشتم | هفتم |                                            |
| ۳۴            | ۵               | ۲۹   | ۳۰    | ۴    | ۱۰          | ۱۰   | ۱۴   | گزاره                                      |
| ۱۶۵           | ۷               | ۱۵۸  | ۷۹    | ۸۶   | ۶۸          | ۷۰   | ۲۷   | مسئله نامربوط                              |
| ۱۰۸           | ۱۸              | ۹۰   | ۸۸    | ۲۰   | ۳۴          | ۲۴   | ۵۰   | مسئله غیر ممکن یا اطلاعات ناکافی مسئله     |
| ۱۴۱۳          | ۱۰۶             | ۱۳۰۷ | ۸۴۰   | ۵۷۳  | ۴۱۲         | ۳۷۷  | ۶۲۴  | جایگزینی                                   |
| ۳۱۰           | ۲۲              | ۲۸۸  | ۱۸۲   | ۱۲۸  | ۷۶          | ۸۲   | ۱۵۲  | افزایش                                     |
| ۹۴            | ۱               | ۹۳   | ۳۹    | ۵۵   | ۱۷          | ۳۸   | ۳۹   | جرح و تعدیل                                |
| ۴۶            | ۵               | ۴۱   | ۳۱    | ۱۵   | ۱۶          | ۹    | ۲۱   | زمینه مدار کردن مسئله                      |
| ۲۱            | ۴               | ۱۷   | ۱۴    | ۷    | ۴           | ۱۰   | ۷    | معکوس کردن                                 |
| ۱۹            | ۲               | ۱۷   | ۱۲    | ۷    | ۵           | ۴    | ۱۰   | صورتبندی مجدد                              |
| ۲۲۱۰          | ۱۷۰             | ۲۰۴۰ | ۱۳۱۵  | ۸۹۵  | ۶۰۵         | ۶۳۵  | ۹۷۰  | مجموع پاسخ ها                              |
|               | ۲۲۱۰            |      | ۲۲۱۰  |      | ۲۲۱۰        |      |      |                                            |

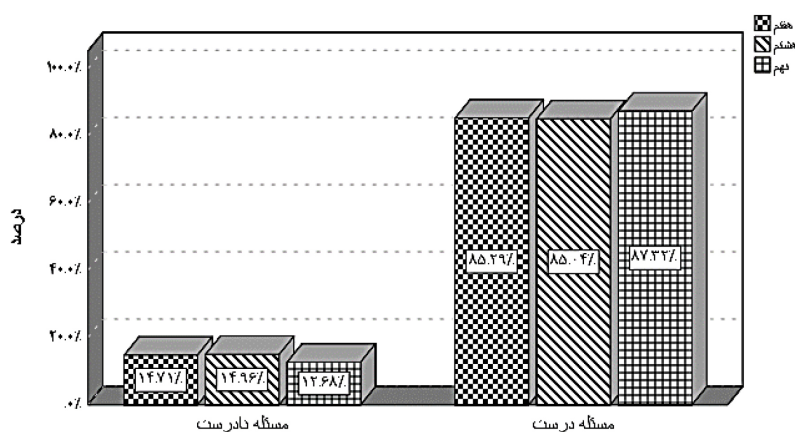
۴.۴. تأثیر پایه تحصیلی بر عملکرد طرح مسئله. بسیاری از پژوهش‌های انجام گرفته در حوزه آموزش ریاضی به بررسی تأثیر عامل پایه تحصیلی بر روی عوامل مختلفی مانند توانایی حل مسئله، طرح مسئله، خلاقیت ریاضی، و یادگیری پرداخته‌اند (به عنوان نمونه [۲۳]). انتظار می‌رود با افزایش پایه تحصیلی، عملکرد ریاضی دانش‌آموزان افزایش یابد. البته در ادبیات پژوهشی حوزه آموزش ریاضی، مواردی مشاهده شده است که با افزایش پایه تحصیلی، عملکرد ریاضی دانش‌آموزان افت کرده است. به عنوان مثال می‌توان به [۵۱] اشاره کرد، که در آن دانش‌آموزان پایه دوم و سوم راهنمایی به سؤالات مشترکی در زمینه‌های مختلف ریاضی پاسخ داده‌اند. نتایج حاصل از [۵۱] حاکی از آن بود که عملکرد دانش‌آموزان پایه دوم راهنمایی از عملکرد ریاضی دانش‌آموزان پایه سوم راهنمایی بالاتر بوده است، چرا که دانش‌آموزان دوم راهنمایی در مواردی که آموزش رسمی ندیده بودند بیشتر از عقل سلیم خود استفاده می‌کردند و به یافته‌های خود از این طریق اطمینان داشتند. در حالی که دانش‌آموزان پایه سوم راهنمایی بیشتر مایل بودند از الگوریتم‌ها و قواعد ریاضی که در همان پایه آموخته بودند برای پاسخگویی به سؤالات استفاده کنند. چنین پدیده‌ای قبلاً نیز توسط هاوسن [۵۲] در جریان مطالعه هشت کتاب درسی مربوط به کشورهای شرکت کننده در تیمز [۵۳]، پیش‌بینی شده بود. در این پژوهش توانایی هر یک از دانش‌آموزان پایه‌های هفتم و هشتم و نهم به تفکیک در طراحی مسائل دارای مفاهیم تناسبی (نسبت، تناسب، نرخ و غیره) با توجه به چارچوب پژوهش در ۹ سطح مورد

بررسی قرارگرفت درصد پاسخ‌های درست و نادرست دانش‌آموزان به تفکیک پایه تحصیلی در جدول ۱۷ و نمودار ۸ قابل مشاهده است.

جدول ۱۷. فراوانی و درصد فراوانی پاسخ‌های درست و نادرست براساس پایه تحصیلی دانش‌آموزان

**Table 17:** Frequency and frequency percentage of correct and incorrect responses based on students' school grade

| پایه تحصیلی | فراوانی |        | درصد فراوانی |        |
|-------------|---------|--------|--------------|--------|
|             | درست    | نادرست | درست         | نادرست |
| هفتم        | ۸۹      | ۵۱۶    | ٪۸۵٫۲۹       | ٪۱۴٫۷۱ |
| هشتم        | ۹۵      | ۵۴۰    | ٪۸۵٫۰۴       | ٪۱۴٫۹۶ |
| نهم         | ۱۲۳     | ۸۴۷    | ٪۸۷٫۳۲       | ٪۱۲٫۶۸ |



شکل ۸. رابطه بین عملکرد دانش‌آموزان در طرح مسائل مرتبط با استدلال تناسبی و پایه تحصیلی

**Figure 8:** The relationship between students' performance in problem posing related to proportional reasoning and educational grade

نتایج جدول ۱۸ نشان می‌دهد بین پایه تحصیلی دانش‌آموزان و عملکرد آن‌ها در طرح مسائل مرتبط با استدلال تناسبی ارتباط معناداری وجود ندارد و عملکرد سه پایه تقریباً یکسان است. نمودار ۸ این مطلب را به تصویر کشیده است.

۵.۴. تأثیر جنسیت بر عملکرد طرح مسئله. پژوهش‌های مختلفی در حوزه آموزش ریاضی صورت گرفته است که وجود تفاوت جنسیتی در عملکرد دختران و پسران را گزارش کرده‌اند (به عنوان نمونه [۵۴]). در بخش عمده‌ای از تحقیقات انجام شده در مورد بررسی تفاوت‌های جنسیتی در آموزش ریاضی، با استفاده از آزمون‌های استاندارد شده عملکرد ریاضی دختران و پسران با هم مقایسه شده است. در ایالات متحده آمریکا ارزیابی ملی پیشرفت تحصیلی برای مقایسه عملکرد ریاضی دختران

### جدول ۱۸. نتایج آزمون‌های دو تأثیر نوع مدرسه بر عملکرد طرح مسئله

Table 18: square test results for the effect of school type on problem posing performance

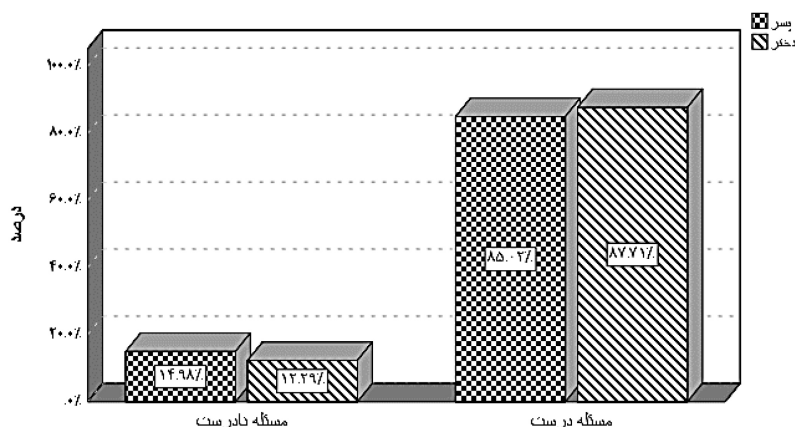
| آزمون                | مقدار | معناداری (دوطرفه) | درجه آزادی |
|----------------------|-------|-------------------|------------|
| خی دو پیرسون         | ۲,۱۳۶ | ۰,۳۴۴             | ۲          |
| ضریب همبستگی اسپیرمن | ۰,۰۹  | ۰/۰۰۲             |            |

و پسران به کار برده شده است [۵۵]. برخی از محققین نیز اشاره می‌کنند که راهبردهای مختلف حل مسئله پسران و دختران، ناشی از تفاوت‌های بین آن‌ها می‌باشد. شاید حضور پررنگ‌تر عواطف و احساسات در دختران نیز، در حل مسئله نقش داشته باشد [۵۵]. [۵۷] اظهار می‌دارد که پسران در زمینه هوش منطقی- ریاضی وضع بهتری نسبت به دختران دارند و در مقایسه با دخترها بیشتر به این هوش متکی هستند. اما تلاشهایی که در بیست سال گذشته در زمینه تقویت هوش ریاضی دختران به عمل آمده است، نتایج مطلوبی بر جای گذاشته است به طوری که در حال حاضر شاهد شکوفایی دختران در ریاضیات هستیم [۵۸]. در پژوهش حاضر با در نظر گرفتن نقش جنسیت، وجود یا عدم وجود تفاوت جنسیتی در طرح مسائل مرتبط با استدلال تناسبی مورد بررسی گرفته است. جدول ۱۹ و نمودار ۹، رابطه بین جنسیت و عملکرد دانش‌آموزان در طرح مسائل مرتبط با استدلال تناسبی را نشان می‌دهند.

### جدول ۱۹. فراوانی و درصد فراوانی پاسخ‌های درست و نادرست به تفکیک جنسیت دانش‌آموزان

Table 19: Frequency and frequency percentage of correct and incorrect responses based on gender of students

|      | فراوانی   |             | درصد فراوانی |             |
|------|-----------|-------------|--------------|-------------|
|      | پاسخ درست | پاسخ نادرست | پاسخ درست    | پاسخ نادرست |
| پسر  | ۱۱۱۸      | ۱۹۷         | ٪۸۵,۰۲       | ٪۱۲,۲۹      |
| دختر | ۷۸۵       | ۱۱۰         | ٪۸۷,۷۱       | ٪۱۴,۹۸      |



شکل ۹. درصد فراوانی پاسخ‌های درست و نادرست به تفکیک جنسیت

Figure 9: Frequency and frequency percentage of correct and incorrect responses based on gender of students

جدول ۲۰. نتایج آزمون خی‌دو و آزمون همبستگی اسپیرمن برای رابطه بین جنسیت و عملکرد طرح مسئله

Table 20: Results of chi - square test and spearman correlation test for the relationship between gender and problem posing performance

| آزمون                | مقدار | معنا داری (دوطرفه) | درجه آزادی |
|----------------------|-------|--------------------|------------|
| خی دو پیرسون         | ۳,۲۲۳ | ۰,۰۷۳              | ۱          |
| ضریب همبستگی اسپیرمن | ۰,۳۸  | ۰,۰۵۷              |            |

با توجه به شکل ۹ و نتایج جداول ۱۹ و ۲۰ و مقدار ضریب به‌دست آمده، می‌توان نتیجه گرفت که بین جنسیت دانش‌آموزان و عملکرد آن‌ها در طرح مسائل مرتبط با استدلال تناسبی ارتباط معناداری وجود ندارد. به‌منظور بررسی دقیق این ادعا از آزمون همبستگی اسپیرمن استفاده شده است. با توجه به مقدار معناداری این آزمون با اطمینان ۹۵٪ می‌توان ادعا کرد که بین عملکرد دانش‌آموزان متوسطه اول در طرح مسائل مرتبط با استدلال تناسبی و جنسیت آن‌ها رابطه‌ی معناداری وجود ندارد.

۶.۴. تأثیر نوع مدرسه بر عملکرد طرح مسئله. بررسی‌ها نشان می‌دهند پژوهش‌های محدودی (به عنوان نمونه [۵۹]) در زمینه مطالعه و مقایسه عملکرد ریاضی دانش‌آموزان در انواع مدارس وجود دارد. بیشتر پژوهش‌های مرتبط با نوع مدرسه، به مقایسه عملکرد انواع مدارس بر اساس عوامل دیگری، همچون ویژگی‌های یادگیری سازمانی، بُعد آموزشی و بُعد پرورشی، پرداخته‌اند. در همین راستا مطالعاتی بسیار اندکی با تأکید بر تأثیر نوع مدرسه بر استدلال تناسبی دانش‌آموزان، در ایران انجام شده است؛ به‌طور مثال رفیع‌پور [۶۰] در پژوهشی به‌طور خاص به بررسی تأثیر نوع مدرسه بر استدلال تناسبی دانش‌آموزان پرداخته است. بدین ترتیب شایسته است به بررسی این موضوع با تعمق بیشتری پرداخته شود. جدول ۲۱، رابطه بین نوع مدرسه و عملکرد دانش‌آموزان در طرح مسائل مرتبط با استدلال تناسبی را نشان می‌دهد.

جدول ۲۱. فراوانی و درصد فراوانی پاسخ‌های درست و نادرست به تفکیک نوع مدرسه

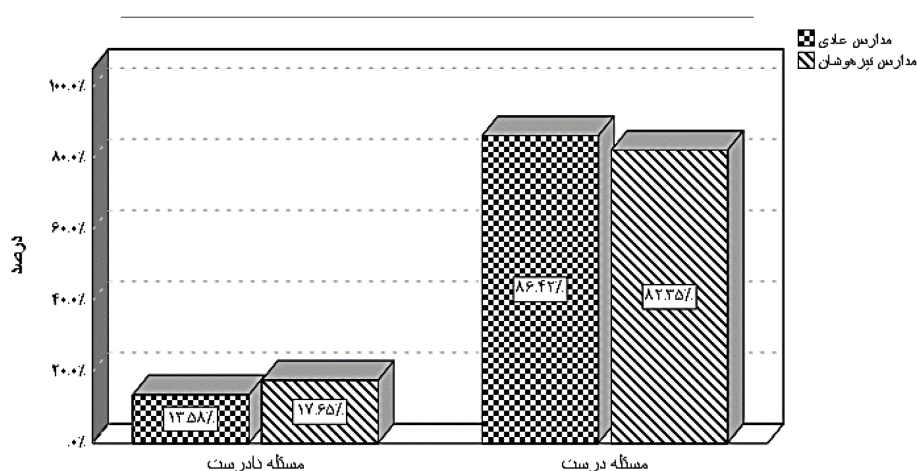
Table 21: Frequency and frequency percentage of correct and incorrect responses based on school type

| درصد فراوانی |           | فراوانی     |           |                |
|--------------|-----------|-------------|-----------|----------------|
| پاسخ نادرست  | پاسخ درست | پاسخ نادرست | پاسخ درست |                |
| ۱۷,۶۵٪       | ۸۲,۳۵٪    | ۳۰          | ۱۴۰       | مدارس تیزهوشان |
| ۱۳,۵۸٪       | ۸۶,۴۲٪    | ۲۷۷         | ۱۷۶۳      | مدارس عادی     |

جدول ۲۲. نتایج آزمون خی دو و آزمون همبستگی اسپیرمن برای رابطه بین نوع مدرسه و عملکرد طرح مسئله

Table 22: Results of chi - square test and spearman correlation test for the relationship between school type and problem posing performance

| آزمون                | مقدار | معنا داری (دوطرفه) | درجه آزادی |
|----------------------|-------|--------------------|------------|
| خی دو پیرسون         | ۲,۱۷۲ | ۰,۱۴۱              | ۲          |
| ضریب همبستگی اسپیرمن | ۰,۰۲۴ | ۰,۲۵۶              |            |



شکل ۱۰. رابطه بین عملکرد دانش‌آموزان در طرح مسائل مرتبط با استدلال تناسبی و نوع مدرسه

Figure 10: The relationship between students' performance in problem posing related to proportional reasoning and school type

با توجه به مقدار معناداری این آزمون با اطمینان ۹۵٪ می‌توان ادعا کرد که بین عملکرد دانش‌آموزان متوسطه اول در طرح مسائل مرتبط با استدلال تناسبی و نوع مدرسه آن‌ها، رابطه‌ی معناداری وجود ندارد. البته با وجود اینکه درصد فراوانی

مسائل درست و سطوح بالاتر در دانش‌آموزان مشغول به تحصیل در مدارس تیزهوشان نسبت به مدارس عادی بیشتر بودند و تفاوت‌هایی قابل مشاهده بودند، از نظر آمار استنباطی و ضرایب همبستگی خی‌دو این تفاوت در سطح ۹۵٪ معنادار نیست. حال برای بررسی دقیق این ادعا و میزان این ارتباط از آزمون همبستگی اسپیرمن استفاده می‌کنیم. با توجه به ضریب همبستگی اسپیرمن و همچنین مقدار معناداری این آزمون با اطمینان ۹۵٪ می‌توان ادعا کرد که بین عملکرد دانش‌آموزان متوسطه اول در طرح مسائل مرتبط با استدلال تناسبی و نوع مدرسه آن‌ها رابطه‌ی مستقیم و معنادار وجود ندارد؛ یعنی باوجود تفاوت در عملکرد مدارس عادی نسبت به مدارس تیزهوشان، این تفاوت معنادار نمی‌باشد.

**۷.۴. پاسخ به سؤالات پژوهش.** در اینجا سؤال اصلی پژوهش این است که عملکرد دانش‌آموزان متوسطه اول در طرح مسائل مرتبط با استدلال تناسبی چگونه است؟ با توجه به نتایج حاصل از تحلیل‌های کمی و کیفی صورت گرفته روی پاسخ‌های دانش‌آموزان به سؤالات آزمون مشاهده می‌شود تقریباً ۶۴٪ از پاسخ‌ها مربوط به سطح جایگزینی می‌باشند یعنی دانش‌آموزان تنها با تغییر مقادیر عددی و متغیرها، اسامی و غیره اقدام به طرح مسئله تناسبی جدید می‌کنند و خلاقیت کمی در طراحی مسئله‌ای جدید از روی مسئله داده شده دیده می‌شود. به علاوه در این دسته از پاسخ‌ها درک روابط تناسبی مسئله و توانایی تمییز انواع روابط عددی موجود در مسئله و توانایی استدلال تناسبی در عملکرد دانش‌آموزان به‌طور نسبی دیده می‌شود. در مجموع دانش‌آموزان عملکرد مناسبی در طرح مسائل مرتبط با استدلال تناسبی از خود نشان دادند. همچنین ۷/۵٪ پاسخ‌های دانش‌آموزان در سطح دوم (مسئله نامربوط) قرار داشت، که این موضوع می‌تواند به عدم توانایی دانش‌آموزان در تمییز موقعیت‌های تناسبی از غیرتناسبی و استفاده نابجا از استدلال تناسبی در موقعیت‌های جمعی و ضربی باشد. از طرف دیگر درصدهای فراوانی نسبتاً کمی از پاسخ‌ها در سطوح بالاتر چارچوب پژوهش، یعنی جرح و تعدیل، زمینه‌مدار کردن، معکوس کردن و صورت‌بندی مجدد، مشاهده گردید که این موضوع می‌تواند ناشی از ضعف شاخص‌های خلاقیت، فقدان درک عمیق دانش‌آموزان از مفهوم طرح مسئله یا نبود آموزش کافی به‌منظور رشد و توسعه توانایی طرح مسئله دانش‌آموزان بوده باشد.

**سؤال فرعی پژوهش:** عوامل جنسیت، پایه تحصیلی و نوع مدرسه چه تأثیری بر عملکرد دانش‌آموزان در طرح مسائل مرتبط با استدلال تناسبی دارند؟ با بررسی نتایج به‌دست آمده از پاسخ‌های دانش‌آموزان به سؤالات آزمون، تمامی مسائل طرح شده آنها بر اساس سطوح چارچوب نظری پژوهش و به تفکیک عوامل پایه تحصیلی، جنسیت و نوع مدرسه از نظر مدارس عادی و تیزهوشان طبقه‌بندی گردیدند. با تحلیل نتایج آزمون خی‌دو و ضریب همبستگی اسپیرمن در سطح اطمینان ۹۵٪، مشاهده گردید که بین عملکرد دانش‌آموزان متوسطه اول در طرح مسائل مرتبط با استدلال تناسبی و پایه تحصیلی آن‌ها رابطه‌ی مستقیم و معناداری وجود دارد. با افزایش پایه تحصیلی، عملکرد دانش‌آموزان در طرح مسائل مرتبط با استدلال تناسبی نیز افزایش می‌یابد و شاهد افزایش مسائل طرح شده درست براساس مسئله داده شده، توسعه درک و فهم آن‌ها از روابط تناسبی موجود در مسئله و به‌طور کلی شاهد توسعه توانایی استدلال تناسبی آنها هستیم. همچنین مشاهده شد که بین جنسیت دانش‌آموزان و عملکرد آن‌ها در طرح مسائل مرتبط با استدلال تناسبی ارتباط معناداری وجود ندارد و عملکرد دانش‌آموزان دختر و پسر در طرح مسئله تناسبی تفاوت معناداری با یکدیگر ندارد. همچنین با مقایسه عملکرد دانش‌آموزان مشغول به تحصیل در مدارس عادی و تیزهوشان می‌توان با اطمینان ۹۵٪ گفت که بین عملکرد دانش‌آموزان متوسطه اول در طرح مسائل مرتبط با استدلال تناسبی و نوع مدرسه آن‌ها رابطه‌ی مستقیم و معناداری وجود ندارد. یعنی با وجود مشاهده تفاوت‌هایی کلی در عملکرد دانش‌آموزان مشغول به تحصیل در مدارس تیزهوشان و مدارس عادی، این تفاوت از نظر آمار استنباطی و ضرایب همبستگی خی‌دو در سطح ۹۵٪ معنادار نیست و دانش‌آموزان مشغول به تحصیل در مدارس تیزهوشان و مدارس عادی، عملکردی نه چندان متفاوت در طرح مسئله تناسبی داشتند.

## ۵. بحث و نتیجه‌گیری

در این پژوهش که به روش توصیفی-پیمایشی انجام شده است، عملکرد دانش‌آموزان مقطع متوسطه اول در طرح مسائل مرتبط با استدلال تناسبی و همچنین تأثیر عوامل پایه تحصیلی، جنسیت و نوع مدرسه بر طرح مسائل مرتبط با استدلال تناسبی، مورد بررسی قرار گرفت. با توجه به نتایج حاصل از تحلیل پاسخ‌های دانش‌آموزان به سؤالات آزمون مشاهده می‌شود که دانش‌آموزان در پاسخ‌دهی به سؤالات آزمون و طراحی مسئله، سطوح عملکردی بسیار متنوعی را از خود به نمایش گذاشتند. برخی در درک مفهوم مسئله نیز دچار بدفهمی شده بودند، و برخی دیگر مسئله‌ای نامرتبط به مفاهیم تناسب و استدلال تناسبی طرح کرده بودند. برخی با تغییر متغیرها، اسامی، اعداد و غیره در مسئله، و برخی دیگر با افزودن یک متغیر، مسئله‌ای جدید طرح کرده بودند. همچنین از موارد دیگری که مشاهده گردید می‌توان به ایجاد تغییرات بنیادی در مسئله، انتقال مسئله به فضایی زمینه‌مدار و مرتبط با دنیای واقعی، معکوس کردن مسئله و جابه‌جا کردن خواسته و داده‌های مسئله با یکدیگر و غیره اشاره نمود. نتایج این پژوهش درباره تأثیر پایه تحصیلی با پژوهش‌ها و منابع موجود، همچون [۱، ۱۰، ۲۶، ۵۱] همسو بود. درباره تأثیر عامل جنسیت نتایج مطالعه حاضر با [۵۴] که در آن عملکرد پسران نسبت به دختران در حل یک مسئله غیرمعقول و تناسبی بیشتر بوده است، همسو نیست. در خصوص تأثیر نوع مدرسه بر عملکرد حل مسئله، نتایج این پژوهش با پژوهش‌های انجام شده در [۵۹، ۶۰]، همسو نبود. از جمله عوامل عدم موفقیت و عملکرد پایین در طرح مسائل مرتبط با استدلال تناسبی می‌توان به عدم دقت به مفروضات مسئله، درک ناکافی از مفهوم نرخ، مقایسه نادرست کسرها، بدفهمی در مفهوم درصد و نحوه به‌کارگیری آن، اشاره نمود. از سوی دیگر بخش عمده‌ای از پاسخ‌های نادرست دانش‌آموزان مرتبط با سؤالات آزمون، مربوط به عدم درک ماهیت مسئله می‌باشد؛ چرا که درک ماهیت یک مسئله اولین گام در مسیر حل مسئله و به طبع آن طراحی مسئله‌ای از آن موقعیت می‌باشد. این دانش‌آموزان ماهیت و نوع مسئله را از نظر ضربی یا جمعی بودن تشخیص ندادند و به پاسخ نادرست رسیدند. نتایج پژوهش حاکی از آن بود که بیش از نیمی از مسائل طرح شده در سطح پنج (جایگزینی) قرار داشت. اگرچه بخش قابل توجهی از پاسخ‌ها در سطح دو (مسئله نامربوط) قرار داشت که نمایانگر عدم درک یا درک ناکافی دانش‌آموزان از ماهیت ضربی یا جمعی یا ثابت مسائل مرتبط با استدلال تناسبی بود که نتیجه آن طرح مسئله‌ای بدون ارتباط به مسئله داده شده بود. هر یک از سطوح دیگر نیز در پاسخ‌ها سهم بودند و کمترین سطوح از نظر فراوانی پاسخ‌های تعلق گرفته، سطوح زمینه‌مدار کردن، معکوس کردن و صورت‌بندی مجدد بودند؛ چرا که تعداد پاسخ‌های بسیار اندکی مشاهده گردید که این موضوع می‌تواند ناشی از ضعف شاخص‌های خلاقیت، فقدان درک عمیق دانش‌آموزان از مفهوم طرح مسئله یا نبود آموزش کافی به‌منظور رشد و توسعه توانایی طرح مسئله دانش‌آموزان بوده باشد. همچنین عوامل پایه تحصیلی و نوع مدرسه بر عملکرد طرح مسئله دانش‌آموزان در مسائل مرتبط با استدلال تناسبی تأثیر می‌گذارند و در سطح اطمینان ۹۵٪ تفاوت معناداری بین عملکرد دانش‌آموزان به تفکیک پایه‌های تحصیلی وجود داشت، اما عوامل جنسیت و نوع مدرسه‌ای که دانش‌آموزان در آن مشغول به تحصیل بودند، تأثیری بر عملکرد طرح مسئله آنان نگذاشت و بین عملکرد دانش‌آموزان دختر و پسر و همچنین دانش‌آموزان مدارس عادی و تیزهوشان در طرح مسائل مرتبط با استدلال تناسبی در سطح اطمینان ۹۵٪، تفاوت معناداری مشاهده نگردید. یافته‌ها نشان دادند بالا رفتن پایه تحصیلی موجب افزایش عملکرد طرح مسئله دانش‌آموزان مقطع متوسطه اول در مسائل مرتبط با استدلال تناسبی شده است و در مجموع عملکرد کلی دانش‌آموزان نهم از پایه هشتم بهتر بود و پایه هشتم از پایه هفتم. این نتیجه حاکی از رشد و توسعه درک و فهم دانش‌آموزان از مفاهیم مرتبط با حوزه استدلال تناسبی مانند، کسرها، نسبت‌ها، نرخ‌ها، تناسب، و درصد، در گذر از پایه هفتم تا نهم بود. همان‌طور که در بسیاری از پژوهش‌های انجام شده همچون [۱، ۲۶، ۶۱]، بیان شده است، توانایی استدلال تناسبی دانش‌آموزان در طول پایه‌های پنجم تا نهم رشد و توسعه می‌یابد.

یافته‌ها دلالت‌های مفیدی را برای غنی‌تر ساختن فرصت‌های یادگیری در کتاب‌های درسی و همچنین تولید محتوای مناسب برای آموزش معلمان در اختیار می‌گذارد. موضوع تناسب از جمله موضوعاتی است که از دوره ابتدایی تا متوسطه حضور مستقیم و غیرمستقیم آن در مفاهیم درسی ریاضی و حتی غیرمرتبط با ریاضی احساس می‌شود. دانش‌آموزان همواره با آن و سایر مفاهیم حوزه استدلال تناسبی همانند نسبت‌ها، تناسب، کسر، نرخ‌ها، درصد، درگیر هستند. علاوه بر این آموزش بسیاری از مفاهیم عالی ریاضی، مانند مفهوم مشتق، بدون داشتن درک و مهارت کافی در استدلال تناسبی امکان‌پذیر نیست. به همین دلیل انتظار می‌رود تا توجه بر روی نحوه آموزش مفاهیم بنیادی حوزه تناسب در دوره ابتدایی و متوسطه بیشتر باشد و برنامه‌ریزی آموزشی با نگاهی دقیق‌تر نسبت به یاددهی و یادگیری آن‌ها بنگرد. با وجود محدودیت‌های کرونایی همچون تعطیلی مدارس و مراکز آموزشی و کاهش دسترسی حضوری به دانش‌آموزان در طول فرآیند این پژوهش، که می‌توانست مسیر پژوهش را با چالش‌هایی مواجه نماید، تمامی فرآیند پژوهش به صورت مجازی در بستر پیام رسان‌های اجتماعی (که مهم‌ترین آنها شبکه دانش‌آموزی شاد بود) به خوبی اجرا شد و پاسخ‌های دانش‌آموزان از همین طریق جمع‌آوری شد و تجزیه و تحلیل بر روی آن‌ها با استفاده از نرم افزارهای آماری صورت پذیرفت. در ضمن این پژوهش مشخص شد عوامل دیگری نیز می‌توانند بر عملکرد دانش‌آموزان متوسطه اول در طرح مسائل مرتبط با استدلال تناسبی تأثیرگذار باشند؛ از جمله نحوه طراحی تکالیف، روابط بین متغیرهای مسئله تناسبی و ساختار تکالیف طرح شده مرتبط با تناسب و استدلال تناسبی. این موضوعات و موضوعاتی چون تأثیر ساختار تکالیف تناسبی بر عملکرد طرح مسئله دانش‌آموزان، بررسی و شناسایی بدفهمی‌های دانش‌آموزان در طرح مسائل مرتبط با استدلال تناسبی، بررسی توانایی معلمان ابتدایی در طرح مسائل مرتبط با استدلال تناسبی با اهمیت هستند و می‌توانند در پژوهش‌های بعدی توسط پژوهشگران آموزش ریاضی، مورد بررسی و مطالعه قرار گیرند.

## مراجع

- [1] R. Lesh, T. R. Post and M. Behr, *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*, National Council of Teachers of Mathematics, Lawrence Erlbaum Associates, 1988 93-118.
- [2] Y. Copur-Gencturk, C. Baek and T. Doleck, A closer look at teachers' proportional reasoning, *International Journal of Science and Mathematics Education*, **21** (2023) 113-129.
- [3] R. Lesh, M. Behr and T. Post, *Rational number relations and proportions*, In C. Janvier (Ed.), Problems of representations in the teaching and learning of mathematics, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1987 41-58.
- [4] S. J. Lamon, Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research, *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, **1** (2007) 629-667.
- [5] J. Lobato, C. Orrill, B. Druken and E. Jacobson, Middle school teachers' knowledge of proportional reasoning for teaching, In Conference: *Annual Meeting of the American Educational Research Association (AERA)*, New Orleans, (2011).
- [6] M. Arican, The development and application of an interview structure on determining preservice mathematics teachers' competence in proportional reasoning, *Mathematics Education Research Journal*, **35** (2023) 55-79.
- [7] S. J. Lamon, *Teaching Fractions and Ratios for Understanding*, Essential Content 83 and Instructional Strategies for Teachers, Routledge, New York, 2020.

- [8] M. M. Petit, R. E. Laird, M. F. Wyneken, F. R. Huntton, M. D. Abele-Austin and J. D. Sequeira, *A focus on ratios and proportions*, Bringing mathematics education research to the classroom, Routledge, New York, 2020.
- [9] K. Hino and H. Kato, Teaching whole-number multiplication to promote children's proportional reasoning: A practice-based perspective from Japan, *ZDM*, **51** (2018) 125–137.
- [10] K. A. Cramer, T. Post and S. Currier, Learning and teaching ratio and proportion: Research implications: Middle grades mathematics, *In Conference: Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics*, Macmillan Publishing Company, New York, NY, (1993) 159–178.
- [11] A. S. Supply, E. Vanluydt, W. Van Dooren, and P. Onghena, Out of proportion or out of context? Comparing 8-to 9- year-olds' proportional reasoning abilities across fair-sharing, mixtures, and probability contexts, *Educ. Stud. Math.*, **113** (2023) 371–388.
- [12] D. Ben-Chaim, J. T. Fey, W. M. Fitzgerald, C. Benedetto and J. Miller, Proportional reasoning among 7th grade students with different curricular experiences, *Educ. Stud. Math.*, **36** (1998) 247–273.
- [13] J. M. Amador, A. Brakoniecki and D. Glassmeyer, Secondary teachers' analytic stance of noticing based on video of proportional reasoning, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, (2022) pp. 21.
- [14] S. L. D. Benson, *The influence of studying students' proportional reasoning on middle school mathematics teachers' content and pedagogical content knowledge*, University of Houston, 2011.
- [15] K. N. Begolli, T. Dai, K. M. McGinn and J. L. Booth, Could probability be out of proportion? Self-explanation and example-based practice help students with lower proportional reasoning skills learn probability, *Instructional Science*, **49** (2021) 441–473.
- [16] A. Kahaki E. Reyhani E. Bahrami, Assessment of Understanding and Understanding of Eighth Grade Students of Probability, *Andishe-ye Amari*, **24** (2019) 57–80.
- [17] S. Dole, D. Clarke, T. Wright and G. Hilton, Students' proportional reasoning in mathematics and science, *In Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (2012) 195–202.
- [18] H. Amiri, et al, *Mathematics for Year 6 in elementary school*, Organization for Educational Research and Planning, Ministry of Education, Tehran (Iran), Printing and Publishing Company of Iran Textbooks, 2021a.
- [19] H. Amiri, et al, *Mathematics for Year 8 in high school*, Organization for Educational Research and Planning, Ministry of Education, Tehran (Iran), Printing and Publishing Company of Iran Textbooks, 2021b.
- [20] H. Amiri, et al, *Mathematics for Year 9 in high school*, Organization for Educational Research and Planning, Ministry of Education, Tehran (Iran), Printing and Publishing Company of Iran Textbooks, 2021c.
- [21] E. Reyhani, H. Barkhordari and S. Haghjoo, Investigating the performance of students in solving proportional problems, *Journal of Educational and Scholastic Studies*, (2023).

- [22] E. Vanluydt, T. Degrande, L. Verschaffel and W. Van Dooren, Early stages of proportional reasoning: A cross-sectional study with 5-to 9-year olds, *European Journal of Psychology of Education*, **35** (2019) 529-547.
- [23] S. Haghighi and E. Reyhani, A qualitative meta-analysis of assessment frameworks of mathematical problem-posing skills, *Research in School and Virtual Learning*, **9** (2022) 9-28.
- [24] L. Baumanns and B. Rott, The process of problem posing: development of a descriptive phase model of problem posing, *Educational Studies in Mathematics*, **110** (2022) 251-269.
- [25] E. A. Silver, On mathematical problem posing, For the Learning of Mathematics, **14** (1994) 19-28.
- [26] NCTM. (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.
- [27] S. J. Lamon, *More: In-depth discussion of the reasoning activities in Teaching fractions and ratios for understanding*, Routledge, 2005.
- [28] M. J. Behr, R. Lesh, T. Post and E. A. Silver, *Rational number concepts*, Acquisition of mathematics concepts and processes, New York: Academic Press, 1983 91-125.
- [29] J. A. Van de Walle, K. S. Karp and J. M. Bay-Williams, *Elementary and middle school mathematics*, London: Pearson Education UK, 2016.
- [30] L. Fisher, Strategies used by secondary mathematics teachers to solve proportion problems, *Journal for Research in Mathematics Education*, **19** (2) (1988) 157-168.
- [31] E. Reyhani, S. Bakhshalizadeh and M. Dosti, Grade 6th students understanding of fraction, *Journal of Curriculum Studies*, **9** (34) (2014) 133-164.
- [32] T. Degrande, L. Verschaffel and W. V. Dooren, Proportional word problem solving through a modeling lens: A half-empty or half-full glass?, In *Posing and solving mathematical problems*, Springer, Cham, (2016) 209-229.
- [33] W. Van Dooren, X. Vamvakoussi and L. Verschaffel, *Proportional reasoning*, (Educational Practices Series, 30). International Academy of Education (IAE), (2018).
- [34] T. K. Ulger, I. Bozkurt and M. Altun, Analyzing in-service teachers' process of mathematical literacy problem posing, *International Electronic Journal of Mathematics Education*, **17** (3) (2022) pp. 19.
- [35] E. Stoyanova and N. F. Ellerton, A framework for research into students' problem posing, In P. Clarkson (Ed.), *Technology in Mathematics Education*, Melbourne: Mathematics Education Research Group of Australasia, (1996) 518-525.
- [36] M. Eskandari and E. Reyhani, Investigating the process of problem posing, *Journal of Theory & Practice in Curriculum*, **2** (3) (2014) 117-140.
- [37] E. Reyhani and S. Haghighi, *Mathematical problem solving : from theory to practice: A perspective for mathematics teacher education*, Shahid Rajaei Teacher Training University, Tehran, Iran, 2020.
- [38] M. Izadi and E. Reyhani, Using an unusual Task to investigate elementary school teachers' mathematical-task knowledge and common content knowledge of fraction concept in tehran province, *Research in School and Virtual Learning* **7** (4) (2020) 55-70.

- [39] E. Stoyanova, N. F. Ellerton, A framework for research into students' problem posing, In P. Clarkson (Ed.), *Technology in Mathematics Education*, Melbourne: Mathematics Education Research Group of Australasia, (1996) 518–525.
- [40] L. D. English, The development of fifth-grade children's problem-posing abilities, *Educational Studies in Mathematics*, **34** (3) (1997) 183–217.
- [41] S. H. Im and A. K. Jitendra, Analysis of proportional reasoning and misconceptions among students with mathematical learning disabilities, *The Journal of Mathematical Behavior*, **57** (2020).
- [42] M. Nedaei, F. Radmehr and M. Drake, Exploring undergraduate engineering students' mathematical problem-posing: the case of integral-area relationships in integral calculus, *Mathematical Thinking and Learning*, **24** (2) (2022) 149–175.
- [43] S. S. Leung, Teachers implementing mathematical problem posing in the classroom: challenges and strategies, *Educational studies in mathematics*, **83** (1) (2013) 103–116.
- [44] J. E. A. Cai, An investigation of U. S. and Chinese students' mathematical problem posing and problem solving, *Mathematics Education Research Journal*, **10** (1) (1998) 37–50.
- [45] M. Carney, K. Paulding and J. Champion, Efficient assessment of students' proportional reasoning, *Applied Measurement in Education*, **35** (1) (2022) 46–62.
- [46] C. K. Bilir, Pre-service Teachers' Use of Proportional Reasoning Skills to Solve the Area Measurement Problems of the Rectangles, In *international online conference on mathematics education*, 26-29 Istanbul/turkey (2021) p. 63.
- [47] E. Reyhani, F. Hamidi and F. Kolahdouz, A study on algebraic proof conception of high school second graders, *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, **31** (2012) 236–241.
- [48] A. Peng, M. Li, L. Lin, L. Cao and J. Cai, Problem posing and its relationship with teaching experience of elementary school mathematics teachers from ethnic minority area in southwest china, *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, **18** (2) (2022) pp. 14.
- [49] C. Vistro-Yu, *Using innovation techniques to generate 'new' Problems*, In book: Mathematical problem solving, Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2009 185–207.
- [50] E. Vysotskaya, A. Lobanova, I. Rekhtman and M. Yanishevskaya, The challenge of proportion: does it require rethinking of the measurement paradigm?, *Educational Studies in Mathematics*, **106** (3) (2021) 429–446.
- [51] A. Rafipour and L. Goya, Why was the mathematical performance of Iranian students in TIMMS unique?, *Journal of Mathematical Education Development*, (75) (2004) 15–22.
- [52] G. Howson, Looking back-and looking forward, *The Mathematical Gazette*, **80** (487) (1996) 129–136.
- [53] J. M. Eckert, Trends in mathematics and science study (TIMSS): international accountability and implications for science instruction, *Research in Comparative and International Education*, **3** (2) (2008) 202–210.
- [54] A. Rafi pour and L. Jokār, The role of gender and grade level in students' math performance to solve a none-routine problem, *Journal of Educational Innovation*, **12** (4) (2014) 27–44.

- [55] T. Weiland, C. H. Orrill, G. G. Nagar, R. E. Brown and J. Burke, Framing a robust understanding of proportional reasoning for teachers, *J. Math. Teach. Educ.*, **24** (2) (2021) 179–202.
- [56] A. M. Gallagher and R. De Lisi, Gender differences in scholastic aptitude test: Mathematics problem solving among high-ability students, *Journal of Educational Psychology*, **86** (2) (1994) 204–211.
- [57] M. Gorian, *Different learning of girls and boys*, Payk Bahar, Tehran, Iran, 2004.
- [58] E. G. Fierros, *Examining gender differences in mathematics achievement on the Third International Mathematics and Science Study (TIMSS)*, Boston College, 1999.
- [59] H. P. Sharifi and M. Ghodrati, The Investigation of gifted girl's creativity in talented-students, non-profit and public achools, *Jornal of Analytical-Cognitive Psychology*, **1** (3) (2010) 31–40.
- [60] A. Rafi pour, The study of the role of type of schools in proportional reasoning of students, *Educational Innovations*, **11** (2014) 24–33.
- [61] M. J. Behr, G. Harel, T. Post and R. Lesh, *Rational numbers: Toward a semantic analysis-emphasis on the operator construct*, New Jersey, 1993 13–47.
- [62] G. Harel and M. Behr, Structure and hierarchy of missing value proportion problems and their representations, *J. Math. Behav.*, **8** (1989) 77–119.

ابراهیم ریحانی

دانشکده علوم پایه، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی تهران، ایران

e\_reyhani@sru.ac.ir

ابراهیم ریحانی کارشناسی دبیری ریاضی خود را در دانشگاه خوارزمی، کارشناسی ارشد را در دانشگاه شهید بهشتی و دکتری آموزش ریاضی را در دانشگاه دولتی مسکو در سال ۱۳۸۴ دریافت نمود و در حال حاضر دانشیار دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی می‌باشد.



حمیدرضا برخورداری

دانشکده علوم پایه، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی تهران، ایران

hamidrezabarkhordary@gmail.com

حمیدرضا برخورداری در سال ۱۳۹۳ وارد مقطع کارشناسی رشته دبیری ریاضی دانشگاه فرهنگیان شد و در سال ۱۳۹۹ کارشناسی ارشد رشته آموزش ریاضی را در دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی اخذ نمود.



سعید حق‌جو

دانشکده علوم پایه، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی تهران، ایران

s.haghjoo@sru.ac.ir

سعید حق‌جو کارشناسی رشته ریاضی محض را از دانشگاه خلیج فارس و کارشناسی ارشد آموزش ریاضی را در سال ۱۳۹۷ و دکتری آموزش ریاضی را در سال ۱۴۰۱ از دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی اخذ کرد.

