Mathematics and Society
University of Isfahan
http://math-sci.ui.ac.ir

Journal of Mathematics and Society
ISSN (print): 2345-6493, ISSN (on-line): 2345-6507
Vol. 8 No. 3 (2023), pp. 55-79.

http://ui.ac.ir

ON 4-DIMENSIONAL EINSTEINIAN MANIFOLDS WITH PARALLEL NULL DISTRIBUTION

MEHDI JAFARI

Abstract. In this paper, we investigate the Einsteinian manifolds with parallel null distribution. For this purpose, we first obtain the equations, which are known as Einstein's equations, that lead to finding the mentioned manifolds and then, we reduce Einstein's equations by using Lie symmetry method. In this method, we first obtain the generators of the symmetry algebra and then calculate the differential Invariants for each of the generators and calculate the group invariant solutions of this equation. We also obtain the optimal system of the one-dimensional sub-algebras of these equations which helps us to have a classification on group invariant solutions by using conjugate mapping.

1. **Introduction**

In the theory of general relativity, the volume of space-time matter can be described by the energy tensor. The fact that the mass of matter in the universe can be considered as a complete fluid in the standard cosmological model led to the hypothesis that it is possible to model the tendency field with appropriate 4-dimensional Lorentzian metrics. This fact made the role of such metrics and the manifolds resulting from it colorful in physics and especially in the theory of relativity [1].

In the meantime, 4-dimensional manifolds that have an null and parallel distribution play an essential role. These manifolds are called Walker manifolds. According to the conditions that must be

Keywords: Einsteinian manifolds, parallel null distribution, Lie symmetry group, group invariant solutions.

Communicated by Mohamad Reza Pouryayevali.

Article Type: Research Paper.

Received: 01/07/2023, Accepted: 14/10/2023, Published Online: 04-11-2023.

Cite this article: M. Jafari, On 4-dimensional Einsteinian manifolds with parallel null distribution, *Journal of Mathematics and Society*, **8** no. 3 (2023) 55–79.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.138258.1589 .

established on the metric of 4-dimensional Walker manifolds, a system of equations is created, which is called Einstein's equations [20]. So, solving the Einstein's equations leads to finding the general metric form of Walker manifolds. These manifolds play a significant role in modeling physical problems and have been studied recently by many mathematicians and physicists [8]. It is worth mentioning that the Walkers' manifolds were first introduced by Walker and was investigated around the years 1950 to 1953 (he studied the manifolds that have a null parallel distribution). In honor of this great mathematician and due to his findings on this field, these manifolds are called Walker manifolds [18, 19].

Einstein's equations play an essential role in making cosmological models. These models express the fact that matter determines the geometry of space-time and, opposite to the movement of matter, it is defined by the space meter tensor [17]. Accordingly, the importance four-dimensional Einstein Walker manifolds as background space for physical models and geometrical as well as solving Einstein's equations to obtain such manifolds are specified. One of the most important and practical methods for analyzing and solving equations is the Lie symmetry method which was first introduced by Marius Sophos Lie in the late 19th century [13]. This method is based on the integration of differential equations and it caused Lie to devote his efforts to the development of the theory of differential equations based on the concept of Lie groups. The Lie groups have many applications in algebraic topology, differential geometry, special functions, numerical analysis, control theory, mechanics classical and quantum relativity. It should be noted that differential equations are the main source of the application of Lie groups in this strings. If we want to briefly talk about the symmetry group of a system of differential equations, we can say that these groups include transformations that transform the solutions of the system. From Lie's point of view, symmetries are geometric transformations that act on the space containing the independent and dependent variables of the system and also act on the solutions of the system with the changes applied to their graph. One of Lie's most important discoveries in the field of differential equations is that he was able to show that the complex nonlinear conditions governing a dynamic system can be locally converted into linear conditions by the infinitesimal derivatives of that system under the generators of its symmetry group, which is important in physics. This led to the use of computers and many software in this field because working with symmetric groups has calculations that follow an algorithmic process [4]. Having the symmetry group of a system of differential equations has many advantages, for example, we can mention the classification of the solutions of the system of differential equations. The basis of this classification is that the solutions that are placed in a category can be converted to each other by some generators of the symmetry group [16].

If we are involved with an ordinary differential equation system, the symmetry group helps us to get the solution by one time integration by reducing the order of the equation to one, and in the case that

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.138258.1589

the desired equation is of the first order, the general solution is also obtained. But unfortunately, this is not the case for partial differential equations, that is, the general solution of such equations cannot necessarily be obtained by having a group of symmetries. (Except in the case where the system can be converted into a linear system.) In this situation, only some solutions are obtained, which fall under some subgroups of the symmetry group. These solutions are known as group invariant solutions, which are obtained from the solution of a system that contains a smaller number of independent variables than the original system [5]. In recent years, several equations have been investigated using this method and their group invariant solutions have been obtained. For example, the KdV equation and its different modes, which is one of the important models in the theory of long waves in shallow waters and other physical systems, have been studied in several sources, including [2, 11]. Also, exact solutions of the BBM equation, which is one of the important equations in the modeling of gravity waves with small amplitude, have also been obtained with this method [10, 12].

Our goal in this article is to analyze the symmetric group and obtain group-invariant solutions for Einstein's equations. In addition, we obtain a classification on these solutions based on the optimal system of one-dimensional subalgebras of symmetric algebra. The division of this article is as follows: In the second section, the prerequisites and preliminary definitions and some important results about Riemannian pseudo-geometry and Einsteinian tunnels are stated. In the third section, Lie's symmetry method is stated and the symmetry group of Einstein's equations is obtained. Also, a complete analysis of this group and Lie algebras like it will be presented. In the fourth section, the optimal system of the one-parameter subalgebras of the symmetric algebra of Einstein's equations is presented, and then the reduced equations are obtained using differential derivations. In the end, by solving the reduced equations, the solutions of Einstein's equations are obtained.

2. **Main Results**

We first prove that the infinitesimal generators of the symmetric Lie algebra of the Einstein's equations and its general form, the second order extension and the characteristic of vector field V are as follows:

$$\begin{aligned} &V_1 = \partial_x, && V_5 = b\partial_c + 2c\partial_a + t\partial_x,\\ &V_2 = \partial_t, && V_6 = c\partial_c + 2b\partial_b + t\partial_t,\\ &V_3 = -c\partial_c + -2b\partial_b + x\partial_x, && V_7 = c\partial_c + b\partial_b + a\partial_a.\\ &V_4 = a\partial_c + 2c\partial_b + x\partial_t, && \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} V = {}&\xi^1(x,t,a,b,c)\partial_x + \xi^2(x,t,a,b,c)\partial_t + \\ &\phi_1(x,t,a,b,c)\partial_a + \phi_2(x,t,a,b,c)\partial_b + \phi_3(x,t,a,b,c)\partial_c. \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}V^{(2)} &= V+\phi_1^x\partial_{a_x}+\phi_1^t\partial_{a_t}+\phi_2^x\partial_{b_x}+\phi_2^t\partial_{b_t}+\phi_3^x\partial_{c_x}+\phi_3^t\partial_{c_t}\\ &+\phi_1^{xx}\partial_{a_{xx}}+\phi_2^{xx}\partial_{b_{xx}}+\phi_3^{xx}\partial_{c_{xx}}+\phi_1^{xt}\partial_{a_{xt}}+\phi_2^{xt}\partial_{b_{xt}}\\ &+\phi_3^{xt}\partial_{c_{xt}}+\phi_1^{tt}\partial_{a_{tt}}+\phi_2^{tt}\partial_{b_{tt}}+\phi_3^{tt}\partial_{c_{tt}}.\end{aligned}$$

$$Q_1=\phi_1-\xi^1a_x-\xi^2a_t,\qquad Q_2=\phi_2-\xi^1b_x-\xi^2b_t,\qquad Q_3=\phi_3-\xi^1c_x-\xi^2c_t.$$

Then, by using the invariant theorem, we obtain the following irreducibility conditions:

$$\begin{aligned}&V^{(2)}[a_{xx}-b_{tt}]=0, && a_{xx}-b_{tt}=0,\\ &V^{(2)}[c_{xx}+b_{xy}]=0, && c_{xx}+b_{xy}=0,\\ && \vdots &\\ &V^{(2)}[-bc_{xt}+2cb_{xt}+ab_{xx}-{c_x}^2+b_tc_x-b_xc_t+a_xb_x]=0, &&\\ && -bc_{xt}+2cb_{xt}+ab_{xx}-{c_x}^2+b_tc_x-b_xc_t+a_xb_x=0.\end{aligned}\tag{2.3}$$

Now, by replacing the extension coefficients in (2.3), we get the following determining system:

$$\begin{aligned}&a^3\xi_a^1=0,\quad b^2\xi_b^1=0,\quad a\xi_b^2=0,\quad b^2\xi_b^2=0,\quad ac\phi_{2_a}=0,\quad cb\xi_b^1=0,\dots\\ &abc(-3\xi_t^1-\phi_{3_b})+2c^2a(-\xi_t^2+\xi_x^1)+ba^2(\phi_{2_b}-\phi_{3_c}-\xi_x^1+\xi_t^2)+\\ &\qquad ca^2(-2\xi_x^2+\phi_{2_c})+\phi_1(ab-2c^2)-a^2\phi_2+2ca\phi_3+4c^3\xi_t^1=0.\end{aligned}\tag{2.4}$$

In the following theorem, by solving the above system of PDEs, the vector field coefficients (2.2) is obtained.

Theorem 2.1. *The Lie algebra corresponding to the symmetry group of the Einstein's system of equations is produced by the vector field 2.2, whose coefficients are the following functions:*

$$\begin{aligned}&\phi_1=k_7a+2k_1c, && \xi_1=k_2+k_1t+k_3x,\\ &\phi_2=2k_6c+(k_7-2k_3+2k_4)b, && \xi_2=k_5+k_4t+k_6x,\\ &\phi_3=k_1b+k_6a+(-k_3+k_4+k_7)c,\end{aligned}\tag{2.5}$$

where k_is, $i=1,\dots,7$, are arbitrary constants. The one-parameter group related to the vector fields 2.1, which is denoted by $g_k(\varepsilon)$ for V_k, $k=1,\dots,6$, is defined as follows:

$$\begin{aligned}&g_1(\varepsilon):(x,t,a,b,c)\longmapsto(x+\varepsilon,t,a,b,c), \qquad g_2(\varepsilon):(x,t,a,b,c)\longmapsto(x,t+\varepsilon,a,b,c),\\ &g_3(\varepsilon)(x,t,a,b,c)\longmapsto(e^{\varepsilon}x,t,a,e^{-2\varepsilon}b,e^{-\varepsilon}c),\\ &g_4(\varepsilon):(x,t,a,b,c)\longmapsto(x,t+\varepsilon x,a,b+2\varepsilon c+\varepsilon^2a,c+\varepsilon a),\\ &g_5(\varepsilon):(x,t,a,b,c)\longmapsto(x+\varepsilon t,t,a+2\varepsilon c+\varepsilon^2b,b,c+\varepsilon b),\\ &g_6(\varepsilon):(x,t,a,b,c)\longmapsto(x,e^{\varepsilon}t,a,e^{2\varepsilon}b,e^{\varepsilon}c),\quad g_7(\varepsilon):(x,t,a,b,c)\longmapsto(x,t,e^{\varepsilon}a,e^{\varepsilon}b,e^{\varepsilon}c).\end{aligned}\tag{2.6}$$

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.138258.1589

3. Conclusions

As one of the most important equations in mathematics and physics, we analyzed the Einstein's equations, by using the Lie symmetry method. We first obtained the symmetric group of these equations and the optimal system of one-parameter subalgebras. Then, using differential invariants, we reduced the equations and obtained the group invariants solutions, which lead to the new solutions of the Einstein's equations and to the new Einsteinian Walker manifolds.

Mehdi Jafari

Department of Mathematics, Payame Noor University, P.O.Box 19395-4697, Tehran, Iran

Email: m.jafarii@pnu.ac.ir

http://math-sci.ui.ac.ir

ریاضی و جامعه
شاپا (چاپی): ۲۳۴۵-۶۴۹۳، شاپا(الکترونیکی): ۲۳۴۵-۶۵۰۷
جلد ۸، شماره ۳ (۱۴۰۲)، صص. ۵۵-۷۹

http://www.ui.ac.ir

مطالعه خمینه‌های اینشتینی ۴ـبعدی با توزیع پوچ موازی

مهدی جعفری

چکیده. در این مقاله به بررسی خمینه‌های اینشتینی با توزیع پوچ موازی می‌پردازیم. نخست معادلاتی که منجر به یافتن خمینه‌های مذکور می‌شود را به‌دست می‌آوریم، که به معادلات اینشتین معروف هستند. سپس با استفاده از روش تقارنی‌لی این معادلات را کاهش می‌دهیم. در این روش ابتدا مولدهای جبر تقارن را به‌دست می‌آوریم و سپس ناورداهای دیفرانسیلی را برای هر کدام از مولدها محاسبه کرده و جواب‌های ناوردای گروهی این معادله را محاسبه می‌کنیم. همچنین دستگاه بهینه زیرجبرهای یک بعدی این معادلات را نیز به‌دست می‌آوریم، این دستگاه بهینه به ما کمک می‌کند که یک طبقه‌بندی روی جواب‌های ناوردای گروهی با استفاده از نگاشت مزدوجی داشته باشیم.

۱. مقدمه

در نظریه نسبیت عام حجم مادهٔ فضاـزمان را می‌توان به‌وسیله تانسور اندازهٔ انرژی توصیف نمود. این واقعیت که می‌توان حجم مادهٔ جهان را به‌عنوان یک سیال کامل در مدل کیهان شناختی استاندارد در نظر گرفت موجب ایجاد این فرضیه شد که امکان دارد میدان گرایش را بتوان با مترهای لورنتزی ۴ـبعدی مناسبی مدل کرد. این واقعیت باعث پررنگ شدن نقش این‌گونه مترها و خمینه‌های حاصل از آن در فیزیک و به‌ویژه نظریه نسبیت گردید [۱].

در این میان خمینه‌های ۴ـبعدی که دارای توزیع پوچ و موازی هستند نقش اساسی ایفا می‌کند. این خمینه‌ها را، خمینه‌های واکری می‌نامند. با توجه به شرایطی که روی متریک خمینه‌های واکری ۴ـبعدی باید برقرار باشد، دستگاه معادلاتی به‌وجود می‌آید که به آن معادلات اینشتین گفته می‌شود [۲۰]. بنابراین حل معادلات اینشتین منجر به یافتن فرم کلی متریک خمینه‌های واکری اینشتینی می‌شود که همان‌گونه که بیان شد این خمینه‌ها در مدل کردن مسائل فیزیکی نقش فراوانی دارد. این امر باعث شده در سال‌های اخیر خمینه‌های واکری (به‌ویژه خمینه‌های واکری چهار بعدی) مورد مطالعهٔ بسیاری از ریاضیدانان و فیزیکدانان قرار گیرند [۸]. لازم به ذکر است که خمینه‌های واکری اولین‌بار توسط واکر در حدود سال‌های ۱۹۵۰ الی ۱۹۵۳ مورد بررسی قرار گرفت، او در مطالعات خود خمینه‌هایی را مورد بررسی قرار داد که دارای یک توزیع پوچ موازی هستند. به افتخار این ریاضیدان بزرگ و یافته‌های فراوان او در این زمینه از جمله مشخص کردن مختصات این خمینه‌ها، این خمینه‌ها را خمینه‌های واکری می‌نامند [۱۸، ۱۹]. معادلات اینشتین در ساختن مدل‌های کیهان شناختی[1] نقش اساسی دارد. این مدل‌ها

عبارات و کلمات کليدي: خمینه اینشتینی، توزیع پوچ موازی، گروه تقارنی‌لی،جواب‌های ناوردای گروهی.
دبیرتخصصی رابط: محمدرضا پوریای‌ولی
نوع مقاله: پژوهشی
تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۴/۱۰ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۷/۲۲ تاریخ انتشار آنلاین: ۱۴۰۲/۰۸/۱۳
ارجاع به مقاله: م. جعفری، مطالعه خمینه‌های اینشتینی ۴-بعدی با توزیع پوچ موازی، نشریه ریاضی و جامعه، ۸ شماره ۳ (۱۴۰۲) ۵۵-۷۹.
http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.138258.1589 .

[1] cosmology

بیان کننده این مطلب هستند که ماده، مشخص کنندهٔ هندسه فضا-زمان است و برعکس حرکت ماده، توسط تانسورِ متر فضا مشخص می‌شود [۱۷]. بر این اساس اهمیت خمینه‌های واکری اینشتینی چهار بعدی، به‌عنوان فضای زمینه برای مدل‌های فیزیکی و هندسی، و همچنین اهمیت حل معادلات اینشتین برای به‌دست آوردن چنین خمینه‌هایی، مشخص می‌گردد. یکی از روش‌های بسیار مهم و کاربردی برای تحلیل معادلات و حل آنها روش تقارنی لی است. این روش اولین‌بار توسط ماریوس سوفوس لی در اواخر قرن نوزدهم معرفی گردید [۱۳]. این روش که مبتنی بر انتگرال‌گیری از معادلات دیفرانسیل است، باعث شد تا لی تلاش خود را صرف گسترش نظریهٔ معادلات دیفرانسیل بر اساس مفهوم گروه‌های لی کند. زیرا این گروه‌ها علاوه بر کاربردهایی که در ریاضیات محض و کاربردی دارند در فیزیک، مهندسی و سایر علوم پایه نیز به کار گرفته می‌شوند. شاخه‌هایی چون توپولوژی جبری، هندسهٔ دیفرانسیل، نظریهٔ ناورداها، نظریهٔ انشعاب، توابع خاص، آنالیز عددی، نظریهٔ کنترل، مکانیک کلاسیک و کوانتوم، نسبیت و ...، با گروه‌های لی و کاربردهای آن مرتبط هستند و لازم به ذکر است که معادلات دیفرانسیل منبع اصلی کاربرد گروه‌های لی در این رشته‌ها است.

اگر خواسته باشیم به‌طور اجمالی در مورد گروه تقارن یک دستگاه معادلات دیفرانسیل صحبت کنیم، می‌توان گفت که این گروه‌ها شامل تبدیلاتی هستند که جواب‌های دستگاه را به هم تبدیل می‌کنند. از دیدگاه لی، تقارن‌ها تبدیلاتی هندسی هستند که روی فضای شامل متغیرهای مستقل و وابستهٔ دستگاه عمل کرده و روی جواب‌های دستگاه نیز با تغییراتی که روی گراف آنها اعمال کرده، عمل می‌کنند. یکی از مهمترین اکتشافات لی در زمینهٔ معادلات دیفرانسیل آن است که وی توانست نشان دهد که می‌توان شرایط غیر خطی پیچیدهٔ حاکم بر یک دستگاه دینامیکی را به‌وسیلهٔ ناورداهای بینهایت کوچک آن دستگاه تحت مولدهای گروه تقارنش موضعاً به شرایطی خطی مبدل کرد که در فیزیک اهمیت زیادی دارد. این امر منجر به استفاده از کامپیوتر و نرم افزارهای بسیاری در این زمینه گشت، زیرا کار با گروه‌های تقارنی دارای محاسباتی است که از روندی الگوریتمی پیروی می‌کند [۴].

داشتن گروه تقارن یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مزیت‌های فراوانی دارد که به‌عنوان مثال می‌توان به طبقه‌بندی جواب‌های دستگاه معادلات دیفرانسیل اشاره کرد. اساس این رده‌بندی به این طریق است که جواب‌هایی که در یک دسته قرار می‌گیرند، به‌وسیلهٔ برخی از مولدهای گروه تقارن قابل تبدیل به هم باشند [۱۶].

اگر با یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی درگیر باشیم، گروه تقارنی به ما کمک می‌کند تا با کاهش مرتبهٔ معادله به یک، جواب را با یک‌بار انتگرال‌گیری به‌دست آوریم و در حالتی‌که معادلهٔ مورد نظر مرتبهٔ اول باشد جواب عمومی نیز به‌دست خواهد آمد. اما متأسفانه چنین چیزی در مورد معادلات دیفرانسیل جزئی برقرار نیست، یعنی جواب عمومی چنین معادلاتی را نمی‌توان لزوماً با داشتن گروه تقارن‌ها به‌دست آورد. (مگر در حالتی‌که دستگاه قابل تبدیل به یک دستگاه خطی باشد.) در این شرایط تنها برخی از جواب‌ها به‌دست می‌آیند که تحت بعضی از زیرگروه‌های گروه تقارن ناوردا هستند. این جواب‌ها به جواب‌های ناوردای گروهی مشهورند که از حل دستگاهی که شامل تعداد متغیر مستقل کمتری نسبت به‌دستگاه اصلی است به‌دست می‌آیند [۵].

در سال‌های اخیر، معادلات متعددی با استفاده از این روش مورد بررسی قرار گرفته و جواب‌های ناوردای گروهی آن به‌دست آمده است. به‌عنوان مثال، معادله KdV و حالت‌های مختلف آن که یکی از مدل‌های مهم در تئوری امواج بلند در آب‌های کم‌عمق و سایر سیستم‌های فیزیکی است در منابع متعددی از جمله [۲، ۱۱] مطالعه شده است. همچنین جواب‌های دقیقی از معادله BBM که یکی از معادلات مهم در مدل‌سازی امواج گرانشی با دامنه کوچک است نیز با این روش به‌دست آمده است [۱۰، ۱۲].

هدف ما در این مقاله تحلیل گروه تقارنی و به‌دست آوردن جواب‌های ناوردای گروهی برای معادلات اینشتین است. علاوه بر این، یک طبقه‌بندی روی این جواب‌ها بر اساس دستگاه بهینه زیرجبرهای یک بعدی جبر تقارنی به‌دست می‌آوریم. بخش

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.138258.1589

بندی این مقاله به‌صورت زیر تنظیم شده است: در بخش ۲، پیش‌نیازها و تعاریف مقدماتی و برخی از نتایج مهم در مورد هندسه شبه‌ریمانی و خمینه‌های اینشتینی بیان می‌گردد. در بخش ۳، روش تقارنی‌لی بیان می‌شود و گروه تقارنی معادلات اینشتین به‌دست می‌آید. همچنین تحلیل کاملی از این گروه و جبرلی نظیر آن ارایه خواهد شد. در بخش ۴، دستگاه بهینه زیرجبرهای یک–پارامتری جبرتقارنی معادلات اینشتین ارایه می‌شود و سپس با استفاده از ناورداهای دیفرانسیلی معادلات کاهش‌یافته حاصل می‌شود. در پایان با حل معادلات کاهش‌یافته جواب‌های ناوردای گروهی معادلات اینشتین به‌دست می‌آید.

۲. پیش‌نیازها و تعاریف ابتدایی

برای مطالعهٔ مباحث مربوط به هندسهٔ شبه‌ریمانی، گاهی اوقات ابتدا مباحث به‌صورت جبری روی فضاهای برداری مطرح می‌شوند و سپس با توجه به اینکه فضای مماس خمینه‌ها در هر نقطه یک فضای برداری است، نتایج به‌دست آمده را برای خمینه‌ها تعمیم می‌دهند. بنابراین سعی شده در این بخش ابتدا مباحث به‌صورت جبری ارائه شود و سپس تحقق پذیری این مباحث برای خمینه‌ها ارائه شود.

فرض کنیم V یک فضای برداری حقیقی m–بعدی و $\{e_i\}$ یک پایه برای آن باشد. در این‌صورت تعاریف زیر را داریم.

تعریف ۱.۲. فرض کنیم $\langle\cdot,\cdot\rangle$ یک ضرب داخلی ناتبهگون روی V باشد. بردار v را فضاگونه[2] گوییم هر گاه $\langle v,v\rangle > ۰$، زمان‌گونه[3] گوییم هر گاه $\langle v,v\rangle < ۰$ و پوچ[4] گوییم هرگاه $\langle v,v\rangle = ۰$. زیر فضای W از V را فضاگونه (به‌ترتیب زمان‌گونه و پوچ) گوییم هر گاه $\langle\cdot,\cdot\rangle$ روی W مثبت معین (به‌ترتیب منفی‌معین و بدیهی) باشد. به دوتایی $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضای برداری ضرب داخلی گوییم.

تعریف ۲.۲. شبه کره‌های شامل بردارهای یکهٔ زمان گونه (−) و فضا گونه (+) به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S^{\pm} = S^{\pm}(V,\langle\cdot,\cdot\rangle) := \{v \in V : \langle v,v\rangle = \pm ۱\} \qquad (۱)$$

می‌توان یک پایه مانند e_i برای V اختیار کرد به‌طوری‌که

$$\langle e_i,e_j\rangle = \begin{cases} ۰ & i\neq j \\ \pm ۱ & i=j \end{cases} \qquad (۲)$$

چنین پایه‌ای را پایهٔ متعامد یکه می‌نامند. فرض کنیم $\varepsilon_i := \langle e_i,e_i\rangle$ در این‌صورت تعداد اندیس‌های iای که $\varepsilon_i = -۱$ را با p و مکمل آن یعنی $\dim V - p$ را با q نشان می‌دهیم، پس q تعداد اندیس‌هایی است که $\varepsilon_i = +۱$. با این مفروضات، ضرب داخلی را از علامت (p,q) می‌نامیم. لازم به ذکر است که p و q مستقل از انتخاب پایهٔ متعامد یکه است.

تعریف ۳.۲. تانسور A از نوع $(۰,۴)$ روی فضای برداری ضرب داخلی $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ را یک تانسور خمیدگی جبری می‌نامیم هر گاه در شرایط زیر صدق کند.

$$\begin{aligned} &A(p,q,r,s) = -A(q,p,r,s),\\ &A(p,q,r,s) = A(r,s,p,q),\\ &A(p,q,r,s) + A(q,r,p,s) + A(r,p,q,s) = ۰. \end{aligned} \qquad (۳)$$

در این‌حالت $\mathfrak{M} := (V,\langle\cdot,\cdot\rangle,A)$ را یک مدل خمیدگی[5] گوییم.

[2]like space [3]like time [4]null [5]model curvature

تعریف ۴.۲. اگر $\mathfrak{M} := (V, \langle\cdot,\cdot\rangle, A)$ یک مدل خمیدگی باشد، عملگر خمیدگی پادمتقارن را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم و با $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\mathfrak{M}}$ نشان می‌دهیم:

$$\langle \mathcal{A}(p,q)r, s\rangle = A(p,q,r,s) \tag{۴}$$

همچنین تانسور ریچی (که یک ۲-تانسور متقارن است) را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم و با ρ نشان می‌دهیم:

$$\rho(p,q) := \mathrm{Tr}\{r \longrightarrow \mathcal{A}(r,p)q\} \tag{۵}$$

با استفاده از این تانسور می‌توان عملگر ریچی را که باز با ρ نشان می‌دهیم تعریف کرد:

$$\langle \rho x, y\rangle = \rho(x,y). \tag{۶}$$

تعریف ۵.۲. گوییم $\mathfrak{M}$ اینشتینی است اگر عدد ثابت c وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\rho = c\langle\cdot,\cdot\rangle$.

تعریف ۶.۲. یک هموستار روی خمینه M عبارت است از عملگر

$$D : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M) \tag{۷}$$

که $D_X Y$ نسبت به X، $C^\infty(M)$-خطی و نسبت به Y، $\mathbb{R}$-خطی است و در شرط زیر (شرط لایب‌نیتز) صدق می‌کند:

$$D_X(fY) = fD_XY + (Xf)Y. \tag{۸}$$

تعریف ۷.۲. هموستار D را تاب‌آزاد گوییم هرگاه تانسور تاب آن، که به‌صورت

$$\tau(X,Y) := D_XY - D_YX - [X,Y] \tag{۹}$$

تعریف می‌شود به ازای هر X و Y برابر صفر باشد.

تعریف ۸.۲. هموستار D را سازگار[6] با $\langle\cdot,\cdot\rangle$ گوییم هرگاه به ازای میدان‌های برداری X، Y و Z در شرط

$$D_X\langle Y,Z\rangle = \langle D_XY, Z\rangle + \langle Y, D_XZ\rangle, \tag{۱۰}$$

صدق کند. هموستاری که تاب‌آزاد و سازگار باشد را هموستار لوی-چویتا نامیم و با ∇ نشان می‌دهیم.

تعریف ۹.۲. عملگر خمیدگی عبارت است از نگاشت

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_D : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M) \tag{۱۱}$$

که یک میدان تانسوری از نوع $(۱,۳)$ است و به فرم زیر بیان می‌شود

$$\mathcal{R}(X,Y)Z := (D_XD_Y - D_YD_X - D_{[X,Y]})Z. \tag{۱۲}$$

می‌توان دید که عملگر خمیدگی در هموستارهایی که تاب‌آزاد هستند خواص زیر را نیز داراست.

$$\begin{aligned} &\mathcal{R}(X,Y) = -\mathcal{R}(Y,X), \\ &\mathcal{R}(X,Y)Z + \mathcal{R}(Y,Z)X + \mathcal{R}(Z,X)Y = ۰. \end{aligned} \tag{۱۳}$$

اگر در حالت جبری فرض کنیم A دارای خواص فوق باشد، به آن عملگر خمیدگی تعمیم یافته گوییم.

[6]compatible

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.138258.1589

تعریف ۱۰.۲. عملگر خمیدگی جبری $\mathcal{A}$ را به‌طور هندسی تحقق پذیر[7] گوییم هر گاه خمینه M و نقطهٔ p از آن و همچنین ایزومورفیسم $\phi : \otimes_1^3 T_pM \longrightarrow \otimes_1^3 V$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\phi^*\mathcal{A} = \mathcal{R}_p$.

می‌توان نشان داد که هر عملگر خمیدگی تعمیم یافته به‌طور هندسی تحقق پذیر است [۹]. حال تعاریفی که به‌صورت جبری در ابتدای بخش بیان شد را می‌توان به‌طور هندسی بیان کرد. مثلاً تانسور ریچی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\rho_D = \rho(X,Y) := \mathrm{Tr}\{Z \longrightarrow \mathcal{R}_D(Z,X)Y\}. \tag{۱۴}$$

فرض کنیم M یک خمینه m بعدی و g یک فرم دو-خطی هموار ناتبهگون و متقارن روی TM باشد. گوییم M یک خمینه شبه‌ریمانی از علامت (p,q) است، اگر g از علامت (p,q) باشد. در حالتی‌که $p=0$ (به‌ترتیب $p=1$ و $p=q$)، M ریمانی (به‌ترتیب لورنتزی و از علامت خنثی) نامیده می‌شود. فرض کنیم $\mathcal{M}$ یک خمینه شبه‌ریمانی از علامت (p,q) باشد، جداسازی $TM = V_1 \oplus V_2$ را برای کلاف مماس در نظر می‌گیریم که در آن V_1 و V_2 زیر کلاف‌های هموار هستند، این زیر کلاف‌ها را توزیع می‌نامند. همچنین فرض کنیم π_1 نگاشت تصویر از TM به توی V_1 باشد، گوییم V_1 توزیعِ موازی است هر گاه به ازای هر $X,Y \in \chi(M)$ داشته باشیم $\nabla_X(\pi_1(Y)) = \pi_1(\nabla_X Y)$. به‌طور معادل یعنی اینکه اگر X_1 یک میدان برداری در V_1 باشد، ∇X_1 نیز در V_1 باشد، به‌طور خلاصه یعنی $\nabla V_1 \subset V_1$. در حالتی‌که $\mathcal{M}$ ریمانی باشد، می‌توان فرض کرد $V_2 = V_1^{\perp}$ مکمل متعامد V_1 است و در این‌حالت V_2 نیز موازی است. اما در حالت شبه ریمانی لزومی ندارد $V_1 \cap V_2$ بدیهی باشد و مثال‌هایی وجود که V_1 موازی باشد اما هیچ توزیع مکمل موازی ندارد. گوییم V_1 یک توزیع پوچ موازی است هر گاه V_1 موازی بوده و تحدید متر روی V_1 متحد با صفر باشد. نکتهٔ قابل ذکر این است که بعد توزیع در حالت ناتبهگون حداکثر به اندازهٔ اندیس منفی یعنی p است [۶، ۳].

تعریف ۱۱.۲. خمینه‌هایی که دارای توزیع پوچ موازی هستند را خمینه‌های واکری می‌نامیم.

قضیه ۱۲.۲. فرم متعارفی خمینه شبه‌ریمانی m-بعدی $\mathcal{M}$ که یک توزیع پوچ‌موازی r-بعدی مانند $\mathcal{D}$ دارد توسط ماتریس

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & Id_r \\ 0 & A & H \\ Id_r & H^t & B \end{pmatrix}$$

داده می‌شود که A و B ماتریس‌های متقارن از بعدهای به‌ترتیب $(m-2r)\times(m-2r)$ و $r\times r$ و ماتریس H از مرتبهٔ $(m-2r)\times r$ است. همچنین H^t ترانهادهٔ H است و ماتریس‌های A و H مستقل از مختصات $(x_1,\dots,x_r)$ است و $\mathcal{D}$ توسط میدان‌های برداری مختصاتی $\{\partial_{x_1},\dots,\partial_{x_r}\}$ تولید می‌شود [۱۸].

قضیه ۱۳.۲. فرم کانونیکِ خمینه شبه‌ریمانی $2n$-بعدی $\mathcal{M}$ که دارای یک توزیع پوچ‌موازی n-بعدی $\mathcal{D}$ است، توسط ماتریس زیر مشخص می‌شود

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & Id_n \\ Id_n & B \end{pmatrix},$$

که در آن $B_{n\times n}$ ماتریسی متقارن و درایه‌هایش توابعی از مختصات $(x_1,\dots,x_{2n})$ هستند [۱۸].

[7] realizable

به‌عنوان حالت خاص، فرض کنیم $n=2$، بنابراین خمینه $\mathcal{M}$ یک خمینه واکر چهار بعدی با توزیع دو بعدی است. پس بنابر قضیهٔ فوق، ماتریس آن به‌صورت

$$(g_{a,b,c})_{ij}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & a & c\\ 0 & 1 & c & b \end{pmatrix}, \tag{15}$$

است که در آن a، b و c توابعی برحسب (x_1,x_2,x_3,x_4) هستند. برای پرهیز از به‌کارگیری اندیس به جای متغیرهای (x_1,x_2,x_3,x_4) از (x,t,y,z) استفاده می‌کنیم.

فرض کنیم $\mathcal{O}$ یک مجموعهٔ باز در $\mathbb{R}^4$ باشد و $a,b,c\in C^\infty(\mathcal{O})$ توابع هموار روی $\mathcal{O}$ باشند. قرار می‌دهیم

$$M_{a,b,c}:=(\mathcal{O},g_{a,b,c})$$

که در آن

$$\begin{aligned} g_{a,b,c}:=&\, a(x,t,y,z)dy\circ dy+2(dx\circ dy+dt\circ dz)\\ &+2c(x,t,y,z)dy\circ dz+b(x,t,y,z)dz\circ dz. \end{aligned} \tag{16}$$

به کمک قضیهٔ فوق می‌توان نتیجه گرفت که هر خمینه واکری ۴ـبعدی که مجهز به یک توزیع پوچ موازی ۲ـبعدی است، مختصات موضعی مانند (x,t,y,z) دارد که متریک آن به فرم (۱۶) است.

حال با توجه به این‌صورتِ نمایش متریک خمینه‌های واکر چهار بعدی، می‌توان نتایج مهمی را در مورد خواص این‌گونه خمینه‌ها به‌دست آورد. مثلاً می‌توان علائم کریستوفل، تانسور خمیدگی، فرم کلی ژئودزیک‌ها همچنین خمیدگی و تانسور ریچی را برای آنها به‌دست آورد [۶، ۷]. برای نمونه، قضیهٔ مهم زیر را داریم.

قضیه ۱۴.۲. خمینه $M_{a,b,c}$ اینشتینی است اگر و تنها اگر توابع a، b و c در دستگاه معادلات زیر صدق کنند

$$\begin{aligned} &c_{22}+a_{12}=0, \qquad b_{22}-a_{11}=0, \qquad c_{11}+b_{12}=0,\\ &2c_{23}-ac_{12}-2a_{24}+ba_{22}+2ca_{12}-{c_2}^2-a_2c_1+a_2b_2+a_1c_2=0,\\ &c_{24}-bc_{22}-bc_{22}-cc_{12}x-ac_{11}-b_{23}-a_{14}+ca_{11}-c_1c_2+a_2b_1=0,\\ &2c_{14}-bc_{12}-2b_{13}+2cb_{12}+ab_{11}-{c_1}^2+b_2c_1-b_1c_2+a_1b_1=0. \end{aligned} \tag{17}$$

اثبات. با محاسبهٔ تانسور ریچی از طریق متر $g_{a,b,c}$، ضرایب مخالف صفر این تانسور به‌صورت زیر به‌دست می‌آید [۷]:

$$\begin{aligned} &\rho_{13}=\tfrac{1}{2}(c_{12}+a_{11}), \qquad \rho_{14}=\tfrac{1}{2}(c_{11}+b_{12}), \qquad \rho_{23}=\tfrac{1}{2}(c_{22}+a_{12}),\\ &\rho_{24}=\tfrac{1}{2}(c_{12}+b_{22}),\\ &\rho_{33}=\tfrac{1}{2}(-2a_{24}+2c_{23}+ba_{22}+2ca_{12}+aa_{11}-a_2c_1+a_2b_2+a_1c_2-c_2^2),\\ &\rho_{34}=\tfrac{1}{2}(-c_{24}+bc_{22}-c_{13}+2cc_{12}+ac_{11}+b_{23}+a_{14}+c_1c_2-a_2b_1),\\ &\rho_{44}=\tfrac{1}{2}(2c_{14}+bb_{22}-2b_{13}+2cb_{12}+ab_{11}+b_2c_1-b_1c_2+a_1b_1-c_1^2). \end{aligned} \tag{18}$$

حال با توجه به تعریف خمینه اینشتینی، این ضرایب باید برابر با حاصلضرب یک عدد ثابت مانند r در مولفه‌های نظیر در ماتریس (۱۵) باشد. یعنی

$$\begin{aligned} &\rho_{24}=1, \qquad \rho_{23}=0, \qquad \rho_{14}=0 \qquad \rho_{13}=1,\\ &\rho_{33}=a, \qquad \rho_{34}=c, \qquad \rho_{44}=b. \end{aligned} \tag{19}$$

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.138258.1589

که در آن بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کرده‌ایم $r=۱$، در غیر این‌صورت بعد از محاسبات r از طرفین تساوی‌ها حذف می‌شود. از رابطهٔ اول و چهارم (۱۹) داریم $\rho_{۲۴}=\rho_{۱۳}$، پس $b_{۱۱}=a_{۱۱}$، و بنابراین شرط اول قضیه حاصل شد. شرط دوم و سوم قضیه بی‌درنگ از روابط دوم و سوم (۱۹) نتیجه می‌شود. از رابطهٔ اول (۱۹) داریم $\frac{۱}{۲}a_{۱۱}-۱=\frac{۱}{۲}c_{۱۲}$. با جایگذاری در رابطهٔ پنجم (۱۹)، شرط چهارم قضیه به‌دست می‌آید. با جایگذاری $\frac{۱}{۲}c_{۱۲}-۱=\frac{۱}{۲}a_{۱۱}$ در رابطهٔ ششم (۱۹)، شرط پنجم قضیه به‌دست می‌آید. همچنین از رابطهٔ چهارم (۱۹) داریم $\frac{۱}{۲}b_{۲۲}-۱=\frac{۱}{۲}c_{۱۲}$. سرانجام با جایگذاری در رابطهٔ هفتم (۱۹)، شرط ششم قضیه به‌دست می‌آید. □

حل دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی (۱۷)، که دستگاه معادلات اینشتین نامیده می‌شود، با روش‌های موجود امری غیر ممکن است. در سال‌های اخیر مطالعات بسیاری روی این دستگاه انجام شده و جواب‌های محدودی برای حالت‌های خاصی از این معادله به‌دست آمده است. همان‌طور که در مقدمه بیان شد در این مقاله قصد داریم دستگاه فوق را به کمک گروه تقارنی کاهش دهیم و سپس جواب‌های آن را به‌دست آوریم. روش تقارنی‌لی در بخش بعدی توضیح داده خواهد شد.

۳. گروه تقارنی معادلات اینشتین

در این بخش ابتدا طریقه محاسبه گروه تقارنی یک دستگاه معادله دیفرانسیل را بیان می‌کنیم و سپس گروه تقارنی معادلات اینشتین را به‌دست می‌آوریم. یک دستگاه m معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه n با p متغیر مستقل و q متغیر وابسته به‌صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$\Delta_\nu(x,u^{(n)})=۰,\quad \nu=۱,\dots,m, \tag{۲۰}$$

که در آن $x=(x^۱,\dots,x^p)$ و $u=(u^۱,\dots,u^q)$ و $u^{(n)}$ مشتق مرتبه nام u نسبت به x است. توابع

$$\Delta(x,u^{(n)})=(\Delta_۱(x,u^{(n)}),\dots,\Delta_m(x,u^{(n)})),$$

همگی هموارند، بنابراین Δ را می‌توان به‌صورت یک تابع هموار $\Delta:\mathrm{J}^n\to\mathbb{R}^m$ تعریف کرد. لازم به ذکر است که فضای جت مرتبه n، J^n، فضای شامل همه متغیرهای مستقل و وابسته و مشتقات متغیرهای وابسته نسبت به متغیرهای مستقل تا مرتبه n است. فرض کنیم x و u به‌ترتیب دستگاه‌های مختصات روی $X=\mathbb{R}^p$ و $U=\mathbb{R}^q$ باشند، فضای اقلیدسی $E=X\times U\simeq\mathbb{R}^{p+q}$ را فضای کامل برای دستگاه $\Delta=۰$ می‌نامیم. فرض کنیم G یک گروه از تبدیلات باشد که روی یک زیرمجموعهٔ باز از فضای کامل E مانند $\mathcal{O}$ عمل می‌کند، همچنین فرض کنیم g یک تبدیل از گروه G باشد. بنابراین می‌توان g را به‌عنوان یک تابع به‌صورت $g:\mathcal{O}\to\mathcal{O}$ در نظر گرفت. حال امتداد مرتبه nام g روی $\mathcal{O}$ را به فرم زیر تعریف می‌کنیم

$$g^{(n)}:\mathrm{J}^n(\mathcal{O})\to\mathrm{J}^n(\mathcal{O}),$$

که در آن به ازای نقطه دلخواه $(x_۰,u_۰^{(n)})\in\mathrm{J}^n(\mathcal{O})$ داریم $g^{(n)}\cdot(x_۰,u_۰^{(n)})=(\bar{x}_۰,\bar{u}_۰^{(n)})$. حال اگر V یک میدان برداری روی $\mathcal{O}$ با گروه یک پارامتری $\exp(\varepsilon V)$ باشد، امتداد مرتبه nام V را با $V^{(n)}$ نشان می‌دهیم و به آن مولد بی‌نهایت کوچک گروه یک پارامتری $(\exp(\varepsilon V))^{(n)}$ می‌گوییم. در واقع

$$V^{(n)}\Big|_{(x,u^{(n)})}=\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=۰}(\exp(\varepsilon V))^{(n)}(x,u^{(n)}),\qquad (x,u^{(n)})\in\mathrm{J}^{(n)}(\mathcal{O}). \tag{۲۱}$$

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.138258.1589

تعریف ۱.۳. دستگاه معادلات دیفرانسیل (۲۰) را از رتبه بیشینه گوییم هرگاه ماتریس ژاکوبین دستگاه، که به شکل زیر تعریف می‌شود، از رتبه m باشد:

$$\mathbb{J}_\Delta(x, u^{(n)}) = \Big(\frac{\partial \Delta_\nu}{\partial x^i}, \frac{\partial \Delta_\nu}{\partial u^\alpha_J}\Big)_{m\times(p+qp^{(n)})}. \tag{۲۲}$$

قضیه ۲.۳. **(قضیه ناوردایی معادلات دیفرانسیل)** فرض کنیم $\Delta = 0$ یک دستگاه معادلات دیفرانسیل از رتبهٔ بیشینه باشد که روی زیرمجموعهٔ باز $\mathcal{O}$ از E تعریف شده است. همچنین فرض کنیم G گروه موضعی از تبدیلات باشد که روی $\mathcal{O}$ عمل کرده و V یک مولد بینهایت کوچک آن باشد. آنگاه $\Delta = 0$، گروه G را به‌عنوان یک گروه تقارن می‌پذیرد اگر $V^{(n)}(\Delta) = 0$ هر جا که $\Delta = 0$ [۱۵].

قضیهٔ ناوردایی معادلات دیفرانسیل نحوهٔ ارتباط بین گروه‌های تقارن و ناوردایی یک دستگاه معادلات دیفرانسیل را تحت مولدهای بی‌نهایت کوچک بیان می‌کند. برای استفاده از قضیه (۲.۳)، باید روشی صریح برای محاسبه امتداد یک میدان برداری به‌دست آوریم.

تعریف ۳.۳. فرض کنیم

$$V = \sum_{i=1}^{p} \xi^i(x,u)\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \phi^\alpha(x,u)\frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \tag{۲۳}$$

یک میدان برداری روی زیرمجموعه باز $\mathcal{O}$ از مجموعه E باشد. مشخصه میدان برداری (۲۳) عبارت است از تابع q-تایی $Q(x, u^{(1)})$ که به x، u و مشتق مرتبه اول u وابسته است و عبارت‌های موجود در آن به فرم زیر تعریف می‌شوند:

$$Q_\alpha(x, u^{(1)}) = \phi^\alpha(x,u) - \sum_{i=1}^{p} \xi^i(x,u)\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i}, \qquad \alpha = 1,\dots,q. \tag{۲۴}$$

تعریف ۴.۳. فرض کنیم $F(x, u^{(n)})$ یک تابع هموار روی $\mathrm{J}^n(\mathcal{O})$ باشد. مشتق کلی (مشتق کامل) تابع F برحسب x^i عبارت است از یک تابع هموار روی $\mathrm{J}^{n+1}(\mathcal{O})$ که با $D_iF(x, u^{(n+1)})$ نشان داده می‌شود و برای هر تابع هموار $u = f(x)$ در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$D_iF(x, f^{(n+1)}(x)) = \frac{\partial}{\partial x^i} F(x, u^{(n)}(x)). \tag{۲۵}$$

قضیه ۵.۳. فرض کنیم V یک میدان برداری به فرم (۲۳) و $Q = (Q_1, \dots, Q_q)$ مشخصه آن باشد. امتداد مرتبه nام V عبارت است از

$$V^{(n)} = V + \sum_{\alpha=1}^{q}\sum_{J} \phi^\alpha_J(x, u^{(n)})\frac{\partial}{\partial u^\alpha_J}, \tag{۲۶}$$

که روی $\mathrm{J}^n(\mathcal{O})$ تعریف می‌شود و ضرایب ϕ^α_J در فرمول فوق به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\phi^\alpha_J(x, u^{(n)}) = D_J Q_\alpha + \sum_{i=1}^{p} \xi^i u^\alpha_{J,i}, \tag{۲۷}$$

که J اندیس چندگانه $J = (j_1, \dots, j_k)$ با شرایط $1 \le j_k \le p$ و $1 \le k \le n$ است [۱۴].

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.138258.1589

با توجه به توضیحات و تعاریف بالا می‌توان روش یافتن گروه تقارنی یک معادله دیفرانسیل را به‌صورت زیر خلاصه کرد.

ابتدا با توجه به تعداد متغیرهای مستقل و وابسته معادله، یک میدان برداری با ضرایب مجهول به فرم (۲۳) به‌عنوان مولد بینهایت کوچک جبر تقارنی در نظر می‌گیریم. هدف پیدا کردن ضرایب مجهول می‌باشد. چون با یافتن این ضرایب میدان برداری و در نتیجه مولد جبرلی تقارن و در نتیجه گروه تقارنی مورد نظر به‌دست می‌آید. برای یافتن ضرایب مجهول باید از قضیه ناوردایی استفاده کنیم. بنابراین به اندازه مرتبه معادله دیفرانسیل باید امتداد میدان برداری مورد نظر را از فرمول (۲۶) به‌دست آوریم. سپس حاصل را روی معادله اثر دهیم و نتیجه را برابر صفر قرار دهیم. از متحد قرار دادن ضرایب در معادله به‌دست آمده یک دستگاه از معادلات به نام دستگاه تعیین‌کننده به‌دست می‌آید که از حل آن ضرایب مجهول میدان برداری به‌دست می‌آید. در اکثر موارد محاسبه جواب‌های دستگاه تعیین کننده بسیار پیچیده و نیازمند محاسبات طولانی می‌باشد. بنابراین می‌توان از نرم افزارهایی مانند میپل، متمتیکا و ... استفاده کرد.

در این مقاله حالتی از معادلات اینشتین را مورد بررسی قرار می‌دهیم که توابع a، b و c فقط به x و t بستگی داشته باشد. برای محاسبات از نرم افزار میپل استفاده شده است. همچنین در سرتاسر مقاله فرض می‌کنیم که جبر لی متناظر با یک گروه لی از تمام میدان‌های برداری پایای راست آن گروه لی تشکیل شده است.

قضیه ۶.۳. مولدهای بی‌نهایت کوچک جبرلی تقارنی معادلات اینشتین عبارتند از:

$$
\begin{aligned}
&V_1 = \partial_x, && V_5 = b\partial_c + 2c\partial_a + t\partial_x,\\
&V_2 = \partial_t, && V_6 = c\partial_c + 2b\partial_b + t\partial_t,\\
&V_3 = -c\partial_c + -2b\partial_b + x\partial_x, && V_7 = c\partial_c + b\partial_b + a\partial_a.\\
&V_4 = a\partial_c + 2c\partial_b + x\partial_t,
\end{aligned}
\tag{28}
$$

اثبات. فرم کلی مولدهای بی‌نهایت کوچک جبرلی تقارنی معادلات اینشتین به‌صورت زیر می‌باشد:

$$
\begin{aligned}
V = {} & \xi^1(x,t,a,b,c)\partial_x + \xi^2(x,t,a,b,c)\partial_t +\\
& \phi_1(x,t,a,b,c)\partial_a + \phi_2(x,t,a,b,c)\partial_b + \phi_3(x,t,a,b,c)\partial_c.
\end{aligned}
\tag{29}
$$

□

طبق فرمول (۲۶)، امتداد مرتبه دوم این میدان برداری عبارت است از:

$$
\begin{aligned}
V^{(2)} \;=\;& V + \phi_1^x\partial_{a_x} + \phi_1^t\partial_{a_t} + \phi_2^x\partial_{b_x} + \phi_2^t\partial_{b_t} + \phi_3^x\partial_{c_x} + \phi_3^t\partial_{c_t}\\
& + \phi_1^{xx}\partial_{a_{xx}} + \phi_2^{xx}\partial_{b_{xx}} + \phi_3^{xx}\partial_{c_{xx}} + \phi_1^{xt}\partial_{a_{xt}} + \phi_2^{xt}\partial_{b_{xt}}\\
& + \phi_3^{xt}\partial_{c_{xt}} + \phi_1^{tt}\partial_{a_{tt}} + \phi_2^{tt}\partial_{b_{tt}} + \phi_3^{tt}\partial_{c_{tt}}.
\end{aligned}
$$

همچنین مشخصهٔ این میدان برداری به‌صورت زیر است

$$
Q_1 = \phi_1 - \xi^1 a_x - \xi^2 a_t, \qquad Q_2 = \phi_2 - \xi^1 b_x - \xi^2 b_t, \qquad Q_3 = \phi_3 - \xi^1 c_x - \xi^2 c_t.
$$

حال با استفاده از (۲۷) می‌توان ضرایب امتداد را محاسبه کرد.

$$\begin{aligned}
\phi_1^x &= D_xQ_1+\xi^1a_{xx}+\xi^2a_{xt}, & \phi_2^x &= D_xQ_2+\xi^1b_{xx}+\xi^2b_{xt},\\
\phi_3^x &= D_xQ_3+\xi^1c_{xx}+\xi^2c_{xt}, & \phi_1^t &= D_tQ_1+\xi^1a_{xt}+\xi^2a_{tt},\\
\phi_2^t &= D_tQ_2+\xi^1b_{xt}+\xi^2b_{tt}, & \phi_3^t &= D_tQ_3+\xi^1c_{xt}+\xi^2c_{tt},\\
\phi_1^{xx} &= D_x^2Q_1+\xi^1a_{xxx}+\xi^2a_{xxt}, & \phi_2^{xx} &= D_x^2Q_2+\xi^1b_{xxx}+\xi^2b_{xxt},\\
\phi_3^{xx} &= D_x^2Q_3+\xi^1c_{xxx}+\xi^2c_{xxt}, & \phi_1^{tt} &= D_t^2Q_1+\xi^1a_{xtt}+\xi^2a_{ttt},\\
\phi_2^{tt} &= D_t^2Q_2+\xi^1b_{xtt}+\xi^2b_{ttt}, & \phi_3^{tt} &= D_t^2Q_3+\xi^1c_{xtt}+\xi^2c_{ttt},\\
\phi_1^{xt} &= D_xD_tQ_1+\xi^1a_{xxt}+\xi^2a_{xtt}, & \phi_2^{xt} &= D_xD_tQ_2+\xi^1b_{xxt}+\xi^2b_{xtt},\\
\phi_3^{xt} &= D_xD_tQ_3+\xi^1c_{xxt}+\xi^2c_{xtt}.
\end{aligned}\tag{۳۰}$$

با استفاده از قضیهٔ ناوردایی، شرط ناوردایی به‌صورت زیر است.

$$\begin{aligned}
&V^{(2)}[a_{xx}-b_{tt}]=0, && a_{xx}-b_{tt}=0,\\
&V^{(2)}[c_{xx}+b_{xy}]=0, && c_{xx}+b_{xy}=0,\\
&&\vdots&\\
&V^{(2)}[-bc_{xt}+2cb_{xt}+ab_{xx}-c_x{}^2+b_tc_x-b_xc_t+a_xb_x]=0,\\
&\qquad -bc_{xt}+2cb_{xt}+ab_{xx}-c_x{}^2+b_tc_x-b_xc_t+a_xb_x=0.
\end{aligned}\tag{۳۱}$$

پس از جایگذاری ضرایب امتداد در (۳۱)، دستگاه تعیین کنندهٔ زیر به‌دست می‌آید.

$$\begin{aligned}
&a^3\xi_a^1=0,\quad b^2\xi_b^1=0,\quad a\xi_b^2=0,\quad b^2\xi_b^2=0,\quad ac\phi_{2_a}=0,\quad cb\xi_b^1=0,\dots\\
&abc(-3\xi_t^1-\phi_{3_b})+2c^2a(-\xi_t^2+\xi_x^1)+ba^2(\phi_{2_b}-\phi_{3_c}-\xi_x^1+\xi_t^2)+\\
&\qquad ca^2(-2\xi_x^2+\phi_{2_c})+\phi_1(ab-2c^2)-a^2\phi_2+2ca\phi_3+4c^3\xi_t^1=0.
\end{aligned}\tag{۳۲}$$

لازم به ذکر است که تعداد معادلات (۳۲) برابر ۴۱۰ معادله می‌باشد، بنابراین از نوشتن همهٔ آنها صرف نظر شده است. با حل این دستگاه PDE ضرایب میدان برداری (۲۹) به‌دست می‌آید. نتایج فوق را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد.

نتیجه ۷.۳. جبرلی متناظر با گروه تقارنی دستگاه معادلات اینشتین توسط میدان برداری (۲۹) تولید می‌شود که ضرایب آن عبارتند از توابع

$$\begin{aligned}
&\phi_1=k_7a+2k_1c, && \xi_1=k_2+k_1t+k_3x,\\
&\phi_2=2k_6c+(k_7-2k_3+2k_4)b, && \xi_2=k_5+k_4t+k_6x,\\
&\phi_3=k_1b+k_6a+(-k_3+k_4+k_7)c,
\end{aligned}\tag{۳۳}$$

و k_iها، $i=1,\dots,7$، اعداد ثابت دلخواه هستند. بنابراین ۷ مولد برای جبرلی تقارنی معادلات اینشتین به فرم (۲۸) به‌دست می‌آید. حال کروشهٔ لی همهٔ میدان‌های برداری جبر تقارنی را محاسبه کرده و آنها را در جدولی به نام جدول جابجاگر جبرلی (جدول لی) به‌صورت زیر نشان می‌دهیم.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.138258.1589

جدول ۱. جدول جابجاگر جبرلی معادلات اینشتین

Table 1: Lie algebra commutator table of Einstein's equations

$[\,,\,]$	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7
V_1	0	0	V_1	V_2	0	0	0
V_2	0	0	0	0	V_1	V_2	0
V_3	$-V_1$	0	0	V_4	$-V_5$	0	0
V_4	$-V_2$	0	$-V_4$	0	$V_3 - V_6 + 2V_7$	V_4	0
V_5	0	$-V_1$	V_5	$-V_3 + V_6 - 2V_7$	0	$-V_5$	0
V_6	0	$-V_2$	0	$-V_4$	V_5	0	0
V_7	0	0	0	0	0	0	0

لازم به ذکر است که به ازای $i, j = 1, \ldots, 7$، درایهٔ روی سطر iام و ستون jام عبارت است از $[V_i, V_j] = V_iV_j - V_jV_i$. گروه یک پارامتری یا به‌عبارتی شار مربوط به میدان‌های برداری (۲۸)، که با $g_k(\varepsilon)$ برای V_k، $k = 1, \ldots, 6$ نشان می‌دهیم، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}
&g_1(\varepsilon) : (x,t,a,b,c) \longmapsto (x+\varepsilon, t, a, b, c), \qquad g_2(\varepsilon) : (x,t,a,b,c) \longmapsto (x, t+\varepsilon, a, b, c),\\
&g_3(\varepsilon) : (x,t,a,b,c) \longmapsto (e^{\varepsilon}x, t, a, e^{-2\varepsilon}b, e^{-\varepsilon}c),\\
&g_4(\varepsilon) : (x,t,a,b,c) \longmapsto (x, t+\varepsilon x, a, b+2\varepsilon c+\varepsilon^2 a, c+\varepsilon a),\\
&g_5(\varepsilon) : (x,t,a,b,c) \longmapsto (x+\varepsilon t, t, a+2\varepsilon c+\varepsilon^2 b, b, c+\varepsilon b),\\
&g_6(\varepsilon) : (x,t,a,b,c) \longmapsto (x, e^{\varepsilon}t, a, e^{2\varepsilon}b, e^{\varepsilon}c), \quad g_7(\varepsilon) : (x,t,a,b,c) \longmapsto (x, t, e^{\varepsilon}a, e^{\varepsilon}b, e^{\varepsilon}c).
\end{aligned} \tag{۳۴}$$

با توجه به تعریف گروه تقارنی و همچنین نتایج به‌دست آمده در بالا می‌توان قضیهٔ زیر را نتیجه گرفت.

قضیه ۸.۳. اگر $c = k = k(x,t)$، $b = h = h(x,t)$ و $a = f = f(x,t)$ یک جواب از دستگاه معادلات اینشتین باشد، آنگاه توابع زیر نیز جواب‌های این معادله خواهند بود:

$$\begin{aligned}
&g_1(\varepsilon).k = k(x-\varepsilon, t), && g_1(\varepsilon).h = h(x-\varepsilon, t), && g_1(\varepsilon).f = f(x-\varepsilon, t)\\
&g_2(\varepsilon).k = k(x, t-\varepsilon), && g_2(\varepsilon).h = h(x, t-\varepsilon), && g_2(\varepsilon).f = f(x, t-\varepsilon),\\
&g_3(\varepsilon).k = k(e^{-\varepsilon}x, t)e^{-\varepsilon}, && g_3(\varepsilon).h = h(e^{-\varepsilon}x, t)e^{-2\varepsilon}, && g_3(\varepsilon).f = f(e^{-\varepsilon}x, t),\\
&g_4(\varepsilon).k = f(x, t-\varepsilon x)\varepsilon + k(x, t-\varepsilon x), && g_4(\varepsilon).h = f(x, t-\varepsilon x)\varepsilon^2 + 2\varepsilon k(x, t-\varepsilon x) + h(x, t-\varepsilon x),\\
&g_4(\varepsilon).f = f(x, t-\varepsilon x),\\
&g_5(\varepsilon).k = h(x-\varepsilon t, t)\varepsilon + k(x-\varepsilon t, t), && g_5(\varepsilon).h = h(x-\varepsilon t, t),\\
&g_5(\varepsilon).f = h(x-\varepsilon t, t)\varepsilon^2 + 2\varepsilon k(x-\varepsilon t, t) + f(x-\varepsilon t, t).\\
&g_6(\varepsilon).k = k(x, e^{-\varepsilon}t)e^{\varepsilon}, && g_6(\varepsilon).h = h(x, e^{-\varepsilon}t)e^{2\varepsilon}, && g_6(\varepsilon).f = f(x, e^{-\varepsilon}t),\\
&g_7(\varepsilon).k = k(x,t)e^{\varepsilon}, && g_7(\varepsilon).h = h(x,t)e^{\varepsilon}, && g_7(\varepsilon).f = f(x,t)e^{\varepsilon},
\end{aligned} \tag{۳۵}$$

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.138258.1589

یکی از کاربردهای این قضیه، به‌دست آوردن جواب‌های مختلف از دستگاه با دانستن تنها یک جواب از آن است. این کار با اثر دادن ترکیب دلخواه توابع فوق بر آن جواب انجام می‌پذیرد.

مثال ۹.۳. با کمی دقت می‌توان یک جواب ساده برای دستگاه معادلات اینشتین به‌صورت زیر به‌دست آورد.

$$a=f(x,t)=r_۲+r_۱x,\quad c=k(x,t)=r_۴+r_۳x,\quad b=h(x,t)=\frac{r_۳^۲}{r_۱}x-\frac{r_۲r_۳^۲}{r_۱^۲}\ln(r_۲+r_۱x).$$

که در آن $r_۱,r_۲,r_۳,r_۴\in\mathbb{R}$ اعداد ثابت دلخواه هستند. از قضیهٔ قبل نتیجه می‌شود برای هر $i=۱,\dots,۷$ توابع $g_i(\varepsilon).k$، $g_i(\varepsilon).h$ و $g_i(\varepsilon).f$ نیز جواب‌های معادله هستند. مثلاً

$$g_۵(\varepsilon).k=(\frac{r_۳^۲}{r_۱}(x-t\varepsilon)-\frac{r_۲r_۳^۲}{r_۱^۲}\ln(r_۲+r_۱(x-t\varepsilon)))\varepsilon+r_۴+r_۳(x-t\varepsilon)$$
$$g_۵(\varepsilon).h=\frac{r_۳^۲}{r_۱}(x-t\varepsilon)-\frac{r_۲r_۳^۲}{r_۱^۲}\ln(r_۲+r_۱(x-\varepsilon t))$$
$$g_۵(\varepsilon).f=(\frac{r_۳^۲}{r_۱}(x-t\varepsilon)-\frac{r_۲r_۳^۲}{r_۱^۲}\ln(r_۲+r_۱(x-t\varepsilon)))\varepsilon^۲+۲(r_۴+r_۳(x-t\varepsilon))\varepsilon+r_۲+r_۱(x-t\varepsilon)$$

یک مجموعه از جواب‌های معادلات اینشتین است. می‌توان ترکیب‌های توابع $g_i(\varepsilon)$ را نیز استفاده کرد و جواب‌های پیچیدهٔ دیگری را نیز به‌دست آورد.

۴. دستگاه بهینه زیرجبرهای یک-بعدی و جواب‌های ناوردای گروهی معادلات اینشتین

در این بخش ابتدا دستگاه بهینه زیرجبرهای یک جبر تقارنی را تعریف می‌کنیم و دستگاه بهینه معادلات اینشتین را به‌دست می‌آوریم. سپس برای هر یک از مولدهای دستگاه بهینه، معادلات کاهش یافته را با استفاده از ناورداهای دیفرانسیلی به‌دست آورده و جواب‌های آنها را که همان جواب‌های ناوردای گروهی هستند، به‌دست می‌آوریم. در بخش ۲ دیدیم که به هر زیرگروه یک پارامتری H از گروه تقارن G، خانواده ای از جواب‌های ناوردای گروهی نظیر می‌شود. چون تعداد چنین زیرگروه‌هایی بی‌نهایت است، فهرست کردن همهٔ جواب‌های ناوردای گروهی برای یک دستگاه امکان‌پذیر نیست. در این بخش روش خاصی از طبقه‌بندی چنین جواب‌هایی را مورد بررسی قرار می‌دهیم که منجر به ایجاد مفهوم دستگاه بهینه[8] برای جواب‌های ناوردای گروهی می‌شود. هدف اصلی یافتن آن دسته از تبدیلات $g\in G$ است به‌طوری‌که هر یک از جواب‌های دستگاه معادلات مورد نظر، در یکی از مدارهای این تبدیلات قرار بگیرد. اساس این طبقه‌بندی در یک مسئله جبری نهفته است که به‌صورت زیر بیان می‌شود.

فرض کنیم G روی خمینه M عمل کند و $H\subset G$ یک زیرگروه باشد. اگر $S\subset M$ یک زیرمجموعهٔ H-ناوردا باشد و $g\in G$ روی کل S تعریف شده باشد، آنگاه $g.S$ یک مجموعهٔ ناوردا تحت زیرگروه مزدوجی $gHg^{-۱}$ است. لازم به ذکر است که این نتیجه فقط مخصوص زیرگروه‌های یک پارامتری نیست و اگر زیرگروه‌های لی با بعد بالاتر را هم در نظر بگیریم، همین نتیجه حاصل می‌شود. بنابراین در ادامه مقاله منظور ما از زیرگروه s-پارامتری همان زیرگروه لی از گروه لی G است که بعد آن به‌عنوان زیرخمینه برابر با s می‌باشد. با استناد به این مطلب و جایگذاری گراف جواب دستگاه به جای مجموعهٔ ناوردای مسئله، می‌توان گزاره زیر را نتیجه گرفت.

گزاره ۱.۴. فرض کنیم G یک گروه تقارن برای دستگاه معادلات دیفرانسیل $\Delta=۰$ باشد و H یک زیرگروه s-پارامتری آن. اگر $u=f(x)$ یک جواب H-ناوردا برای Δ و $g\in G$ تبدیلی از گروه G باشد آنگاه تابع $\bar{u}=\bar{f}(x)=g\cdot f(x)$ یک جواب $\bar{H}$-ناوردای دستگاه است، که در آن $\bar{H}=gHg^{-۱}$ زیرگروه مزدوج H متناظر با g است.

[8]system optimal

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.138258.1589

بنابراین می‌توان گفت که مسئلهٔ طبقه‌بندی جواب‌های ناوردای گروهی، ارتباط مستقیم با مسئلهٔ طبقه‌بندی زیرگروه‌های گروه تقارنی G تحت عمل مزدوج‌گیری دارد.

تعریف ۲.۴. فرض کنیم G یک گروه لی باشد و $g \in G$. نگاشت مزدوج متناظر با g را با $K_g : G \to G$ نشان می‌دهیم و با ضابطهٔ $K_g(h) = ghg^{-1}$ برای هر $h \in G$ تعریف می‌کنیم. مشتق این نگاشت مزدوج در نقطهٔ دلخواه h را به‌صورت $K_{g_{*h}} : T_hG \to T_{K_gh}G$ تعریف می‌کنیم، این مشتق یک نگاشت خطی روی جبرلی G به شکل

$$\mathrm{Ad}\ g(V) = K_{g_*}(V), \qquad V \in \mathfrak{g},$$

تعریف می‌کند که به آن نمایش الحاقی می‌گویند.

می‌توان دید که اگر V مولد زیرگروه یک پارامتری $H = \{\exp(\varepsilon V) | \varepsilon \in \mathbb{R}\}$ باشد، $\mathrm{Ad}\ g(V)$ مولد زیرگروه مزدوج $K_g(H) = gHg^{-1}$ است. حال چون زیرگروه‌های مراتب بالاتر با زیرگروه‌های یک پارامتری خود مشخص می‌شوند، می‌توان مطلب فوق را به زیرگروه‌های مراتب بالاتر نیز تعمیم داد.

گزاره ۳.۴. فرض کنیم H و $\bar{H}$ دو زیرگروه $s-$پارامتری همبند گروه لی G با زیرجبرهای $\mathfrak{h}$ و $\bar{\mathfrak{h}}$ از جبرلی $\mathfrak{g}$ باشند. در این‌صورت $\bar{H} = gHg^{-1}$ یک زیرگروه مزدوج G است اگر و تنها اگر $\bar{\mathfrak{g}} = \mathrm{Ad}\ g(\mathfrak{h})$ یک زیرجبر مزدوج از $\mathfrak{g}$ باشد.

با استفاده از مولدهای بی‌نهایت کوچک می‌توان نمایش الحاقی یک گروه لی روی جبرلی نظیر آن را، بازسازی کرد. اگر V مولد زیرگروه یک پارامتری $\{\exp(\varepsilon V) | \varepsilon \in \mathbb{R}\}$ باشد، آنگاه $\mathrm{Ad}\ V$ را به‌عنوان مولد گروه یک پارامتری نمایش الحاقی

$$\mathrm{ad}\ V(W) \equiv \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \mathrm{Ad}(\exp(\varepsilon V))W, \qquad W \in \mathfrak{g},$$

در نظر می‌گیریم. می‌دانیم $T_eG \simeq \mathfrak{g}$. حال با توجه به روابط (۳۶) و (۳۷) و همچنین از راست ناوردا بودن W نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}\ V(W) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\Big[K_{*\exp(\varepsilon V)}(W_e) - W_e\Big] \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\Big[\exp_*(\varepsilon V)(W_{\exp(-\varepsilon V)}) - W_e\Big]. \end{aligned}$$

اگر به‌جای ε از $-\varepsilon$ استفاده کنیم در می‌یابیم که حد دوم همان تعریف مشتق لی W نسبت به V می‌باشد. بنابراین

$$\mathrm{Ad}\ V(W) = [W, V] = -[V, W].$$

روشی که در بالا ارائه شد مبین آن است که نمایش الحاقی جبرلی یک گروه لی، با مشتق‌گیری از نگاشت مزدوج تعریف شده روی آن حاصل می‌شود. جالب اینجاست که عکس این روند هم برقرار است، یعنی با داشتن عمل الحاقی مولدهای بینهایت کوچک $\mathfrak{g}$، می‌توانیم نمایش الحاقی $\mathrm{Ad}(G)$ را به‌دست آوریم. این کار با انتگرال‌گیری از دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی

$$\frac{dW}{d\varepsilon} = \mathrm{Ad}\ V(W), \qquad W(0) = W_0,$$

که دارای جواب

$$W(\varepsilon) = \mathrm{Ad}(\exp(\varepsilon V))W_0,$$

جدول ۲. جدول نمایش الحاقی مولدهای جبر تقارنی معادلات اینشتین

Table 2: Adjoint representation table of symmetry algebra generators of Einstein's equations

Ad	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6
V_1	V_1	V_2	$V_3-\varepsilon V_1$	$V_4-\varepsilon V_2$	V_5	V_6
V_2	V_1	V_2	V_3	V_4	$V_5-\varepsilon V_1$	$V_6-\varepsilon V_2$
V_3	$e^{\varepsilon}V_1$	V_2	V_3	$e^{-\varepsilon}V_4$	$e^{\varepsilon}V_5$	V_6
V_4	$V_1+\varepsilon V_2$	V_2	$V_3+\varepsilon V_4$	V_4	$(**)$	$V_6-\varepsilon V_4$
V_5	V_1	$V_2+\varepsilon V_1$	$V_3-\varepsilon V_5$	$(*)$	V_5	$V_6+\varepsilon V_5$
V_6	V_1	$e^{\varepsilon}V_2$	V_3	$e^{\varepsilon}V_4$	$e^{-\varepsilon}V_5$	V_6

است و یا به‌طور ساده‌تر با محاسبهٔ سری لی

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}(\exp(\varepsilon V))W_0 &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}(\mathrm{Ad}(V))^n(W_0)\\ &= W_0-\varepsilon[V,W_0]+\frac{\varepsilon^2}{2}[V,[V,W_0]]-\cdots,\end{aligned}$$

انجام می‌شود [۱۴].

قضیه ۴.۴. دستگاه بهینهٔ یک پارامتری برای زیرجبرهای جبر تقارنی دستگاه معادلات اینشتین توسط مولدهای زیر بیان می‌شود:

۱) V_7،
۲) V_1+aV_7،
۳) V_2+aV_7،
۴) $\varepsilon V_1+V_6+aV_7$،
۵) $\varepsilon V_2+V_5+aV_6+bV_7$،
۶) $\varepsilon V_1+cV_7+bV_6+aV_5+V_4$،
۷) $\varepsilon V_2+cV_7+bV_6+aV_5+\varepsilon' V_4+V_3$.

که در آن ε و ε' برابر با ± 1 یا صفر و a، b و c اعداد حقیقی دلخواه هستند.

اثبات. با توجه به جدول جابجاگر جبرلی اینشتین (جدول ۱)، مرکز این جبر برابر است با $\langle V_7\rangle$. بنابراین کافی است زیرجبر $\langle V_1,V_2,V_3,V_4,V_5,V_6\rangle$ را بررسی کنیم. با محاسبهٔ نمایش‌های الحاقی برای مولدهای جبرلی می‌توان جدول نمایش‌های الحاقی را به‌صورت جدول ۲ نشان داد، که در آن

$$(**)=V_4-\varepsilon(V_3+2V_7-V_6-\varepsilon V_5) \text{ و } (*)=V_5-\varepsilon(V_3+2V_7-V_6+\varepsilon V_4).$$

□

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.138258.1589

هر نگاشت الحاقی به‌صورت $F_i^{\varepsilon}:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ با ضابطهٔ $V\mapsto \mathrm{Ad}(\exp(\varepsilon V_i))V$ تعریف می‌شود، $i=۱,\cdots,۷$. فرض کنیم $V=\sum_{i=۱}^{۷} a_iV_i$، بنابراین

$$F_{۷}^{\varepsilon_{۷}}\circ\cdots\circ F_{۱}^{\varepsilon_{۱}}\ :\ V\mapsto\ ((۱+\varepsilon_{۵}\varepsilon_{۴})e^{\varepsilon_{۳}}a_{۱}+e^{\varepsilon_{۶}+\varepsilon_{۳}}\varepsilon_{۴}a_{۲})V_{۱}+\cdots$$
$$+(-\varepsilon_{۵}\varepsilon_{۲}a_{۱}-e^{\varepsilon_{۶}}\varepsilon_{۲}a_{۲}+\cdots+(۱+\varepsilon_{۵}\varepsilon_{۴})a_{۶}-۲\varepsilon_{۵}\varepsilon_{۴}a_{۷})V_{۶}+a_{۷}V_{۷}.$$

حال V را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

۱) اگر $a_{۱}=a_{۲}=\cdots=a_{۶}=۰$، آنگاه V به حالت (۱) کاهش می‌یابد که عبارت است از مرکز $\mathfrak{g}$.

۲) اگر $a_{۳}=\cdots=a_{۶}=۰$ و $a_{۱}\neq۰$، آنگاه می‌توان ضریب $V_{۲}$ را به‌وسیلهٔ $F_{۴}^{\varepsilon_{۴}}$ با قرار دادن $\varepsilon_{۴}=a_{۲}/a_{۱}$ به صفر تبدیل کرد. در صورت نیاز با ضرب کردن V در مقدار مناسبی می‌توان فرض کرد $a_{۱}=۱$. بنابراین در این‌حالت، V به حالت (۲) تبدیل می‌شود.

۳) اگر $a_{۱}=a_{۳}=\cdots=a_{۶}=۰$، آنگاه با قرار دادن $\varepsilon_{۶}=\ln|a_{۲}|$ در $F_{۶}^{\varepsilon_{۶}}$ داریم $a_{۲}=\pm۱$. بنابراین در این‌حالت، V به حالت (۳) تبدیل می‌شود.

۴) اگر $a_{۳}=\cdots=a_{۵}=۰$ و $a_{۶}\neq۰$، آنگاه می‌توان ضریب $V_{۲}$ را توسط $F_{۲}^{\varepsilon_{۲}}$ با قرار دادن $\varepsilon_{۲}=-a_{۲}/a_{۶}$ به صفر تبدیل کرد. همچنین با قرار دادن $\varepsilon_{۳}=\ln|a_{۱}|$ در $F_{۳}^{\varepsilon_{۳}}$ می‌توان ضریب $V_{۱}$ را به ±۱ یا صفر تبدیل کرد. با ضرب کردن V در مقدار مناسبی می‌توان فرض کرد $a_{۶}=۱$. بنابراین در این‌حالت، V به حالت (۴) تبدیل می‌شود.

۵) اگر $a_{۳}=a_{۴}=۰$ و $a_{۵}\neq۰$، آنگاه می‌توان ضریب $V_{۱}$ را توسط $F_{۲}^{\varepsilon_{۲}}$ با قرار دادن $\varepsilon_{۲}=-a_{۱}/a_{۵}$ به صفر تبدیل کرد. همچنین با قرار دادن $\varepsilon_{۶}=\ln|a_{۲}|$ در $F_{۶}^{\varepsilon_{۶}}$ می‌توان ضریب $V_{۲}$ را به ±۱ یا صفر تبدیل کرد. با ضرب کردن V در مقدار مناسبی می‌توان فرض کرد $a_{۵}=۱$. بنابراین در این‌حالت، V به حالت (۵) تبدیل می‌شود.

۶) اگر $a_{۳}=۰$ و $a_{۴}\neq۰$، آنگاه می‌توان ضریب $V_{۲}$ را توسط $F_{۱}^{\varepsilon_{۱}}$ با قرار دادن $\varepsilon_{۱}=-a_{۲}/a_{۴}$ به صفر تبدیل کرد. همچنین با قرار دادن $\varepsilon_{۳}=\ln|a_{۱}|$ در $F_{۳}^{\varepsilon_{۳}}$ می‌توان ضریب $V_{۱}$ را به ±۱ یا صفر تبدیل کرد. با ضرب کردن V در مقدار مناسبی می‌توان فرض کرد $a_{۴}=۱$. بنابراین در این‌حالت، V به حالت (۶) تبدیل می‌شود.

۷) اگر $a_{۳}\neq۰$، آنگاه می‌توان ضریب $V_{۱}$ را توسط $F_{۱}^{\varepsilon_{۱}}$ با قرار دادن $\varepsilon_{۱}=-a_{۱}/a_{۳}$ به صفر تبدیل کرد. همچنین با قرار دادن $\varepsilon_{۳}=-\ln|a_{۴}|$ و $\varepsilon_{۶}=\ln|a_{۲}|$ به‌ترتیب در $F_{۳}^{\varepsilon_{۳}}$ و $F_{۶}^{\varepsilon_{۶}}$ می‌توان ضریب $V_{۲}$ و $V_{۴}$ را به ±۱ یا صفر تبدیل کرد. با ضرب کردن V در مقدار مناسبی می‌توان فرض کرد $a_{۳}=۱$. بنابراین در این‌حالت، V به حالت (۷) تبدیل می‌شود.

حالت دیگری برای بررسی وجود ندارد و در هر هفت حالت، V تا حد امکان ساده شده است.

حال جواب‌های ناوردای گروهی دستگاه معادلات اینشتین را بر اساس طبقه‌بندی انجام شده روی زیرجبرهای این دستگاه به‌دست می‌آوریم. به دلیل طولانی بودن محاسبات، یک نمونه را با توضیحات به‌دست آورده و بقیه را در جدول فهرست می‌کنیم. برای مثال فرض کنیم هدف یافتن جواب‌های ناوردای گروهی متناظر با زیرجبر تولید شده توسط $V_{۳}=x\partial_x-۲b\partial_b-c\partial_c$ باشد. یادآوری می‌کنیم که دستگاه معادلات اینشتین بر حسب متغیرهای (x,t,a,b,c) است. برای کاهش این دستگاه باید معادلات آن را در یک دستگاه مختصات جدید مانند (s,f,h,k) نوشت. این کار توسط ناورداهای دیفرانسیلی و سپس به کارگیری قاعده مشتق‌گیری زنجیره‌ای میسر است. ناورداها با حل دستگاه معادلات زیر به‌دست می‌آیند:

$$\frac{dx}{x}=\frac{dt}{۰}=\frac{da}{۰}=\frac{db}{-۲b}=\frac{dc}{-c}. \qquad (۴۱)$$

با حل دستگاه فوق، چهار ناوردای مستقل تابعی

$$k = cx, \quad h = bx^{۲}, \quad f = a, \quad s = t,$$

به‌دست می‌آید. حال اگر f، h و k را به‌عنوان توابعی از متغیر s در نظر بگیریم می‌توانیم مشتقات a، b و c نسبت به x و t را بر حسب s، f، h، k و مشتقات f، h و k نسبت به s به‌دست آوریم. چون $f(t) = a$، $x^{-۲}h(t) = b$ و $x^{-۱}k(t) = c$، با قاعده زنجیره‌ای داریم:

$$\begin{array}{lll}
a_{۱} = \frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} = ۰, & a_{۲} = a_t = \cdots = f_t, & b_{۱} = -۲x^{-۳}h, \\
b_{۲} = x^{-۲}h_t, & c_{۱} = -x^{-۲}k, & c_{۲} = x^{-۱}k_t, \\
a_{۱۱} = a_{xx} = ۰, & a_{۲۱} = ۰, & a_{۲۲} = f_{tt}, \\
b_{۱۱} = ۶x^{-۴}h & b_{۲۲} = x^{-۲}h_{tt}, & b_{۲۱} = -۲x^{-۳}h_t, \\
c_{۱۱} = ۲x^{-۳}k, & c_{۲۱} = -x^{-۲}k_t, & c_{۲۲} = x^{-۱}k_{tt}.
\end{array}$$

با جایگذاری این مقادیر در دستگاه معادلات اینشتین، دستگاه به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{array}{ll}
h_{tt} = ۰, & ۳hk_t - ۵h_t k - k^{۲} + ۶fh = ۰, \\
k_{tt} = ۰, & hf_{tt} - k_t^{۲} + f_t k + f_t h_t + fk_t = ۰, \\
k - h_t = ۰, & hk_{tt} - ۲kk_t + ۲f_t h + ۲fk = ۰.
\end{array}$$

که یک دستگاه معادلات معمولی است و جواب‌های آن عبارتند از:

$$(۱)\begin{cases} f = f(t) \\ h = ۰ \\ k = ۰ \end{cases} \qquad (۲)\begin{cases} f = \frac{r_{۲}^{۲}}{r_{۲}t + r_{۱}} \\ h = r_{۲}t + r_{۱} \\ k = r_{۲} \end{cases} \tag{۴۵}$$

که در آن $r_{۱}$ و $r_{۲}$ ثابت‌های دلخواه و $f(t)$ تابع دلخواه است. با استفاده مجدد از تغییر متغیر (۴۲)، جواب‌های ناوردای گروهی متناظر با زیرجبر $V_{۳}$ به‌دست می‌آید. به طریق مشابه می‌توان برای همهٔ زیرجبرهای موجود در دستگاه بهینهٔ زیرجبرهای یک بعدی (۴۰)، دستگاه را کاهش داد و جواب‌های ناوردای گروهی را به‌دست آورد. در جدول ۳، ناورداهای دیفرانسیلی و مختصات جدید حاصل از آن را برای تمام مولدهای دستگاه بهینه فهرست کرده‌ایم.

حال برای هر کدام از مولدهای دستگاه بهینه به کمک جدول ۳، معادلات کاهش‌یافته را به‌دست آورده و جواب‌های ناوردای گروهی متناظر را به‌دست می‌آوریم. برای ردیف ۱، دستگاه کاهش‌یافته عبارت است از

$$\begin{array}{ll}
hk_{tt} = ۰, & f_t h_t - k_t^{۲} + hf_{tt} = ۰, \\
k_{tt} = ۰, & h_{tt} = ۰.
\end{array} \tag{۴۶}$$

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.138258.1589

جدول ۳. ناورداهای لی و مختصات متناظر به آن برای معادلات اینشتین

Table 3: Lie invariants and their corresponding coordinates for Einstein's equations

i	V_i	s_i	$f_i(s)$	$h_i(s)$	$k_i(s)$	a_i	b_i	c_i
۱	$V_۱$	t	a	b	c	$f(s)$	$h(s)$	$k(s)$
۲	$V_۲$	x	a	b	c	$f(s)$	$h(s)$	$k(s)$
۳	$V_۶$	x	a	$t^{-۲}b$	$t^{-۱}c$	$f(s)$	$h(s)t^{۲}$	$k(s)t$
۴	$V_۱ + V_۷$	t	$e^{-x}a$	$e^{-x}b$	$e^{-x}c$	$f(s)e^{x}$	$h(s)e^{x}$	$k(s)e^{x}$
۵	$V_۲ + V_۷$	x	$e^{-t}a$	$e^{-t}b$	$e^{-t}c$	$f(s)e^{t}$	$h(s)e^{t}$	$k(s)e^{t}$
۶	$V_۶ + V_۷$	x	$t^{-۱}a$	$t^{-۳}b$	$t^{-۲}c$	$f(s)t$	$h(s)t^{۳}$	$k(s)t^{۲}$

که دو دسته جواب ناوردای گروهی به فرم زیر برای آن حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} f = f(t), \\ h = ۰, \\ k = r_۱, \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} f = (\dfrac{r_۱ r_۳ - r_۴ r_۵^۲}{r_۳^۲}) \ln(r_۳ t + r_۴) + \dfrac{r_۵^۲ t}{r_۳} + r_۲, \\ h = r_۳ t + r_۴, \\ k = r_۵ t + r_۶. \end{cases} \tag{۴۷}$$

که در آن r_iها اعداد ثابت دلخواه هستند. برای ردیف ۲، دستگاه کاهش‌یافته عبارت است از

$$\begin{aligned} & f k_{xx} - k f_{xx} = ۰, \qquad && h_x f_x - k_x^۲ + f h_{xx} = ۰, \\ & k_{xx} = ۰, && f_{xx} = ۰, \end{aligned} \tag{۴۸}$$

که دو دسته جواب ناوردای گروهی به فرم زیر برای آن حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} f = ۰, \\ h = h(x), \\ k = r_۱, \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} f = r_۳ x + r_۴, \\ h = (\dfrac{r_۱ r_۳ - r_۴ r_۵^۲}{r_۳^۲}) \ln(r_۳ x + r_۴) + \dfrac{r_۵^۲ x}{r_۳} + r_۲, \\ k = r_۵ x + r_۶. \end{cases} \tag{۴۹}$$

برای ردیف ۳، دستگاه کاهش‌یافته عبارت است از

$$\begin{aligned} & ۲h - f_{xx} = ۰, \qquad && -f h_{xx} - h k_x - ۳ h_x k - f_x h_x + k_x^۲ = ۰, \\ & k_{xx} + ۲h_x = ۰, && -f k_x - k^۲ + f_x k = ۰, \\ & f k_{xx} - k f_{xx} + ۲ k_x k = ۰, && \end{aligned} \tag{۵۰}$$

که دو دسته جواب ناوردای گروهی به فرم زیر برای آن حاصل می‌شود

$$\begin{cases} h = r_۲, \\ f = k(r_۱ + x), \\ k = r_۳ + r_۲ x, \end{cases} \qquad , \qquad \begin{cases} h = \dfrac{k_x k_{xxx} - ۲k_{xx}^۲}{k_{xxx}}, \\ f = -\dfrac{۴kk_{xx}}{k_{xxx}}, \\ k = \dfrac{۱۲۸ - r_۱}{۳(r_۲ + x)^۲} + r_۴ + r_۳ x. \end{cases} \qquad (۵۱)$$

برای ردیف ۴، دستگاه کاهش‌یافته عبارت است از

$$\begin{aligned} &f - h_{tt} = ۰, && f_t h_t + f_t k + h f_{tt} - k_t^۲ = ۰, \\ &k + h_t = ۰, && ۲kk_t - f_t h + hk_{tt} = ۰, \\ &k_{tt} + f_t = ۰, && ۲fh - k^۲ + ۳h_t k - ۲hk_t = ۰, \end{aligned} \qquad (۵۲)$$

که دو دسته جواب ناوردای گروهی به فرم زیر برای آن حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} k = ۰, \\ h = r_۱, \\ f = ۰, \end{cases} \qquad , \qquad \begin{cases} k = r_۲ e^{r_۱ t}, \\ h = -\dfrac{r_۲}{r_۱} e^{r_۱ t}, \\ f = -r_۱ r_۲ e^{r_۱ t}. \end{cases} \qquad (۵۳)$$

برای ردیف ۵، دستگاه کاهش‌یافته عبارت است از

$$\begin{aligned} &k + f_x = ۰, && f h_{xx} - k_x^۲ + h_x k + h_x f_x = ۰, \\ &k_{xx} + h_x = ۰, && -hk - f k_{xx} + k f_{xx} - ۲k_x k + f h_x = ۰, \\ &h - f_{xx} = ۰, && -k^۲ + ۳f_x k - ۲f k_x + ۲hf = ۰, \end{aligned} \qquad (۵۴)$$

که دو دسته جواب ناوردای گروهی به فرم زیر برای آن حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} k = ۰, \\ f = r_۱, \\ h = ۰, \end{cases} \qquad , \qquad \begin{cases} k = r_۲ e^{r_۱ x}, \\ f = -\dfrac{r_۲}{r_۱} e^{r_۱ x}, \\ h = -r_۱ r_۲ e^{r_۱ x}. \end{cases} \qquad (۵۵)$$

برای ردیف ۶، دستگاه کاهش‌یافته عبارت است از

$$\begin{aligned} &f_{xx} - ۶h = ۰, && ۴k_x k - f h_x - k f_{xx} + f k_{xx} + ۲hk = ۰, \\ &۳h_x + k_{xx} = ۰, && ۴k^۲ - ۳fh - ۴f_x k + ۳f k_x = ۰, \\ &۲k + f_x = ۰, && f_x h_x + ۴h_x k + h k_x - k_x^۲ + f h_{xx} = ۰. \end{aligned} \qquad (۵۶)$$

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.138258.1589

که دو دسته جواب ناوردای گروهی به فرم زیر برای آن حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} k = 0, \\ h = 0, \\ f = r_1, \end{cases} \qquad , \qquad \begin{cases} k = -\dfrac{27}{(r_1x + r_2)^3}, \\ h = -\dfrac{1}{3}k_x, \\ f = -\dfrac{3k^2}{k_x}. \end{cases} \tag{57}$$

۵. نتیجه گیری

در این مقاله با استفاده از روش تقارنی لی به تحلیل معادلات اینشتین، که یکی از مهمترین معادلات در ریاضی فیزیک است، پرداختیم. برای این‌کار پس از به‌دست آوردن گروه تقارنی این معادلات، دستگاه بهینه زیرجبرهای یک پارامتری را به‌دست آوردیم و با استفاده از ناورداهای دیفرانسیلی، معادلات را کاهش داده و جواب‌های ناوردای گروهی را یافتیم. بنابراین جواب‌های جدیدی از معادلات اینشتین به‌دست آمد که به یافتن خمینه‌های واکری اینشتینی جدید منجر شد.

مراجع

[1] R. Abounasr, A. Belhaj, J. Rasmussen and E. H. Saidi, Superstring theory on pp waves with *ADE* geometries, *J. Phys. A*, **39** (2006) 2797–2841.

[2] R. Bakhshandeh-Chamazkoti and M. Alipour, Lie symmetry classification and numerical analysis of KdV equation with power-law nonlinearity, *Math. Rep. (Bucur.)*, **22** (2020) 163–176.

[3] A. Bejancu and H. R. Faran, *Foliations and Geometric Structures*, Mathematics and Its Applications (Springer), **580**, Springer, Dordrecht, 2006.

[4] G. W. Bluman and J. D. Cole, The general similarity solution of the heat equation, *J. Math. Mech.*, **18** (1969) 1025–1042.

[5] G. W. Bluman and S. Kumei, *Symmetry and Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, No. 81, Spriger-Verlag, New York, 1989.

[6] M. Brozos-Vázquez, E. García-Río, P. Gilkey, S. Nikvčević and R. Vázques-Lorenzo, *The geometry of Walker manifolds*, A Publication in the Morgan and Claypool Publishers series, 2009.

[7] M. Chaichi, E. García-Río and Y. Matsushita, Curvature properties of four-dimensional Walker metrics, *Classical Quantum Gravity*, **22** (2005) 559–577.

[8] P. Giblin, Obituary: Arthur Geoffrey Walker 1909-2001, *Bull. London Math. Soc.*, **36** (2004) 271–280.

[9] P. Gilkey, *The geometry of curvature homogeneous pseudo-Riemannian manifolds*, ICP Advanced Texts in Mathematics, Imperial College Press, London, 2007.

[10] M. Jafari, A. Zaeim and M. Gandom, On similarity reductions and conservation laws of the two non-linearity terms Benjamin-Bona-Mahoney equation, *Journal of Mathematical Extension*, **17** (2023) 1–22.

[11] M. Jafari, A. Zaeim and A. Tanhaeivash, Symmetry group analysis and conservation laws of the potential modified KdV equation using the scaling method, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, **19** (2022) 14 pp.

[12] M. Khorshidi, M. Nadjafikhah, H. Jafari and M. Al Qurashi, Reductions and conservation laws for BBM and modified BBM equations, *Open Math.*, **14** (2016) 1138–1148.

[13] S. Lie, On integration of a class of linear partial differential equations by means of definite integrals, *Arch. Math.*, **6** (1881) 328–368, translation by N. H. Ibragimov.

[14] P. J. Olver, *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, Second Edition, Graduate Texts in Mathematics, **107**, Springer-Verlag, New York, 1993.

[15] P. J. Olver, *Equivalence, invariants and symmetry*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[16] L. V. Ovsiannikov, *Group analysis of differential equations*, Academic Press, New York, 1982.

[17] A. A. Shaikh, Y. H. Kim and S. K. Hui, On Lorentzian quasi-Einstein manifolds, *J. Korean Math. Soc.*, **48** (2011) 669–689.

[18] A. G. Walker, Canonical form for a Riemannian space with a parallel field of null planes, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, **1** (1950) 69–79.

[19] A. G. Walker, On parallel fields of partially null vector spaces, *Quart. J. Math. Oxford Ser.*, **20** (1949) 135–145.

[۲۰] ا. زعیم، ی. آریانژاد و م. قیطاسی، پیرامون برخی خمینه‌های همدیس اینشتین از بعد چهار، ریاضی و جامعه، **۷** (۲) (۱۴۰۱) ۱۹–۳۶.

مهدی جعفری
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه پیام‌نور، تهران
m.jafarii@pnu.ac.ir

مهدی جعفری متولد اردیبهشت ماه ۱۳۵۹ در شهر اصفهان است. وی در سال ۱۳۷۷ وارد مقطع کارشناسی رشته ریاضی محض دانشگاه صنعتی اصفهان شد و در سال ۱۳۸۲ وارد مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض، گرایش هندسه، دانشگاه صنعتی امیرکبیر شد. وی در سال ۱۳۸۷ وارد مقطع دکتری در رشته ریاضی محض گرایش هندسه گردید و در سال ۱۳۹۱ فارغ التحصیل گردید. او هم اکنون عضو هیات علمی دانشگاه پیام نور اصفهان می باشد. تخصص اصلی وی هندسه دیفرانسیل با رویکردهای فیزیکی، معادلات دیفرانسیل و هندسه شبه ریمانی می باشد.

 http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.138258.1589