Mathematics and Society
University of Isfahan
http://math-sci.ui.ac.ir

Journal of Mathematics and Society
ISSN (print): 2345-6493, ISSN (on-line): 2345-6507
Vol. 8 No. 3 (2023), pp. 41-54.

http://www.ui.ac.ir

RESOLVING SETS OF VERTICES WITH THE MINIMUM SIZE IN GRAPHS

ALI ZAFARI*, NADER HABIBI AND SAEID ALIKHANI

ABSTRACT. Suppose that G is a simple connected graph with vertex set $V(G)$ and edge set $E(G)$. A subset $S = \{s_1, s_2, \dots, s_l\}$ of vertices of graph G is called a doubly resolving set of G, if for any distinct vertices u and v in G there are elements x and y in the set S such that $d(u,x) - d(u,y) \neq d(v,x) - d(v,y)$. The minimum size of a doubly resolving set of the vertices of graph G is denoted by $\boldsymbol{\psi}(G)$. In this paper, we calculate the resolving sets of vertices with the minimum size for the line graph $L(C_n \circ \overline{K}_m)$ and graph $\big((C_n \circ \overline{K}_m)\square P_k\big)$, in which the symbols $\circ$ and $\square$ denote the Corona product and Cartesian product between two graphs, respectively. In particular, we show that if $n \geq 3$ and $m, k \geq 2$ are integers, then $\boldsymbol{\psi}((C_n \circ \overline{K}_m)\square P_k) = \boldsymbol{\psi}(C_n \circ \overline{K}_m) + \boldsymbol{\psi}(P_k) - 1$, which gives a partial answer to the problem of characterizing graphs G and H satisfying the equality $\boldsymbol{\psi}(G\square H) = \boldsymbol{\psi}(G) + \boldsymbol{\psi}(H) - 1$, which is recently posed in [K. Nie and K. Xu, The doubly metric dimension of cylinder graphs and torus graphs, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, **46** (2023) 19 pp].

1. Introduction

Let G be a simple and connected graph with the set of vertices $V(G)$ and the set of edges $E(G)$. We denote the length of the shortest path between two vertices u and v in the graph G by $d(u,v)$. We use C_n, $\overline{K_m}$ and P_k to denote the cycle graph of order n, complement of the complete graph on m vertices and the path graph of order k, respectively. Also, the line graph G is denoted by $L(G)$, that the set of vertices of $L(G)$ are the same as the edges of the graph G, and two vertices are adjacent in the graph $L(G)$, if their corresponding edges in graph G have a common vertex [6]. Our goal is to calculate some

Keywords: doubly resolving set, Cartesian product, Corona product, line graph.

Communicated by Alireza Abdollahi.

Article Type: Research Paper.

*Corresponding author.

Received: 06 August 2023, Accepted: 07 October 2023, Published Online: 28-10-2023.

Cite this article: A. Zafari, N. Habibi and S. Alikhani, Resolving sets of vertices with the minimum size in graphs, *Journal of Mathematics and Society*, **8** no. 3 (2023) 41–54.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.138631.1599 .

resolving sets depending on the line graph of the Corona product $C_n \circ \overline{K_m}$ and the Cartesian product $(C_n \circ \overline{K_m})\square P_k$, so we give first some explanations about the Corona product and Cartesian product of graphs. Suppose G and H are two graphs with n and m vertices, respectively. If we consider n copies of H and for $i = 1, 2, \ldots, n$, all the vertices of the i^{th} copy of H are adjacent to the vertex i of G, then the desired graph is called the Corona product of two graphs G and H and we denote it by $G \circ H$. Also, if G and H are two graphs, we denote the Cartesian product of these graphs by $G\square H$ or $G \times H$ and define in this way $V(G\square H) = V(G) \times V(H)$ and two vertices (g, h) and (g', h') in $G\square H$ are adjacent if and only if $g = g'$ and $hh' \in E(H)$ or $h = h'$ and $gg' \in E(G)$. For any ordered subset $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$ of the vertices of graph G and the vertex v of G, representation the vertex v with respect to the ordered set S denoted by $\mathrm{r}(v|\mathrm{S})$ and so it is $\mathrm{r}(v \mid \mathrm{S}) = (\mathrm{d}(v, s_1), \mathrm{d}(v, s_2), \ldots, \mathrm{d}(v, s_k))$. If all the vertices of the graph G have distinct metric representations with respect to the ordered set S, then S is called a resolving set of vertices of G. A resolving set of vertices of G with the minimum size is called the metric dimension of the graph G and it is represented by $\boldsymbol{\beta}(G)$. The study of resolving set of vertices in graph theory dates back to the 1970s, and such concepts were first introduced in the articles [7, 18]. The metric dimension of complete graphs, trees, paths, and the Cartesian product have been taken into consideration, also in the article [5] all graphs of order n that have the metric dimension greater than or equal to $n-2$ are fully characterised. The subset $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_l\}$ of the vertices of graph G is called a doubly resolving set for G, if for any distinct pair vertices u and v of G, there are the elements x and y of S, in which $d(u, x) - d(u, y) \neq d(v, x) - d(v, y)$. We denote the size of the minimum doubly resolving set in graph G by $\boldsymbol{\psi}(G)$. Concepts related to resolving sets and doubly resolving sets of graphs have been studied in the articles [4, 5]. The graph $(C_5 \circ \overline{K}_3)$ and graph $L(C_5 \circ \overline{K}_3)$ are drawn in Figure 1. Also, the graph $(C_3 \circ \overline{K}_3)$ and graph $(C_3 \circ \overline{K}_3)\square P_2$ are drawn in Figure 2.

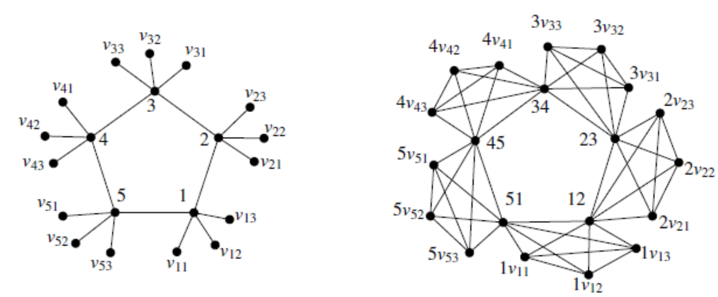


FIGURE 1. The graph $(C_5 \circ \overline{K}_3)$ and graph $L(C_5 \circ \overline{K}_3)$, respectively.

2. Main Results

Theorem 2.1. *If n and m are fixed positive integers, in which $n \geq 3$, $m \geq 2$, then the cardinality of minimum doubly resolving set of the line graph of graph $C_n \circ \overline{K}_m$ is $nm - n$.*

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.138631.1599

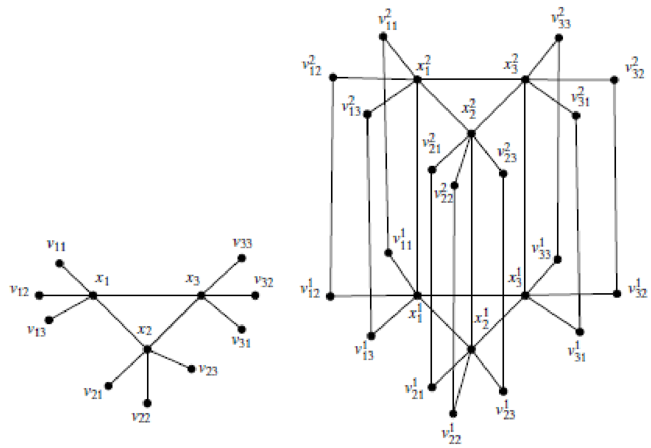


FIGURE 2. The graph $(C_3 \circ \overline{K}_3)$ and graph $(C_3 \circ \overline{K}_3)\Box P_2$, respectively.

Theorem 2.2. *If n, m and k are fixed positive integers, in which $n \geq 3$ and $m, k \geq 2$, then $\boldsymbol{\beta}((C_n \circ \overline{K}_m)\Box P_k) = nm - n + 1$.*

Theorem 2.3. *If n, m and k are fixed positive integers, in which $n \geq 3$ and $m, k \geq 2$, then $\boldsymbol{\psi}\left((C_n \circ \overline{K}_m)\Box P_k\right) = \boldsymbol{\psi}(C_n \circ \overline{K}_m) + \boldsymbol{\psi}(P_k) - 1$.*

3. Conclusions

Considering the importance of the minimum resolving sets in graphs, in this paper, we first calculated some resolving sets of vertices with the minimum size for the line graph of graph $C_n \circ \overline{K}_m$ and graph $\left((C_n \circ \overline{K}_m)\Box P_k\right)$. In particular, we show that if $n \geq 3$ and $m, k \geq 2$ are integers, then $\boldsymbol{\psi}((C_n \circ \overline{K}_m)\Box P_k) = \boldsymbol{\psi}(C_n \circ \overline{K}_m) + \boldsymbol{\psi}(P_k) - 1$, which gives a partial answer to the problem of characterizing graphs G and H satisfying the equality $\boldsymbol{\psi}(G\Box H) = \boldsymbol{\psi}(G) + \boldsymbol{\psi}(H) - 1$, which is recently posed in [15].

Ali Zafari
Department of Mathematics, Faculty of Science, Payame Noor University, P.O.Box 19395-4697, Tehran, Iran.
Email(s): zafari.math@pnu.ac.ir; zafari.math.pu@gmail.com

Nader Habibi
Department of Mathematics, Faculty of Science, University of Ayatollah Ozma Borujerdi, Borujerd, Iran.
Email: habibi@abru.ac.ir

Saeed Alikhani
Department of Mathematical Sciences, Yazd University, Yazd, Iran.
Email: alikhani@yazd.ac.ir

ریاضی و جامعه
شاپا (چاپی): ۶۴۹۳-۲۳۴۵، شاپا(الکترونیکی): ۶۵۰۷-۲۳۴۵
جلد ۸، شماره ۳ (۱۴۰۲)، صص. ۴۱-۵۴.

http://www.ui.ac.ir
http://math-sci.ui.ac.ir

مجموعه‌های تفکیک‌کننده رأس‌ها در گراف‌ها با کوچکترین اندازه

علی ظفری*، نادر حبیبی و سعید علیخانی

چکیده. فرض کنیم G یک گراف ساده همبند با مجموعه رأس‌های $V(G)$ و مجموعه یال‌های $E(G)$ باشد. زیرمجموعه $S=\{s_1, s_2, \ldots, s_l\}$ از رأس‌های گراف G یک مجموعه تفکیک‌کننده دوگانه برای گراف G نامیده می‌شود، هرگاه برای هر دو رأس متمایز u و v از گراف G، عضوهای x و y از S موجود باشند که $d(u,\ x)-d(u,\ y)\neq\ d(v,\ x)-d(v,\ y)$. اندازه کوچک‌ترین مجموعه تفکیک‌کننده دوگانه در گراف G را با $\psi(G)$ نشان می‌دهند. در این مقاله، ضمن آشنایی با مفهوم و خواص $\psi(G)$، برخی مجموعه‌های تفکیک‌کننده رأس‌ها با کوچکترین اندازه را برای گراف یالی $L(C_n\circ\overline{K}_m)$ و گراف $(C_n\circ\overline{K}_m)\square P_k$ محاسبه می‌کنیم، که در آن نمادهای $\circ$ و $\square$ به‌ترتیب حاصل‌ضرب کرونا و حاصل‌ضرب دکارتی بین دو گراف را مشخص می‌کنند. به‌ویژه، در پاسخ به مسأله مشخص نمودن گراف‌های G و H، که برای آن‌ها تساوی $\psi(G\square H)=\psi(G)+\psi(H)-1$ برقرار است [۱۵]، ما نشان می‌دهیم که اگر $n\geq 3$ و $m,k\geq 2$ عددهای صحیح باشند، آن‌گاه $\psi\left((C_n\circ\overline{K}_m)\square P_k\right)$ برابر است با $\psi\left(C_n\circ\overline{K}_m\right)+\psi(P_k)-1$.

۱. مقدمه

فرض کنیم G گرافی ساده و همبند با مجموعه رأس‌های $V(G)$ و مجموعه یال‌های E(G) باشد. طول کوتاه‌ترین مسیر بین دو رأس u و v در گراف G را با $d(u,v)$ نشان می‌دهیم. همچنین گراف یالی G را با $L(G)$ نشان داده که مجموعه رأس‌های $L(G)$ همان یال‌های گراف G هستند و دو رأس در گراف $L(G)$ مجاور هستند، هرگاه یال‌های متناظرشان در گراف G رأس مشترکی داشته باشند [۶]. مجاورت و نامجاورت دو رأس u و v در گراف G را به‌ترتیب با نمادهای $\leftrightarrow$ و $\not\leftrightarrow$ نشان می‌دهیم. با توجه به اینکه هدف ما محاسبه برخی از مجموعه‌های تفکیک‌کننده وابسته به گراف یالی حاصل‌ضرب کرونا $L(C_n\circ\overline{K}_m)$ و حاصل‌ضرب دکارتی $(C_n\circ\overline{K}_m)\square P_k$ است، توضیحاتی راجع به حاصل‌ضرب کرونا و حاصل‌ضرب دکارتی گراف‌ها بیان می‌کنیم.

فرض کنیم G و H به‌ترتیب دو گراف n و m رأسی باشند. اگر n نسخه از گراف H را در نظر بگیریم و برای $i=1,\ 2,\ldots,\ n$ همه رأس‌های iامین نسخه از گراف H را به رأس iام گراف G مجاور کنیم، آن‌گاه گراف مورد نظر حاصل‌ضرب کرونای دو گراف G و H نامیده می‌شود و آن را با $G\circ H$ نشان می‌دهیم. همچنین اگر G و H دو گراف باشند، حاصل‌ضرب

عبارات و کلمات کلیدی: مجموعه تفکیک‌کننده دوگانه، حاصل‌ضرب دکارتی، حاصل‌ضرب کرونا، گراف یالی.
دبیرتخصصی رابط: علیرضا عبدالهی
نوع مقاله: پژوهشی
*نویسنده مسئول
تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۵/۱۵ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۷/۱۵ تاریخ انتشار آنلاین: ۱۴۰۲/۰۸/۰۶
ارجاع به مقاله: ع. ظفری، ن. حبیبی و س. علیخانی، مجموعه‌های تفکیک‌کننده رأس‌ها درگراف‌ها با کوچکترین اندازه، نشریه ریاضی و جامعه، ۸ شماره. ۳ (۱۴۰۲) ۴۱-۵۴.
http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.138631.1599 .

دکارتی این دو گراف را با $G\Box H$ یا $G \times H$ نشان می‌دهیم و به این‌صورت تعریف می‌کنیم، $V(G\Box H) = V(G) \times V(H)$ و دو رأس (g,h) و $(g',\ h')$ در $G\Box H$ مجاور هستند اگر و فقط اگر $g = g'$ و $hh' \in E(H)$ یا $h = h'$ و $gg' \in E(G)$.

برای هر زیرمجموعه مرتب $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$ از رأس‌های گراف G و رأس v از گراف G، نمایش رأس v نسبت به مجموعه مرتب S را با $\mathrm{r}(v|\mathrm{S})$ نشان می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{r}\,(v \mid \mathrm{S}) = \ (\mathrm{d}\,(v,\ s_1)\,,\ \mathrm{d}\,(v,\ s_2)\,,\ \cdots,\ \mathrm{d}\,(v,\ s_k))\,.$$

اگر همه رأس‌های گراف G نسبت به مجموعه مرتب S دارای نمایش‌های متریک متمایز باشند، آنگاه S یک مجموعه تفکیک‌کننده رأس‌های گراف G نامیده می‌شود. یک مجموعه تفکیک‌کننده رأس‌های گراف G با کوچکترین اندازه را بُعد متریک گراف G می‌نامند و آن را با $\boldsymbol{\beta}\,(G)$ نمایش می‌دهند. مطالعه مجموعه رأس‌های تفکیک‌کننده در نظریه گراف‌ها به دهه ۱۹۷۰ بر می‌گردد و چنین مفاهیمی ابتدا در مقاله‌های [۷، ۱۸] مورد بحث قرار گرفتند. بُعد متریک گراف‌های کامل، درخت‌ها، مسیرها و حاصل‌ضرب دکارتی مورد توجه قرار گرفته شده است، همچنین در مقاله [۵] همه گراف‌های مرتبه n که دارای بُعد متریک بزرگ‌تر یا مساوی $n-2$ هستند، به‌طور کامل مشخص شده‌اند و در سال‌های اخیر مطالعه گراف‌های مرتبه n که دارای بُعد متریک کمتر از $n-2$ هستند مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته است [۳، ۸، ۱۲، ۱۹]. زیرمجموعه $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_l\}$ از رأس‌های گراف G یک مجموعه تفکیک‌کننده دوگانه برای گراف G نامیده می‌شود، هرگاه برای هر دو رأس متمایز u و v از گراف G عضوهای x و y از S موجود باشند که

$$d(u,x) - d(u,y) \neq d(v,x) - d(v,y).$$

اندازه کوچک‌ترین مجموعه تفکیک‌کننده دوگانه در گراف G را با $\boldsymbol{\psi}\,(G)$ نشان می‌دهیم. مفاهیم وابسته به مجموعه‌های تفکیک‌کننده دوگانه گراف‌ها در مقاله‌های [۴، ۵] مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. واضح است اگر G یک گراف همبند باشد، آن‌گاه هر مجموعه تفکیک‌کننده دوگانه گراف G، یک مجموعه تفکیک‌کننده برای گراف G نیز هست، بنابراین رابطه $\boldsymbol{\beta}\,(G) \leq \boldsymbol{\psi}\,(G)$ همواره برقرار است. اندازه کوچک‌ترین مجموعه تفکیک‌کننده دوگانه برای دور C_n در مقاله [۴] مشخص شده است. هم‌چنین مطالعه مجموعه‌های تفکیک‌کننده و تفکیک‌کننده دوگانه در مقالات [۱، ۲، ۹، ۱۱، ۱۳، ۱۴] مورد توجه قرار گرفته است. به‌ویژه، به‌تازگی در مقاله [۱۵] یک مسأله باز به این‌صورت مطرح شده است که برای چه دسته گراف‌هایی مانند G و H تساوی $\boldsymbol{\psi}(G\Box H) = \boldsymbol{\psi}(G) + \boldsymbol{\psi}(H) - 1$ همواره برقرار است؟ در این مقاله نشان خواهیم داد اگر $n \geq 3$ و $m, k \geq 2$ عددهای صحیح باشند، آن‌گاه

$$\boldsymbol{\psi}\left((C_n \circ \overline{K}_m)\Box P_k\right) = \boldsymbol{\psi}(C_n \circ \overline{K}_m) + \boldsymbol{\psi}(P_k) - 1.$$

رأس w از گراف G دو رأس u و v از گراف G را به‌طور قوی تفکیک می‌کند، هرگاه u به مسیر $v-w$ تعلق داشته باشد یا اینکه v به مسیر $u-w$ تعلق داشته باشد. زیرمجموعه $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$ از رأس‌های گراف G یک مجموعه تفکیک‌کننده قوی برای گراف G نامیده می‌شود، هرگاه هر دو رأس گراف G توسط بعضی از عضوهای S به‌طور قوی تفکیک شود. اندازه کوچک‌ترین مجموعه تفکیک‌کننده قوی در گراف G را با $\boldsymbol{sdim}\,(G)$ نشان می‌دهیم. مطالعه مفاهیم وابسته به مجموعه رأس‌های تفکیک‌کننده قوی در نظریه گراف‌ها در مقالات [۱۶، ۱۷، ۱۸] مورد توجه قرار گرفته‌اند. در مقاله [۸] بُعد مجاورت گراف G به این‌صورت تعریف شده است. زیرمجموعه $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_r\}$ از رأس‌های گراف G را در نظر بگیرید. برای هر رأس v از گراف G نمایش مجاورت v نسبت به S را با $\hat{r}\,(v|\ S)$ نشان داده و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

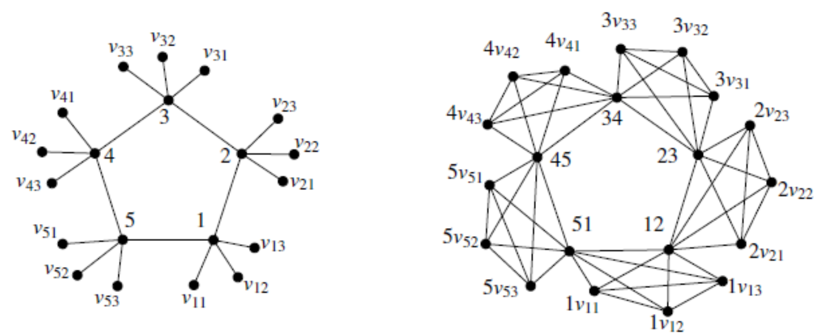
$$\hat{r}\,(v|S) = (a_G(v,s_1), a_G(v,s_2), \ldots, a_G(v,s_r))\,,$$

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.138631.1599

که در آن

$$a_G(v,s_i)=\begin{cases} ۰ & v=s_i \\ ۱ & v\leftrightarrow s_i \\ ۲ & v\not\leftrightarrow s_i \end{cases}.$$

اگر همه رأس‌های گراف G نسبت به مجموعه S دارای نمایش مجاورت متمایز باشند، آن‌گاه S یک مجموعه تفکیک‌کننده مجاورت رأس‌های گراف G نامیده می‌شود. اندازه کوچک‌ترین مجموعه تفکیک‌کننده مجاورت رأس‌های گراف G را بُعد مجاورت گراف G می‌نامند و آن‌را با $\hat{\beta}(G)$ نمایش می‌دهند. محاسبه بُعد متریک و اندازه کوچک‌ترین مجموعه رأس‌های تفکیک‌کننده دوگانه و قوی در گراف‌ها از مسائل NP هستند و کاربردهای زیادی در سایر علوم ، به‌ویژه علم شیمی [۵]، ناوبری ربات [۱۰]، بهینه‌سازی ترکیبیاتی [۱۷] و تشخیص الگو و پردازش تصاویر [۱۸] دارند. در این مقاله برخی مجموعه‌های تفکیک‌کننده از رأس‌ها با کوچکترین اندازه را برای گراف یالی $L(C_n\circ\overline{K}_m)$ و گراف $(C_n\circ\overline{K}_m)\square P_k$ محاسبه می‌کنیم. در شکل ۱ گراف $C_۵\circ\overline{K}_۳$ و گرافی یالی $L(C_۵\circ\overline{K}_۳)$ و هم‌چنین، در شکل ۲ گراف $(C_۳\circ\overline{K}_۳)$ و گراف $(C_۳\circ\overline{K}_۳)\square P_۲$ ترسیم شده‌اند.



شکل ۱. گراف $(C_۵\circ\overline{K}_۳)$ و گراف $L(C_۵\circ\overline{K}_۳)$ از چپ به راست.

Figure 1: The graph $(C_5\circ\overline{K}_3)$ and graph $L(C_5\circ\overline{K}_3)$, respectively.

۲. قضایای اولیه

در این بخش برخی از قضایا و نتایج مهم که در اثبات قضایای بخش بعد کاربرد دارند را بیان می‌کنیم.

قضیه ۱.۲. [۵] اگر $n\geq ۲$ و P_n یک مسیر n رأسی باشد، آن‌گاه $\beta(P_n)=۱$ و $\psi(P_n)=۲$.

قضیه ۲.۲. [۸] اگر G یک گراف همبند باشد، آن‌گاه $\beta(G)\leq\hat{\beta}(G)$.

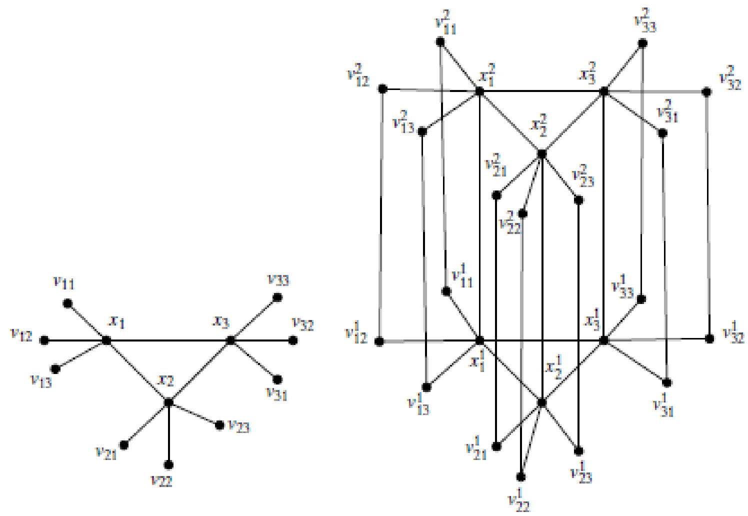
قضیه ۳.۲. [۱۲] اگر $n\geq ۳$ و $m\geq ۲$ دو عدد صحیح باشند، آن‌گاه $\beta(C_n\circ\overline{K}_m)=nm-n$.

قضیه ۴.۲. [۱۲] اگر $n\geq ۳$ و $m\geq ۲$ دو عدد صحیح باشند، آن‌گاه $\psi(C_n\circ\overline{K}_m)=nm$.

قضیه ۵.۲. [۱۲] اگر $n\geq ۳$ و $m\geq ۲$ دو عدد صحیح باشند، آن‌گاه $sdim(C_n\circ\overline{K}_m)=nm-۱$.

قضیه ۶.۲. [۱۲] اگر $n\geq ۳$ و $m\geq ۲$ دو عدد صحیح باشند، آن‌گاه $\hat{\beta}(C_n\circ\overline{K}_m)=nm-۱$.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.138631.1599



شکل ۲. گراف $(C_۳ \circ \overline{K}_۳)$ و گراف $(C_۳ \circ \overline{K}_۳)\square P_۲$ از چپ به راست.

Figure 2: The graph $(C_3 \circ \overline{K}_3)$ and graph $(C_3 \circ \overline{K}_3)\square P_2$, respectively.

قضیه ۷.۲. [۴] اگر G یک گراف همبند باشد و P_n یک مسیر n رأسی باشد، آنگاه $\boldsymbol{\beta}(G\square P_n) \leq \boldsymbol{\beta}(G) + ۱$.

قضیه ۸.۲. [۱۵] اگر G و H دو گراف غیربدیهی با رأس‌های مجزا باشند، آنگاه $\boldsymbol{\psi}(G\square H) \leq \boldsymbol{\psi}(G) + \boldsymbol{\psi}(H) - ۱$.

۳. نتایج اصلی

با توجه به اهمیت کوچکترین مجموعه‌های تفکیک‌کننده در گراف‌ها، در این بخش نخست به محاسبه برخی از مجموعه‌های تفکیک‌کننده از رأس‌ها با کوچکترین اندازه برای گراف یالی $L(C_n \circ \overline{K}_m)$ و گراف $(C_n \circ \overline{K}_m)\square P_k$ می‌پردازیم. به‌ویژه، یکی از اهداف ما در این بخش این است که به مسأله باز زیر که در [۱۵] مطرح شده است بپردازیم.

مسأله ۱.۳. برای چه دسته گراف‌هایی مانند G و H تساوی زیر برقرار است؟

$$\boldsymbol{\psi}(G\square H) = \boldsymbol{\psi}(G) + \boldsymbol{\psi}(H) - ۱.$$

در حقیقت نشان می‌دهیم که تساوی مسأله باز ۱.۳ برای گراف $(C_n \circ \overline{K}_m)\square P_k$ برقرار است. به عبارتی اگر $n \geq ۳$ و $m, k \geq ۲$ عددهای صحیحی باشند، آنگاه

$$\boldsymbol{\psi}\left((C_n \circ \overline{K}_m)\square P_k\right) = \boldsymbol{\psi}\left(C_n \circ \overline{K}_m\right) + \boldsymbol{\psi}(P_k) - ۱.$$

قضیه ۲.۳. اگر $n \geq ۳$ و $m \geq ۲$ دو عدد صحیح باشند، آنگاه $\boldsymbol{\beta}\left(L(C_n \circ \overline{K}_m)\right) = nm - n$.

اثبات. فرض کنیم مجموعه رأس‌های گراف $C_n \circ \overline{K}_m$، مجموعه $V_۱ \cup V_۲$ باشد، که در آن $V_۱ = V(C_n) = \{۱, \ldots, n\}$ و $V_۲ = \{A_{۱j}, A_{۲j}, \ldots, A_{nj}\}$، که برای هر $۱ \leq i \leq n$، $A_{ij} = \bigcup_{j=۱}^{m}\{v_{ij}\}$ و هر رأس $i \in V_۱$ با رأس‌های $v_{i۱}, v_{i۲}, \ldots, v_{im} \in A_{ij}$ مجاور است. پس مجموعه رأس‌های گراف یالی $L(C_n \circ \overline{K}_m)$ برابر است با $V(L(C_n \circ \overline{K}_m)) =$

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.138631.1599

$U_۱ \cup U_۲$، که در آن $U_۱ = \{۱۲, ۲۳, \ldots, n۱\}$ و $U_۲ = \{B_{۱j}, B_{۲j}, \ldots, B_{nj}\}$ و برای هر $۱ \leq i \leq n$، داریم $B_{ij} = \bigcup_{j=۱}^{m}\{iv_{ij}\}$. برای سادگی در نمادها، از این پس قرار می‌دهیم $U_۱ = \{v_۱v_۲, v_۲v_۳, \ldots, v_nv_{n+۱}\}$، که در آن $v_{n+۱} = v_۱$. ابتدا نشان می‌دهیم که زیرمجموعه مرتب

$$S_۱ = \{B_{۱j} - ۱v_{۱m}, \ldots, B_{nj} - nv_{nm}\},$$

از رأس‌های گراف $L(C_n \circ \overline{K}_m)$ یک مجموعه تفکیک‌کننده رأس‌های گراف $L(C_n \circ \overline{K}_m)$ است. با توجه به اینکه

$$V(L(C_n \circ \overline{K}_m)) - S_۱ = \{v_۱v_۲, \ldots, v_nv_{n+۱}, ۱v_{۱m}, \ldots, nv_{nm}\},$$

کافی است نشان دهیم هر یک از رأس‌های مجموعه $V(L(C_n \circ \overline{K}_m)) - S_۱$، نسبت به مجموعه مرتب $S_۱$ دارای نمایش‌های متریک متمایز هستند. برای هر $v_iv_{i+۱} \in V(L(C_n \circ \overline{K}_m)) - S_۱$ و $kv_{kl} \in B_{kl}$ که $۱ \leq i, k \leq n$، و $۱ \leq l \leq m - ۱$ اگر $k = i$ یا $k = i + ۱$، آن‌گاه $d(v_iv_{i+۱}, kv_{kl}) = ۱$، در غیر این‌صورت $d(v_iv_{i+۱}, kv_{kl}) > ۱$. هم‌چنین برای رأس‌های $۱v_{۱m}, \ldots, nv_{nm} \in V(L(C_n \circ \overline{K}_m)) - S_۱$ اگر $k = i$، آن‌گاه $d(iv_{im}, kv_{kl}) = ۱$، در غیر این‌صورت $d(iv_{im}\ , kv_{kl}) > ۱$. بنابراین هر یک از رأس‌های مجموعه $V(L(C_n \circ \overline{K}_m)) - S_۱$ نسبت به مجموعه مرتب $S_۱$ دارای نمایش‌های متریک متمایز هستند. در ادامه با اثباتی مشابه [۱۲، قضیه ۱] می‌توان نشان داد که زیرمجموعه مرتب $S_۱$ از رأس‌های گراف $L(C_n \circ \overline{K}_m)$ به‌صورت بالا یک مجموعه تفکیک‌کننده با کوچکترین اندازه $nm - n$ برای گراف $L(C_n \circ \overline{K}_m)$ است. بنابراین $\boldsymbol{\beta}\left(L(C_n \circ \overline{K}_m)\right) = nm - n$. □

قضیه ۳.۳. اگر $n \geq ۳$ و $m \geq ۲$ دو عدد صحیح باشند، آن‌گاه $\boldsymbol{\psi}\left(L(C_n \circ \overline{K}_m)\right) = nm - n$.

اثبات. فرض کنیم $V(L(C_n \circ \overline{K}_m)) = U_۱ \cup U_۲$، که در آن $U_۱$ و $U_۲$ همان مجموعه‌ها در اثبات قضیه ۲.۳ هستند. همچنین بنابر قضیه ۲.۳، $\boldsymbol{\beta}\left(L(C_n \circ \overline{K}_m)\right) = nm - n$. از طرفی رابطه $\boldsymbol{\beta}\left(L(C_n \circ \overline{K}_m)\right) \leq \boldsymbol{\psi}\left(L(C_n \circ \overline{K}_m)\right)$ همواره برقرار است. اکنون نشان می‌دهیم که زیرمجموعه

$$S_۱ = \{B_{۱j} - ۱v_{۱m}, \ldots, B_{nj} - nv_{nm}\},$$

از رأس‌های گراف $L(C_n \circ \overline{K}_m)$، یک مجموعه تفکیک‌کننده دوگانه رأس‌های گراف $L(C_n \circ \overline{K}_m)$ است. بنابراین کافی است نشان دهیم که برای هر دو رأس متمایز u و v از گراف $L(C_n \circ \overline{K}_m)$، عضوهای x و y از $S_۱$ موجود هستند که

$$d(u, x) - d(u, y) \neq d(v, x) - d(v, y).$$

حال دو رأس متمایز u و v از گراف $L(C_n \circ \overline{K}_m)$ را در نظر می‌گیریم:

حالت ۱. فرض کنیم هر دو رأس u و v از گراف $L(C_n \circ \overline{K}_m)$ در $U_۲ - S_۱$ قرار داشته باشند. بدون از دست دادن کلیت مسأله می‌توان فرض کرد $u = kv_{km}$ و $v = lv_{lm}$ که در آن $۱ \leq k, l \leq n$ و $k \neq l$. بنابراین با قرار دادن $x = kv_{k(m-۱)}$ و $y = lv_{l(m-۱)}$ داریم:

$$d(u, x) - d(u, y) \neq d(v, x) - d(v, y).$$

حالت ۲. فرض کنیم هر دو رأس u و v از گراف $L(C_n \circ \overline{K}_m)$ در $U_۱$ قرار داشته باشند. بدون از دست دادن کلیت مسأله می‌توان فرض کرد $u = v_kv_{k+۱}$ و $v = v_lv_{l+۱}$ که در آن $۱ \leq k, l \leq n$ و $k \neq l$. بنابراین با قرار دادن $x = kv_{k(m-۱)}$ و

$y = lv_{l(m-1)}$ داریم:

$$d(u,x) - d(u,y) \neq d(v,x) - d(v,y).$$

حالت ۳. فرض کنیم رأس u از گراف $L(C_n \circ \overline{K}_m)$ در $U_2 - S_1$ قرار داشته باشند و رأس $v \in S_1$. بدون از دست دادن کلیت مسأله می‌توان فرض کرد $u = kv_{km}$ و $v = lv_{l(m-1)}$ که در آن $1 \leq k, l \leq n$. اکنون اگر $k \neq l$، با قرار دادن $x = kv_{k(m-1)}$ و $y = lv_{l(m-1)}$ داریم:

$$d(u,x) - d(u,y) \neq d(v,x) - d(v,y).$$

و در صورتی‌که $k = l$، با قرار دادن $x = kv_{k(m-1)}$ و $y = rv_{r(m-1)}$ که در آن $1 \leq r \leq n$ و $r \neq k$ داریم:

$$d(u,x) - d(u,y) \neq d(v,x) - d(v,y).$$

حالت ۴. فرض کنیم رأس u از گراف $L(C_n \circ \overline{K}_m)$ در $U_2 - S_1$ قرار داشته باشند و رأس $v \in U_1$. بدون از دست دادن کلیت مسأله می‌توان فرض کرد $u = kv_{km}$ و $v = v_l v_{l+1}$ که در آن $1 \leq k, l \leq n$. اکنون اگر $k \neq l$، با قرار دادن $x = kv_{k(m-1)}$ و $y = lv_{l(m-1)}$ داریم:

$$d(u,x) - d(u,y) \neq d(v,x) - d(v,y),$$

و در صورتی‌که $k = l$، با قرار دادن $x = kv_{k(m-1)}$ و $y = rv_{r(m-1)}$ که در آن $1 \leq r \leq n$ و $r \neq k$ داریم:

$$d(u,x) - d(u,y) \neq d(v,x) - d(v,y),$$

بنابراین با توجه به مراحل بالا و نامساوی

$$\boldsymbol{\beta}\left(L(C_n \circ \overline{K}_m)\right) \leq \boldsymbol{\psi}\left(L(C_n \circ \overline{K}_m)\right),$$

زیرمجموعه S_1 از رأس‌های گراف $L(C_n \circ \overline{K}_m)$ به‌صورت زیر

$$S_1 = \{B_{1j} - 1v_{1m}, \ldots, B_{nj} - nv_{nm}\},$$

یک مجموعه تفکیک‌کننده دوگانه با کوچکترین اندازه $nm - n$ برای گراف $L(C_n \circ \overline{K}_m)$ است، در نتیجه $\boldsymbol{\psi}\left(L(C_n \circ \overline{K}_m)\right) = nm - n$. □

قضیه ۴.۳. اگر $n \geq 3$ و $m \geq 2$ دو عدد صحیح باشند، آن‌گاه $\boldsymbol{sdim}\left(L(C_n \circ \overline{K}_m)\right) = nm - 1$.

اثبات. فرض کنیم $V(L(C_n \circ \overline{K}_m)) = U_1 \cup U_2$، که در آن U_1 و U_2 همان مجموعه‌ها در اثبات قضیه ۲.۳ هستند. زیرمجموعه S_1 از رأس‌های گراف $L(C_n \circ \overline{K}_m)$ به‌صورت زیر را در نظر می‌گیریم

$$S_1 = \{B_{1j} - 1v_{1m}, \ldots, B_{nj} - nv_{nm}\},$$

بنابر قضیه ۲.۳ می‌دانیم که مجموعه S_1 به‌صورت بالا یک مجموعه تفکیک‌کننده از رأس‌های گراف $L(C_n \circ \overline{K}_m)$ است. اکنون نشان می‌دهیم مجموعه S_1 یک مجموعه تفکیک‌کننده قوی رأس‌های گراف $L(C_n \circ \overline{K}_m)$ نیست. برای اثبات آن، فرض کنیم

$$M = U_2 - S_1 = \{1v_{1m}, \ldots, nv_{nm}\},$$

در این‌صورت برای هر دو رأس دلخواه مانند u و v از مجموعه M هیچ رأسی از مجموعه S_1 مانند w موجود نیست به‌طوری‌که u به مسیر $v - w$ تعلق داشته باشد یا اینکه v به مسیر $u - w$ تعلق داشته باشد. بنابراین مجموعه S_1 به‌صورت بالا یک مجموعه

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.138631.1599

تفکیک‌کننده قوی رأس‌های گراف $L(C_n \circ \overline{K}_m)$ نیست. پس، برای اینکه مجموعه $S_۱$ یک مجموعه تفکیک‌کننده قوی رأس‌های گراف $L(C_n \circ \overline{K}_m)$ باشد بایستی $|M| < ۲$، و یا هم‌ارز آن $|S_۱| > nm - ۲$. حال مجموعه

$$S_۲ = \{B_{۱j}, B_{۲j}, \dots, B_{nj} - nv_{nm}\},$$

از رأس‌های گراف $L(C_n \circ \overline{K}_m)$ را در نظر می‌گیریم. بدیهی است که $|S_۲| = nm - ۱$، به‌ویژه مجموعه $S_۲$ یک مجموعه تفکیک‌کننده رأس‌های گراف $L(C_n \circ \overline{K}_m)$ است. اکنون با توجه به اینکه در گراف $L(C_n \circ \overline{K}_m)$ رابطه

$$\boldsymbol{\beta}\left(L(C_n \circ \overline{K}_m)\right) \leq \boldsymbol{sdim}\left(L(C_n \circ \overline{K}_m)\right),$$

همواره برقرار است، نشان می‌دهیم مجموعه $S_۲$ به‌صورت بالا یک مجموعه تفکیک‌کننده قوی رأس‌های گراف $L(C_n \circ \overline{K}_m)$ است. پس کافی است نشان دهیم هر دو رأس u و v از $V(L(C_n \circ \overline{K}_m)) - S_۲$ توسط بعضی از عضوهای $S_۲$ به‌طور قوی تفکیک می‌شوند. دو رأس u و v از $V(L(C_n \circ \overline{K}_m)) - S_۲$ را در نظر می‌گیریم:

حالت ۱. فرض کنیم هر دو رأس u و v در $U_۱$ قرار داشته باشند. بدون از دست دادن کلیت مسأله می‌توان فرض کرد $u = v_s v_{s+۱}$ و $v = v_t v_{t+۱}$ که در آن $۱ \leq t, s \leq n$ و $t \neq s$. بنابراین u و v توسط $w_۱ = sv_{s(m-۱)} \in B_{sj}$ یا $w_۲ = tv_{t(m-۱)} \in B_{tj}$ که در آن $۱ \leq j \leq m$، به‌طور قوی تفکیک می‌شوند زیرا u به مسیر $v - w_۱$ تعلق دارد یا اینکه v به مسیر $u - w_۲$ تعلق دارد.

حالت ۲. فرض کنیم رأس u در $U_۱$ قرار داشته باشند و رأس $v = v_{nm}$. بدون از دست دادن کلیت مسأله می‌توان فرض کرد $u = v_s v_{s+۱}$ که در آن $۱ \leq s \leq n$. از این‌رو u و v توسط $w = kv_{kj} \in B_{kj}$ که در آن $۱ \leq k \leq n - ۱$ و $۱ \leq j \leq m$، به‌طور قوی تفکیک می‌شوند.

بنابراین با توجه به مراحل بالا مجموعه $S_۲ = \{B_{۱j}, B_{۲j}, \dots, B_{nj} - nv_{nm}\}$ یک مجموعه تفکیک‌کننده قوی با کوچکترین اندازه $nm - ۱$ برای گراف $L(C_n \circ \overline{K}_m)$ است، در نتیجه $\boldsymbol{sdim}\left(L(C_n \circ \overline{K}_m)\right) = nm - ۱$. □

قضیه ۵.۳. اگر $n \geq ۳$ و $m \geq ۲$ دو عدد صحیح باشند، آن‌گاه $\hat{\boldsymbol{\beta}}\left(L(C_n \circ \overline{K}_m)\right) = nm - n$.

اثبات. بنابر قضیه ۲.۳، زیرمجموعه

$$S_۱ = \{B_{۱j} - ۱v_{۱m}, \dots, B_{nj} - nv_{nm}\},$$

از رأس‌های گراف $L(C_n \circ \overline{K}_m)$ یک مجموعه تفکیک‌کننده با کوچکترین اندازه $nm - n$ برای گراف $L(C_n \circ \overline{K}_m)$ است. از سوی دیگر، بنابر قضیه ۲.۲

$$\boldsymbol{\beta}\left(L(C_n \circ \overline{K}_m)\right) \leq \hat{\boldsymbol{\beta}}\left(L(C_n \circ \overline{K}_m)\right).$$

پس کافی است نشان دهیم که هر یک از رأس‌های مجموعه $V\left(L(C_n \circ \overline{K}_m)\right) - S_۱$، نسبت به مجموعه $S_۱$ دارای نمایش مجاورت متمایز هستند. برای هر $v_i v_{i+۱} \in V\left(L(C_n \circ \overline{K}_m)\right) - S_۱$ و $kv_{kl} \in B_{kl}$، که $۱ \leq k \leq n$ و $۱ \leq l \leq m - ۱$، اگر $k = i$ یا $k = i + ۱$، آن‌گاه $a_{L(C_n \circ \overline{K}_m)}(v_i v_{i+۱}, kv_{kl}) = ۱$ و در غیر این‌صورت $a_{L(C_n \circ \overline{K}_m)}(v_i v_{i+۱}, kv_{kl}) = ۲$. هم‌چنین برای رأس‌های $۱v_{۱m}, \dots, nv_{nm} \in V\left(L(C_n \circ \overline{K}_m)\right) - S_۱$ اگر $k = i$، آن‌گاه $a_{L(C_n \circ \overline{K}_m)}(iv_{im}, kv_{kl}) = ۱$ و در غیر این‌صورت $a_{L(C_n \circ \overline{K}_m)}(iv_{im}, kv_{kl}) = ۲$. بنابراین هر یک از رأس‌های مجموعه $V\left(L(C_n \circ \overline{K}_m)\right) - S_۱$ نسبت به مجموعه $S_۱$ دارای نمایش مجاورت متمایز هستند. □

قضیه ۶.۳. اگر $n \geq ۳$ و $m, k \geq ۲$ عددهای صحیحی باشند، آن‌گاه $\boldsymbol{\beta}\left((C_n \circ \overline{K}_m) \square P_k\right) = nm - n + ۱$.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.138631.1599

اثبات. اگر برای هر $1 \leq t \leq k$، نسخه tام از گراف $C_n \circ \overline{K}_m$ را با $(C_n \circ \overline{K}_m)^t$ نشان دهیم، آنگاه می‌توان فرض کرد مجموعه رأس‌های نسخه tام گراف $C_n \circ \overline{K}_m$ عبارت است از $V^t = V_1^t \cup V_2^t$ که در آن

$$V_1{}^t = \{x_1^t, \dots, x_n^t\} \text{ و } V_2^t = \{A_{1j}^t, A_{2j}^t, \dots, A_{nj}^t\},$$

که برای هر $1 \leq i \leq n$، $A_{ij}^t = \bigcup_{j=1}^m \{v_{ij}^t\}$ و در آن هر رأس $x_i^t \in V_1{}^t$ با رأس‌های $v_{i1}^t, v_{i2}^t, \dots, v_{im}^t \in A_{ij}^t$ مجاور است. بنابراین مجموعه رأس‌های گراف $(C_n \circ \overline{K}_m)\square P_k$ عبارت است از

$$V\left((C_n \circ \overline{K}_m)\square P_k\right) = (V_1^1 \cup V_2{}^1) \cup \dots \cup (V_1^k \cup V_2{}^k).$$

برای هر $1 \leq t, s \leq k$ که $t \neq s$ و هر $1 \leq i \leq n$، رأس‌های x_i^t و x_i^s را در گراف $(C_n \circ \overline{K}_m)\square P_k$ متناظر می‌نامیم، همچنین رأس‌های v_{ij}^t و v_{ij}^s را در گراف $(C_n \circ \overline{K}_m)\square P_k$ متناظر می‌خوانیم و سایر رأس‌های گراف $(C_n \circ \overline{K}_m)\square P_k$ را غیرمتناظر می‌نامیم. می‌توان نشان داد که هر مجموعه تفکیک‌کننده رأس‌های نسخه اول گراف $C_n \circ \overline{K}_m$ با کوچکترین اندازه شامل تمام اعضای A_{ij}^1 به‌جز دقیقاً یکی از آن‌ها است. بنابراین بدون از دست دادن کلیت مسأله اگر مجموعه

$$W_2^1 = \{A_{1j}^1 - v_{1m}^1, A_{2j}^1 - v_{2m}^1, \dots, A_{nj}^1 - v_{nm}^1\},$$

از رأس‌های نسخه اول گراف $C_n \circ \overline{K}_m$ را در نظر بگیریم، در این‌صورت W_2^1 یک مجموعه تفکیک‌کننده با کوچکترین اندازه $nm - n$ برای نسخه اول گراف $C_n \circ \overline{K}_m$ است. از طرفی در گراف $(C_n \circ \overline{K}_m)\square P_k$ برای هر $1 \leq i \leq n$، رأس‌های $x_i^2 \in V_1^2$ و $v_{im}^1 \in V_2^1$ با رأس $x_i^1 \in V_1^1$ مجاور هستند. بنابراین

$$r\left(x_i^2 | W_2^1\right) = r\left(v_{im}^1 | W_2^1\right).$$

در نتیجه مجموعه W_2^1 به‌صورت بالا نمی‌تواند یک مجموعه تفکیک‌کننده رأس‌های گراف $(C_n \circ \overline{K}_m)\square P_k$ باشد. بنابراین بایستی $\boldsymbol{\beta}\left((C_n \circ \overline{K}_m)\square P_k\right) > nm - n$. اکنون بدون از دست دادن کلیت مسأله رأس $x_i^k \in V_1^k$ را در نظر می‌گیریم، همچنین فرض می‌کنیم $W_1^k = \{x_i^k\} \subset V_1^k$ و

$$R_1 = W_2^1 \cup W_1^k = \{A_{1j}^1 - v_{1m}^1, A_{2j}^1 - v_{2m}^1, \dots, A_{nj}^1 - v_{nm}^1, x_i^k\},$$

یک زیرمجموعه مرتب از رأس‌های گراف $(C_n \circ \overline{K}_m)\square P_k$ باشد. بنابراین

$$V\left((C_n \circ \overline{K}_m)\square P_k\right) - R_1 = \{V^2, \dots, V^{k-1}, V_1^1, v_{1m}^1, \ \dots, v_{nm}^1, V^k - W_1^k\}.$$

از طرفی W_2^1 یک مجموعه تفکیک‌کننده با کوچکترین اندازه $nm - n$ برای نسخه اول گراف $C_n \circ \overline{K}_m$ است، بنابراین همه رأس‌های نسخه اول گراف $C_n \circ \overline{K}_m$ نسبت به W_2^1 دارای نمایش‌های متریک متمایز هستند و چون $W_2^1 \subset R_1$ پس همه رأس‌های نسخه اول گراف $C_n \circ \overline{K}_m$ نسبت به R_1 نیز دارای نمایش‌های متریک متمایز هستند. از طرفی در گراف $\left((C_n \circ \overline{K}_m)\square P_k\right)$ برای هر $1 \leq t < k$، رأس‌های نسخه tام $C_n \circ \overline{K}_m$ دقیقاً با رأس‌های متناظر آن در نسخه $(t+1)$ام مجاور هستند و با توجه به انتخاب مجموعه R_1، همه رأس‌های $V\left((C_n \circ \overline{K}_m)\square P_k\right) - R_1$ نسبت به R_1 دارای نمایش‌های متریک متمایز هستند، پس

$$\boldsymbol{\beta}\left((C_n \circ \overline{K}_m)\square P_k\right) = nm - n + 1.$$

□

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.138631.1599

قضیه ۷.۳. اگر $n \geq ۳$ و $m, k \geq ۲$ عددهای صحیحی باشند، آن‌گاه

$$\psi\left((C_n \circ \overline{K}_m)\Box P_k\right) = \psi(C_n \circ \overline{K}_m) + \psi(P_k) - ۱.$$

اثبات. فرض کنیم مجموعه رأس‌های گراف $(C_n \circ \overline{K}_m)\Box P_k$،

$$V\left((C_n \circ \overline{K}_m)\Box P_k\right) = (V_۱^۱ \cup V_۲{}^۱) \cup \ldots \cup (V_۱^k \cup V_۲{}^k),$$

باشد، که در آن برای هر $۱ \leq t \leq k$، $V_۱^t$ و $V_۲^t$ مجموعه‌های تعریف شده در اثبات قضیه ۶.۳ هستند. می‌توان نشان داد که زیرمجموعه

$$V_۲^۱ = \{A_{۱j}^۱, A_{۲j}^۱, \ldots, A_{nj}^۱\},$$

از رأس‌های نسخه اول گراف $(C_n \circ \overline{K}_m)$ یک مجموعه تفکیک‌کننده دوگانه با کوچکترین اندازه nm برای نسخه اول گراف $C_n \circ \overline{K}_m$ است. از طرفی در گراف $(C_n \circ \overline{K}_m)\Box P_k$ برای هر $۱ < r \leq k$، و رأس‌های متناظر $x_i^۱ \in V_۱^۱$ و $x_i^r \in V_۱^r$ که مفهوم آن‌ها در قضیه ۶.۳، بیان شد رابطه (۱)

$$r(x_i^r|\, V_۲^۱) - r(x_i^۱|V_۲^۱) = (r-۱)I, \tag{۱}$$

همواره برقرار است، که در آن $I = (۱, ۱, \ldots, ۱)$ یک nm بردار واحد است. پس مجموعه $V_۲^۱$ به‌صورت بالا نمی‌تواند یک مجموعه تفکیک‌کننده دوگانه از رأس‌ها با کوچکترین اندازه برای گراف $(C_n \circ \overline{K}_m)\Box P_k$ باشد. بنابراین بایستی

$$\psi\left((C_n \circ \overline{K}_m)\Box P_k\right) > nm.$$

اکنون بدون از دست دادن کلیت مسأله رأس $x_i^k \in V_۱^k$ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $W_۱^k = \{x_i^k\} \subset V_۱^k$ و

$$R_۲ = V_۲^۱ \cup W_۱^k = \{A_{۱j}^۱, A_{۲j}^۱, \ldots, A_{nj}^۱, x_i^k\},$$

یک زیرمجموعه از رأس‌های گراف $(C_n \circ \overline{K}_m)\Box P_k$ باشد. بنابراین

$$V\left((C_n \circ \overline{K}_m)\Box P_k\right) - R_۲ = \{V^۲, \ldots, V^{k-۱}, V_۱^۱, V^k - W_۱^k\}.$$

با توجه به انتخاب زیرمجموعه $R_۲$ از رأس‌های گراف $(C_n \circ \overline{K}_m)\Box P_k$، واضح است که $R_۲$ یک مجموعه تفکیک‌کننده دوگانه برای رأس‌های غیرمتناظر گراف $(C_n \circ \overline{K}_m)\Box P_k$ است. اکنون کافی است نشان دهیم که $R_۲$ یک مجموعه تفکیک‌کننده دوگانه برای رأس‌های متناظر گراف $(C_n \circ \overline{K}_m)\Box P_k$ است. برای رأس‌های متناظر $x_i^۱$ و x_i^r در گراف $(C_n \circ \overline{K}_m)\Box P_k$ رابطه (۲)

$$r(x_i^r|W_۱^k) - r(x_i^۱|W_۱^k) = -(r-۱), \tag{۲}$$

همواره برقرار است. اکنون بنابر روابط (۱) و (۲) داریم:

$$r(x_i^r|\, R_۲) - r(x_i^۱|R_۲) \neq (r-۱)I,$$

که در آن $I = (۱, ۱, \ldots, ۱)$ یک $nm + ۱$ بردار واحد است. به همین صورت برای رأس‌های متناظر v_{ij}^t و v_{ij}^s می‌توان نشان داد که

$$r(v_{ij}^t|\, R_۲) - r(v_{ij}^s|R_۲) \neq \lambda I,$$

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.138631.1599

که در آن λ یک عدد صحیح است. بنابراین زیرمجموعه $R_۲$ از رأس‌های گراف $(C_n \circ \overline{K}_m)\Box P_k$ یک مجموعه تفکیک‌کننده دوگانه با کوچکترین اندازه $nm + ۱$ است. به عبارتی برای هر دو رأس متمایز u و v از گراف $(C_n \circ \overline{K}_m)\Box P_k$ عناصر x و y از $R_۲$ موجود هستند که

$$d(u,x) - d(u,y) \neq d(v,x) - d(v,y).$$

از طرفی بنابر قضیه ۱.۲، $\psi(P_k) = ۲$. همچنین بنابر قضیه ۴.۲، $\psi(C_n \circ \overline{K}_m) = nm$. در نتیجه

$$\psi\left((C_n \circ \overline{K}_m)\Box P_k\right) = \psi(C_n \circ \overline{K}_m) + \psi(P_k) - ۱.$$

□

مراجع

[1] W. Abidin, A. N. M. Salman and S. W. Saputro, The non-isolated resolving number of some corona graphs, Published under licence by IOP Publishing Ltd, *J. Phys. Conf. Ser.*, **1097** (2018).

[2] A. Ahmad, M. Baca and S. Sultan, Minimal doubly resolving sets of necklace graph, *Math. Reports.*, **20** (2018) 123–129.

[3] R. F. Bailey, The metric dimension of small distance-regular and strongly regular graphs, *Australas. J. Combin.*, **62** (2015) 18–34.

[4] J. Cáceres, C. Hernando, M. Mora, I. M. Pelayo,M. L.Puertas, C. Serra and D. R. Wood, On the metric dimension of Cartesian products of graphs, *SIAM J. Discrete Math.*, **21** (2007) 423–441.

[5] G. Chartrand, L. Eroh, M. A. Johnson and O. R. Oellermann, Resolvability in graphs and the metric dimension of a graph, *Discrete Appl. Math.*, **105** (2000) 99–113.

[6] C. Godsil and G. Royle, *Algebraic graph theory*, Graduate Texts in Mathematics, **207**, Springer-Verlag, New York, 2001.

[7] F. Harary and R. A. Melter, On the metric dimension of a graph, *Combin.*, **2** (1976) 191–195.

[8] M. Jannesari and B. Omoomi, The metric dimension of the lexicographic product of graphs, *Discrete Math.*, **312** (2012) 3349–3356.

[9] M. Jannesari, On doubly resolving sets in graphs, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, **45** (2022) 2041–2052.

[10] S. Khuller, B. Raghavachari and A. Rosenfeld, *Localization in graphs*,Technical Report CS-TR-3326, University of Maryland at College Park, 1994.

[11] D. Kuziak, I. Peterin and I. G. Yero, Resolvability and strong resolvability in the direct product of graphs, *Results Math.*, **71** (2017) 509–526.

[12] J. B. Liu, A. Zafari and H. Zarei, Metric Dimension, Minimal Doubly Resolving Sets, and the Strong Metric Dimension for Jellyfish Graph and Cocktail Party Graph, *Complexity*, **2020** (2020) 1–7.

[13] J. B. Liu and A. Zafari, Computing minimal doubly resolving sets and the strong metric dimension of the layer Sun graph and the line graph of the layer Sun graph, *Complexity*, **2020** (2020) 1–8.

[14] K. Nie and K. Xu, The doubly metric dimension of corona product graphs, *Filomat*, **37** (2023) 4375–4386.

[15] K. Nie and K. Xu, The doubly metric dimension of cylinder graphs and torus graphs, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, **46** (2023) 19 pp.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.138631.1599

[16] O. R. Oellermann and J. Peters-Fransen, The strong metric dimension of graphs and digraphs, *Discrete Appl. Math.*, **155** (2007) 356–364.

[17] A. Sebö and E. Tannier, On metric generators of graphs, *Math. Oper. Res.*, **29** (2004) 383–393.

[18] P. J. Slater, Leaves of trees, *Proceedings of the Sixth Southeastern Conference on Combinatorics*, Graph Theory and Computing (Florida Atlantic Univ., Boca Raton, Fla.), Congress. Numer., No. XIV, Utilitas Math., Winnipeg, MB, (1975) 549–559.

[19] I. G. Yero, D. Kuziak and J. A. Rodríguez-Velázquez, On the metric dimension of corona product graphs, *Comput. Math. Appl.*, **61** (2011) 2793–2798.

علی ظفری

گروه ریاضی، دانشکده علوم‌پایه، دانشگاه پیام‌نور، کدپستی ۴۶۹۷-۱۹۳۹۵، تهران، ایران

zafari.math@pnu.ac.ir

علی ظفری متولد فروردین ماه ۱۳۶۰ در شهر نهاوند است. وی در سال ۱۳۷۸ وارد مقطع کارشناسی رشته ریاضی محض دانشگاه بوعلی سینا شد، هم‌چنین در سال ۱۳۸۲ وارد مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض دانشگاه بوعلی سینا شد و دانش آموخته دوره دکتری دانشگاه لرستان در سال ۱۳۹۶ است.

نادر حبیبی

گروه ریاضی، دانشکده علوم‌پایه، دانشگاه آیت الله العظمی بروجردی (ره)، بروجرد، ایران

habibi@abru.ac.ir

نادر حبیبی متولد فروردین ماه ۱۳۵۳ در شهر زنجان است. وی در سال ۱۳۷۳ وارد مقطع کارشناسی رشته ریاضی محض دانشگاه زنجان شد و در سال ۱۳۸۱ وارد مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض شد. در سال ۱۳۹۳ از رساله دکتری دفاع کرد.

سعید علیخانی

دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه یزد، یزد، ایران

alikhani@yazd.ac.ir

سعید علیخانی استاد دانشکده علوم ریاضی دانشگاه یزد است. تحقیقاتش در حوزه نظریه گراف و ترکیبیات جبری می‌باشد. معرفی چندجمله‌ای احاطه‌گر گراف به عنوان یک چندجمله‌ای جدید وابسته به گراف‌ها، در رساله دکتری ایشان از فعالیتهای اصلی و تاثیرگذاری بوده است که مورد توجه بسیاری از ریاضی‌دانان قرار گرفته است. تاکنون ۵ پژوهشگر پسادکتری (از بنیاد نخبگان، صندوق حمایت از پژوهشگران و فناوران کشور و داخلی دانشگاه) و ۱۰ دانشجوی دکتری تحت نظارت و راهنمایی ایشان، دانش آموخته شده‌اند. ایشان در هیات تحریریه بیش از ۱۰ نشریه علمی بین‌المللی عضویت و فعالیت دارند.