

INTUITIVE THINKING IN MATHEMATICS EDUCATION

MOHAMMAD TAGHI HEYDARI*, ABOLFAZL EBRAHIMI AND SAYED NEMATOLLAH KHADEMI

ABSTRACT. Mathematics and especially problem solving, has a major role in the growth of awareness and the emergence of potential human capabilities, and therefore it causes the development of human resources, which is the main goal of educational activities in every country. In this regard, sometimes a problem without algebraic reasoning or with boring algebraic reasoning, with the help of a geometric similarity and analogy, which is a kind of visualization, can be made so simple and beautiful that all aspects of the problem can be seen almost at a glance. If a student can show his thoughts in the form of pictures instead of thinking in words, then solving some abstract and distant problems will be easier and more pleasant for him. Therefore, illustration, explanation and intuition are important for teaching mathematics. Mathematics is the language of science and intuitive thinking of mathematics is the way to develop mathematics, and is accompanied by intuitive explanations and images in the primary course, and intuitive thinking is used in the goals of school mathematics education for thematic communication and connection. In this article, we will criticize and examine intuitive thinking by presenting some examples from textbooks.

Keywords: Formal logic, Intuitive thinking, Formal education, Informal education.

Communicated by Alireza Abdollahi.

Article Type: Research Paper.

*Corresponding author.

Received: 31/10/2022, Accepted: 17/09/2023, Published Online: 04-10-2023.

Cite this article: M. T. Heydari, A. Ebrahimi, Intuitive thinking in mathematics education, *Journal of Mathematics and Society*, 8 no. 2 (2023) 109–119.

<http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.135589.1540> .

1. Introduction

The educational goals and its methods have many similarities in different countries of the world, and comparing the level of their achievement makes researchers aware of the influence of various factors involved in the teaching and teaching-learning process. They have, it has done. Some of these factors and elements such as textbooks and training programs are prepared by subject specialists and some other factors such as the shape and structure of the education system such as teaching hours and evaluation methods. Education is defined by education specialists. But some other factors are related to students' beliefs and expectations. And teachers are concerned about their roles and goals of educational activities. Teachers and students come to class with different interests, beliefs and motivations, and their beliefs and motivations have a determining effect on the teaching-learning process.

2. Main Results

Learning processes in mathematics has become a principle. Mathematics is a science that has internal order and harmony and is considered for the purpose of cultivating intellectual order and increasing the power of thinking and logical reasoning as well as mental creativity. In all courses, to solve the problem, processes such as drawing, transforming the problem into a simpler problem, transforming the problem into a sub-problem, deleting undesirable situations, etc. are emphasized. The thinking process of solving the problem is different for different people. In 1945, by writing the book "How to solve a problem", George Polia provided a model or framework for solving the problem. (See [9] and [7]). Polya tried to model the thinking of solving the problem. He proposed a four-stage model. In the process of solving these four stages, four steps are taken to solve a mathematical problem completely.

3. Conclusions

Everyone acknowledges the fact that education, especially math education, is very complicated and requires ability, skill along with patience and interest. This rule is used in the teaching resources of the general mathematics that "in most cases, approximate answers are more appropriate than exact answers." In this article, we will examine a strategy to achieve this goal. This approach has this feature that covers both types of general mathematical thinking. In fact, regarding this issue that "mathematical education is not equivalent to learning processes" and there should be a relationship between facts and mathematical education. If it is acceptable, and also to build a bridge between school and non-school mathematics and formal and informal education, we will pay. In other words, intuitive logic besides visual logic can be effective in teaching mathematics.

REFERENCES

- [1] A. Ashrafizadeh, Review of the role of non-formal learning processes in the promotion of higher education, *the third national education conference*, Shahid Beheshti University, 2017. [In Persian]
- [2] G. Butel, *Method of teaching mathematics in elementary school*, Tranlated by S. Bakhshalizadeh, Samt Publications, Iran, 2014. [In Persian]
- [3] H. Colley, P. Hodgkinson and J. Malcolm, Understanding Informality and Formality in Learning, *Adults Learning (England)*, **15** (2003) 7–9.
- [4] Kh. Davoudi, A. Rostgar and V. Alamiyan, *Math teacher's book first elementary school-52*, General Department of Textbook Printing and Distribution, 2013. [In Persian]
- [5] J. Jackson, Myths of Active Learning: Edgar Dale and the Cone of Experience, *Journal of the Human Anatomy and Physiology Society*, **20** (2016) 51–53.
- [6] M. T. Mobayni, *Geometry teaching method*, Publications of Astan Quds Razavi Cultural Vice-Chancellor, First Edition, 1990. [In Persian]
- [7] G. Pullia, *How to solve the problem*, translated by Ahmad Aram, Kayhan Institute, 1366. [In Persian]
- [8] F. Qanbarabadi and S. Nezamparast, An experience of the role of intuition in teaching geometry, *the second conference on teaching and application of mathematics*, Kermanshah, (2017). [In Persian]
- [9] S. Shirali, Georg polya and problem solving and appreciation, *Resonance*, textbf19 (2014) 310–322.
- [10] F. Ziniwand, Conceptual explanation of mathematical thinking: what, why and how, *Bi-Quarterly Journal of Higher Education Curriculum Studies*, **20** (2014) 153-172. [In Persian]

Mohammad Taghi Heydari

Department of Mathematics, University of Yasouj, P.O.Box 7591874934, Yasouj, Iran

Email: heydari@yu.ac.ir

Abolfazl Ebrahimi

Department of Mathematics, University of Yazd, P.O.Box 8915818411, Yazd, Iran

Email: ebrahimi.math@stu.yazd.ac.ir

Sayed Nematollah Khademi

Department of Mathematics, University of Yasouj, P.O.Box 7591874934, Yasouj, Iran

Email: nemat-khademi@yahoo.com

تفکر شهودی در آموزش ریاضی

محمدتقی حیدری*، ابوالفضل ابراهیمی و سید نعمت‌اله خادمی

چکیده. ریاضیات و به‌ویژه حل مسئله در آن نقش عمده‌ای در رشد آگاهی و ظهور توانمندی‌های بالقوه انسان دارد و باعث توسعه نیروی انسانی می‌شود، که هدف اصلی فعالیت‌های آموزشی در هر کشور است. در این راستا گاهی یک مسئله بدون استدلال جبری یا دارای استدلال جبری کسالت‌آور، به کمک یک شباهت و قیاس هندسی که نوعی تجسم است، می‌تواند به اندازه‌ای ساده و زیبا شود که تمام ابعاد قضیه یا مسئله، تقریباً در یک نگاه دیده شود. اگر دانش‌آموز بتواند به‌جای اندیشیدن در قالب کلمه‌ها، افکارش را در قالب تصویرها نمایش دهد، حل برخی از مسائل انتزاعی و دور از ذهن نیز برایش آسان‌تر و دلپذیرتر می‌شود. بنابراین تمثیل، توجیه و شهود برای آموزش ریاضی اهمیت دارند. تفکر شهودی ریاضیات راه توسعه ریاضیات است، ریاضیات زبان علوم می‌باشد که این زبان گفتمان ریاضی است که در دوره ابتدایی با توجیهات شهودی و تصویر همراه است و تفکر شهودی در اهداف آموزش ریاضی مدرسه‌ای برای ارتباط و اتصال موضوعی کاربرد دارد. در این مقاله، با ارائه چند مثال از کتاب‌های درسی به نقد و بررسی تفکر شهودی می‌پردازیم.

۱. مقدمه

هدف‌های آموزشی و روش‌های آن در کشورهای مختلف جهان شباهت‌های زیادی دارند و مقایسه میزان تحقق آنها، پژوهشگران را متوجه تأثیر عوامل گوناگونی کرده است که در فرآیند آموزش و یاددهی-یادگیری دخالت دارند. برخی از این عوامل مانند کتاب‌های درسی و برنامه‌های آموزشی و درسی را متخصصین موضوعی تهیه می‌کنند و برخی عوامل دیگر مانند شکل و ساختار سامانه‌ی آموزشی مانند ساعات تدریس و روش‌های ارزشیابی آموزشی توسط متخصصین آموزشی تعریف می‌شوند. اما برخی دیگر از عوامل به باورها و انتظارات دانش‌آموزان و معلمان درباره نقش‌ها و هدف‌هایشان از فعالیت‌های آموزشی مربوط می‌شوند. معلمان و دانش‌آموزان با علایق، باورها و انگیزه‌های متفاوتی به کلاس درس می‌آیند و باورها و انگیزه‌های آنان بر فرآیند یاددهی-یادگیری تأثیری تعیین کننده دارند [۶].

تهیه متنی کامل و جامع در مورد آموزش ریاضی، به دلیل دخالت عوامل متعدد و متنوع کار ساده‌ای نیست. چنانچه تاکنون چنین محتوایی تهیه نشده است. برای انجام این مهم بایستی گروهی متشکل از معلمان از سطوح مختلف انتخاب گردند تا به کمک تجربیات آنها اقدام به تهیه چنین متنی شود. حتی نیاز است از تجربیات معلمان شش پایه ابتدایی استفاده شود، چرا که آموزش ریاضی در سطح ابتدایی ظرافت و پیچیدگی خاص مربوط به خود را دارد. به‌خصوص در مورد آموزش ریاضی

عبارات و کلمات کلیدی: منطق صوری، تفکر شهودی، آموزش‌های رسمی، آموزش‌های غیررسمی.
دبیرتخصصی رابط: علیرضا عبدلهی.

نوع مقاله: پژوهشی.

* نویسنده مسئول

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۰۸/۰۹ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۶/۲۶ تاریخ انتشار آنلاین: ۱۴۰۲/۰۷/۱۲

ارجاع به مقاله: م. ت. حیدری، ا. ابراهیمی و س. ن. خادمی، تفکر شهودی در آموزش ریاضی، نشریه ریاضی و جامعه، ۸ شماره، ۲ (۱۴۰۲) ۱۰۹-۱۱۹.
<http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.135589.1540>

ابتدایی مرجع و محتوای مورد اعتنایی وجود ندارد. در این هنگام که منابع اندکی وجود دارد، افرادی که تخصص، دانش و تجربه کافی ندارند دست به تولید محتوا می‌زنند، که این باعث نگرانی است. مثال‌های فراوانی از محتواهای تهیه شده در مراکز پیش دبستانی وجود دارد که ساده‌ترین مراحل و ترتیب پیش نیاز و پس نیاز آموزشی را رعایت نمی‌کنند تا جایی که توصیه شده بهتر است کودکان خود را به‌چنین مراکزی نفرستید چرا که تحت آموزش غلط قرار می‌گیرند و اصلاح آن بسیار سخت می‌شود. به‌عنوان نمونه آموزش اعداد بایستی از عدد ۲ شروع شود (در واقع داشتن دودست، دوپا، دوچشم، دوگوش و ... در بدن تصویر عدد ۲ را در ذهن دانش آموز حک می‌کند) و یا نهایتاً از عدد ۱ شروع شود و آموزش اعداد از عدد صفر امکان پذیر نیست. این در حالی است که این خطای راهبردی (شروع از اعدادی غیر از ۱ و ۲) اتفاق می‌افتد. مثال دیگر شکل‌هایی در کتاب‌های کمک‌آموزشی این مراکز ترسیم شده و از دانش‌آموزان خواسته‌اند آنهایی که حرف آخر یکسان دارند را مشخص کنند. بسیاری از این شکل‌ها چند نام مشهور دارند ولی مؤلف، اسمی غیرمعروف را مد نظر داشته است.

آنچه باعث خلق آثار جدید در ریاضیات می‌شود شهود است که به‌صورت‌های مختلف جلوه می‌کند، عاملی که ردپای آن همواره در مسیر حرکت ریاضیات به چشم می‌خورد، شهود روح ریاضیات و منطق کالبد آن است. این شهود یک شهود عام نیست بلکه نوعی غیب‌گویی مستقیم در باره رفتاری است که ظاهراً ریاضیدان حق دارد از اشیاء ریاضی انتظار داشته باشد. زیرا آشنایی دیرینه‌اش با آن اشیاء آنها را مانند اشیاء واقعی برای او ملموس کرده است. امروز هر ساختاری زبان خویش را به همراه دارد و حامل ایده‌های شهودی خاصی است که از نظریاتی استخراج می‌شود که ساختار مورد نظر از آن نظریه‌ها با استفاده از تحلیل اصل موضوعی به‌دست آمده است و کشف ناگهانی این ساختار برای شخص محقق در پدیده مورد مطالعه علاقه او مانند یک تغییر ناگهانی است که با یک ضربه در جریان شهودی تفکر او پیش می‌آید.

کولی و همکاران [۱] معتقدند باید از طیفی پیوسته از موقعیت‌های یادگیری سخن گفت. از دیدگاه آنان بهتر است که اجزای اصلی این طیف را در سه دسته: یادگیری رسمی، یادگیری غیر رسمی سازمان یافته و یادگیری غیر رسمی بدون سازمان یا روزمره تقسیم‌بندی کرد. تفاوت‌های این سه دسته کلی در طیف یادگیری در چهار حوزه مکان، فرآیند، محتوا و هدف، تعریف و تبیین می‌شوند. برای مثال یادگیری رسمی در یک مرکز آموزشی صورت گرفته، توسط آموزشگر هدایت شده، منطبق بر یک برنامه آموزشی کاملاً مشخص بوده و یادگیرنده به‌صورتی کاملاً آگاهانه در صدد یادگیری است. یادگیری غیررسمی سازمان یافته تشابه زیادی با یادگیری رسمی دارد ولی به مدرک تحصیلی منجر نمی‌شود. یادگیری غیررسمی روزمره با دو نوع قبل کاملاً متفاوت است و بر خلاف آنها یادگیرنده-محور است. تحقیقات مختلف نشان داده‌اند که نقش یادگیری غیر رسمی در یادگیری افراد بالغ بسیار چشمگیر است. از جمله تحقیقی در کانادا توسط لوینگستون [۹] نشان می‌دهد که ۹۰ درصد از افراد بالغ در حدود ۱۵ ساعت در هفته در حال انجام یادگیری‌های غیررسمی بوده و فقط در حدود ۳ ساعت به یادگیری رسمی می‌پردازند، این تحقیق اهمیت فوق‌العاده یادگیری غیر رسمی را نشان می‌دهد.

یکی از مهم‌ترین اهداف آموزش ریاضی که نقش اساسی در ارتقای یادگیری مفهومی بازی می‌کند، تفکر ریاضی است. برخی از توصیف‌های موجود از تفکر ریاضی بر روش‌های حل مسئله تأکید می‌کنند و برخی دیگر بر توسعه درک مفهومی ریاضی تمرکز دارند. ولی در هر دو صورت، تفکر ریاضی به‌عنوان یکی از انواع تفکر شناخته می‌شود. برتون بر این باور است که تنها تعداد اندکی از دانش‌آموزان در درس ریاضی موفق‌اند و تفکر ریاضی در بیشتر آنها توسعه نیافته است، که او یکی از دلایل آن را تأکید زیاد نظام‌های آموزشی بر محتوای ریاضی در مقابل فرآیند توسعه تفکر ریاضی می‌داند. به‌خاطر اهمیت نقش ریاضی در توسعه علوم و فن‌آوری، آموزش ریاضی توجه پژوهشگران زیادی را جلب کرده است و حتی بعضی از آن‌ها ادعا کرده‌اند که بین آموزش ریاضی و توسعه زندگی، رابطه مستقیمی وجود دارد. به‌همین دلیل شورای معلمان ریاضی آمریکا (NCTM)، در سال ۲۰۰۰ اعلام کرد که دانش‌آموزان باید ریاضی را برای زندگی و به‌عنوان یک میراث فرهنگی فراگیرند، همچنین آن را برای محیط کار و نیز برای داشتن جامعه‌ای فنی و علمی یاد بگیرند. این شورا همچنین کمک به همه دانش‌آموزان برای

توسعه توانایی‌های ریاضی و تفکر ریاضی‌گونه دانش‌آموزان را از اهداف آموزش ریاضی دانست. اگرچه بسیاری از پژوهشگران دریافته‌اند که در تدریس ریاضی، هنوز این هدف محقق نشده است ([۷] را ببینید).

در این مقاله به بررسی راهکاری برای رسیدن به این هدف می‌پردازیم. این راهکار دارای این ویژگی است که هر دو نوع تفکر کلی ریاضی را پوشش می‌دهد. در واقع به این موضوع که “آموزش ریاضی معادل آموزش فرایندها نیست” و باید بین واقعیت‌ها و آموزش ریاضی یک رابطه قابل قبول وجود داشته باشد، و همچنین به این‌که باید بین ریاضیات مدرسه‌ای و غیرمدرسه‌ای و آموزش رسمی و غیررسمی پل بزنیم، خواهیم پرداخت. به عبارت دیگر منطق شهودی در کنار منطق صوری می‌تواند در آموزش ریاضی مؤثر باشد. ابتدا فرایندها را مطرح خواهیم کرد و سپس نظرات پژوهشگران مختلف، که تعدادی از آنها متخصصین و اساتید رشته‌های مهندسی هستند، را بیان می‌کنیم ([۴]).

۲. نتایج اصلی

آموزش فرایندها در ریاضی به یک اصل تبدیل شده است. ریاضیات علمی است که دارای نظم و سازگاری درونی است و به‌منظور پرورش نظم فکری و بالا بردن قدرت اندیشیدن و استدلال منطقی و نیز خلاقیت ذهنی مورد توجه قرار می‌گیرد. در همه دوره‌ها برای حل مسأله بر فرایندهایی از جمله رسم شکل، تبدیل مسأله به مسأله ساده‌تر، تبدیل مسأله به زیرمسأله، حذف حالت‌های نامطلوب و ... تأکید می‌شود. فرآیند تفکر حل مسأله برای افراد مختلف متفاوت است. در سال ۱۹۴۵ جورج پولیا با نوشتن کتاب “چگونه مسأله حل کنیم” مدل یا چارچوبی برای حل مسأله ارائه داد. پولیا تلاش کرده تفکر حل مسأله را به نوعی مدل‌سازی کند ([۵] و [۳] را ببینید). او الگویی چهار مرحله‌ای را مطرح کرده است. در فرآیند حل مسأله، این چهار مرحله در چهار گام طی می‌شوند تا یک مسأله ریاضی به‌طور کامل حل شود. مدل چهار مرحله‌ای او به‌صورت زیر است که هر کدام را به‌طور خلاصه توضیح می‌دهیم.

فهمیدن مسئله: برای رسیدن به درک درستی از مسأله دانش‌آموز باید بتواند به سؤالات زیر پاسخ دهد:

- مجهول چیست؟
- داده‌ها کدام است؟
- شرط چیست؟
- آیا تحقق یافتن شرط مسئله امکان‌پذیر است؟
- آیا شرط مسئله برای تعیین مجهول کفایت می‌کند؟
- آیا این که شرط مسئله کافی است؟
- آیا شرط مسئله زائد است؟

تهیه طرحی مناسب برای حل مسئله: فراگیرنده باید سعی کند ارتباط میان داده‌ها و مجهول را پیدا کند و در صورت نیافتن ارتباط مستقیمی میان داده‌ها و مجهول مسئله‌های کمکی را در نظر بگیرد تا بتواند برای حل مسئله نقشه‌ای طرح کند. حال چند نمونه از راهبردهایی که در طول حل مسأله ممکن است به کار روند را بیان می‌کنیم:

- تهیه مدل یعنی رسم الگوی مشابه یا منحنی متناسب با موقعیت مسأله،
- تهیه فهرست جدول‌ها و منحنی‌های منظم و سازمان‌یافته،
- انتخاب نمادهای مناسب، مشخص کردن اطلاعات داده شده مورد احتیاج و خواسته شده،
- نوشتن یک معادله یا یک فرمول،
- حل یک مسأله ساده‌تر و مرتبط با مسأله داده شده،

- تقسیم یک مسأله به زیر مسأله‌های مختلف و حل هر کدام از آنها،
 - استفاده از استدلال استنتاجی،
 - کنترل فرضیه‌های پنهان در صورت مسأله،
 - حدس یک جواب و آزمایش آن و تغییر نحوه نگرش به مسأله (تغییر دیدگاه).
- راهبردها و روش‌های مهم حل مسأله عبارتند از:
- رسم شکل،
 - تبدیل مسأله به مسأله ساده‌تر،
 - تبدیل مسأله به زیرمسأله و حذف حالت‌های نامطلوب.

اجرای راهبرد (طرح و نقشه): پس از آنکه طرح مناسب برای حل مسأله تهیه شد باید آن را به مورد اجرا گذاشت. دانش‌آموز باید نظارت کامل به پیشرفت اجرای طرح داشته باشد تا اگر زمانی احساس کند که طرح به حل مسأله منجر نمی‌شود بتواند طرح جدیدی را تهیه و اجرا کند. دانش‌آموز در این مرحله از حل مسئله باید این سؤالات را از خودش بپرسد:

- آیا طرح، مرا به حل مسأله هدایت می‌کند؟
- آیا لازم است که طرح فعلی را کنار گذاشته و طرح جدیدی تهیه کنم؟
- آیا برای اجرای طرح خود به اطلاعات اضافه‌تر یا کمک دیگران نیازمند می‌باشم؟

بازنگری: در این مرحله لازم است دانش‌آموز به بررسی درستی جوابی که به دست آورده است، بپردازد. پس از اجرا، حل کننده مسأله باید بازنگری بر تمامی مراحل اجرای طرح داشته باشد. گاهی در اثر به توان رساندن طرفین یک تساوی و یا عملیات‌های مشابه، جواب‌های اضافه به دست می‌آیند؛ یا در حل مسایل مربوط به احتمال، اعداد کمتر از صفر یا بیشتر از یک در نتایج دیده شود که قابل قبول نیست. بنابراین بازنگری و برگشت به عقب، مرحله مهمی است که متأسفانه اغلب مورد غفلت قرار می‌گیرد، در حالی که برای درک عمیق ریاضیات مسئله و تجزیه و تحلیل آن مفید است.

انسان همواره از شهودش در حل مسایل استفاده می‌کرده است. انسان به‌طور طبیعی خود را تا حدودی با محیط هماهنگ کرده و سعی داشته است تا با مشکلات مبارزه کند و بر آنها چیره شود. مثلاً، قبل از آنکه انسان بتواند از ساعت شنی یا خورشیدی برای تنظیم وقت خود استفاده نماید از حواس پنجگانه خود برای نگه داشتن حساب روز و ماه بهره می‌گرفت، از بلندی یا کوتاهی سایه اشیاء به موقعیت زمان پی می‌برد و یا برای تشخیص جهت در بیابان و دریاها از شهود خود کمک می‌گرفت. هر جا که با چشم دل می‌دید و با گوش جان می‌شنید یا خوب می‌چشید و درست لمس می‌کرد، رازهای ناگفته و نادیده بر او فاش می‌شد و این همه راه را برای فهم و استنباط و استدلال باز می‌کرد تا او بتواند با درک حقایق، پی به راز آفرینش ببرد و اسرار طبیعت را کشف کند. این همان شهود است که می‌تواند راهگشای انسان در کشف پدیده‌ها و حل مسائل بغرنج گردد. تفکر شهودی ریاضیات ریشه در قوه تعقل دارد و نقش مؤثر در درک قانون طبیعت دارد، دانش‌آموزان نیاز دارند در آموزش‌های مدرسه فرصت‌های موقعیت‌های علمی برای اکتشاف خلاقانه پدیده‌ها و حل مسائل علمی در اختیار داشته باشند. تا از این طریق در برخورد با مسائل بتوانند به‌طور منطقی استدلال کنند و قدرت تجزیه و انتزاع داشته باشند و درباره پدیده‌های پیرامون خود نظریه‌های جامع بسازند. تحقق این امر مستلزم آن است که معلمان بتوانند با بهره‌گیری از استانداردهای فرآیندی در آموزش ریاضی، استعداد دانش‌آموزان را در حل مسائل و پرورش تفکر ریاضی تقویت کنند. در این رابطه معلمان باید قادر باشند، با توجه به موقعیت‌های یادگیری و سطح درک دانش‌آموزان، مسائل چالش برانگیز را مطرح کنند تا علاقه دانش‌آموزان را جلب کرده و توانایی آنان برای متمرکز شدن به راه‌حل‌ها و یافتن روش‌های مختلف که به حل احتمالی مسأله منجر می‌شود پرورش دهند. به علاوه معلمان در طراحی و سازماندهی فرصت‌های یادگیری و هدایت آن به گونه‌ای عمل نمایند که نه تنها عدم

موفقیت‌های متوالی دانش‌آموزان موجب دلسردی آنها نشود، بلکه با حمایت و پشتیبانی معلمان فرصتی برای رفع بدفهمی‌ها و یافتن راه و روش‌های تازه و بدیع فراهم شود به گونه‌ای که دانش‌آموزان به حل‌کنندگان خلاق مسئله تبدیل شوند. فرض کنیم دانش‌آموزی می‌خواهد بخشی از یک مجله که به نظرش جالب است و به آن علاقه دارد را چاپ کرده و مطالعه کند. مقاله مورد نظر در پانزدهمین شماره مجله از صفحه ۷۳۷ تا صفحه ۷۴۷ منتشر شده است. چند برگه درون چاپگر باید قرار دهد اگر بخواهد مقاله را یکتا چاپ کند؟ اگر بخواهد آن را دورو چاپ کند به چند برگه کاغذ نیاز دارد؟ بگذارید سؤال را ترکیبی مطرح کنیم، اگر دانش‌آموز باید بابت هر برگه یکرو ۲۰۰ تومان و برای هر برگه دورو ۲۵۰ تومان پرداخت کند در این صورت باید چند پرداخت کند؟ وقتی از انتشارات کتابخانه درخواست کپی مقاله یک نشریه مثلاً با مشخصات بالا داریم در برگه مخصوص این کار که باید شماره صفحات را یادداشت کرد می‌نویسیم از صفحه ۷۳۷ تا با صفحه ۷۴۷ بنابراین تعداد صفحات از تفاضل ۷۴۷-۷۳۷ یکی بیشتر است و در نتیجه هزینه چاپ مقاله مورد نظر ۱۱×۲۰۰ تومان است. همگان به این واقعیت اذعان دارند که آموزش و به‌خصوص آموزش ریاضی بسیار پیچیده است و نیاز به توانایی، مهارت توأم با صبر و علاقه دارد. در منابع درسی بخش آموزش عمومی ریاضی از این قاعده استفاده می‌شود که ”در اغلب موارد جواب‌های تقریبی از جواب‌های دقیق مناسب‌ترند.“ در ادامه به چند مورد اشاره می‌کنیم.

فناوری پردازش تصاویر، کاربردی از مباحث ”موجک و قاب“ در نظریه عملگرها است. در عمل دقت کافی برای پیوستگی توابعی که تغییرات آنها مورد مطالعه قرار می‌گیرد به کار نمی‌رود. به بیان دیگر ممکن است از توابعی مشتق بگیریم که حتی پیوسته نیستند ولی نتایج آنقدر شگفت‌انگیز است که نمی‌توان از آنها چشم‌پوشی کرد.

محاسبه تقریبی ریشه معادله مفروض، یکی از موضوعات مورد توجه پژوهشگران است که تاریخی به قدمت تاریخ ریاضیات دارد. حل تمامی معادله‌ها، به‌جز خانواده محدودی، به‌صورت تحلیلی امکان‌پذیر نیست. اگر $a \neq 0$ ، ریشه‌ی معادله درجه اول $az + b = 0$ برابر است با $z = -b/a$ و ریشه‌های معادله درجه دوم $az^2 + bz + c = 0$ که با استفاده از مبین $\Delta = b^2 - 4ac$ به دست می‌آیند، عبارتند از $z_{1,2} = (-b \pm \sqrt{\Delta})/2a$. برای حل معادلات درجه ۳ و یا درجه ۴ نیز روش‌های پیچیده‌ای وجود دارند، ولی برای حل معادلات با درجه ۵ و بالاتر روش مشخصی وجود ندارد. حل معادلاتی که به غیر از چندجمله‌ای‌ها شامل توابع و نمادهایی مانند رادیکال، نسبت‌های مثلثاتی و احياناً مشتق و یا انتگرال باشند به مراتب از این هم پیچیده‌تر خواهد بود. به عبارت دیگر ما اگر بخواهیم جواب‌های تحلیلی و دقیق ریاضی برای حل معادله‌ها بیابیم فقط خانواده کوچکی از معادلات را می‌توانیم حل کنیم. بنابراین مقداری خطای قابل قبول را می‌پذیریم و در عوض تعداد بیشتری مسأله را می‌توانیم حل کنیم. روش‌های معروف نصف کردن و نیوتن-رافسون از جمله‌ی معروفترین روش‌های تقریبی برای حل معادلات با شرایط خاص است.

یکی از ضعف‌های استدلال جبری، عدم اطمینان برخی از نتایج این استدلال‌ها است که برپایه فرضی نادرست استوار می‌باشند. به عنوان مثال دو تیم فوتبال الف و ب که با هم مسابقه دارند را در نظر می‌گیریم. فضای نمونه ما دارای دو عضو می‌باشد اگر شانس هر دو عضو فضای نمونه را مساوی فرض نکنیم نمی‌توانیم فرمول احتمال را بنویسیم. بنابراین برای نوشتن فرمول‌های احتمال، یک فرض که البته فرض غلطی هم می‌باشد، را باید درست بگیریم. بنابراین علمی که بر یک فرض غلط بنا شده محصول قابل اعتمادی نخواهد داشت گرچه گریزی از این فرض نادرست نیست. مثال معروف دیگر، پرتاب سکه است، در تمام آزمایش‌های انجام شده حتی با فراوانی ۱۰۰۰ پرتاب، هیچ‌گاه شانس برابر پشت و رو تأیید نشده است. ضعف دیگر استدلال جبری، عدم کارایی این نوع استدلال در رسیدن به پاسخ برخی از مسئله‌ها است. برای نمونه در کتاب‌های درسی روشی شبیه روش نصف کردن برای یافتن ریشه تقریبی یک عدد مثبت بیان شده که به اختصار شرح می‌دهیم: اگر عددی بین دو مجذور متوالی یعنی n^2 و $(n+1)^2$ باشد آنگاه جذر آن بین n و $n+1$ است و جذر آن به n نزدیکتر است اگر خود عدد به n^2 نزدیکتر باشد و اگر عدد به $(n+1)^2$ نزدیکتر باشد، جذر آن به $n+1$ نزدیکتر است. این گزاره درست به‌نظر می‌رسد

و همین استدلال شهودی، دانش آموز را قانع می‌کند ولی از آنجا که کار منطق صوری، عدم اعتماد به شهود است و بایستی به کمک گزاره‌ها و فرایندهای ریاضی، استدلال استنتاجی ارائه شود، بنابراین فرض کنیم $x > 0$ و n عدد صحیح مثبت و x بین n^2 و $(n+1)^2$ باشد، پس $x - n^2 < (n+1)^2 - x$ ، و در نتیجه

$$2x < (n+1)^2 + n^2 \Rightarrow 2x < 2n^2 + 2n + 1 \Rightarrow x < n^2 + n + 0.5 \Rightarrow \sqrt{x} < \sqrt{((n+0.5)^2 + 0.25)}$$

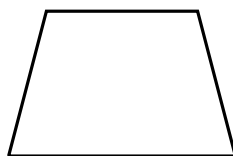
بنابراین لزوماً رابطه‌ی $x < n + 0.5$ نتیجه نمی‌شود.

یک موضوع مهم، توجه به نقش حواس پنجگانه در یادگیری است. روانشناسان معتقدند بیشتر اطلاعاتی که از محیط کسب می‌کنیم، از طریق چشم است. همچنین بیشتر اطلاعاتی که می‌دانیم و به ذهن می‌سپاریم در قالب تصاویر هستند، بنابراین هرچقدر از تفکر شهودی و آموزش از طریق درگیر کردن چشم فاصله بگیریم، مفاهیم یادگرفته شده ناپایدارتر و توسیع آنها سخت‌تر خواهد بود. در شرایطی که ما باید تلاش کنیم دانش آموزان را از تنها حفظ کردن و به حافظه سپردن مطالب که معضل بزرگ امروز سامانه‌ی آموزشی ما می‌باشد دور کنیم، رویکرد تفکر شهودی راهکار مناسبی در ریاضیات برای میل به این هدف است که علاوه بر رویکرد تفکر محورانه و پرورش استعداد تفکر و تصویر پردازی علمی و پایداری یادگیری، نقش فراوانی در کاربردی شدن هرچه بیشتر ریاضی در محیط پیرامون دانش آموز دارد. با ارزشترین رویکرد و شیوه آموزش علوم، زمینه محور بودن آن است. تفکر شهودی راهکار مناسبی ارائه می‌دهد تا دانش و علم ریاضی را زمینه محور بررسی کنیم در حالی که تفکر صوری و انتزاعی توانایی رسیدن به این هدف را ندارد. باید به این نکته نیز توجه داشت که تفکر صوری و انتزاعی مانع بزرگی برای پرورش تفکر شهودی است یعنی به همان نسبت که ما دانش آموز را به تفکر صوری و انتزاعی سوق دهیم به همان نسبت از تفکر شهودی فاصله می‌گیرد و فقط به حافظه سپاری صرف مطالب دچار می‌شود، اما تفکر شهودی این مانع را ایجاد نمی‌کند و علاوه بر قابل توسیع بودن آن به مسائل متنوع ریاضی و یادگیری براساس تفکر و تصویرسازی نه بر اساس حفظ کردن صرف مطلب باعث زیبایی یادگیری و یادگیری اصولی و پرورش دیگر تفکرها نیز می‌شود.

با اینکه حس بینایی نسبت به حواس دیگر سهم بیشتری در یادگیری دارد و تحقیقات انجام شده نیز این مطلب را تأیید می‌کند ولی در بسیاری از موارد معلمان بر کاربرد حس شنوایی تأکید فراوان دارند. گرچه نمی‌توان از حس شنوایی در آموزش چشم‌پوشی کرد اما دانش‌آموزانی که به‌طور شهودی مفهومی را آموزش دیده‌اند، آن‌را عمیق‌تر درک می‌کنند و می‌توانند در موقعیت‌های مناسب آن مفهوم را به کار گیرند. از طرفی با توجه به اینکه بخشی از تفکر ما از طریق تجسم صورت می‌گیرد، بنابراین آموزش تجسم محور مفاهیم انتزاعی و صوری ریاضی می‌تواند ضمن ایجاد انگیزه بیشتر، درک دانش‌آموزان را از این‌گونه مفاهیم ارتقا بخشد همچنین افرادی که بر منطق شهودی خود توجه بیشتری دارند در حل مسائل منعطف‌تر فکر می‌کنند و دارای ذهن توانمندتری هستند.

بنابراین برای یاد گرفتن، اول باید خود “یادگیری” را بلد باشیم و به آن به‌عنوان یک مهارت نگاه کنیم. سلسله مراتب و مراحل‌ی که برای یادگیری یک مطلب یا مهارت طی می‌شود را هرم یادگیری می‌گویند. هرم یادگیری اولین بار توسط ادگار دیل معرفی شد. هرمی که امروزه مورد استفاده قرار می‌گیرد متشکل از ۷ سطح است که ترکیبی از ایده‌های دیل و سایر پژوهشگران می‌باشد. در این هرم کمترین تأثیر در یادگیری مربوط به گوش دادن به تدریس است در حالی که دیدن و اثبات تجربی، مباحثه گروهی و تمرین عملی نقش بسیار فراوانی در این هرم و در یادگیری دارد. این هرم به ما در شناخت سبک یادگیری دانش‌آموزان کمک می‌کند و ما را به سمت به‌کارگیری روش‌های آموزشی اثربخش سوق می‌دهد. برای مثال در مبحث هندسه که دانش‌آموزان در تمام پایه‌های تحصیلی با آن روبرو هستند و برای بیشتر آن‌ها مبحثی چالش برانگیز است، اگر به محاسبات هندسی از این جهت که در مسائل روزمره زندگی کاربرد زیادی دارند توجه شود و به آموزش پایدار این مباحث پرداخته شود، می‌تواند هندسه را جذاب‌تر نماید ([۸]، [۱۰]).

به کار در کلاس زیر که از کتاب ریاضی چهارم دبستان (سال تحصیلی ۱۳۹۴-۱۳۹۳) انتخاب شده، توجه کنید. مساحت دوزنقه زیر که طول قاعده بزرگ آن ۶ و طول قاعده کوچک و ساق‌های آن ۴ است را محاسبه کنید.



عموماً، دوزنقه را متساوی‌الساقین و ارتفاع را ۴ می‌گیرند. در صورتی‌که با فرض متساوی‌الساقین بودن هم محاسبه ارتفاع نیاز به دانستن رابطه فیثاغورس و اطلاعاتی در مورد جذر دارد. مقدار دقیق و مقدار تقریبی جواب به‌ترتیب عبارتند از:

$$(\sqrt{15}(4+6))/2,$$

و

$$(4(4+6))/2,$$

که تقریب بسیار خوبی است ($0.127 \cong (20 - 19.873)$) در برابر اینکه دانش‌آموزان در این سطح را از دانستن و آموزش این مسأله و چنین مسائلی محروم کنیم یا این خطای ناچیز را بپذیریم [۲].

روش‌های مشابهی را برای مباحث دیگر ریاضی می‌توان در نظر گرفت. البته یکی از موانع بزرگ در این راه کمبود وقت و بالا بودن حجم مطالب کتاب درسی است که باعث شده معلم ریاضی مطالب را خیلی سریع و به‌صورت نظری بیان کند و دانش‌آموز هم به اجبار آن‌ها را حفظ نماید. مطالبی که با گذشت زمان فراموش شده و دانش‌آموز وقتی با مسئله‌های ریاضی مواجه می‌شود، تقریباً چیزی به خاطر ندارد و این امر باعث می‌شود که کم‌کم نسبت به ریاضی دلسرد شده و یادگیری ریاضی را یک چالش بزرگ در زندگی ببیند. به این مثال دقت کنید:

تیراندازی به احتمال ۷۰ درصد هدف را می‌زند. چند تیر باید پرتاب کند که هدف را به احتمال ۹۰ درصد بزند. جواب آن توزیع هندسی است یعنی n چند باشد که $0.8 \leq \sum_{k=1}^n 0.7(0.3)^{k-1}$. بنابراین اگر بخواهیم به احتمال ۹۰ درصد هدف را بزند باید دو تیر پرتاب کند. تیر چهارم کمتر از ۲ درصد به موفقیت اضافه می‌کند و از تیرهای بعد خیلی کمتر از یک درصد. بنابراین تنها زمانی به جواب قطعی "زدن ۱۰۰ درصد هدف" خواهیم رسید که از مجموع $\sum_{k=1}^n 0.7(0.3)^{k-1}$ وقتی $n \rightarrow \infty$ حد بگیریم، یعنی $\sum_{k=1}^{\infty} 0.7(0.3)^{k-1} = 1$. به عبارت دیگر برای هر n : $\sum_{k=1}^n 0.7(0.3)^{k-1} < 1$.

در محاسبه مساحت چهار ضلعی‌هایی که بعضی از گوشه‌های آن‌ها راست نیست بایستی قطر‌ها را دقیق اندازه گرفته و از رابطه هرون مساحت را به‌دست آورد. این کار زمانی که زمین‌های کشاورزی را مساحی می‌کنند کار سخت و شاید غیرضروری باشد. افراد با تجربه محلی به‌شیوه ضرب میانگین اضلاع روبرو، مساحت تقریبی را به‌دست می‌آورند که تقریب قابل قبولی است. حکایتی است که به درک موضوع کمک می‌کند. اگر ناصرالدین شاه بخواهد برای ناهار، ماست و خیار شاهانه بخورد هزینه آن از غذاهای دیگر کمتر نیست. بنابراین همیشه برای رسیدن به جواب‌های دقیق (ماست و خیار اعلا و شاهانه) مهم این است که چه هزینه‌ای را باید پرداخت کنیم.

مراجع

- [1] H. Colley, P. Hodkinson and J. Malcolm, Understanding Informality and Formality in Learning, *Adults Learning (England)*, 15 (2003) 7-9.

- [2] J. Jackson, Myths of Active Learning: Edgar Dale and the Cone of Experience, *Journal of the Human Anatomy and Physiology Society*, **20** (2016) 51-53.
- [3] S. Shirali, Georg polya and problem solving and appreciation, *Resonance*, textbf19 (2014) 310-322.
- [۴] ع. اشرفی‌زاده، بازبینی نقش فرآیندهای یادگیری غیر رسمی در ارتقای آموزش عالی، سومین همایش ملی آموزش، دانشگاه شهید بهشتی، ۱۳۹۷.
- [۵] ج. پولیا، چگونه مسأله را حل کنیم، ترجمه احمد آرام، مؤسسه کیهان، ۱۳۶۶.
- [۶] خ. داودی، آ. رستگار و و. عالمیان، کتاب معلم ریاضی اول دبستان-۵۲، اداره کل چاپ و توزیع کتاب‌های درسی، ۱۳۹۱.
- [۷] ف. زینی‌وند، تبیین مفهومی تفکر ریاضی: چپستی، چرایی و چگونگی. دوفصلنامه مطالعات برنامه درسی آموزش عالی، ۲۰ (۱۳۹۴) ۱۵۳-۱۷۲.
- [۸] ف. قنبرآبادی و س. نظام‌پرست، تجربه‌ای از نقش شهود در آموزش هندسه، دومین کنفرانس آموزش و کاربرد ریاضیات، کرمانشاه، ۱۳۹۷.
- [۹] گ. باتل، ترجمه ش. بخشعلی‌زاده، روش تدریس ریاضی در دوره ابتدایی، انتشارات سمت، ۱۳۹۴.
- [۱۰] م. ت. مبینی، روش تدریس هندسه، انتشارات معاونت فرهنگی آستان قدس رضوی، چاپ اول، ۱۳۶۹.

محمدتقی حیدری

گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه یاسوج، یاسوج، ایران
heydari@yu.ac.ir

محمدتقی حیدری، متولد شهریور ماه ۱۳۵۳ است. وی در سال ۱۳۷۱ وارد مقطع کارشناسی رشته دبیری ریاضی دانشگاه شیراز شد و در ادامه، دوره‌های کارشناسی ارشد و دکتری ریاضی محض شاخه آنالیز را دانشگاه شیراز گذراند. وی هم اکنون عضو هیات علمی دانشگاه یاسوج می‌باشد.



ابوالفضل ابراهیمی

دانشکده ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه یزد، یزد، ایران
ebrahimi.math@stu.yazd.ac.ir

ابوالفضل ابراهیمی، متولد اردیبهشت ماه ۱۳۷۰ در شهر اقلید فارس است. وی در سال ۱۳۸۹ وارد مقطع کارشناسی رشته ریاضیات و کاربردها دانشگاه علوم پایه دامغان شد، در سال ۱۳۹۳ وارد مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض دانشگاه علم و صنعت ایران و در سال ۱۳۹۷ وارد مقطع دکتری ریاضی محض شاخه آنالیز دانشگاه یزد گردید.



سید نعمت‌اله خادمی

گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه یاسوج، یاسوج، ایران
nemat-khademi@yahoo.com

سید نعمت‌اله خادمی متولد فروردین ماه ۱۳۵۰ در شهر یاسوج است. وی در سال ۱۳۶۹ وارد مقطع کارشناسی رشته دبیری ریاضی دانشگاه کاشان شد، در سال ۱۳۸۸ وارد مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض و در سال ۱۳۹۶ وارد مقطع دکتری ریاضی شاخه آنالیز دانشگاه یاسوج شد.

