http://math-sci.ui.ac.ir

Journal of Mathematics and Society
ISSN (print): 2345-6493, ISSN (on-line): 2345-6507
Vol. 8 No. 3 (2023), pp. 31–39.

http://ui.ac.ir

STAR COMPRESSED ZERO DIVISORS GRAPH AND PARTITIONS OF VECTOR SPACES

HAMID REZA DORBIDI

ABSTRACT. Let R be a commutaive ring and $Zd(R)$ be the set of zero divisors of R. Define an equivalence relation $\sim$ on $Zd(R)$ as follows: $x \sim y$ if and only if $ann(x) = ann(y)$. The graph $\Gamma_E(R)$ is a graph associated to R whose vertices are the classes of elements in $Zd(R)^* = Zd(R)\backslash\{0\}$, and two distinct classes $[x] \neq [y]$ are joined by an edge if and only if $xy = 0$. We show that if R is a local ring and $\Gamma_E(R)$ is a star graph with at least four elements then $m/Soc(R)$ has a partition of vector spaces where m is the maximal ideal of R. Also, We construct from a special partition of vector spaces, a ring whose associated graph is a star graph.

1. **Introduction**

The compressed zero divisor graph or the graph of equivalence classes of zero divisors of a ring R is denoted by $\Gamma_E(R)$, and is defined in [20]. Let $Zd(R)$ denotes the set of zero divisors of a ring R and $Zd(R)^* = Zd(R)\backslash\{0\}$. Define a relation $\sim$ on $Zd(R)$ as follows[14]: $x \sim y$ if and only if $ann(x) = ann(y)$. It is easily seen that $\sim$ is an equivalence relation. The graph $\Gamma_E(R)$ is a graph associated to R whose vertices are the classes of elements in $Zd(R)^*$, and two distinct classes $[x] \neq [y]$ are joined by an edge if and only if $xy = 0$. Another interpretation of $\Gamma_E(R)$ is as follows: The vertices are the elements of $\mathcal{J} = \{ann(a) : a \in Zd(R)^*\}$ and two distinct elements $ann(x)$ and $ann(y)$ are adjacent if and only if $xy = 0$. In [20], some necessary conditions are obtained for a ring R such that $\Gamma_E(R)$ is a star graph. For example, If $\Gamma_E(R)$ is a star graph with at least four vertices then

Keywords: Annihilator ideal, Compressed zero divisor graph, Finite fields, Partition of a vector space, Star graph.

Communicated by Alireza Abdollahi.

Article Type: Research Paper.

Received: 26/06/2023, Accepted: 10/09/2023, Published Online: 16-10-2023.

Cite this article: H. R. Dorbidi, Star compressed zero divisors graph and partitions of vector spaces, *Journal of Mathematics and Society*, **8** no. 3 (2023) 31–39. http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.137812.1578 .

$|Ass(R)| = 1$ and $Char(R) = 2, 4, 8$. In [9] a method for constructing star compressed zero divisor graph is obtained. They used a quotient of a symmetric algebra of a vector space whose relations come from a special partition of that vector space. But it seems that the authors were not aware of partition of vector spaces. By analyzing the proofs in [20] and [9], we see that the star graphs give a partition of a vector space and conversely some partitions give a star graph. An interesting problem about star compressed zero divisor graph is the size of them. For example is there any ring whose compressed zero divisor graph be a star graph with 36 vertices?

2. Main Results

Theorem 2.1. *Let R be a ring such that $\Gamma_E(R)$ is a star graph with at least four vertices. Let $[y]$ be the unique vertex with maximal degree and $K = [y] \bigcup \{0\}$. Then R satisfies the following properties:*

(1) *$Ass(R) = \{P\}$ where $ann(y) = P$. Also $ann(P) = K$. In particular K is an ideal of R and $Zd(R) = P$.*
(2) *$P^3 = 0$.*
(3) *If $ann(x_0) = K$ then $x_0^3 = 0$ and $[x_0 + y] = [x_0]$.*
(4) *If $J = \{x \in R : K \subsetneq ann(x)\}$ then J is an ideal of R and $ann(x) = [x] \bigcup K$ for each $x \in J \backslash K$. Also $[x + y] = [x]$ for each $x \in J \backslash K$.*
(5) *$Char(R) = 2, 4, 8$.*

Corollary 2.2. *Let (R, m) be a local Artinian ring such that $\Gamma_E(R)$ is a star graph with at least four vertices. Let $[y]$ be the unique vertex with maximal degree and $K = [y] \bigcup \{0\}$. If $J = \{x \in R : K \subsetneq ann(x)\}$ then $\{ann(x)/K : x \in J \backslash (K)\}$ is a partition of $R/m-$vector space J/K. Also $Soc(R) = ann(m) = K$.*

Theorem 2.3. *Let $V = V_1 \bigoplus \cdots \bigoplus V_t$ be an $n-$dimensional vector space over $\mathbb{F}_2$ and $dim(V_i) = n_i$. Assume $\{X_{i,k} : 1 \leq k \leq n_i\}$ is a basis of V_i. Let $S = \mathbb{F}_2[X_{i,k} : 1 \leq i \leq t, 1 \leq k \leq n_i]$ be a polynomial ring over n indeterminates. Let $I = \langle V_i^2, V^3 \rangle$ and $R = \frac{S}{I}$. Then $\Gamma_E(R)$ is a star graph with $2^n - (2^{n_1} + \cdots + 2^{n_t}) + 2t$ vertices.*

3. Summary of Proofs/Conclusions

In this article we show that every star compressed zero divisor graph correspond to a partition of vector spaces. Conversely, we construct from a special vector space partition a star compressed zero divisor graph.

Hamid Reza Dorbidi
Department of Mathematics, Faculty of Science, University of Jiroft, P.O.Box 78671-61167 Jiroft, Iran
Email: hr_dorbidi@ujiroft.ac.ir

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.137812.1578

http://math-sci.ui.ac.ir

ریاضی و جامعه
شاپا (چاپی): ۲۳۴۵-۶۴۹۳، شاپا(الکترونیکی): ۲۳۴۵-۶۵۰۷
جلد ۸، شماره ۳ (۱۴۰۲)، صص. ۳۱-۳۹

http://www.ui.ac.ir

گراف ستاره مقسوم علیه صفر فشرده و افراز فضاهای برداری

حمیدرضا دربیدی

چکیده. فرض کنیم R یک حلقه جابجایی باشد و $Zd(R)$ مجموعه مقسوم علیه‌های صفر آن باشد. رابطه هم‌ارزی $\sim$ را روی $Zd(R)$ به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم: $x \sim y$ اگر و تنها اگر $ann(x) = ann(y)$. گراف $\Gamma_E(R)$ گرافی است که رئوس آن رده‌های هم‌ارزی اعضای $Zd(R)^*$ است و دو رأس متمایز $[x] \neq [y]$ به هم متصل هستند اگر و تنها اگر $xy = 0$. ما نشان می‌دهیم که اگر حلقه R یک حلقه موضعی با ایده‌آل بیشین m باشد و گراف $\Gamma_E(R)$ گراف ستاره با حداقل ۴ رأس باشد آنگاه $m/Soc(R)$، به‌عنوان فضایی برداری، یک افراز دارد. همچنین با استفاده ازیک افراز خاص فضاهای برداری، حلقه‌ای می‌سازیم که گراف وابسته آن گراف ستاره است.

۱. مقدمه

بررسی ساختارهای جبری با استفاده از خواص گراف‌ها، یک موضوع تحقیقاتی مهم است. از یک‌سو می‌توان به ساختارهای جبری گراف‌های متعددی نسبت داد و از سوی دیگر می‌توان با استفاده از گراف‌ها، ساختارهای جبری تعریف کرد. مرجع [۷] مروری بر گراف‌های وابسته به گروه‌ها می باشد. در این مقاله بعضی از این گراف‌ها و کاربردهای آنها را می‌بینیم.

اولین مثال در این زمینه گراف کیلی یک گروه باشد. مثلاً ژان‌پیر سر[۱] در [۱۸] با استفاده از آن ثابت کرد که گروه G آزاد است اگر وتنها اگر بر یک درخت (گراف همبند بدون دور) به‌صورت آزاد عمل کند و با استفاده از آن قضیه نیلسن–شرایر مبنی بر این‌که هر زیرگروه یک گروه آزاد، آزاد است، را نتیجه گرفت.

مثال دیگر، گراف جابجایی یک گروه است که در اثبات این قضیه که تعداد متناهی گروه مرتبه زوج با مرکزساز از پیش تعیین شده وجود دارند، به کار رفته است [۶]. همچنین در [۱۶] برای اثبات حدس پلاتونف مبنی بر این‌که هر تصویر همریخت متناهی گروه ضربی یک حلقه تقسیم با بعد متناهی روی مرکز، حل‌پذیر است؛ به‌کار رفته است. برای این‌کار آنها خاصیت $3\frac{1}{2}$ را معرفی کردند که از شرط $diam(\Delta_H) \geq 3$ قوی‌تر و از شرط $diam(\Delta_H) \geq 4$ ضعیف‌تر است که در اینجا Δ_H گراف جابجایی گروه روی مجموعه $H\backslash\{1\}$ است، که در آن $H = \frac{D^*}{N}$ و D یک حلقه تقسیم با بعد متناهی روی مرکز و N زیرگروه نرمال و با اندیس متناهی D^* می‌باشد. در هر دو مقاله مذکور، مفهوم فاصله در گراف جابجایی نقش تعیین‌کننده دارد.

عبارات و کلمات کلیدی: گراف ستاره،گراف رده‌های هم‌ارزی ،افراز فضاهای برداری
دبیرتخصصی رابط: علیرضا عبدالهی
نوع مقاله: پژوهشی
تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۴/۰۵ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۶/۱۹ تاریخ انتشار آنلاین: ۱۴۰۲/۰۷/۲۴
ارجاع به مقاله: ح. ر. دربیدی، گراف ستاره مقسوم علیه صفر فشرده و افراز فضاهای برداری، نشریه ریاضی و جامعه، ۸ شماره. ۳ (۱۴۰۲) ۳۱–۳۹.
http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.138202.1587 .

[1] Jean-Pierre Serre

مثال دیگر، گراف اول یک گروه است که در اثبات حدس تامپسون به‌کار می‌رود. اگر G یک گروه متناهی باشد قرار می‌دهیم $N(G) = \{n \in \mathbb{N} :$ دارد n یک رده تزویج مرتبه $G\}$.

حدس تامپسون بیان می‌کند اگر M یک گروه ساده ناآبلی باشد و G یک گروه متناهی باشد که $Z(G) = ۱$ و $N(G) = N(M)$ آنگاه $G \cong M$. در [۸] با استفاده از گراف اول یک گروه این حدس برای گروه‌های ساده پراکنده و همچنین گروه‌های ساده‌ای که گراف اول آنها دارای حداقل سه مؤلفه همبندی است ثابت شده است.

یکی دیگر از گراف‌های مرتبط به ساختارهای ترکیبیاتی، گراف متباین یک گروه است. رئوس این گراف اعضای گروه G می‌باشند و دو رأس متمایز x و y به هم متصل هستند اگر و تنها اگر $(|x|, |y|) = ۱$. در [۱۱] نشان داده شده است که این گراف، گراف مقسوم‌علیه صفر یک نیم‌گروه جابجایی است. در مطالعه زیرمجموعه‌های مستقل این گراف در [۱۰]، دو خانواده مهم ترکیبیاتی یعنی پادزنجیرها و خانواده متقاطع ظاهر می‌شوند. یک خانواده F از زیرمجموعه‌های $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ یک پادزنجیر گفته می‌شود هر گاه به ازای هر $A, B \in F$ داشته باشیم $A \nsubseteq B, B \nsubseteq A$. یک خانواده F را متقاطع گوییم هرگاه به ازای هر $A, B \in F$ داشته باشیم $A \cap B \neq \emptyset$. قضیه‌ای معروف [۱] بیان می‌کند اگر F یک پادزنجیر باشد آنگاه $|F| \leq \binom{n}{[\frac{n}{۲}]}$. همچنین اگر F یک خانواده متقاطع باشد آنگاه $|F| \leq ۲^{n-۱}$ و بنا به قضیه معروف اردیش-کو-رادو [۱] اگر F یک خانواده متقاطع از زیرمجموعه‌های $k-$ عضوی باشد و $n \geq ۲k$ آنگاه $|F| \leq \binom{n-۱}{k-۱}$. چون هر خانواده متقاطع بیشین توسط اعضای کمین خود مشخص می‌شود پس تناظر دوسویی بین خانواده‌های متقاطع بیشین و خانواده‌های متقاطع پادزنجیر وجود دارد. فرض کنیم $\pi(n)$ مجموعه مقسوم علیه‌های اول عدد را نشان دهد و $\pi(G) = \pi(|G|)$. اگر F یک خانواده متقاطع از زیرمجموعه‌های $\pi(G)$ باشد آنگاه $G_F = \{g \in G : \exists A \in F, A \subseteq \pi(|g|)\}$ یک مجموعه مستقل در گراف متباین گروه است. برعکس اگر I یک مجموعه مستقل در گراف متباین گروه باشد آنگاه $F(I) = \{\pi(|g|) : g \in I\}$ یک خانواده متقاطع از زیرمجموعه‌های $\pi(G)$ می‌باشد.

در جهت دیگر با استفاده از گراف‌های جهت‌دار، جبرهای مسیری تعریف می‌شوند که در مطالعه حلقه‌های با نمایش متناهی به‌کار می‌روند. در این مقاله، ما به مطالعه گراف مقسوم‌علیه صفر فشرده می‌پردازیم. گراف مقسوم‌علیه صفر یک حلقه جابجایی توسط بک در [۴] تعریف شد که رئوس آن تمام اعضای حلقه بودند. اندرسون در [۲] گراف القا شده روی اعضای ناصفر حلقه که مقسوم‌علیه صفر می‌باشند را در نظر گرفت. از آن زمان تا کنون گراف‌های زیادی به ساختارهای جبری وابسته شده‌اند، که گراف مقسوم‌علیه صفر فشرده یکی از آنها می‌باشد. این گراف، گراف رده‌های هم‌ارزی مقسوم علیه‌های صفر نیز نامیده می‌شود و آن را با $\Gamma_E(R)$ نمایش می‌دهیم [۲۰]. فرض کنیم $Zd(R)$ مجموعه مقسوم علیه‌های صفر حلقه R را نشان دهد یعنی $Zd(R) = \{x \in R : \exists y \neq ۰, xy = ۰\}$ و $Zd(R)^* = Zd(R) \backslash \{۰\}$.

رابطه $\sim$ که در [۱۴] روی $Zd(R)$ به‌صورت زیر تعریف شده است را در نظر می‌گیریم: $x \sim y$ اگر و تنها اگر $ann(x) = ann(y)$، به راحتی دیده می‌شود که $\sim$ یک رابطه هم‌ارزی است. گراف $\Gamma_E(R)$، گرافی است که رئوس آن رده‌های هم‌ارزی اعضای $Zd(R)^*$ هستند و دو رأس متمایز $[x] \neq [y]$ به هم متصلند اگر و تنها اگر $xy = ۰$. تعبیر دیگر گراف $\Gamma_E(R)$ به شکل زیر می‌باشد: رئوس گراف را مجموعه $\mathcal{J} = \{ann(a) : a \in Zd(R)^*\}$ در نظر می‌گیریم و دو رأس متمایز $ann(x)$ و $ann(y)$ به هم متصلند اگر و تنها اگر $xy = ۰$. در [۲۰]، شرایط لازم برای این‌که گراف $\Gamma_E(R)$، گراف ستاره باشد به‌دست آمده است. به‌عنوان مثال اگر گراف $\Gamma_E(R)$ گراف ستاره با حداقل ۴ رأس باشد آنگاه $Char(R) \in \{۲, ۴, ۸\}$. در [۹] روشی برای ساختن گراف ستاره داده شده است. در آنجا یک حلقه خارج قسمتی جبر متقارن یک فضای برداری (یک حلقه چندجمله‌ای) به‌کار رفته است، که روابط آن از یک افراز آن فضای برداری القا می‌شود. ولی به نظر می‌رسد نویسندگان مقاله در مورد رابطه مثال شان با افراز فضاهای برداری بی‌اطلاع بوده‌اند. با تحلیل اثبات قضایا در [۲۰] و [۹]، می‌بینیم که گراف‌های ستاره به ما یک افراز فضاهای برداری را می‌دهند و برعکس با استفاده از افرازهای فضاهای برداری می‌توانیم گراف ستاره بسازیم.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.138202.1587

در اینجا بعضی از تعاریف و نمادهای مورد نیاز را یادآوری می‌کنیم. در این مقاله R یک حلقه جابجایی یکدار می‌باشد. برای هر زیرمجموعه حلقه R مثل X، ایده‌آل پوچساز X به‌صورت $ann(X) = \{r \in R : rx = \circ \ \forall x \in X\}$ تعریف می‌شود. ایده‌آل اول P را یک ایده‌آل اول وابسته گوییم هرگاه $P = ann(x)$ برای یک $x \in R$. مجموع ایده‌آل‌های کمین حلقه R را با $Soc(R)$ نمایش می‌دهیم. اگر عضو x از حلقه R پوچ‌توان باشد کوچکترین عدد طبیعی n که $x^n = \circ$ را شاخص (پوچ‌توانی) می‌نامند. فرض کنیم V یک فضای برداری روی میدان F باشد. مجموعه متناهی $\{V_i\}_{i=1}^{k}$ از زیر فضاهای سره V را یک افراز V می‌نامیم اگر و تنها اگر $V = \bigcup V_i$ و به ازای هر $i \neq j$ رابطه $V_i \bigcap V_j = \{\circ\}$ برقرار باشد. طبق مسأله معروفی در جبر خطی یک فضای برداری روی میدان نامتناهی اجتماع متناهی زیرفضای سره خود نمی‌باشد. بنابراین اگر یک فضای برداری افراز داشته باشد، میدان F متناهی است. افراز فضاهای برداری؛ کاربردهایی در نظریه کدگذاری، نظریه طرح‌ها و هندسه‌های متناهی دارد [۱۳]، [۱۵]، [۱۲] و [۱۷]. برای مثال فضای

$$C = \{(v_1, \dots, v_k) \in V_1 \times \cdots \times V_k : v_1 + \cdots + v_k = \circ\}$$

یک کد خطی با کمینه‌ی فاصله حداقل سه می‌باشد، یعنی هر دوعضو آن در حداقل سه مؤلفه متفاوتند و بنابراین کد تصحیح‌کننده یک خطا می‌باشد.

۲. متن اصلی

لم زیر لم شناخته شده‌ای در جبر جابجایی می‌باشدکه ما برای کامل بودن، اثبات آن‌را در اینجا می‌آوریم.

لم ۱.۲. اگر $ann(a)$ یک عضو بیشین مجموعه $\mathcal{J} = \{ann(x) : x \in Zd(R)^*\}$ باشد آنگاه $ann(a)$ یک ایده‌آل اول است.

اثبات. فرض کنید $bc \in ann(a)$ و $b \notin ann(a)$. بنابراین $ann(a) \subsetneq ann(ac)$. به علت بیشین بودن $ann(a)$ نتیجه می‌گیریم $ac = \circ$ یعنی $c \in ann(a)$. بنابراین $ann(a)$ یک ایده‌آل اول می‌باشد. □

قضیه زیر شکل اصلاح شده [۲۰، گزاره ۲.۴] می‌باشد که ما آن‌را به شکل مورد نظر خود بیان کرده‌ایم.

قضیه ۲.۲. فرض کنیم R یک حلقه باشد به‌طوری‌که $\Gamma_E(R)$ گراف ستاره با حداقل ۴ رأس می‌باشد. اگر $[y]$ رأس با بزرگترین درجه باشد و $K = [y] \cup \{\circ\}$ آنگاه شرایط زیر برقرار است

(۱) ایده‌آل $P = ann(y)$ یک ایده‌آل اول است و $ann(P) = K$ بالاخص K یک ایده‌آل است و $Zd(R) = P$.
(۲) $P^3 = \circ$.
(۳) اگر $K = ann(x_\circ)$ آنگاه $x_\circ^3 = \circ$ و $[x_\circ + y] = [x_\circ]$.
(۴) اگر $J = \{x \in R : K \nsubseteq ann(x)\}$ آنگاه J یک ایده‌آل R است و روابط $ann(x) = [x] \cup K, [x+y] = [x]$ برای هر $x \in J \backslash K$ برقرار است.
(۵) $Char(R) \in \{2, 4, 8\}$

اثبات. اگر $ann(y) \subsetneq ann(w)$ برای $w \in Zd(R)^*$ برقرار باشد، آنگاه گراف $\Gamma_E(R)$ دو رأس با بزرگترین درجه دارد که تناقض است. بنابراین $P = ann(y)$ عضو بیشین مجموعه $\mathcal{J}$ می‌باشد. بنابراین P بنابر لم ۱.۲ یک ایده‌آل اول است اگر $t \in ann(P)$ $\circ \neq$ آنگاه $P \subseteq ann(t)$. چون P بیشین است نتیجه می‌گیریم $ann(t) = P = ann(y)$. بنابراین $[t] = [y]$. همچنین اگر $zw = \circ$ برای $z, w \in R$ آنگاه $[z] = [w]$ یا $[z] = [y]$، واضح است که برای هر $x \in Zd(R)^*$ رابطه $K \subseteq ann(x)$ برقرار است. اگر عضوی مثل $x \in R$ وجود داشته باشد که $ann(x) = K$، رده آن‌را با $[x_\circ]$ نمایش

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.138202.1587

می‌دهیم. همچنین $[x_i]_{i\in I}$ را رده‌هایی در نظر می‌گیریم که $K \subsetneq ann(x_i)$. ابتدا ثابت می‌کنیم $ann(x_i) = [x_i]\bigcup K$. عضو $t \in ann(x_i)\backslash K$ را در نظر بگیرید چون تنها همسایه رأس $[x_i]$ رأس $[y]$ می‌باشد بنابراین $[x_i] = [t]$. در نتیجه $t \in [x_i]$ و $x_i^2 = 0$. چون $t \in [x_i]$، بنابراین $ann(x_i) \subseteq [x_i]\bigcup K$. همچنین $x_i^2 = 0$ نتیجه می‌دهد $[x_i]\bigcup K \subseteq ann(x_i)$. بنابراین $ann(x_i) = [x_i]\bigcup K$. چون $(x_i+y)x_i = 0$ و $(x_i+y)x_j \neq 0$ برای هر $i \neq j$ برقرار است بنابراین $[x_i+y] = [x_i]$. اگر $i \neq j$، آنگاه $x_ix_j \neq 0$ ، $x_i, x_j \in ann(x_ix_j)$. بنابراین درجه رأس $[x_ix_j]$ حداقل ۲ می‌باشد و در نتیجه $[x_ix_j] = [y]$. رابطه $(x_ix_j)^2 = 0$ نتیجه می‌دهد که هر عضو $[y]$ پوچ‌توان با شاخص ۲ است. چون رأس $[y]$ به همه رئوس دیگر متصل است نتیجه می‌شود برای هر $i, j, k \in I$ رابطه $x_ix_jx_k = x_ix_jx_0 = 0$ برقرار است. بنابراین $[x_0x_i] = [y]$. همچنین برای هر i رابطه $x_0^2x_i = 0$ برقرار است. چون $x_0 \notin ann(x_0)$، بنابراین $x_0^2 \neq 0$. در نتیجه $[x_0^2] = [y]$ و $x_0^3 = 0$. بنابراین هر مقسوم علیه صفر حلقه R پوچ‌توان از شاخص حداکثر ۳ می‌باشد. چون هر عضو پوچ‌توان عضو هر ایده‌آل اول می‌باشد، پس P تنها ایده‌آل اول می‌باشد. همچنین $(x_0+y)x_i \neq 0$ نتیجه می‌دهد $[x_0+y] = [x_0]$. بنابراین قسمت‌های (۳)، (۲)، (۲)، (۲) ثابت می‌شود. چون $x_ix_j \in ann(x_i+x_j), x_i, x_j \notin ann(x_i+x_j)$ بنابراین $[x_i+x_j]$ یک رأس درجه یک متمایز از $[x_i]$ و $[x_j]$ را نمایش می‌دهد. نتیجه مشابهی برای $[x_i-x_j]$ برقرار است. چون $(x_i+x_j)(x_i-x_j) = 0$ نتیجه می‌گیریم $[x_i+x_j] = [x_i-x_j]$، و هر عضو در این کلاس پوچ‌توان با شاخص ۲ است. بالاخص $(x_i+x_j)^2 = 0$. چون $0 \neq x_i+x_j \in ann(x_i+x_j)\backslash[y]$، بنابراین $x_i+x_j \in J$. همچنین $ann(x) \subseteq ann(ax)$ نتیجه می‌دهد $ax \in J$. در نتیجه J یک ایده‌آل حلقه R می‌باشد. معادله $(x_i+x_j)^2 = 0$ نتیجه می‌دهد $2x_ix_j = 0$. در نتیجه $2 = 0$ یا ۲ یک مقسوم علیه صفر در حلقه R است. اگر $Char(R) \neq 2$ آنگاه ۲ رأسی از گراف $\Gamma_E(R)$ می باشد بنابراین $2^2 = 0$ یا $2^3 = 0$. □

نتیجه ۳.۲. [۲۰] اگر R یک حلقه آرتینی باشد و $\Gamma_E(R)$ یک گراف ستاره با حداقل ۴ رأس باشد، آنگاه R یک حلقه موضعی است.

اثبات. بنابر قضیه مشهوری در جبر جابجایی [۳] در حلقه‌های آرتینی هر ایده‌آل اول بیشین است. طبق قضیه ۲ ایده‌آل اول P پوچ‌توان است، پس زیرمجموعه هر ایده‌آل اول دیگر است و بنابراین P تنها ایده‌آل بیشین حلقه R می‌باشد. □

با استفاده از نتایج گفته شده، اولین قضیه مهم خود در مورد رابطه گراف ستاره $\Gamma_E(R)$ و افراز فضاهای برداری را بیان می‌کنیم.

قضیه ۴.۲. فرض کنیم (R, m) یک حلقه آرتینی موضعی باشد و $\Gamma_E(R)$ یک گراف ستاره با حداقل ۴ رأس باشد و $[y]$ رأس یکتای با بزرگترین درجه باشد و $K = [y]\bigcup\{0\}$. اگر $J = \{x \in R : K \subsetneq ann(x)\}$ آنگاه $\{ann(x)/K : x \in J\backslash(K)\}$ یک افراز فضای برداری J/K روی میدان R/m می‌باشد. همچنین $Soc(R) = ann(m) = K$.

اثبات. نخست توجه می‌کنیم که $ann(y) = m$. همچنین $m^3 = 0$ نتیجه می‌دهد که $mJ \subseteq m^2 \subseteq K$. بنابراین J/K یک فضای برداری روی میدان مانده‌ای R/m است. چون طبق قضیه ۲ برای هر $x \in J\backslash K$ رابطه $ann(x) = [x]\bigcup K$ برقرار است بنابراین $\{ann(x)/K : x \in J\backslash K\}$ یک افراز فضای برداری J/K روی میدان R/m است. □

در [۹] روشی برای ساختن حلقه‌هایی که گراف آنها ستاره است، داده شده است. با بررسی دقیق اثبات می‌توان افراز زیر از فضای برداری $V = \langle X_1, \ldots, X_d, Y_1, \ldots, Y_e\rangle$ را به شکل زیر مشاهده کرد. با فرض $t \leq min\{d, e\}$ و

$$V_1 = \langle X_1, \ldots, X_d\rangle, V_2 = \langle Y_1, \ldots, Y_e\rangle, V_3 = \langle X_1+Y_1, \ldots, X_t+Y_t\rangle,$$

مجموعه $\{V_i\}\bigcup\{Fw : w \in V\backslash(\bigcup V_i)\}$ یک افراز فضای برداری است که با روشی که در قضیه بعد داده شده است حلقه مورد نظر ساخته می‌شود. به‌نظر می‌رسد که نویسندگان مقاله [۹]، از رابطه ساختار حلقه و افراز مورد نظر بی‌اطلاع بوده‌اند. با

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.138202.1587

این روش گراف‌های ستاره با حداکثر ۱۰۰ رأس که تعداد رئوس آنها v در یکی از شرایط $۱ \leq v \leq ۳۵$، $۴۲ \leq v \leq ۶۷$، و یا $۹۰ \leq v \leq ۹۹$، صدق می‌کنند ساخته می‌شود. ولی گراف ستاره ۳۶ رأسی با این روش قابل ساختن نیست. روش ما نیز در ساختن چنین گرافی بی‌نتیجه است. بنابراین می‌توان سؤال زیر را مطرح کرد:

مسأله ۵.۲. آیا حلقه‌ای مثل R وجود دارد که گراف $\Gamma_E(R)$، گراف ستاره ۳۶ رأسی باشد؟

برای ساختن گراف ستاره، ما از افرازی به شکل زیر استفاده می‌کنیم. فرض کنیم $V = V_۱ \bigoplus \cdots \bigoplus V_k$، آن‌گاه

$$\{V_i\} \bigcup \{Fw : w \in V \backslash (\bigcup V_i)\}$$

یک افراز فضای برداری V می‌باشد. با استفاده از این افراز، در قضیه بعد حلقه‌ای می‌سازیم که گراف $\Gamma_E(R)$ ستاره می‌باشد. لازم به ذکر است که گراف‌های ساخته شده با این روش از مرتبه زوج می‌باشند.

قضیه ۶.۲. فرض کنیم $V = V_۱ \bigoplus \cdots \bigoplus V_t$ یک فضای برداری با بعد n روی میدان ۲ عضوی $\mathbb{F}_۲$ باشد و $dim(V_i) = n_i$. فرض کنیم $\{X_{i,k} : ۱ \leq k \leq n_i\}$ پایه‌ای برای فضای برداری V_i باشد. حلقه $S = \mathbb{F}_۲[X_{i,k} : ۱ \leq i \leq t, ۱ \leq k \leq n_i]$ را حلقه چند جمله‌ای‌های n متغیره در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم $I = \langle V_i^۲, V^۳ \rangle$ و $R = \frac{S}{I}$. آن‌گاه $\Gamma_E(R)$ یک گراف ستاره با

$$۲^n - ۱ - ((۲^{n_۱} - ۱) + \cdots + (۲^{n_t} - ۱)) + t + ۱ = ۲^n - (۲^{n_۱} + \cdots + ۲^{n_t}) + ۲t$$

رأس می‌باشد.

اثبات. واضح است که حلقه $R = R_۰ \bigoplus R_۱ \bigoplus R_۲$ یک حلقه مدرج می‌باشد که در آن

$$R_۰ = \mathbb{F}_۲, R_۱ = V_۱ \bigoplus \cdots \bigoplus V_t, R_۲ = \bigoplus_{i<j} V_i V_j.$$

همچنین R یک حلقه موضعی با ایده‌آل بیشین $m = R_۱ \bigoplus R_۲, Zd(R) = R_۱ \bigoplus R_۲$ و $Soc(R) = R_۲$ است. عضو دلخواه $a = a_۱ + a_۲ \in Zd(R)^*$ را در نظر بگیرید. اگر $a_۱ = ۰$ آنگاه $ann(a) = ann(a_۲) = m$. اگر $a_۱ \neq ۰$ آنگاه $ann(a) = ann(a_۱)$. چون پوچ‌ساز هر عضو همگن یک ایده‌آل همگن است بنابراین $ann(a_۱) = (ann(a_۱) \bigcap R_۱) \bigoplus R_۲$، و بدون از دست دادن کلیت می‌توان فرض کرد a همگن درجه یک می‌باشد. بنابراین فرض کنیم $a = \sum a_{i,k} x_{i,k} \in Zd(R)$ و

$$b = \sum b_{j,l} x_{j,l} \in ann(a),\ ۱ \leq i, j \leq t,\ ۱ \leq k, l \leq n_i.$$

چون $۰ = ab = \sum a_{i,k} b_{j,l} x_{i,k} x_{j,l} = ۰$، نتیجه می‌گیریم که برای هر $i \neq j$،

$$a_{i,k} b_{j,l} + a_{j,l} b_{i,k} = ۰. \qquad (۱)$$

اگر $a \in V_i$ آنگاه برای هر $i' \neq i$ داریم $a_{i',k} = ۰$ و اندیسی مثل s وجود دارد که $a_{i,s} = ۱$. بنابراین با توجه به معادله (۱) و برای هر $i \neq j$ داریم $b_{j,l} = a_{j,l} b_{i,s} = ۰$، در نتیجه $ann(a) = V_i \bigoplus R_۲$. همچنین اگر $a \in V \backslash (\bigcup V_i)$ آنگاه اندیس‌های $i \neq i'$ و s, t وجود دارند که $a_{i,t} = a_{i',s} = ۱$. بنابراین با توجه به معادله (۱) رابطه $b_{i,t} = b_{i',s}$ به دست می‌آید. چون برای هر اندیس j رابطه $i \neq j$ یا $i' \neq j$ برقرار است بنابراین با استفاده مجدد از معادله (۱)، یا $b_{j,l} = a_{j,l} b_{i,t}$ و یا $b_{j,l} = a_{j,l} b_{i',s}$. در نتیجه برای هر j رابطه $b_{j,l} = a_{j,l} b_{i,t}$ برقرار است. بنابراین $b = b_{i,t} a \in ann(a)$، و در نتیجه $ann(a) = a\mathbb{F}_۲ \bigoplus R_۲$. نتایج بالا نشان می‌دهد رئوس گراف $\Gamma_E(R)$ را می‌توان به سه دسته تقسیم کرد. فرض کنیم $a = a_۱ + a_۲$ که $a_i \in R_i$.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.138202.1587

(۱) $a_1 = 0$. در این‌حالت $ann(a) = m$ و $[a]$ مرکز گراف ستاره است.
(۲) $0 \neq a_1 \in V_i$. در این‌حالت $ann(a) = ann(a_1) = V_i \bigoplus R_2$. تعداد این رئوس برابر t می‌باشد.
(۳) $0 \neq a_1 \in V \setminus (\bigcup V_i)$. در این‌حالت $ann(a) = ann(a_1) = a_1\mathbb{F}_2 \bigoplus R_2$. تعداد این رئوس برابر است با

$$2^n - 1 - ((2^{n_1} - 1) + \cdots + (2^{n_t} - 1)).$$

بنابراین گراف $\Gamma_E(R)$ یک گراف ستاره با

$$2^n - 1 - ((2^{n_1} - 1) + \cdots + (2^{n_t} - 1)) + t + 1 = 2^n - (2^{n_1} + \cdots + 2^{n_t}) + 2t,$$

رأس است. □

مثال ۷.۲. هر تجزیه فضای برداری $V = V_1 \bigoplus \cdots \bigoplus V_t$ به یک افراز عدد $n = n_1 + \cdots + n_t$ منجر می‌شود که $n_i = dim(V_i)$. بر عکس، هر افراز $n = n_1 + \cdots + n_t$ به یک تجزیه $V = V_1 \bigoplus \cdots \bigoplus V_t$ منجر می‌شود. در زیر چند نمونه از گراف‌های ستاره که با به کاربردن قضیه بالا ساخته می‌شوند را آورده‌ایم :

(۱) $n = 1 + \cdots + 1$: در این‌حالت تعداد رئوس گراف $\Gamma_E(R)$ برابر است با $2^n - (2 + \cdots + 2) + 2n = 2^n$.
(۲) $1 + 2 = 3$: در این‌حالت تعداد رئوس گراف $\Gamma_E(R)$ برابر است با $2^3 - (2^2 + 2) + 4 = 6$.
(۳) $1 + 1 + 1 = 3$: در این‌حالت تعداد رئوس گراف $\Gamma_E(R)$ برابر است با $2^3 - (2 + 2 + 2) + 6 = 8$.
(۴) $1 + 3 = 4$: در این‌حالت تعداد رئوس گراف $\Gamma_E(R)$ برابر است با $2^4 - (2^3 + 2) + 4 = 10$.
(۵) $2 + 2 = 4$: در این‌حالت تعداد رئوس گراف $\Gamma_E(R)$ برابر است با $2^4 - (2^2 + 2^2) + 4 = 12$.
(۶) $1 + 1 + 2 = 4$: در این‌حالت تعداد رئوس گراف $\Gamma_E(R)$ برابر است با $2^4 - (2^2 + 2 + 2) + 6 = 14$.
(۷) $1 + 1 + 1 + 1 = 4$: در این‌حالت تعداد رئوس گراف $\Gamma_E(R)$ برابر است با $2^4 - (2 + 2 + 2 + 2) + 8 = 16$.
(۸) $1 + 4 = 5$: در این‌حالت تعداد رئوس گراف $\Gamma_E(R)$ برابر است با $2^5 - (2^4 + 2) + 4 = 18$.
(۹) $2 + 3 = 5$: در این‌حالت تعداد رئوس گراف $\Gamma_E(R)$ برابر است با $2^5 - (2^3 + 2^2) + 4 = 24$.
(۱۰) $1 + 1 + 3 = 5$: در این‌حالت تعداد رئوس گراف $\Gamma_E(R)$ برابر است با $2^5 - (2^3 + 2 + 2) + 6 = 26$.
(۱۱) $1 + 2 + 2 = 5$: در این‌حالت تعداد رئوس گراف $\Gamma_E(R)$ برابر است با $2^5 - (2^2 + 2^2 + 2) + 6 = 28$.

مثال ۸.۲. فرض کنیم $V = \langle X, Y, Z\rangle$ یک فضای برداری سه بعدی روی میدان $\mathbb{F}_2$ باشد و

$$V_1 = \langle X, Y\rangle,\ V_2 = \langle Z\rangle,\ V_3 = \langle X + Z\rangle,\ V_4 = \langle Y + Z\rangle,\ V_5 = \langle X + Y + Z\rangle.$$

آنگاه $V = V_1 \bigoplus V_2$ و $n_1 = 2, n_2 = 1, t = 2$ و $\{V_i : 1 \leq i \leq 5\}$ یک افراز V می‌باشد. در این‌حالت

$$R = \frac{\mathbb{F}_2[X, Y, Z]}{\langle V_i^2, V^3\rangle} = \mathbb{F}_2 \bigoplus \mathbb{F}_2 x \bigoplus \mathbb{F}_2 y \bigoplus \mathbb{F}_2 xz \bigoplus \mathbb{F}_2 yz.$$

بنابراین گراف $\Gamma_E(R)$ دارای $2^3 - (2^2 + 2) + 4 = 6$ رأس است. رئوس این گراف

$$[x] = [y] = [x + y], [z], [x + z], [y + z], [x + y + z], [xz] = [yz],$$

هستند.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.138202.1587

مراجع

[1] M. Aigner and G. M. Ziegler, *Proofs from the book*, Fourth edition Springer-Verlag, Berlin, 2010.

[2] D. F. Anderson and P. S. Livingston, The zero-divisor graph of a commutative ring, *J. Algebra*, **217** (1999) 434–447.

[3] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald, *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1969.

[4] I. Beck, Coloring of commutative rings, *J. Algebra*, **116** (1988) 208–226.

[5] J. A. Bondi and J. S. Murty, *Graph theory with applications*, American Elsevier Publishing Co, INC, 1997.

[6] R. Brauer and K. A. Fowler, On groups of even order, *Ann. Math.*,**62** (1955) 565–583.

[7] P. J. Cameron, Graphs defined on groups, *Int. J. Group Theory*, **11** no.2 (2022) 53–107.

[8] G. Y. Chen, On Thompson's conjecture, *J. Algebra*, **15** (1996) 184–193.

[9] J. Coykendall, S. Sather-wagstaff, L. Sheppardson and S. Spiroff, On zero divisor graphs, *Progress in commutative algebra 2*, (2012) 241–299.

[10] H. R. Dorbidi, Independent sets in the coprime graph of a group, *10th Graph Theory and Algebraic Combinatorics Conference of Iran*, 2018, Yazd University.

[11] H. R. Dorbidi, A note on the coprime graph of a group, *Int. J. Group Theory*, **5** no.4 (2016) 17–22.

[12] S. I. El-Zanati, G. F. Seelinger, P. A. Sissokho, L. E. Spence and C. Vanden Eyndenn, On partitions of finite vector spaces of low dimension over $GF(2)$, *Discrete Math.*, **309** (2009) 4727–4735.

[13] O. Heden, A survey of the different types of vector space partitions, *Discrete Math. Algorithms Appl.*, **4** (2012) 14 pp.

[14] S. B. Mulay, Cycles and symmetries of zero-divisors,*Comm. Algebra*, **30** (2002) 3533–3558.

[15] E. L. Nastase and P. A. Sissokho, The minimum size of a finite subspace partition, *Linear Algebra Appl.*, **435** (2011) 1213–1221.

[16] A. S. Rapinchuk, Y. Segev and M. G. Seitz, Finite quotients of the multiplicative group of a finite dimensional division algebra are solvable, *J. Amer. Math. Soc.*, **15** (2002) 929–978.

[17] G. Seelinger, P. Sissokho, L. Spence and C. Vanden Eynden, Partitions of finite vector spaces over $GF(2)$ into subspaces of dimensions 2 and s, *Finite Fields Appl.*, **18** (2012) 1114–1132.

[18] J. P. Serre, *Trees*, Translated from the French by John Stillwell. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1980.

[19] R. Y. Sharp, *Steps in Commutative Algebra*, London Mathematical Society Student Texts, **19**, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[20] S. Spiroff and C. Wickham, A zero divisor graph determined by equivalence classes of zero divisors, *Comm. Algebra*, **39** (2011) 2338–2348.

حمید رضا دربیدی

جیرفت، کیلومتر ۸ جاده جیرفت بندر عباس، دانشگاه جیرفت، گروه ریاضی

hr_dorbidi@ujiroft.ac.ir

حمید رضا دربیدی عضو هیات علمی دانشگاه جیرفت می باشد. وی دوره کارشناسی ،کارشناسی ارشد و دکترای خود را در رشته ریاضی محض دانشگاه صنعتی شریف گذرانده است.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.138202.1587