

EQUALIZING IDEAL FOR INTEGER-VALUED POLYNOMIALS OVER THE UPPER TRIANGULAR MATRIX RING

ALI REZA NAGHIPOUR

ABSTRACT. Let D be an integral domain and I be an ideal of the upper triangular matrix ring $T_n(D)$. In this paper, we study the equalizing ideal

$$q_I = \{A \in T_n(D) \mid f(A) - f(0) \in I, \forall f \in \text{Int}(T_n(D))\}.$$

of the integer-valued polynomials over $T_n(D)$.

1. Introduction

Let $\mathbb{Z}$ and $\mathbb{Q}$ denote the set of integer and rational numbers, respectively. The classical ring of the integer-valued polynomials (over $\mathbb{Z}$) is defined by

$$\text{Int}(\mathbb{Z}) := \{f \in \mathbb{Q}[x] \mid f(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{Z}\}.$$

This ring has many interesting properties and has been extensively investigated. For a generalization, let D be an integral domain and let K be the field of fractions of D . Then, the ring of integer-valued polynomials over D is defined by

$$\text{Int}(D) := \{f \in K[X] \mid f(D) \subseteq D\}.$$

Keywords: upper triangular matrix ring, integer-valued polynomials ring, equalizing ideal, unibranched domain, Noetherian ring.
Communicated by Javad Asadollahi .

Article Type: Research Paper.

Received: 18/05/2023, Accepted: 14/08/2023, Published Online: 19-09-2023.

Cite this article: A. R. Naghipour, Equalizing ideal for integer-valued polynomials over the upper triangular matrix ring, *Journal of Mathematics and Society*, **8** no. 2 (2023) 33–46.

<http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.137741.1576> .

The first systematic study of the algebraic properties of $\text{Int}(D)$ was done in consecutive 1919 papers of Ostrowski [8] and Polya [9] of the same title.

Let R be a ring and $f(x)$ and $g(x)$ be two elements of $R[x]$. Then $(fg)(x)$ denotes the product of $f(x)$ and $g(x)$ in $R[x]$. If R is not a commutative ring and $\alpha \in R$, then $(fg)(\alpha)$ need not equal $f(\alpha)g(\alpha)$. In this case if $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^i$, then we may express

$$(*) \quad (fg)(X) = \sum_{i=1}^n a_i g(X) X^i.$$

Let S be a non empty set and let $M_n(S)$ and $T_n(S)$ denote the set of $n \times n$ matrices and upper triangular matrices with entries from the set S , respectively. Let D be an integral domain. In 2012, Werner showed that the set

$$\text{Int}(M_n(D)) := \{f \in M_n(K)[X] \mid f(M_n(D)) \subseteq M_n(D)\}$$

with ordinary addition and multiplication $(*)$ is a ring [12, Corollary 1.3]. In 2017, Frisch proved that

$$\text{Int}(T_n(D)) := \{f \in T_n(K)[X] \mid f(T_n(D)) \subseteq T_n(D)\}$$

is a ring [3, Theorem 5.4]. Recently, integer-valued polynomials have been considered over some noncommutative rings (see for examples [3, 5, 6, 10]).

In [1], Cahen and Chabert introduced the notion of equalizing ideal for a maximal ideal of D . In 2015, Cahen and Rissner [2] generalized this notion for an arbitrary ideal of the domain D . The authors in [5], introduced and studied the equalizing ideal of every ideal $M_n(\mathfrak{a})$ in $\text{Int}(M_n(D))$, where $\mathfrak{a}$ is an ideal of D .

We generalize the notion of equalizing ideal in the integer-valued polynomial ring $\text{Int}(T_n(D))$. In fact, for an arbitrary ideal I of $T_n(D)$, we define

$$q_I = \{A \in T_n(D) \mid f(A) - f(0) \in I, \forall f \in \text{Int}(T_n(D))\}.$$

If I is an ideal of $T_n(D)$ and $A \in T_n(D)$, we set

$$\mathcal{J}_{I,A} := \{f \in \text{Int}(T_n(D)) \mid f(A) \in I\}.$$

In this paper, we study the equalizing ideal q_I and find some relations between q_I and $\mathcal{J}_{I,A}$.

2. Main Results

The main results of this paper are stated as follows:

Theorem 2.1. *Let I be an ideal of $T_n(D)$ and let $A_1, A_2 \in T_n(D)$. Then the following statements hold.*

- (1) q_I is an ideal of $T_n(D)$.
- (2) $q_I \subseteq I$.

(3) If $A_1 - A_2 \in q_I$, then $\mathcal{J}_{I,A_1} = \mathcal{J}_{I,A_2}$.

Theorem 2.2. Let $n > 1$ and let $f(X) = B_k X^k + \cdots + B_1 X + B_0 \in \text{Int}(T_n(D))$. Then, the following statements hold.

- (1) $B_0 \in T_n(D)$.
- (2) $(B_1)_{ij} \in D$ for all $1 \leq i \leq j \leq n-1$.

The following corollary, which is one of the main results of this paper, immediately follows.

Corollary 2.3. Let $\mathfrak{a}$ be an ideal of D . Then, we have

$$T_n(q_{\mathfrak{a}}) \subseteq q_{T_n(\mathfrak{a})}.$$

Let R be a commutative ring with identity and let I be an ideal of $T_n(R)$. By [4], there are ideals I_{ij} ($i \leq j$) of R such that

$$I = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & \cdots & I_{1n} \\ 0 & I_{22} & \cdots & I_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & I_{nn} \end{bmatrix},$$

where $I_{ii} \subseteq I_{i(i+1)} \subseteq \cdots \subseteq I_{in}$ and $I_{ii} \subseteq I_{(i-1)i} \subseteq \cdots \subseteq I_{1i}$ for all $1 \leq i \leq n$. By this notation, we have the following theorem.

Theorem 2.4. Let I be an ideal of $T_n(D)$. Then, we have

$$q_I = \begin{bmatrix} q_{I_{11}} & I_{12} & \cdots & I_{1n} \\ 0 & q_{I_{22}} & \cdots & I_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & q_{I_{nn}} \end{bmatrix}.$$

Another main result of this paper is the following corollary.

Corollary 2.5. Let I be a nonzero ideal of $T_n(D)$. Then $q_I \neq 0$.

3. Conclusions

Let $\mathfrak{a}$ be an ideal of D . It is not always easy to compute the equalizing ideal $q_{T_n(\mathfrak{a})}$ (or $q_{\mathfrak{a}}$). However, it is known that, for every nonzero ideal $\mathfrak{a}$ of a one-dimensional, Noetherian, local domain D with finite residue field, the residue ring $\frac{D}{\mathfrak{a}}$ is finite. In this paper, we prove that the set of distinct ideals of the form $\mathcal{J}_{T_n(\mathfrak{a}),A}$ is finite for one-dimensional, Noetherian, local domain D with finite residue field ($A \in T_n(D)$ and $\mathfrak{a}$ be an ideal of D). Let D be a local domain with maximal ideal $\mathfrak{m}$ and $a \in D$. As

a consequence, we have that, if D is a Noetherian local one-dimensional domain with finite residue field, which is not unbranched, then the set of distinct ideals $\mathcal{J}_{\mathfrak{m},a}$ of $\text{Int}(D)$ above the maximal ideal $\mathfrak{m}$ of D is finite (see [1, Proposition V.3.10]).

REFERENCES

- [1] P. J. Cahen and J. L. Chabert, Integer-Valued Polynomials, *Math. Surv. Monogr.*, **48**, Amer. Math. Soc., Providence, 1997.
- [2] P. J. Cahen and R. Rissner, Finiteness and Skolem closure of ideals for non-unbranched domain, *Comm. Algebra*, **43** (2015) 2231–2239.
- [3] S. Frisch, Polynomial functions on upper triangular matrix algebra, *Monats. fur Math.*, **184** (2017) 201–215.
- [4] J. Meyer, J. Szigeti and L. Wyk, On ideals of triangular matrix rings, *Periodica Mathematica Hungarica*, **59** (2009) 109–115.
- [5] A. R. Naghipour, M. R. Rismanchian and J. Sedighi Hafshejani, Some results on the integer-valued polynomials over matrix rings, *Comm. Algebra*, **45** (2017) 1675–1686.
- [6] A. R. Naghipour and J. Sedighi Hafshejani, Some results on integer-valued polynomials over modules, *Bull. Korean Math. Soc.*, **57** (2020) 1165–1176.
- [7] W. Narkiewicz, *Polynomial Mappings*, Lecture Notes, **1600**, Springer- Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1995.
- [8] A. Ostrowski, Über ganzwertige Polynome in algebraischen Zahlkörpern, *J. Reine Angew. Math.*, **149** (1919) 117–124.
- [9] G. Pólya, Über ganzwertige Polynome in algebraischen Zahlkörpern, *J. Reine Angew. Math.*, **149** (1919) 97–116.
- [10] J. Sedighi Hafshejani and A. R. Naghipour, Integer-valued polynomials over matrix rings of number fields, *Bull. Iranian Math. Soc.*, **47** (2021) 2005–2013.
- [11] T. Skolem, Ein Satz über ganzwertige polynome, *Det Kongelige Norske Videnskabers Selskab (Trondheim)*, **9** (1936) 111–113.
- [12] N. J. Werner, Integer-valued polynomials over matrix rings, *Comm. Algebra*, **40** (2012) 4717–4726.
- [13] A. Kochakpour and M. Motamedi, The fundamental theorem of arithmetic uniqueness of factorization, *Mathematical Culture and Thought*, **48** (1390) 47–59. [In Persian]

Ali Reza Naghipour

Department of Pure Mathematics, Faculty of Mathematical Sciences, Shahrekord University, P. O. Box 115, Shahrekord, Iran

Email: naghipour@sku.ac.ir

ایده‌آل برابر کننده چندجمله‌ای‌های صحیح-مقدار روی حلقه ماتریس‌های بالا مثلثی

علیرضا نقی پور

چکیده. فرض کنیم D یک دامنه صحیح و I یک ایده‌آل از حلقه ماتریس‌های بالا مثلثی $T_n(D)$ باشد. در این مقاله، ایده‌آل برابر کننده

$$q_I = \{A \in T_n(D) \mid f(A) - f(\circ) \in I, \forall f \in \text{Int}(T_n(D))\}$$

از حلقه چندجمله‌ای‌های صحیح-مقدار روی $T_n(D)$ را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

۱. مقدمه

فرض کنیم R یک حلقه تعویض‌پذیر و یک‌دار باشد. برای عدد طبیعی n ، حلقه‌ی ماتریس‌های $n \times n$ و حلقه ماتریس‌های بالا مثلثی $n \times n$ روی R را به ترتیب با نمادهای $M_n(R)$ و $T_n(R)$ نمایش می‌دهیم. در حلقه $M_n(R)$ ماتریس همانی را I_n نمایش می‌دهیم و E_{ij} ماتریسی است که درایه (i, j) آن ۱ و بقیه درایه‌هایش صفر است. درایه (i, j) ام ماتریس A را با A_{ij} نمایش می‌دهیم.

چندجمله‌ای $f(X) = \binom{X}{p} = \frac{X(X-1)}{p}$ که ضرایب آن اعداد صحیح نیستند، روی اعداد صحیح دارای مقادیر صحیح است؛ به عبارت دیگر $f(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{Z}$ در حالت کلی، چندجمله‌ای

$$\binom{X}{n} = \frac{X(X-1) \cdots (X-n+1)}{n!}$$

روی اعداد صحیح دارای مقادیر صحیح است. این چندجمله‌ای‌ها، به عنوان چندجمله‌های درون‌یاب در قرن هفدهم میلادی مورد استفاده قرار می‌گرفتند. جرج پولیا^۱ [۹] و آستوروفسکی^۲ [۸] چندجمله‌های صحیح-مقدار روی میدان اعداد جبری یعنی

$$\text{Int}(\mathcal{O}_K) = \{f(X) \in K[X] \mid f(\mathcal{O}_K) \subseteq \mathcal{O}_K\},$$

عبارات و کلمات کلیدی: عبارات و کلمات کلیدی: حلقه ماتریس‌های بالا مثلثی، حلقه چندجمله‌ای‌های صحیح-مقدار، ایده‌آل‌های برابر کننده. دبیرتخصصی رابط: جواد اسدالهی

نوع مقاله: پژوهشی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۲/۲۸ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۵/۲۳ تاریخ انتشار آنلاین: ۱۴۰۲/۰۶/۲۸

ارجاع به مقاله: ع. نقی‌پور، نشریه ریاضی و جامعه، ۸ شماره، ۲ (۱۴۰۲) ۳۳-۴۶.

<http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.137741.1576>

¹G. Pólya ²A. Ostrowski

که در آن $\mathcal{O}_K$ حلقه اعداد صحیح روی میدان K است، را بررسی کردند. در سال ۱۹۳۶ اسکولم^۳ [۱۱] اولین کسی بود که مجموعه

$$\text{Int}(\mathbb{Z}) = \{f(X) \in \mathbb{Q}[X] \mid f(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{Z}\},$$

را به عنوان یک حلقه مورد بررسی قرار داد. در حقیقت این حلقه یک مثال طبیعی از دامنه صحیح غیر نوتری است. حلقه $\text{Int}(\mathbb{Z})$ را می توان بدین صورت تعمیم داد:

$$\text{Int}(D) = \{f(X) \in K[X] \mid f(D) \subseteq D\},$$

که در آن D یک دامنه صحیح و K میدان کسره های آن است. حلقه $\text{Int}(D)$ را حلقه چندجمله ای های صحیح-مقدار روی D می نامیم. در خصوص خواص حلقه $\text{Int}(D)$ تحقیقات زیادی انجام شده است که می توان خواننده را به کتاب های [۷، ۱] و منابع موجود در آن ها ارجاع داد. در ضمن ع. کوچک پور و زنده یاد م. معتمدی در مقاله فارسی [۱۳] به مطالعه خواص تجزیه در حلقه $\text{Int}(D)$ پرداخته اند. حلقه چندجمله ای های صحیح-مقدار روی حلقه های تعویض ناپذیر (به ویژه حلقه ماتریس ها) توسط ورنر^۴ [۱۲] معرفی شد. به دنبال آن مقالات زیادی در این زمینه به چاپ رسیدند که به عنوان مثال می توان به مقالات [۳، ۵، ۶، ۱۰] اشاره کرد.

اگر R یک حلقه تعویض پذیر باشد و $f(X), g(X) \in R[X]$ ، آنگاه $(fg)(X)$ نمایانگر حاصل ضرب $f(X)g(X)$ در $R[X]$ است. در صورتی که R یک حلقه تعویض ناپذیر باشد و $\alpha \in R$ ، ممکن است $(fg)(\alpha)$ برابر $f(\alpha)g(\alpha)$ نباشد. در این صورت با فرض $f(X) = \sum_{i=1}^n a_i X^i$ ، $(fg)(X)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$(*) \quad (fg)(X) = \sum_{i=1}^n a_i g(X) X^i.$$

در این صورت $(fg)(\alpha) = \sum_{i=1}^n a_i g(\alpha) \alpha^i$ برای هر $\alpha \in R$. فرض کنیم D یک دامنه صحیح و K میدان کسره های آن باشد. در این صورت

$$\text{Int}(M_n(D)) := \{f \in M_n(K)[X] \mid f(M_n(D)) \subseteq M_n(D)\},$$

$$\text{Int}(T_n(D)) := \{f \in T_n(K)[X] \mid f(T_n(D)) \subseteq T_n(D)\},$$

با عمل جمع معمولی و ضرب $(*)$ تشکیل حلقه می دهند [۱۲، ۳].

در [۱] کیهن و شابر^۵ ایده آل برابر کننده^۶ یک ایده آل بیشین از یک دامنه صحیح را معرفی می کنند. سپس کیهن و ریزنر^۷ [۲] این مفهوم را برای هر ایده آل دلخواه از دامنه صحیح تعمیم می دهند: فرض کنیم $\mathfrak{a}$ یک ایده آل از دامنه صحیح D باشد. در این صورت ایده آل برابر کننده $q_{\mathfrak{a}}$ از D به صورت زیر تعریف می شود:

$$q_{\mathfrak{a}} = \{a \in D \mid f(a) - f(o) \in \mathfrak{a}, \forall f \in \text{Int}(D)\}.$$

در [۵] مفهوم ایده آل برابر کننده برای حلقه ماتریس ها به صورت زیر معرفی شده است: فرض کنیم D یک دامنه صحیح و $\mathfrak{a}$ ایده آلی از آن و $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$ زیرمجموعه ای از ماتریس های وارون پذیر باشد

³T. Skolem ⁴N. J. Werner ⁵P. J. Cahen and J. L. Chabert ⁶equalizing ideal ⁷R. Rissner

به‌طوری‌که تشکیل یک پایه برای $M_n(D)$ به‌عنوان یک D -جبر بدهند. در این صورت

$$q_{M_n(D)} = \{A \in M_n(D) | f(U^{-1}AU) - f(\circ) \in M_n(\mathfrak{a}), \forall U \in \langle U \rangle, \forall f \in \text{Int}(M_n(D))\}.$$

که در آن $\langle U \rangle$ زیرگروه ضربی از $M_n(D)^*$ تولید شده توسط U است (لازم به ذکر است که R^* نشان دهنده گروه ضربی عضوهای وارون‌پذیر حلقه R است).

اکنون این مفهوم را برای حلقه ماتریس‌های بالامثلثی ارایه می‌دهیم:

تعریف ۱.۱. فرض کنیم D یک دامنه صحیح و I ایده‌آلی از حلقه $T_n(D)$ باشد. در این صورت ایده‌آل برابرکننده q_I از حلقه $T_n(D)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$q_I = \{A \in T_n(D) | f(A) - f(\circ) \in I, \forall f \in \text{Int}(T_n(D))\}$$

در این مقاله به بررسی خواص q_I می‌پردازیم.

۲. ایده‌آل برابر کننده حلقه ماتریس‌های بالامثلثی

در سرتاسر این بخش، D نشان دهنده یک دامنه صحیح است. این بخش را با نمادگذاری زیر آغاز می‌کنیم. **نمادگذاری:** فرض کنیم I ایده‌آلی از حلقه $T_n(D)$ و $A \in T_n(D)$. در این صورت قرار می‌دهیم:

$$\mathcal{J}_{I,A} := \{f \in \text{Int}(T_n(D)) | f(A) \in I\}.$$

قضیه ۱.۲. فرض کنیم I ایده‌آلی از حلقه $T_n(D)$ و $A_1, A_2 \in T_n(D)$. در این صورت

(الف) q_I یک ایده‌آل از حلقه $T_n(D)$ است.

(ب) $q_I \subseteq I$

(پ) اگر $A_1 - A_2 \in q_I$ ، آنگاه $\mathcal{J}_{I,A_1} = \mathcal{J}_{I,A_2}$.

اثبات. (الف): فرض کنیم $A, B \in q_I$ و $f \in \text{Int}(T_n(D))$. قرار می‌دهیم:

$$g(X) = f(X + B) - f(A).$$

در این صورت $g \in \text{Int}(T_n(D))$ و

$$\begin{aligned} f(A + B) - f(\circ) &= g(A) + f(A) - f(\circ) \\ &= g(A) - g(\circ) + g(\circ) + f(A) - f(\circ) \\ &= g(A) - g(\circ) + f(B) - f(A) + f(A) - f(\circ) \\ &= g(A) - g(\circ) + f(B) - f(\circ) \\ &\in I + I = I. \end{aligned}$$

بنابراین $A + B \in q_I$. اکنون فرض کنیم که $C \in T_n(D)$. قرار می‌دهیم:

$$h(X) = f(CX).$$

در این صورت $h \in \text{Int}(T_n(D))$ و

$$f(CA) - f(\circ) = h(A) - h(\circ) \in I.$$

بنابراین $CA \in q_I$ پس یک ایده‌آل از حلقه $T_n(D)$ است.

(ب): فرض کنیم $A \in q_I$ در این صورت برای هر $f \in \text{Int}(T_n(D))$ داریم $f(A) - f(\circ) \in I$ با قرار دادن $f = X$ خواهیم داشت $A - \circ = A \in I$.

(پ): فرض کنیم $A_1 - A_2 \in q_I$ و $f \in \mathcal{J}_{I, A_1}$ قرار می‌دهیم $g(X) = f(X + A_2)$ در این صورت $g \in \text{Int}(T_n(D))$ پس

$$f(A_1) - f(A_2) = g(A_1 - A_2) - g(\circ) \in I.$$

از این رو

$$f(A_2) \in f(A_1) + I = I.$$

پس $f \in \mathcal{J}_{I, A_2}$ و بنابراین $\mathcal{J}_{I, A_1} \subseteq \mathcal{J}_{I, A_2}$ به طریق مشابه می‌توان نشان داد که $\mathcal{J}_{I, A_2} \subseteq \mathcal{J}_{I, A_1}$.

□

با توجه به قضیه ۱.۲ تعریف زیر را خواهیم داشت:

تعریف ۲.۲. فرض کنیم I ایده‌آلی از حلقه $T_n(D)$ باشد. ایده‌آل q_I از حلقه $T_n(D)$ را ایده‌آل برابر کننده از I در $\text{Int}(T_n(D))$ می‌نامیم.

قضیه ۳.۲. فرض کنیم I, J دو ایده‌آل از حلقه $T_n(D)$ باشند به طوری که $I \subseteq J$ در این صورت

$$q_I \subseteq q_J.$$

□

اثبات. بدیهی است.

قضیه ۴.۲. فرض کنیم $n > 1$ و $f(X) = B_k X^k + \dots + B_1 X + B_\circ \in \text{Int}(T_n(D))$ در این صورت

(الف) $B_\circ \in T_n(D)$.

(ب) $(B_\circ)_{ij} \in D$ برای هر $1 \leq i \leq j \leq n-1$.

اثبات. (الف): فرض کنیم A ماتریس صفر باشد. در این صورت $f(A) = B_\circ \in T_n(D)$.

(ب): فرض کنیم $1 \leq j \leq n-1$ در این صورت داریم

$$f(E_{jn}) = B_1 E_{jn} + B_\circ \in T_n(D).$$

اگر $B_{\setminus} = ({}^{\setminus}b_{ij})$ و $B_{\circ} = ({}^{\circ}b_{ij})$ ، آن‌گاه

$$f(E_{jn}) = B_{\setminus}E_{jn} + B_{\circ} = \begin{bmatrix} \circ & \dots & \circ & {}^{\setminus}b_{1j} \\ \circ & \dots & \circ & {}^{\setminus}b_{2j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \circ & \dots & \circ & {}^{\setminus}b_{jj} \\ \circ & \dots & \circ & \circ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \circ & \dots & \circ & \circ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^{\circ}b_{11} & {}^{\circ}b_{12} & \dots & {}^{\circ}b_{1n} \\ \circ & {}^{\circ}b_{22} & \dots & {}^{\circ}b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \dots & \circ & {}^{\circ}b_{nn} \end{bmatrix} \in T_n(D).$$

طبق (الف) $B_{\circ} \in T_n(D)$ ، پس ${}^{\setminus}b_{ij} \in D$ برای هر $1 \leq i \leq j$ ، و بنابراین حکم ثابت است. $\square$

قضیه ۵.۲. فرض کنیم $\mathfrak{a}$ ایده‌آلی از دامنه صحیح D باشد. اگر $a \in q_{\mathfrak{a}}$ ، آن‌گاه $aE_{ij} \in q_{T_n(\mathfrak{a})}$ برای هر $1 \leq i \leq j \leq n$.
اثبات. فرض کنیم $f(X) = B_k X^k + \dots + B_{\setminus} X + B_{\circ} \in \text{Int}(T_n(D))$ و $B_k = ({}^k b_{ij})$ دو حالت در نظر می‌گیریم:
(الف) $i = j$ برای هر $d \in D$ داریم:

$$\begin{aligned} f(dE_{ii}) &= d^k B_k E_{ii} + \dots + dB_{\setminus} E_{ii} + B_{\circ} \\ &= ({}^k b_{\setminus i} E_{\setminus i} + {}^k b_{2i} E_{2i} + \dots + {}^k b_{ii} E_{ii}) d^k \\ &\quad + ({}^{k-\setminus} b_{\setminus i} E_{\setminus i} + {}^{k-\setminus} b_{2i} E_{2i} + \dots + {}^{k-\setminus} b_{ii} E_{ii}) d^{k-\setminus} \\ &\quad + \dots + ({}^{\setminus} b_{\setminus i} E_{\setminus i} + {}^{\setminus} b_{2i} E_{2i} + \dots + {}^{\setminus} b_{ii} E_{ii}) d^{\setminus} + B_{\circ} \in T_n(D). \end{aligned}$$

بنابراین برای هر $1 \leq t \leq i$ داریم:

$$g_t(X) := {}^k b_{ti} X^k + {}^{k-\setminus} b_{ti} X^{k-\setminus} + \dots + {}^{\setminus} b_{ti} X^{\setminus} + {}^{\circ} b_{ti} \in \text{Int}(D).$$

در این صورت $g_t(a) - g_t({}^{\circ}) \in \mathfrak{a}$ و بنابراین

$$f(aE_{ii}) - f({}^{\circ}) \in T_n(\mathfrak{a}),$$

یعنی $aE_{ii} \in q_{T_n(\mathfrak{a})}$.

(ب) $i < j$ برای هر $d \in D$ داریم:

$$f(dE_{ij}) = dB_{\setminus} E_{ij} + B_{\circ} = ({}^{\setminus} b_{\setminus i} E_{\setminus j} + {}^{\setminus} b_{2i} E_{2j} + \dots + {}^{\setminus} b_{ii} E_{jj}) d + B_{\circ} \in T_n(D).$$

بنابراین برای هر $1 \leq t \leq i$ داریم:

$$g_{ti}(X) := {}^{\setminus} b_{ti} X + {}^{\circ} b_{ti} \in \text{Int}(D).$$

در این صورت $a \in g_{ti}(a) - g_{ti}(\circ)$ و بنابراین

$$f(aE_{ij}) - f(\circ) \in T_n(a),$$

□

یعنی $aE_{ij} \in q_{T_n(a)}$.

نتیجه ۶.۲. فرض کنیم a ایده‌آلی از دامنه صحیح D باشد. در این صورت

$$T_n(q_a) \subseteq q_{T_n(a)}.$$

اثبات. فرض کنیم $A \in T_n(q_a)$. در این صورت $A_{ij} \in q_a$ و در نتیجه طبق قضیه ۵.۲ داریم:

$$A = \sum_{i \leq j} A_{ij} E_{ij} \in q_{T_n(a)}.$$

□

اکنون با یک مثال نشان می‌دهیم که شمول نتیجه ۶.۲ می‌تواند اکید باشد.

مثال ۷.۲. فرض کنیم k یک عدد صحیح و p کوچکترین عدد اولی باشد که k را عاد می‌کند. قرار می‌دهیم:

$$\binom{X}{p} = \frac{X(X-1) \cdots (X-p+1)}{p!}.$$

در این صورت برای هر $f(X) \in \text{Int}(\mathbb{Z})$ ، به‌وضوح داریم:

$$f(k) - f(\circ) \notin k\mathbb{Z}.$$

اکنون قرار می‌دهیم: $A := kE_{12} \in T_n(\mathbb{Z})$. فرض کنیم:

$$g(X) = B_k X^k + \cdots + B_1 X + B_0 \in \text{Int}(T_n(\mathbb{Z})).$$

در این صورت با توجه به قضیه ۴.۲ (ب)، و برای هر $1 \leq i \leq j \leq n-1$ داریم $(B_1)_{ij} \in \mathbb{Z}$. بنابراین

$$g(A) - g(\circ) = B_1 A + B_0 - B_0 = B_1 A \in T_n(k\mathbb{Z}).$$

از این رو $A \in q_{T_n(k\mathbb{Z})} \setminus T_n(q_{k\mathbb{Z}})$.

فرض کنیم a ایده‌آلی از دامنه صحیح D باشد. اگر $\frac{D}{q_a}$ متناهی باشد، آنگاه مجموعه همه ایده‌آل‌های متمایز به شکل $\mathcal{T}_{a,a}$ ، که در آن $a \in D$ ، متناهی است. فرض کنیم D یک دامنه صحیح موضعی نوتری که بعد کرول آن یک و دارای میدان باقیمانده متناهی باشد. در این صورت به آسانی می‌توان نشان داد که اگر a یک ایده‌آل ناصفر از D باشد، آنگاه $\frac{D}{q_a}$ متناهی است. اکنون می‌توانیم قضیه زیر، در خصوص متناهی بودن ایده‌آل‌های متمایز به شکل $\mathcal{T}_{T_n(a),A}$ ، را مطرح نماییم.

قضیه ۸.۲. فرض کنیم D یک دامنه صحیح موضعی نوتری که بعد کرول آن یک و دارای میدان باقیمانده متناهی باشد. فرض کنیم $A \in T_n(D)$ و a ایده‌آلی از D باشد به‌طوری‌که $q_a \neq \circ$. در این صورت مجموعه همه ایده‌آل‌های متمایز به شکل $\mathcal{T}_{T_n(a),A}$ ، متناهی است.

اثبات. چون $T_n(q_a) \subseteq q_{T_n(a)}$ همومورفیسم پوشای زیر را خواهیم داشت:

$$\frac{T_n(D)}{T_n(q_a)} \rightarrow \frac{T_n(D)}{q_{T_n(a)}}.$$

با توجه به متناهی بودن $\frac{D}{q_a}$ و یکریختی $\frac{T_n(D)}{T_n(q_a)} = T_n(\frac{D}{q_a})$ ، خواهیم داشت که $\frac{T_n(D)}{q_{T_n(a)}}$ متناهی است. بنابراین ایده‌آل‌های متمایز به شکل $\mathcal{J}_{T_n(a),A}$ متناهی است. □

قضیه ۹.۲. فرض کنیم D یک دامنه صحیح موضعی نوتری که بعد کرول آن یک و دارای میدان باقیمانده متناهی باشد. فرض کنیم $A \in T_n(D)$. در این صورت مجموعه همه ایده‌آل‌های متمایز به شکل $\mathcal{J}_{T_n(m),A}$ ، متناهی است (m ایده‌آل بیشین دامنه موضعی D است).

اثبات. با توجه به لم ۷.۹.۳ از [۱]، داریم $q_m \neq 0$ و لذا طبق قضیه ۸.۲ مجموعه همه ایده‌آل‌های متمایز به شکل $\mathcal{J}_{T_n(m),A}$ متناهی است. □

اکنون می‌توانیم گزاره ۷.۱۰.۳ از [۱] را نتیجه بگیریم.

نتیجه ۱۰.۲. فرض کنیم D یک دامنه صحیح موضعی نوتری با بعد کرول آن یک و دارای میدان باقیمانده متناهی باشد. فرض کنیم D بدون شاخه^۸ نباشد. در این صورت مجموعه همه ایده‌آل‌های متمایز به شکل $\mathcal{J}_{m,a}$ از $\text{Int}(D)$ و بالای m متناهی است (m ایده‌آل بیشین دامنه موضعی D و $a \in D$ است).

اثبات. با قرار دادن $n = 1$ در قضیه ۹.۲، حکم به دست می‌آید. □

در ادامه، قضیه زیر از [۴]، که ایده‌آل‌های حلقه ماتریس‌های بالا مثلثی را مشخص می‌کند، مورد استفاده قرار می‌گیرد.

قضیه ۱۱.۲. فرض کنیم R یک حلقه تعویض‌پذیر و یک‌دار و I یک ایده‌آل از حلقه ماتریس‌های بالا مثلثی $T_n(R)$ باشد. آنگاه

$$I = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & \dots & I_{1n} \\ 0 & I_{22} & \dots & I_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & I_{nn} \end{bmatrix}$$

، که در آن I_{ij} ایده‌آلهایی از حلقه R هستند، به‌طوری‌که:

(الف) $I_{ii} \subseteq I_{i(i+1)} \subseteq \dots \subseteq I_{in}$ برای هر $1 \leq i \leq n$

(ب) $I_{ii} \subseteq I_{(i-1)i} \subseteq \dots \subseteq I_{i1}$ برای هر $1 \leq i \leq n$

اکنون ارتباط بین ایده‌آل‌های برابر کننده حلقه تعویض‌پذیر و یک‌دار R با حلقه $T_n(R)$ را بیان می‌کنیم.

⁸unibranched

لم ۱۲.۲. فرض کنیم I یک ایده آل از حلقه ماتریس های بالا مثلثی $T_n(D)$ و به شکل قضیه ۱۱.۲ باشد. آنگاه

$$\begin{bmatrix} \circ & I_{12} & I_{13} & \dots & I_{1n} \\ \circ & \circ & I_{23} & \dots & I_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \circ & \dots & \circ & I_{(n-1)n} \\ \circ & \circ & \dots & \circ & \circ \end{bmatrix} \subseteq q_I.$$

اثبات. فرض کنیم $i < j$ و $a_{ij} \in I_{ij}$. قرار می دهیم: $A = a_{ij}E_{ij}$. فرض کنیم $B_k = ({}^k b_{ij})$ و

$$f(X) = B_k X^k + \dots + B_1 X + B_0 \in \text{Int}(T_n(D)).$$

در این صورت

$$\begin{aligned} f(A) - f(\circ) &= B_1 A \\ &= \begin{bmatrix} \circ & \dots & \circ & {}^1 b_{1j} a_{ij} & \circ & \dots & \circ \\ \circ & \dots & \circ & {}^1 b_{2j} a_{ij} & \circ & \dots & \circ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \circ & \dots & \circ & {}^1 b_{jj} a_{ij} & \circ & \dots & \circ \\ \circ & \dots & \circ & \circ & \circ & \dots & \circ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \circ & \dots & \circ & \circ & \circ & \dots & \circ \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} \circ & \dots & \circ & I_{ij} & \circ & \dots & \circ \\ \circ & \dots & \circ & I_{ij} & \circ & \dots & \circ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \circ & \dots & \circ & I_{ij} & \circ & \dots & \circ \\ \circ & \dots & \circ & \circ & \circ & \dots & \circ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \circ & \dots & \circ & \circ & \circ & \dots & \circ \end{bmatrix} \\ &\subseteq \begin{bmatrix} \circ & \dots & \circ & I_{1j} & \circ & \dots & \circ \\ \circ & \dots & \circ & I_{2j} & \circ & \dots & \circ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \circ & \dots & \circ & I_{ij} & \circ & \dots & \circ \\ \circ & \dots & \circ & \circ & \circ & \dots & \circ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \circ & \dots & \circ & \circ & \circ & \dots & \circ \end{bmatrix} \subseteq I. \end{aligned}$$

□

بنابراین $A \in q_I$. از این رو حکم با توجه به ایده آل بودن q_I به دست می آید.

قضیه ۱۳.۲. فرض کنیم I یک ایده‌آل از حلقه ماتریس‌های بالا مثلثی $T_n(D)$ و به شکل قضیه ۱۱.۲ باشد. در این صورت داریم:

$$q_I = \begin{bmatrix} q_{I_{11}} & I_{12} & \dots & I_{1n} \\ \circ & q_{I_{22}} & \dots & I_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \circ & \dots & \circ & q_{I_{nn}} \end{bmatrix}.$$

اثبات. طبق قضیه ۱۱.۲ و لم ۱۲.۲، کافی است ثابت کنیم $q_{I_{ii}}E_{ii} = q_I E_{ii}$ برای هر $1 \leq i \leq n$.
فرض کنیم $1 \leq i \leq n$ دلخواه باشد. ابتدا نشان می‌دهیم $q_{I_{ii}}E_{ii} \subseteq q_I E_{ii}$. فرض کنیم $a_{ii} \in q_{I_{ii}}$. قرار می‌دهیم $A = a_{ii}E_{ii} \in \text{Int}(T_n(D))$. فرض کنیم $f(X) = B_k X^k + \dots + B_1 X + B_0 \in \text{Int}(T_n(D))$ و $B_k = ({}^k b_{ij})$. فرض کنیم $C \in T_n(D)$ در این صورت

$$f(C)_{ii} = {}^k b_{ii} C_{ii}^k + {}^{k-1} b_{ii} C_{ii}^{k-1} + \dots + {}^1 b_{ii} C_{ii} + {}^0 b_{ii} \in D.$$

از این رو

$$g(X) := {}^k b_{ii} X^k + {}^{k-1} b_{ii} X^{k-1} + \dots + {}^1 b_{ii} X + {}^0 b_{ii} \in \text{Int}(D).$$

پس $g(a_{ii}) - g(0) \in I_{ii}$ و از این رو $f(A) - f(0) \in I$. بنابراین $q_I E_{ii} \subseteq q_{I_{ii}}E_{ii}$. $A = AE_{ii} \in q_I E_{ii}$

اکنون نشان می‌دهیم $q_I E_{ii} \subseteq q_{I_{ii}}E_{ii}$.
فرض کنیم $A \in q_I$. برای هر $1 \leq i \leq n$ داریم $AE_{ii} = a_{ii}E_{ii}$ ، پس کافی است نشان دهیم که $a_{ii} \in q_{I_{ii}}$. فرض کنیم

$$f(X) := b_k X^k + b_{k-1} X^{k-1} + \dots + b_1 X + b_0 \in \text{Int}(D).$$

قرار می‌دهیم:

$$g(X) := b_k E_{ii} X^k + b_{k-1} E_{ii} X^{k-1} + \dots + b_1 E_{ii} X + b_0 E_{ii}.$$

در این صورت $g(X) \in \text{Int}(T_n(D))$. چون q_I یک ایده‌آل است پس $AE_{ii} \in q_I$ که نتیجه می‌دهد $g(AE_{ii}) - g(0) \in I$ و بنابراین $f(a_{ii}) - f(0) \in I_{ii}$ ، یعنی $a_{ii} \in q_{I_{ii}}$ و در نتیجه حکم ثابت است. $\square$

نتیجه ۱۴.۲. فرض کنیم I یک ایده‌آل از حلقه ماتریس‌های بالا مثلثی $T_n(D)$ باشد. آنگاه

$$q_I \neq 0.$$

اثبات. فرض کنیم I ایده‌آل ناصفری از حلقه $T_n(D)$ و به شکل قضیه ۱۱.۲ باشد. بنابراین $I_{1n} \neq 0$. پس طبق قضیه ۱۳.۲ داریم $q_I \neq 0$. $\square$

مراجع

- [1] P. J. Cahen and J. L. Chabert, Integer-Valued Polynomials, *Math. Surv. Monogr.*, **48**, Amer. Math. Soc., Providence, 1997.
 - [2] P. J. Cahen and R. Rissner, Finiteness and Skolem closure of ideals for non-unibranched domain, *Comm. Algebra*, **43** (2015) 2231–2239.
 - [3] S. Frisch, Polynomial functions on upper triangular matrix algebra, *Monats. fur Math.*, **184** (2017) 201–215.
 - [4] J. Meyer, J. Szigeti and L. Wyk, On ideals of triangular matrix rings, *Periodica Mathematica Hungarica*, **59** (2009) 109–115.
 - [5] A. R. Naghipour, M. R. Rismanchian and J. Sedighi Hafshejani, Some results on the integer-valued polynomials over matrix rings, *Comm. Algebra*, **45** (2017) 1675–1686.
 - [6] A. R. Naghipour and J. Sedighi Hafshejani, Some results on integer-valued polynomials over modules, *Bull. Korean Math. Soc.*, **57** (2020) 1165–1176.
 - [7] W. Narkiewicz, *Polynomial Mappings*, Lecture Notes, **1600**, Springer- Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1995.
 - [8] A. Ostrowski, Über ganzwertige Polynome in algebraischen Zahlkörpern, *J. Reine Angew. Math.*, **149** (1919) 117–124.
 - [9] G. Pólya, Über ganzwertige Polynome in algebraischen Zahlkörpern, *J. Reine Angew. Math.*, **149** (1919) 97–116.
 - [10] J. Sedighi Hafshejani and A. R. Naghipour, Integer-valued polynomials over matrix rings of number fields, *Bull. Iranian Math. Soc.*, **47** (2021) 2005–2013.
 - [11] T. Skolem, Ein Satz über ganzwertige polynome, *Det Kongelige Norske Videnskabers Selskab (Trondheim)*, **9** (1936) 111–113.
 - [12] N. J. Werner, Integer-valued polynomials over matrix rings, *Comm. Algebra*, **40** (2012) 4717–4726.
- [۱۳] ع. کوچ‌پور و م. معتمدی، قضیه اصلی حساب و یکتایی تجزیه، فرهنگ و اندیشه ریاضی، ۴۸ (۱۳۹۰) ۴۷-۵۹.

علیرضا نقی‌پور

دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد، ایران.

naghipour@sku.ac.ir

علیرضا نقی‌پور متولد تیرماه ۱۳۵۳ در شهر بروجن است. وی در سال ۱۳۷۱ وارد مقطع کارشناسی رشته ریاضی محض در دانشگاه ولی‌عصر رفسنجان شد و در سال ۱۳۷۵ وارد مقطع کارشناسی ارشد دانشگاه تهران شد. وی در سال ۱۳۷۷ وارد مقطع دکتری دانشگاه صنعتی امیرکبیر شد. در حال حاضر، او دانشیار دانشکده علوم ریاضی دانشگاه شهرکرد است.

