http://math-sci.ui.ac.ir

Journal of Mathematics and Society
ISSN (print): 2345-6493, ISSN (on-line): 2345-6507
Vol. 8 No. 2 (2023), pp. 47-62.

http://ui.ac.ir

EDUCATIONAL APPROACHES AND RESEARCH ACHIEVEMENTS OF ALEXANDER KHINTCHINE IN MATHEMATICS

RAMIN KAZEMI

Abstract. The role of Alexander Yakovlevich Khintchine in mathematics and especially in probability theory is undeniable. His approaches to teaching mathematics, especially in the secondary school, are still a perfect model for mathematics teachers. On the other hand, his role in the theory of infinitely divisible distributions,, distribution of the sum of independent random variables, stable distributions and the domain of attraction of the Gauss law is fundamental and influential. The purpose of this article is to introduce educational approaches and key research achievements in the 30s in mathematics.

1. Introduction

A.Ya. Khintchine was born on July 19, 1894 in the village Kondrovo of the Kaluga region, about one and a half hundred km southwest of Moscow. From 1911 to 1916 he was a student of the Physical-Mathematical faculty of the Moscow State University (MSU). All his scientific life was in deeply connected with this University. In the period of study at the University and in the first years of his research career Khintchine was under a strong influence of the ideas and personality of N.N. Luzin. It is known that A.Ya. Khintchine presented his first result at a meeting of the student mathematical club in November 1914.

Keywords: Education of mathematics, infinitely divisible distributions, stable distributions, limit distribution, the domain of attraction.

Communicated by Majid Asadi.

Article Type: Promotional Paper.

Received: 22/01/2023, Accepted: 09/08/2023, Published Online: 20-09-2023.

Cite this article: R. Kazemi, Educational approaches and research achievements of Alexander Khintchine in mathematics, *Journal of Mathematics and Society*, **8** no. 2 (2023) 47–62.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.137322.1569 .

Khintchine was a member of the Soviet delegation at the International Congress of Mathematicians held in Bologna (Italy) from 3 to 10 September 1928. The Russian delegation was represented by 27 scientists including some prominent researchers like S. Bernstein (Karkhov), A.Ya. Khintchine (Moscow), V. Romanovsky (Tashkent) and E. Slutsky (Moscow). We note, however, that Khintchine did not present any communication so that he did not publish a paper in the Proceedings of the Congress (which appeared in 1929-1932).

In connection with the above said motivation for our paper, it is especially important to describe the works by Khintchine because of the following reasons:

- Several important results by Khintchine are forgotten and later rediscovered.
- A number of results were published in inaccessible places and not in English.
- The concrete and clear style of Khintchine's work can help the readers to understand better some recent results.

2. **Main Resalts**

Alexander Yakovlevich Khintchine had a constant and deep interest to the problems of teaching as in universities as in the secondary schools. His pedagogical ideas he has presented in his textbooks, monographs and special articles. In 1938-1940 he headed the physical-mathematical section of the Methodical-educational Soviet at the Ministry of Education of the Russian Federation. When the Academy of Pedagogical Sciences of the Russian Federation was founded, he became an academician of this Academy. He was very active as a member of the editorial board of the multi-volume "Encyclopedy of Elementary Mathematics", some volumes of which appeared in the late 1950s. The first papers by A. Ya. Khintchine were appeared in 1924. In order to understand the role of these articles it is necessary to describe the state of Probability Theory in those years. One can recall a critical review by R. von Mises who summed up of the situation in the following words: To-day, probability theory is not a mathematical science.

The tremendous development of Probability Theory, which thus took place in the twenty years from 1920s to 1940s was, no doubt, a joint effect of the efforts of a number of mathematicians and statisticians. However, it does not seem unlikely that future historians will ascribe its development, as far as the mathematical side of the subject is concerned, above all to the creative powers of four scientists (in alphabetic order): B. de Finetti, A.Ya. Khintchine, A. N. Kolmogorov, and P. Levy. In fact, it may be said that the real turning point came with the publications of the following works:

- P. Levy, Calcul des Probabilites, Gauthier-Villars, Paris, (1925) pp. viii+350.
- B. de Finetti, Funzione caratteristica di un fenomeno aleatorio, *Memorie della R. Accademia Nazionale dei Lincei*, **4** no.5 (1930) 86-133.

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.137322.1569

- A. Ya. Khintchine, *Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Julius Springer, Berlin, 1933.
- A. N. Kolmogorov, Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Julius Springer, Berlin, 1933.
- P. Levy, Sur les integrales dont leselements sont des variables aleatoires independentes, *Annali della R. Scuola Normale di Pisa*, **3** (1934) 337-366 and **4** (1935) 217-218.

(1) $B_0 \in T_n(D)$.

(2) $(B_1)_{ij} \in D$ for all $1 \leq i \leq j \leq n-1$.

Let $n > 1$ and $f(X) = B_k X^k + \cdots + B_1 X + B_0 \in \mathrm{Int}(T_n(D))$. Then the following statments hold.

3. Summary of Proofs

There was no satisfactory definition of mathematical probability, and the conceptual foundations of the subject were completely obscure. Moreover, with few exceptions, mainly belonging to the French and Russian schools, writers on probability did not seem aware of the standards of rigor which in other mathematical fields, were regarded as obvious. Already in the middle of 1920s were appeared another estimate of Probability Theory as a branch of mathematical science. The Probability Theory has an integral method deeply connected with the methods of modern theory of functions, and thus the most of the recent ideas appeared in the Mathematical Analysis have a fruitful application in the Probability Theory. This optimistic opinion by A. Ya. Khintchine has got an evident justification in the next few decades. At the end of the 1930s, the picture has been radically changed. Mathematical probability theory was firmly established on an axiomatic foundation. It became a purely mathematical discipline, with problems and methods of its own, conforming the current standards of mathematical rigorism, and entering into fruitful relations with other branches of mathematics. At the same time, the fields of applications of mathematical probability were steadily and rapidly growing in number and importance. It is true that nowadays there are still some pure mathematicians who tend to look down on the applied science of probability. But this attitude is expected to disappear within a generation. The tremendous development of Probability Theory, which thus took place in the twenty years from 1920s to 1940s was, no doubt, a joint effect of the efforts of a number of mathematicians and statisticians.

Ramin Kazemi

Department of Statistics, Imam Khomeini International University Qazvin, Iran

Email: `r.kazemi@sci.ikiu.ac.ir`

ریاضی و جامعه
شاپا (چاپی): ۶۴۹۳-۲۳۴۵، شاپا(الکترونیکی): ۶۵۰۷-۲۳۴۵
جلد ۸، شماره ۲ (۱۴۰۲)، صص. ۴۷-۶۲

http://math-sci.ui.ac.ir
http://www.ui.ac.ir

رویکردهای آموزشی و دستاوردهای پژوهشی الکساندر خینچین در ریاضیات

رامین کاظمی

چکیده. نقش الکساندر یاکولوویچ خینچین در ریاضیات و به‌ویژه در نظریه‌ی احتمال غیرقابل انکار است. رویکردهای او در تدریس ریاضیات، به‌ویژه در دوره‌ی متوسطه، هنوز هم الگوی کاملی برای معلمان ریاضی است. ازسوی‌دیگر، نقش او در نظریه‌ی توزیع‌های بی‌نهایت بخش‌پذیر، توزیع‌های حدی برای مجموع متغیرهای تصادفی مستقل، توزیع‌های پایدار و حوزه‌ی ربایش گاوسی در ریاضیات دهه‌ی ۱۹۳۰، اساسی و تأثیرگذار است. هدف این مقاله، معرفی رویکردهای آموزشی و دستاوردهای عظیم پژوهشی او است.

۱. مقدمه

الکساندر یاکولوویچ خینچین[۱] در ۱۹ ژوئیه ۱۸۹۴ در روستای کوندروو[۲] در منطقه‌ی کالوگا[۳] در حدود یک‌ونیم کیلومتری جنوب غربی مسکو متولد شد. از سال ۱۹۱۱ تا ۱۹۱۶ او دانشجوی دانشکده‌ی فیزیک و ریاضی دانشگاه دولتی مسکو بود و تمام زندگی علمی او در ارتباط تنگاتنگی با این دانشگاه سپری شد. او در دوره‌ی تحصیل در دانشگاه و در اولین سال‌های فعالیت تحقیقاتی خود تحت تأثیر شدید عقاید و شخصیت نیکولای لوزین[۴] قرار داشت. او اولین دستاورد علمی خود را در جلسه‌ی باشگاه ریاضی در نوامبر ۱۹۱۴ ارائه کرد. استعداد ریاضی این دانشجوی جوان در دانشگاه مورد توجه استادانش قرار گرفت. خینچین پس از فارغ‌التحصیلی از دانشگاه دولتی مسکو برای تدریس پیشنهاد شد و تدریس او در سال ۱۹۱۸ در مؤسسه‌ی صنعت‌محور زنان مسکو آغاز شد. یک سال بعد او به مؤسسه‌ی صنعتی ایوانوا–ووزنسنسک[۵] (اکنون ایوانوا) دعوت شد و کمی بعد رئیس دانشکده‌ی ریاضیات و فیزیک مؤسسه‌ی آموزشی شد. در سال ۱۹۲۲ مؤسسه‌ی تحقیقاتی ریاضیات و مکانیک در دانشگاه دولتی مسکو تشکیل شد. خینچین به‌عنوان محقق به این مؤسسه دعوت شد. او سرانجام در سال ۱۹۲۷ به مقام استادی در دانشگاه دولتی مسکو رسید.

خینچین عضو هیئت شوروی در کنگره‌ی بین‌المللی ریاضیدانان بود که از ۳ تا ۱۰ سپتامبر ۱۹۲۸ در بولونیا[۶] (ایتالیا) برگزار شد. هیئت روسی با ۲۷ دانشمند ازجمله برخی از محققان برجسته مانند سرگئی برنشتین[۷] (خارکف)، الکساندر خینچین (مسکو)، رومانوسکی[۸] (تاشکند)، و یوگن اسلوتسکی[۹] (مسکو) شرکت داشت. از سال ۱۹۲۷ تمام فعالیت علمی و آموزشی خینچین در

عبارات و کلمات کلیدی: آموزش ریاضی، توزیع‌های بی‌نهایت بخش‌پذیر، توزیع‌های پایدار، توزیع حدی، حوزه‌ی ربایش.
دبیرتخصصی رابط: مجید اسدی
نوع مقاله: ترویجی
تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۱/۲۲ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۵/۱۸ تاریخ انتشار آنلاین: ۱۴۰۲/۰۶/۲۹
ارجاع به مقاله: ر. کاظمی، رویکردهای آموزشی و دستاوردهای پژوهشی الکساندر خینچین در ریاضیات، نشریه ریاضی و جامعه، ۸ شماره. ۲ (۱۴۰۲) ۴۷–۶۲.
http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.137322.1569 .

[1]Alexander Iakovlevich Khintchine [2]Kondrovo [3]Kaluga [4] N. N. Luzin [5]ivanovo-voznesensk polytechnical institute
[6]Bologna [7]S. Bernstein [8]V. Romanovsky [9]E. Slutsky

دانشگاه دولتی مسکو بود. او رئیس کرسی نظریه‌ی احتمال، سپس رئیس کرسی آنالیز ریاضی و رئیس پژوهشکده‌ی ریاضیات و مکانیک دانشگاه دولتی مسکو بود. وی در ۱۸ نوامبر ۱۹۵۹ پس از یک دوره بیماری طولانی‌مدت درگذشت (شکل ۱).

شکل ۱. تصویری از الکساندر یاکولوویچ خینچین (۱۸۹۴–۱۹۵۹).

Figure 1: Alexander Iacovlevich Khinchin (1894-1959)

ایده‌ی نگارش این مقاله از سه ملاحظه‌ی اصلی زیر ناشی می‌شود:

اول) رویکردهای آموزشی و نوع معلمی خینچین، به‌ویژه در آموزش ریاضیات دوره‌ی متوسطه، الگویی مناسب برای معلمان ریاضی است.

دوم) نظریه‌ی احتمال در دهه‌ی ۱۹۳۰ با چنان سرعتی توسعه یافت که اکنون برخی از ایده‌ها و نتایج این دوره در حال کشف مجدد هستند. درک اینکه چگونه این شاخه از ریاضیات به یکی از مهم‌ترین و کاربردی‌ترین رشته‌های ریاضی تبدیل شد، از دیدگاه‌های مختلف بسیار جالب است. برای این موضوع، می‌توان به تأثیرگذارترین نتایج در مورد مفاهیم اصلی نظریه‌ی احتمال در این دهه مراجعه کرد.

سوم) هنوز همه‌ی نتایج پیشگامان این توسعه برای نسل‌های مختلف ریاضیدانان، شناخته شده نیست.

در دوره‌ی فوق، نقش ویژه‌ای را باید برای الکساندر یاکولوویچ خینچین در نظر گرفت. او نتایج فوق‌العاده‌ای را ثابت کرد، و سبکی بسیار منحصربه‌فرد و دقیق را برای پرداختن به مسائل مهم در نظریه‌ی احتمال معرفی کرد. او به همراه آندری کلماگورِف[10]

[10] A.N. Kolmogorov

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.130896.xxxx

مدرسه‌ی معروف نظریه‌ی احتمال را در دانشگاه مسکو ایجاد کرد. انگیزه‌ی مقاله برای توصیف رویکردها و آثار خینچین، به‌دلایل زیر اهمیت ویژه‌ای دارد:

- رویکردهای آموزشی و تدریس ریاضی توسط خینچین هنوز هم قابل توجه است و الگویی بی‌نظیر محسوب می‌شوند.
- چندین دستاورد مهم به‌دست آمده توسط خینچین فراموش گردیدند و بعدها دوباره کشف شدند.
- تعدادی از نتایج در مجلات غیرقابل دسترس و به زبان غیرانگلیسی منتشر شدند.
- سبک مشخص و واضح کار خینچین می‌تواند به خوانندگان کمک کند تا برخی از نتایج اخیر را بهتر درک کنند.

خینچین فن‌بیان خوبی داشت و مطالب را به‌خوبی و با زبان ساده توضیح می‌داد. درحقیقت، مطالب را به‌گونه‌ای توضیح می‌داد که شاگردانش متوجه موضوعات درس بشوند. ارزیابی اولیه‌ای از توانایی‌های دانش‌آموزان داشت و براساس توانایی‌های آنها میزان توضیحات خود را مشخص می‌کرد. در کلاس‌های درس به‌صورت منظم و سر وقت حاضر می‌شد. همیشه آراسته و مرتب بود. اگر نیاز می‌دانست زمان بیشتری به نسبت وقت تعیین‌شده در کلاس تدریس می‌کرد. معتقد بود معلم باید به اندازه‌ی کافی بر مطالب تسلط داشته باشد و به‌طور مکرر خود را مورد ارزیابی قرار دهد. در فرمول‌بندی مسائل و نحوه‌ی کاربست آنها دقت ویژه‌ای داشت و بعد از چندین جلسه تمامی دانش‌آموزان را متوجه اهمیت درس ریاضی می‌کرد. او دانش‌آموزان را ترغیب به یادگیری عمیق مطالب می‌کرد و اعتقادی به یادگیری مطالب فراوان و گوناگون، بدون فهم درست آنها، نداشت. درواقع، او معتقد بود فهم ما از ریاضیات به‌صورت دریاچه‌ای عمیق بهتر از اقیانوسی کم عمق است. تا دانش‌آموزان مفهومی ریاضیاتی را کاملاً درک نمی‌کردند به سراغ مفهوم بعدی نمی‌رفت و همواره سعی داشت تا از فهم مطالب توسط دانش‌آموزان مطمئن شود [G159][11]. در بخش بعدی به‌صورت جدی‌تر رویکردهای آموزشی خینچین را مرور می‌کنیم.

۲. رویکردهای آموزشی

۱.۲. آموزش نظریه‌ی احتمال و آنالیز. خینچین به تدریس در دانشگاه‌ها و مدارس متوسطه علاقه‌ی زیاد و عمیقی داشت. ایده‌های آموزشی خود را در کتاب‌های درسی، تک‌نگاری‌ها و مقالات ویژه‌ی خود ارائه کرده است. در سال‌های ۱۹۳۸–۱۹۴۰ او ریاست بخش ریاضی–فیزیک شورای آموزش در وزارت آموزش فدراسیون روسیه را برعهده داشت. هنگامی که فرهنگستان علوم تربیتی فدراسیون روسیه تأسیس شد، او عضو این فرهنگستان شد. او به‌عنوان عضوی از هیئت‌تحریریه‌ی چند مجله بسیار فعال بود ازجمله ''دایره‌المعارف ریاضیات ابتدایی''، که برخی از مجلدهای آن در اواخر دهه‌ی ۱۹۵۰ منتشر شد.

در مقاله‌ی ''الکساندر یاکولوویچ خینچین''، شاگردش نیدونکا[12] می‌گوید: هرکسی می‌تواند اعتراف کند که در فرمول‌بندی مسائل دقت فوق‌العاده‌ای داشت. خواننده فراموش می‌کرد که ایده‌های او در ابتدا برای او بیگانه بوده است. شنونده متوجه اهمیت ایده‌های مورد بحث می‌شد و از اینکه می‌توانست به سطح جدیدی از دانش و درک واقعی مفاهیم و روش‌های پیچیده دست یابد، احساس رضایت می‌کرد. موفقیت خینچین به‌عنوان معلم و خالق جهت‌گیری تحقیقاتی جدید در نظریه‌ی احتمال، نظریه‌ی اعداد، و در تحلیل‌های واقعی انکارناپذیر است. از این منظر، طبیعی است که در این بخش از مقاله، بخش‌ها و فصل‌هایی از تک‌نگاری‌های او گنجانده شود که در آنها می‌توان عظمت یک استاد واقعی را دید.

۲.۲. عقاید آموزشی. بیشتر کتاب‌های خینچین به چاپ‌های متعدد رسیده‌اند. نیدونکا در مقدمه‌ی چاپ چهارم یکی از کتب او در سال ۱۹۷۸ می‌نویسد: قبل از شروع به نوشتن این مقدمه، یک بار دیگر کتاب را خواندم. من از ارتباط با استاد بزرگ دوباره احساس لذت می‌کنم. او نه‌تنها مطالب را کاملاً می‌شناسد، بلکه می‌تواند آن را به‌گونه‌ای ارائه کند که خواننده خود

[11] در سراسر مقاله، ارجاع از نوع [G...] به‌معنای مقاله‌ای از مقالات خینچین است که توسط بوریس ولادیمیروویچ نیدونکا در مقاله ۱۹۶۱ آورده شده‌اند [۶].

[12] B. V. Gnedenko

را تحت تأثیر شخصیت نویسنده قرار دهد. کتاب او تنها از مسئله‌ها تشکیل نشده است، بلکه حاوی شواهد کاملی برای همه‌ی اظهارات است. به‌هرحال (ازآنجایی‌که مخاطب‌های کتاب بیشتر مبتدیان هستند)، تمام شواهد به خواننده کمک می‌کند تا سیر واقعی استدلال و همچنین ضرورت آن را درک کند. چنین جمله‌ای بدین معناست که خینچین در تمام کتاب‌هایش نه‌تنها یک دانشمند، بلکه بیشتر یک معلم است. نمونه‌ی دیگری از همین نوع را می‌توان با خواندن کتابچه‌ی کوچک «سه مروارید نظریه‌ی اعداد» که در چندین نسخه‌ی روسی منتشر شده است، مشاهده کرد (به [G120] مراجعه کنید). مروارید اول مربوط به فرضیه‌ای جریان‌ساز در حسابان است که توسط ریاضیدان جوان هلندی وَن در واردن[۱۳] در سال ۱۹۲۸ حل شد. مروارید دوم به فرضیه‌ی لاندو–شنیرلمن[۱۴] در مورد ضخامت مجموع دنباله‌ها می‌پردازد که توسط ریاضیدان جوان آمریکایی، مان[۱۵]، در سال ۱۹۴۲ حل شد. سومین مروارید اثبات ابتدایی مسئله‌ی وارینگ[۱۶] در منطق است که توسط ریاضیدان جوان روسی لینیک[۱۷] در سال ۱۹۴۲ حل شد. بنابراین، او سعی می‌کرد خواننده را درگیر فرایند تفکر کند و می‌گفت: می‌بینید که این افراد هم‌سن‌وسال شما بودند و با ملاحظات عمیق امّا ساده سؤالات بسیار جدی ریاضی را فرموله کردند. خینچین یکی از بهترین استادان دانشگاه دولتی مسکو بود. در طی چندین دهه او یک دوره‌ی تحلیل ریاضی را در دانشگاه‌ها و مؤسسات آموزشی ارائه کرد. شاگردان او این سخنرانی‌ها را بهترین سخنرانی‌هایی می‌دانستند که در طول دوران دانشجویی خود در آن شرکت کرده‌اند. عقیده‌ی آموزشی او این بود: ''دانستن زیاد به معنای بهتر بودن نیست، امّا بهترین بودن، بهتر است''.

۳.۲. ریاضیات دوره‌ی متوسطه. خینچین به تقویت محتوای درس ریاضیات در مدارس متوسطه و همچنین توسعه‌ی روش‌های آموزشی جدید و دریافت‌های روشمند بسیار مشتاق بود. او با همه‌ی توان روی مسائل آموزش و پرورش در دبیرستان کار می‌کرد. مجموعه‌ای از مقالات او در مورد این مسائل در سال ۱۹۶۳ در مسکو منتشر شد [G159]. در مطالب او می‌توان ایده‌های مختلفی را یافت که مربوط به مسائل آموزش ریاضی است. چندین بازنگری در مطالبی وجود دارد که دانش‌آموزان باید انجام دهند؛

۱ تکرار قبل از شروع سال تحصیلی،
۲ تجدیدنظر بعد از شروع آن،
۳ بررسی دروس آموخته‌شده در این دوره،
۴ تجدیدنظر در مطالب با موضوع خاص مرتبط با کنترل دانش،
۵ تکرار سالانه،
۶ بازنگری مطالب در آمادگی برای امتحانات.

آیا می‌توان به‌گونه‌ای تدریس کرد که دانش‌آموزان مطالب را فراموش نکنند تا از چنین تکرارهای زنجیره‌ای اجتناب کنند؟ در اینجا نگرانی بزرگ خینچین در مورد مسائل مهم آموزشی تکرار است. معلم باید روش بهتری بیابد تا دانش ریاضی دانش‌آموزان را ابزار واقعی و مفید در زندگی آنها بسازد. الزامات اصلی خینچین برای تدریس ریاضیات در دوره‌ی متوسطه به‌صورت زیر هستند:

الف) او معتقد بود توضیح ویژگی‌های سنی دانش‌آموزان می‌تواند به لزوم ارائه‌ی ساده‌ی ایده‌ها و مفاهیم علم منجر شود. امّا چنین ساده‌سازی نباید محتوای علمی این مفاهیم را جعل و حتی تحریف کند.
ب) جایگزینی تعاریف و شواهد دقیق با ارائه‌های فازی که معنای دقیقی ندارند نمی‌تواند درک موضوع را تسهیل کند. خینچین اعتقاد داشت که تفکر فازی ساده‌تر از تفکر دقیق نیست.

[13]B. L. van der Warden [14]Landau-Shnirelman [15]G. Mann [16]Waring's problem [17]Yu. V. Linnik

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.130896.xxxx

۴.۲. ایده‌های کلی در مورد آموزش ریاضی در مدارس متوسطه. خینچین فکر می‌کرد که هدف اصلی در روش‌شناسی ریاضیات و همچنین در فرایند آموزشی بیدارکردن ایده‌های خلاقانه و توسعه‌ی فن و رویکردی است که بیشتر برای آن مناسب است. برای او موفقیت فرایند آموزشی در نمره خلاصه نمی‌شد، بلکه در یادگیری عمیق بود. دانش‌آموزان باید از استدلال‌های منطقی و دقیق استفاده کنند تا شکاف‌های استدلال را درک کنند. هدف معلمان نشان‌دادن راه‌هایی برای حل مستقل مسائل و مرتب‌کردن برهان‌های شناخته‌شده آنهاست. او می‌گفت (رجوع کنید به [G159, 29-30]): "دو اصل را باید پایه‌ی حل مسائل قرار داد. اول اینکه در چه سطحی باید مفهوم ریاضی را در دبیرستان مطالعه کرد و دوم اینکه ویژگی‌های سنی دانش‌آموزان و درک علمی مدرن از این مفهوم چگونه است. اگر ویژگی‌های خاص سنی دانش‌آموزان اجازه نمی‌دهد تا یک مفهوم خاص با تفسیر علمی واقعی آن ارائه شود، می‌توان تصور از این مفهوم را ساده کرد. این بدان معناست که مدرسه نباید این مفهوم را به سطح مورد قبول در علوم ریاضی مدرن توسعه دهد. می‌توان آن را در یکی از سطوح قبلی توسعه‌ی آن متوقف کرد. امّا در هر حال معلم نباید معنای علمی مفهوم را تحریف کند تا به آن ویژگی‌هایی بدهد که با این معنا منافات دارد. مدرسه نباید اقدامی را در جهت منحرف‌شدن از مسیر رشد علمی خود توسعه دهد. اگر تعاریف دقیق، صورت‌بندی‌ها و استدلال‌ها را با تعاریفِ درهم بدون مفهوم دقیق تغییر دهیم، آن‌وقت نمی‌توان فهم واقعی را ساده کرد. او معتقد بود طرح نظری معمول درس ریاضیات در دبیرستان حاوی مفاهیم قدیمی زیادی است که از جریان اصلی توسعه‌ی ریاضی دور می‌ماند. در بیشتر موارد ایجاد مفاهیم مخصوص مدرسه که در علم به کار نمی‌رود مفهوم روشمندی ندارد و تنها آسیبی جبران‌ناپذیر را به رشد واقعی ریاضی دانش‌آموزان وارد می‌کند.

۵.۲. مفاهیم پایه‌ای ریاضی در دوره‌ی متوسطه. خینچین مفاهیم عدد، حد و تابع را، مفاهیم اساسی ریاضی می‌دانست. او معتقد بود با شروع از توصیف اعداد، معلم باید تعریف این مفهوم را روشن کند. او باید درک واقعی یک عدد را به‌عنوان موضوع عملیات حسابی در بین دانش‌آموزان خود ایجاد کند. البته باید با دقت انجام شود، گام‌به‌گام با اعداد طبیعی و اعداد صحیح شروع شود و با کسری (اعداد گویا) ادامه یابد. مهم است که تصویر کاملی از توسعه‌ی مفهوم عدد ایجاد کند و باید توجه ویژه‌ای به معرفی اعداد غیرگویا داشته باشد. درنهایت، بر این اساس، دانش‌آموزان می‌توانند مفهوم پیوستگی، حد و تابع پیوسته را درک کنند (رجوع کنید به [G159, 44-49]). اعداد مختلط نیز باید بخشی از آموزش ریاضی در دبیرستان باشند. مسائل جبر و هندسه را می‌توان با استفاده از تصاویر هندسی مختلف مطرح کرد. ازآنجایی‌که مفهوم حد در مسیر توسعه‌ی خود در حال تغییر است، باید آن را در نظر گرفت. این مفهوم باید در ذهن دانش‌آموزان نیز ایجاد شود. شروع با تعریف رسمی نوین آن، موفقیت‌آمیز نیست. هر معلمی در ریاضیات می‌داند که چنین صورت‌گرایی بسیاری از سؤالات مهم مربوط به این مفهوم را از بین می‌برد: چرا ظاهر می‌شود، چگونه ساخته می‌شود، چگونه با مفاهیم اساسی دیگر ریاضیات مرتبط است. تقریباً تمام روش‌شناسان زمان خینچین (و همچنین زمان ما) این تصور را دارند که مفهوم تابع باید محور اصلی کل دوره‌ی ریاضیات باشد. براساس آن باید مفهوم اصلی حساب، جبر، هندسه و مثلثات ایجاد شود. این واقعاً درست است امّا می‌تواند گمراه‌کننده باشد. این مفهوم باید با توجه به سن دانش‌آموزان، ماهیت مسائل در نظر گرفته‌شده و …، با دقت بسیار مورد استفاده قرار گیرد. مطالعه‌ی آنها نباید فقط شامل رسم نمودارها و در نظر گرفتن روابط باشد. معلم باید محتوای واقعی این مفهوم را نشان دهد، و زیرکانه بیان کند که چگونه می‌تواند از آن برای حل مسائل ریاضی استفاده کند. ازطرف‌دیگر، نیازی به تعمیم و بسط‌های غیرضروری، مانند معرفی توابع چندمقداری، نیست.

مناسب‌ترین شکل معرفی یک یا چند مفهوم ریاضی در درس ریاضیات در دوره‌ی متوسطه، یکی از اهداف اصلی روش‌شناسی ریاضی است. قبل از شروع بحث در مورد مفهومی مشخص، باید ویژگی اصلی کلی شاخه‌ی مربوط به ریاضیات آن را درک کرد. اول از همه باید به این سؤال پاسخ داد که تعریف ریاضی آن چیست، نقش آن برای دبیرستان چیست، در صورتی‌که معرفی کامل آن منطقاً ناممکن یا از نظر روش‌شناسی غیرمعقول باشد، چگونه و به چه طریقی باید این تعریف را جایگزین کرد. در مقاله‌ی

"درباره‌ی مفاهیم ریاضی در دبیرستان" (رجوع کنید به [G159, 85-105]) خینچین تلاش می‌کند تا روشن کند که این مفاهیم در چه شرایطی باید مطرح شوند.

۶.۲. صورت‌گرایی در آموزش ریاضی در دوره‌ی متوسطه. خینچین صورت‌گرایی دانش و توانایی‌های زودهنگام حل مسائل ریاضی را بزرگترین عیب آموزش ریاضی در دوره‌ی متوسطه می‌دانست. آن دسته از دانش‌آموزانی که فقط بخش رسمی روش‌های ریاضی را دریافت می‌کنند، در مقابل مسائلی که در زندگی واقعی با آن برخورد می‌کنند، ضعیف هستند. آنها نمی‌توانند سؤالات را به رویکردی ریاضی‌وار مطرح کنند و نمی‌توانند چنین مسائلی را حل کنند. این دانش‌آموزان در دانشگاه‌ها نیز در جایگاه ضعیفی قرار دارند. یکی از پیامدهای خطرناک‌تر صورت‌گرایی در مطالعه‌ی ریاضیات در دوره‌ی متوسطه این است که دانش رسمی ریاضی برای ایجاد جهان‌بینی علمی دانش‌آموزان بی‌فایده است. چگونه می‌توان در چارچوب برنامه‌های عینی دروس ریاضی با صورت‌گرایی در وضعیتی مشخص مبارزه کرد؟ این سؤالات توسط خینچین براساس چند مثال برگرفته از برنامه‌های ریاضیات و تمرین تدریس او مورد بحث قرار می‌گیرد. به مقاله‌ی «صورت‌گرایی در تدریس ریاضیات در دبیرستان» رجوع کنید ([G159, 106-127]).

۷.۲. اثرات آموزشی کلاس‌های ریاضی. مقاله‌ای با عنوان مشابه با این زیربخش (رجوع کنید به [G159, 128-160]) پس از مرگ خینچین به‌صورت آماده منتشر شد، هرچند توسط وی در یکی از نشست‌های علمی دفتر ریاضی پژوهشکده‌ی آموزش‌های مدرسه ارائه شده بود. برخی از ایده‌های او که در زیر آمده‌اند، بسیار مدرن به‌نظر می‌رسند: موضوعات ریاضیات (به‌عنوان یک علم و به‌عنوان یک رشته‌ی تحصیلی در دوره‌ی متوسطه) روابط کمّی و اَشکال فضایی چیزهای واقعی هستند، امّا نه خود این چیزها. به یک معنا باعث کاهش اثر آموزشی درس ریاضیات در مدرسه می‌شوند. شناخته‌شده‌ترین روش‌ها برای رسیدن به چنین تأثیری، استفاده از دقت منطقی ریاضیات خاص برای ایجاد منطق عمومی و به اصطلاح فرهنگ تفکر است. ازطرف‌دیگر، معلم می‌تواند مسائل ریاضی خاصی را با محتوای عینی تجهیز کند و این امکان را بدهد که بینش ذهنی دانش‌آموزان را گسترش داده و سطح فرهنگی عمومی آنها را افزایش دهد. ولی همه‌چیز ممکن نیست. اول از همه باید از فرهنگ‌سازی تفکر صحبت کنیم. معلم باید دانش‌آموزان را طوری تربیت کند که درست فکر کنند. او باید همیشه از استدلال کامل استفاده کند. سپس باید با مثال‌های عینی نشان دهد که شیوه‌ی تعمیم نادرست چقدر اشتباه است. معلم باید با قیاس‌های ناسازگار مبارزه کند. این مهم است که همیشه در برهان‌ها استدلال کامل را دنبال کند. طبقه‌بندی ساختن استدلال نیز باید کامل و سازگار باشد. نکته‌ی دیگری که گسترش آن مهم است، سبک ملموس و منطقی تفکر است. در هر صورت، استدلال در هر زمینه‌ای از زندگی آینده‌ی دانش‌آموزان بسیار مفید است.

۸.۲. مشکلات استدلال در درس حساب. خینچین ایده‌ی استدلال از سنین پایین به دانش‌آموزان را برای سال پنجم مدرسه مورد بحث قرار داد (رجوع کنید به [G159, 161-172]). او گفت: "اگر از معلمِ بسیارخوب ریاضی هم بپرسیم که چند دانش‌آموز (مثلاً سال پنجم مدرسه) می‌توانند مسائلی را که شامل محاسبات ساده نیست و نیاز به یافتن راه‌حل خاصی دارند، حل کنند، آن‌وقت به نتیجه‌ی مطلوب نرسیده‌ایم. ممکن است تعدادی از دانش‌آموزان بتوانند اینکار را انجام دهند اگر قبلاً تعدادی از مسائل مشابه را حل کرده باشند. بنابراین، بالارفتن سریع توانایی دانش‌آموزان برپایه‌ی مسائل سخت و غیراستاندارد حتی برای معلمانِ بسیارخوب نیز توجیه ندارد. اگر مسائل مشخصی را که برای دانش‌آموزان پیشنهاد می‌شود در نظر بگیریم، می‌بینیم که یافتن بهترین راه‌حل برای آنها چقدر دشوار است، و حتی دشوارتر از آن برای معلمان یافتن روشی برای ایجاد مهارت‌های مربوطه است. علاوه‌براین، چند سال بعد به‌نظر می‌رسد که این مسائل با استفاده از فنی بسیار ساده‌تر حل می‌شوند. بنابراین، اگر دانش‌آموزان در سن مربوطه با فن استاندارد راه‌حل آشنا می‌شوند لزومی ندارد با روش‌های غیرمعمول و غیراستاندارد مجبور

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.130896.xxxx

به یافتن راه‌حل شوند. به‌هرحال، حل یک مسئله‌ی کاملاً ساده که به‌درستی و بسیار سریع حل می‌شود، می‌تواند دانش‌آموزان را بیشتر خوشحال کند تا تفکر «خلاقانه‌ی» دشوار که منجر به راه‌حلی می‌شود که درک کامل آن غیرممکن است.

۹.۲. آموزش تحلیل ریاضی. مارکوشوویچ[۱۸] در مقاله‌ی ''خینچین به‌عنوان معلم آنالیز ریاضی'' به مطالب زیر اشاره می‌کند ([G159, 173-179]): خینچین مهارت‌های آموزشی برجسته‌ای داشت. دوره‌های او کوتاه و عاری از جزئیات غیرضروری بود. او همواره می‌کوشید اهمیت و ماهیت ریاضی مفاهیم مورد نظر را تبیین و انگیزه‌ای در فرمول‌بندی مسئله ایجاد کند. بنابراین، او مخاطب را برای کشف یک پروژه‌ی تحقیقاتی جدید آماده می‌کرد. این شرط لازم برای پیروی از راهنمایی‌های استاد و گذراندن ساختارهای پیچیده‌ی ریاضی بود. گه‌گاه از درس اصلی خارج می‌شد و به دانش‌آموزان توضیح می‌داد که چگونه به یک هدف آموزشی دست یابند. معلمی را به آنها می‌آموخت. او هرگز از پرداختن به مسائل پیچیده‌ی آموزشی نمی‌ترسید. نمونه‌ی بارز آن کتاب معروف «هشت سخنرانی در تحلیل ریاضی» در سال‌های ۱۹۴۳–۱۹۴۸ است [G116]. این کتاب خطاب به کسانی است که با استفاده از ماشین تحلیل ریاضی سعی در درک ایده‌ها و منطق اصلی آن دارند. این هشت سخنرانی در قالب ۸ فصل در کتاب به‌شرح زیر ارائه می‌شوند:

۱ پیوستگی،
۲ حد،
۳ توابع،
۴ سری،
۵ مشتق،
۶ انتگرال،
۷ نمایش سری توابع
۸ معادله‌ی دیفرانسیل.

هر یک از این موضوعات مورد بحث قرار می‌گیرند، امّا ارائه بیشتر به‌گونه‌ای است که می‌تواند دیدگاه نوین خواننده را شکل دهد.

یکی دیگر از نمونه‌های درخشان تحقق عقاید آموزشی خینچین، «دوره‌ی کوتاه تحلیل ریاضی» در سال‌های ۱۹۵۳–۱۹۵۷ است [G144]. این ''دوره‌ی کوتاه'' خیلی دقیق است. تمام حقایق لازم و شواهد آنها را ارائه کرده است. یکی دیگر از ویژگی‌های کتاب این است که گام‌به‌گام مفاهیم ریاضی بسیار مبهم و شهودی را برای دانش‌آموزان دوره‌ی متوسطه ارائه می‌کند. معرفی مفهوم حد (در سطح جدیدی) است. این کار به همان روشی که قبلاً توضیح داده شد، انجام می‌شود.

او بسیاری از مسائل ویژه‌ی آموزش ریاضی را مورد بحث قرار داد. در میان آنها، به‌عنوان مثال، مسئله‌ی سازماندهی کار مستقل و بدون کمک دانش‌آموزان برجسته است. خینچین معتقد بود: ''وقتی صحبت از کار مستقل دانش‌آموزان می‌شود، قبل از هر چیز منظور مشاوره‌ی آنها توسط معلمان است''. درواقع، این بدان معناست که برای هر مسئله‌ای (حتی کوچک که با کمی فکر کردن حل می‌شود) دانش‌آموز به استاد مراجعه می‌کند و بدون هیچ هزینه‌ای از طرف دانش‌آموز پاسخ نهایی یا استناد دقیق را در متن کتاب می‌گیرد.

از دید او باید به آموزش و صلاحیت همیشگی معلمان دوره‌ی متوسطه توجه ویژه‌ای صورت گیرد. آنها باید دانش علمی را در تمام موضوعات ریاضی دبیرستان و حتی بیشتر کسب کنند. این نباید تنها شامل مجموعه‌ای از گواهینامه‌های خاص باشد که چگونه می‌توان راه‌حل یک یا چند مسئله را به دانش‌آموزان نشان داد. خینچین یکی از حامیان ایده‌ی معرفی حسابان در دوره‌ی

[18] A. I. Markushevich

دبیرستان بود. او معتقد بود حساب، دیفرانسیل و انتگرال که از مهم‌ترین کشف‌های بشر هستند، کاربردهای متعددی دارند و برای شکل‌گیری دیدگاه علمی دانش‌آموزان مهم‌اند.

۱۰.۲. آموزش نظریه‌ی احتمال. هرچند سهم خینچین در نظریه‌ی توابع و نظریه‌ی اعداد بسیار زیاد است امّا بیشتر عمر علمی او با تمرکز بر نظریه‌ی احتمالات گذشت. در دهه‌ی ۱۹۲۰، خینچین، کلماگورِف، اسلوتسکی و لِوی[۱۹] ارتباط تنگاتنگی بین نظریه‌ی احتمال و شاخه‌ای از ریاضی که مجموعه‌ها و مفهوم کلی تابع را مطالعه می‌کرد، کشف کردند. بورل[۲۰] کمی زودتر به این ارتباط پی برده بود. فرایندهای تصادفی به‌دلیل کارهای اساسی کلماگورف و خینچین کشف شدند. به یک معنا، این نظریه ایده‌های مارکوف را برای مطالعه‌ی متغیرهای تصادفی وابسته (که بعداً زنجیرهای مارکوف نامیده شدند) توسعه می‌داد. استفاده‌ی راژمند از نظریه‌ی مجموعه‌ها و نظریه‌ی توابع (متغیرهای تصادفی حقیقی‌مقدار) در مدل‌های احتمالاتی، ساختن پایه‌ای نظریه‌ی فرایندهای تصادفی، توسعه‌ی نظریه‌ی مجموع متغیرهای تصادفی مستقل و همچنین معرفی رویکرد جدید به مسائل فیزیک آماری نقش مهم خینچین در ایجاد نظریه‌ی احتمال مدرن را برجسته می‌سازد.

خینچین با شروع از مسائل مربوط به نظریه‌ی اعداد (قانون لگاریتم مکرر) و نظریه‌ی توابع (همگرایی سریِ جمع‌وندهای تصادفی) علاقه‌ی خود را به مسائل بیشتر و عمیق‌تر نظریه‌ی در حال توسعه‌ی آن زمان نشان داد. علاوه‌براین، او بسیاری از ریاضیدانان جوان مسکو را جذب کرد تا این مسائل را مطالعه کنند و در نتیجه مدرسه‌ی احتمالی توسعه‌یافته‌ای را در مسکو ایجاد کنند. قابل توجه است که تنها کتاب درسی او در مورد احتمال (مشترک با شاگردش نیدونکا) «مقدمه‌ای بر نظریه‌ی احتمال» است که البته نه ابتدایی است و نه ساده [G118]. همچنین، لازم به یادآوری است که تمام کتاب‌های او به‌دلیل سخنرانی‌های دوره‌ای که در دانشگاه‌ها ایراد می‌کرد، منتشر شده‌اند. بنابراین، اولین اثر او [G35] در مورد روابط پایه‌ای احتمال در سال‌های ۱۹۲۷–۱۹۳۲ به‌دلیل قصد او برای درک ماهیت رویکرد احتمالی و نشان‌دادن آن به جوانان در ساده‌ترین شکل ارائه شد. اثر دوم توضیح او درباره‌ی نظریه‌ی تازه تکمیل‌شده‌ی کلماگورِف و پتروفسکی[۲۱] در مورد فرایندهای مارکوف است [G65]. سرانجام سومین اثر او [G92] در سال ۱۹۳۸ یک مجموعه از سخنرانی‌های دوره‌ای است. این دوره‌ها مورد توجه همه به‌ویژه بوبروف[۲۲]، نیدونکا و رایکوف[۲۳] بوده است. در هر یک از کتاب‌های خینچین می‌توان به قصد او برای توصیف جامع ایده‌های مربوطه و مشارکت‌دادن دیگران در حل مسائل مطرح‌شده پی برد. چنین رویکردی را می‌توان در آثار بعدی او در مورد نظریه‌ی صف (یا اینکه چگونه آن را «نظریه‌ی خدمات انبوه» نامید)، و نظریه‌ی اطلاع مشاهده کرد. پایه و اساس فیزیک آماری مقاله‌ی خینچین است که در آن ایده‌های اصلی احتمالات را با دختران و پسران مدرسه‌ای مورد بحث قرار می‌دهد (به "دانشنامه‌ی کودکان" [G151] و کتابچه‌ی درخشان [G70] مراجعه کنید). او اعتقاد داشت که عناصر احتمال باید قبلاً در دبیرستان تدریس شوند. استدلال‌های اصلی او این بود:

۱) بسیاری از افرادی که دوره‌ی متوسطه را به پایان می‌رسانند با داده‌های آماری خاصی روبه‌رو می‌شوند. مطالعه‌ی برخی مفاهیم نظریه‌ی احتمال، مبنای خوبی برای آن است،

۲) در حل مسائل عینی نظریه‌ی احتمال با استفاده از فرمول‌های ترکیبیات، دانش‌آموزان ممکن است به این روابط علاقه‌مند شوند و سعی کنند که معنی آنها را در سطح بالاتری درک کنند.

۳. دستاوردهای عظیم پژوهشی

خینجین پس از انتشار اولین مقاله‌اش برای جامعه‌ی احتمال‌دانان اروپا شناخته شد. در سال ۱۹۲۸ او چند هفته را در دانشگاه گوتینگن[۲۴]، یکی از مهم‌ترین مراکز ریاضی اوایل قرن بیستم، گذراند. در اینجا او دست‌کم دو مقاله تهیه کرد که در سال ۱۹۲۹ به‌ترتیب در [G46] و [G48] منتشر شدند. به‌هرحال، اولین مقاله‌ی خینچین در سال ۱۹۲۴ منتشر شد. برای اهمیت این

[19]P. Levy [20]E. Borel [21]I. G. Petrovsky [22]A. A. Bobrov [23]D. A. Raikov [24]university in gottingen

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.130896.xxxx

مقاله لازم است وضعیت نظریه‌ی احتمال در آن سال‌ها روشن شود. در این خصوص، ریچارد فون میزس[۲۵] وضعیت را در جمله‌ی زیر خلاصه می‌کند: «امروز، نظریه‌ی احتمال یک علم ریاضی نیست». هیچ تعریف مشخصی از احتمالِ ریاضی وجود نداشت و مبانی مفهومیِ آن کاملاً مبهم بودند. به‌علاوه، به استثنای تعداد معدودی که عمدتاً متعلق به مکاتب فرانسوی و روسی بودند، نویسندگان احتمالی از معیارهای جدی که در سایر زمینه‌های ریاضی بدیهی تلقی می‌شدند، آگاه نبودند. قبلاً در اواسط دهه‌ی ۱۹۲۰ تفسیر دیگری از نظریه‌ی احتمال به‌عنوان شاخه‌ای از علوم ریاضی ارائه شده بود. خینچین در اثر خود تحت عنوان "قوانین پایه‌ای احتمال" ([G35])، که در سال ۱۹۲۷ منتشر شد، نوشت: "تا سال‌های اخیر در اروپا، نظر غالب نظریه‌ی احتمال، علم بود که مهم و مفید است، امّا نمی‌توان مسائل جدی را بیان و حل کرد. به‌هرحال، کار ریاضیدانان روسی (به‌ویژه، نتایج چبیشف[۲۶]، لیاپانوف[۲۷] و مارکوف[۲۸]) به ما نشان می‌دهد که این دیدگاه درستی نیست". نظریه‌ی احتمال روشی است که عمیقاً با روش‌های نظریه‌ی توابع مدرن[۲۹] مرتبط است، و بنابراین بیشتر ایده‌های اخیر که در تحلیل ریاضی ظاهر می‌شوند، کاربرد پرباری در نظریه‌ی احتمال دارند. این دیدگاه خوش‌بینانه‌ی خینچین در چند دهه‌ی بعد مورد تأیید دانشمندان قرار گرفت.

در پایان دهه‌ی ۱۹۳۰، نظریه‌ی احتمالِ ریاضی به‌طور محکم بر پایه‌ی اصول‌موضوعی بنا نهاده شده بود. این حوزه به یک رشته‌ی کاملاً ریاضیاتی تبدیل شده، و با مسائل و روش‌های خاص خود، مطابق با استانداردهای آن زمان ریاضیات، در تلاقی با سایر شاخه‌های ریاضیات قرار گرفته بود که در حال رشد بودند. البته امروزه هنوز هم برخی از ریاضیدانان وجود دارند که تمایل دارند به بخش «کاربردی» احتمالات بیشتر توجه کنند امّا این نگرش در آینده‌ی نزدیک از بین خواهد رفت.

توسعه‌ی فوق‌العاده‌ی نظریه‌ی احتمال، که در طول بیست سال از دهه‌ی ۱۹۲۰ تا ۱۹۴۰ اتفاق افتاد، بدون شک، حاصل تلاش‌های تعدادی از ریاضیدانان و آماردانان بود. با این‌حال، این توسعه، تا آنجا که به جنبه‌ی ریاضی موضوع مربوط می‌شود، بیش از همه مدیون چهار دانشمند (به‌ترتیب حروف الفبای انگلیسی): بورونو دوفینیتّی[۳۰]، الکساندر یاکولوویچ خینچین، آندری کلماگورِف و پل لِوی است. نقطه‌ی عطف، امّا، انتشار اولین مقالات خینچین در مورد احتمال ([G14] و [G15]) مربوط به قانون لگاریتمِ مکرر برای یک دنباله از متغیرهای تصادفی برنولی است. مسئله به‌صورت زیر است: فرض کنید یک دنباله‌ی نامتناهی از آزمایش‌های متقابلاً مستقل داریم به‌طوری‌که احتمال رخداد پیشامد خاصی نظیر E برابر با p ($\circ < p < ۱$) است. فرض کنیم که پیشامد E در n آزمایش اول به تعداد $m(n)$ بار رخ دهد و قرار دهیم $\mu(n) = m(n) - np$. تعیین حد بالای دقیق برای مرتبه‌ی $\mu(n)$ و همچنین معنای دقیق چنین مرتبه‌ای مهم است. فرض کنید تابع $\chi(n)$ به‌گونه‌ای است که برای هر $\varepsilon > \circ$ یک صحیح مثبت $n_\circ = n_\circ(\varepsilon)$ وجود دارد به‌طوری‌که با احتمال بزرگتر از $۱ - \varepsilon$ شرایط زیر برقرارند:

- برای هر $n > n_\circ$،

$$\left|\frac{\mu(n)}{\chi(n)}\right| < ۱ + \varepsilon,$$

- وجود دارد $n > n_\circ$ای که،

$$\left|\frac{\mu(n)}{\chi(n)}\right| > ۱ - \varepsilon,$$

در این‌صورت، خینچین ثابت کرد که

$$\chi(n) = \sqrt{۲p(۱-p)n\log\log n}. \qquad (۱.۳)$$

او نشان داد که هر جواب دیگر به‌طور مجانبی معادل با (۱.۳) است.

---

[۲۹] خینچین قبل از هر چیز نتایج مربوط به نظریه‌ی اندازه و تعمیم‌های مختلف انتگرال را در نظر داشت، که در زمان انتشار کتاب بسیار مورد توجه بودند.

[25]R. von Mises [26]P. L. Chebyshev [27]A. M. Lyapunov [28]A. A. Markov [30]B. de Finetti

پس از این دستاورد (همراه با کار قبل از آن توسط امیل بورل در مورد قانون قوی اعداد بزرگ) مسئله‌ی مجموعی از متغیرهای تصادفی جایگاه مهم‌تری را در تحقیقات به خود تخصیص داد. در سال ۱۹۲۵ خینچین و کلماگورِف مطالعه‌ی هدفمند همگرایی سری‌های نامتناهی از متغیرهای تصادفی مستقل را آغاز کردند. خینچین ثابت کرد که برای متغیرهای تصادفی با مقادیر شمارا، همگرایی میانگین‌ها و واریانس‌ها همگرایی تقریباًحتمی (با احتمال یک) سری را تضمین می‌کنند. برای به‌دست آوردن این نتیجه، او از ایده‌های نظریه‌ی اندازه استفاده کرد، یعنی متغیرهای تصادفی مربوطه را به‌عنوان توابعی در بازه‌ی $[0,1]$ با اندازه‌ی لبگ[۳۱] ساخت. از دیدگاه مدرن، استفاده از چنین ساختاری ضروری نیست، امّا به تعبیری، یکی از سنگ‌های کوچکی بود که پایه و اساس نظریه‌ی احتمال کلماگورِف بر پایه‌ی آن ساخته شد.[۳۲]

مقالات خینچین که به قانون لگاریتم مکرر و مجموعی از متغیرهای تصادفی اختصاص داده شده بود، با مقالاتی که با مسئله‌ی کلاسیک مجموع متغیرهای تصادفی مستقل سروکار دارند، دنبال شدند. او شرایط مشخصی را در مورد کاربرد قانون اعداد بزرگ در مورد جمع‌وند متغیرهای تصادفی متقابلاً مستقل و هم‌توزیع بیان کرد که به وجود مقدار مورد انتظار متناهی تقلیل می‌یافت [G44]. او این را ثابت کرده بود که برای هر دنباله‌ی x_1، x_2، ... از متغیرهای تصادفی متقابلاً مستقل و هم‌توزیع با امیدریاضی متناهی، با احتمال یک،

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j \to \mathbb{E}(x_1). \qquad (۲.۳)$$

خینچین در بسیاری از آثار خود توجه ویژه‌ای به شرایط همگرایی به قانون گاوسی[۳۳] داشت. ازجمله‌ی اولین مقالاتی که به این موضوع می‌پردازند، باید به مقالات [G47] و [G48] در سال ۱۹۲۹ اشاره کرد که نقطه‌ی آغاز مطالعاتی بود که به اصطلاح «انحراف‌های بزرگ»[۳۴] نام نهاده شدند. بعداً، در سال ۱۹۳۵، او شروع به توسعه‌ی ایده‌ی «حوزه‌ی ربایش»[۳۵] قانون گاوسی کرد [G74]. این مفهوم، که توسط پل لِوی مطرح شده بود، اساساً در اثر سال ۱۹۳۸ توسط خینچین توسیع یافت [G92]. نتیجه‌ی اصلی مقاله‌ی [G74] را خینچین به‌صورت زیر بیان می‌کند؛ او ابتدا تعریف زیر را ارائه کرد:

توزیع $F(x)$ متعلق به حوزه‌ی ربایش توزیع $G(x)$ است هرگاه برای مجموع S_n از n متغیر تصادفی که مستقل و هم‌توزیع تحت قانون $F(x)$ توزیع می‌شوند، اعداد $\xi_n > 0$ و η_nای وجود داشته باشند به‌طوری‌که توزیع $S_n/\xi_n - \eta_n$ وقتی $n \to \infty$ به $G(x)$ میل کند.

ازآنجایی‌که قانون گاوس مهم‌ترین قانون در بین قوانین حدی به معنای فوق است، باید یک معیار ساده وجود می‌داشت که تشخیص دهد یک قانون مشخص متعلق به حوزه‌ی ربایش قانون گاوس است یا خیر. این معیار ساده این است که انتگرال

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha^2 dF(\alpha),$$

متناهی باشد، امّا توزیع‌هایی وجود دارند که این انتگرال برای آنها نامتناهی است درحالی‌که به حوزه‌ی ربایش قانون گاوس تعلق دارند. بنابراین، خینچین در [G74] قضیه‌ی زیر را ثابت کرد.

قضیه ۱.۳. توزیع $F(x)$ متعلق به حوزه‌ی ربایش قانون گاوس است اگروتنهااگر

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2[1 - F(x) - F(-x)]}{\int_{-x}^{x} \alpha^2 dF(\alpha)} = 0. \qquad (۳.۳)$$

[۳۲] کلماگورِف فصل ۶ از کتاب خود را به نتایج خینچین و خودش در مورد کاربرد قانون معمولی و قوی اعداد بزرگ اختصاص داده بود [۸]. او در مقدمه‌ی این کتاب نوشته است: «می‌خواهم از آقای خینچین تشکر کنم، که تمام دست‌نوشته را خوانده و چندین موضوع را پیشنهاد کرده است».

[31] lebesgue [33] Gaussian [34] large deviations [35] domain of attraction

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.130896.xxxx

مفهوم حوزه‌ی ربایش قانون گاوس به‌شدت با شرایط همگرایی جمع‌های هنجیده[۳۶] از متغیرهای تصادفی مستقل به توزیع نرمال مرتبط است. در مورد متغیرهای هم‌توزیع، خینچین به‌طور همزمان با لِوی و فِلِر[۳۷]، امّا مستقل از آنها، شرایط لازم‌وکافی برای همگرایی به توزیع نرمال را یافت [G79].

در سال ۱۹۲۸، برونو دوفینیتّی تحقیقی را در مورد توابع با نموهای تصادفی[۳۸] براساس نظریه‌ی توابع مشخصه‌ی بی‌نهایت بخش‌پذیر[۳۹] آغاز کرد، اگرچه از چنین اصطلاحی استفاده نکرد [۱، ۲، ۳، ۴، ۵]. مسئله‌ی دوفینیتّی در حالت واریانس نامتناهی، در سال ۱۹۳۴ توسط لِوی مورد بررسی قرار گرفت. در آن زمان و در سال ۱۹۲۵ لِوی به توزیع‌های به اصطلاح پایدار[۴۰] علاقه‌مند بود [۹]. رویکرد لِوی که بعداً در کتاب کلاسیک او در سال ۱۹۳۷ به‌خوبی توضیح داده شد، کاملاً مستقل از رویکرد کلماگورِف است [۱۱]، همان‌طور که از پاورقی‌های مقاله‌ی او در سال ۱۹۳۴ می‌توان فهمید [۱۰]. لِوی از نتایج حاصل از فرایندهای همگن با نموهای مستقلِ به‌دست آمده توسط دوفینیتّی و کلماگورِف اطلاع نداشته است. نتیجه‌ی نهایی لِوی به‌عنوان «نمایش کانونی لِوی از توابع مشخصه‌ی بی‌نهایت بخش‌پذیر» شناخته می‌شود. در مقاله‌ای در سال ۱۹۳۷ خینچین نشان داد که نتیجه‌ی لِوی را می‌توان با توسیع روش کلماگورِف نیز به‌دست آورد [G81]: نتیجه‌ی نهایی وی به‌عنوان «بازنمایی کانونی لِوی–خینچین توابع مشخصه‌ی بی‌نهایت بخش‌پذیر» شناخته می‌شود. ترجمه‌ی روسی این مقاله‌ی اساسی را می‌توان در [G81] یافت. نظریه‌ی توزیع‌های بی‌نهایت بخش‌پذیر سپس در مقاله‌ی [G91] و به زبان روسی در کتاب او در سال ۱۹۳۸ در مورد «توزیع‌های حدی برای مجموع متغیرهای تصادفی مستقل» ارائه شد [G92].

خینچین و پل لِوی برای خلق نظریه‌ی توزیع‌های پایدار در رقابت بودند[۴۱]. آنها به آثار یکدیگر علاقه داشته‌اند. برخی از نتایج آنها شبیه به نتایج به‌دست آمده توسط طرف مقابل است. یکی از نمونه‌های این نتایج، یادداشت کوچکی از خینچین در سال ۱۹۳۷ است که به توصیف رده‌های ناوردای توزیع‌ها اختصاص دارد [G84]. قضیه‌ی ارائه‌شده تعمیم مستقیم یک قضیه‌ی مشابه توسط لِوی است. نقش رده‌های ناوردا از توزیع‌ها در نظریه‌ی احتمال مشخص شده است. مقاله‌ی دیگر، یادداشت خینچین در سال ۱۹۳۷ است که در آن نمونه‌هایی از قوانین توزیع پایدار وجود دارد [G85]. خینچین و لِوی تنها یک مقاله‌ی مشترک در سال ۱۹۳۷ منتشر کرده‌اند [G86]. این مقاله به اثبات قضیه‌ی زیر اختصاص دارد:

قضیه ۲.۳. تابع مشخصه‌ی $\varphi(t)$ی قانون توزیع پایدار در رابطه‌ی

$$\log\varphi(t) = -c\left(۱ - i\beta\frac{t}{|t|}\tan\frac{\pi}{۲}\alpha\right)|t|^\alpha, \quad (c > ۰, ۰ < \alpha \leq ۲, |\beta| \leq ۱)$$

صدق می‌کند.

اثبات این قضیه شامل دو بخش است. بخش مربوط به $۰ < \alpha < ۱$ توسط پل لِوی و بخش مربوط به $۱ \leq \alpha \leq ۲$ توسط خینچین ثابت شده است. این مقاله از طریق مکاتبات نوشته شده است و نویسندگان برای بحث در مورد نتایج مقاله باهم ملاقات نداشته‌اند.

در اواسط دهه‌ی ۱۹۳۰، خینچین نظریه‌ی عمومی توزیع‌های حدی را برای مجموع متغیرهای تصادفی مستقل ارائه کرد. او در مقاله‌ی بنیادی خود در سال ۱۹۳۷، حدس کلماگورِف مبنی بر قانون حدی برای مجموع متغیرهای تصادفی متقابلاً مستقل را وقتی هر جمع‌وند نسبت به مجموع نادیده گرفته شود بی‌نهایت بخش‌پذیر باشد، ثابت کرد [G91]. همچنین اتفاق می‌افتد که رده‌ی توزیع‌های بی‌نهایت بخش‌پذیر، اجتماعی از آن توزیع‌هایی است که حد مجموع متغیرهای تصادفی متقابلاً مستقل هستند

[۴۱] خینچین توجه زیادی به نتایج لِوی داشت و به خاطر پیگیری‌های او نظریه‌ی لِوی برای احتمال‌دانان دیگر شناخته‌تر شد.

[36] normed [37] W. Feller [38] random increments [39] infinitely divisible [40] stable distributions

http://dx.doi.org/10.22108/msci.2023.137322.1569

و شرایطی را برآورده می‌کنند که هیچ یک از مجموع‌های تکی تأثیری بر مقدار حدِ مجموع نداشته باشد. واضح است که مسئله بدون شرط آخر معنا ندارد زیرا در این مورد تقریباً همه‌ی مجموع‌ها از این نوع حد ندارند. او ثابت کرد که هر توزیعِ جزئی یک توزیع بی‌نهایت بخش‌پذیر است. به‌عکس، هر توزیع بی‌نهایت بخش‌پذیر یک توزیع جزئی است. او نشان داد که چگونه می‌توان یک متغیر تصادفی جدید را تعیین کرد که دارای توزیع پایدار دلخواه (امّا نه گاوسی)، از دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع (با توزیع $H(x)$) با استفاده از یک ساختار ساده است. مدل دیگری از این نوع، که از قانون پواسون به‌جای $H(x)$ و انتگرال به‌جای سری استفاده می‌کند، توسط لِوی پیشنهاد شده بود. به این ترتیب می‌توان مدلی برای متغیرهای تصادفی که در شرط توزیع پایدار صدق می‌کنند، به‌دست آورد. به‌هرحال، نقش اساسی توزیع‌های بی‌نهایت بخش‌پذیر در نظریه‌ی احتمال با تحقیقات دوفینیتّی، کلماگورِف و لِوی در مورد فرایندهای تصادفی همگن نسبت به زمان، و خینچین و باولی[42] بر روی قوانین حدی برای مجموع متغیرهای تصادفی مستقل، مشخص شد.

اثر [G92] در سال ۱۹۳۸ ارائه‌ی خوبی از قضیه‌ی حدی برای مجموع متغیرهای تصادفی مستقل و کاربرد آن در مسئله‌ی کلاسیکِ همگرایی مجموع‌های هنجیده به توزیع نرمال است. براساس دوره‌ای از سخنرانی‌هایی که خینچین در دانشگاه دولتی مسکو ایراد کرده بود، این موضوع علاقه‌ی بوبروف، نیدونکا، رایکوف را به این مسئله جلب کرد. قضیه‌ای، در این اثر، ثابت می‌کند که:

رده‌ی همه‌ی توزیع‌های پایدار بر رده‌ی توزیع‌های حدی برای مجموع‌های هنجیده‌ی $(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)/A_n - B_n$ منطبق است که در آن xها متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع هستند، و $A_n > 0$ و B_n ثابت هستند.

کتاب خینچین هرگز به زبان دیگری ترجمه نشد. توسعه‌ی بیشتر نتایج او را می‌توان در رساله‌ی کلماگورِف و نیدونکا [۷] در مورد توزیع حدی برای مجموع متغیرهای تصادفی مستقل یافت که در سال ۱۹۴۹ به زبان روسی و در سال ۱۹۵۴ به زبان انگلیسی منتشر شد. ترجمه‌ی کامل فن‌ها و نتایج اصلی در [۱۲] وجود دارند. ازآنجایی‌که نتایج ارائه‌شده ساده، واضح و دقیق هستند، برای متخصصان نظریه‌ی احتمال و همچنین برای مبتدیان این شاخه از ریاضیات جالب و جذاب هستند.

مراجع

[1] B. de Finetti, Sulle funzioni ad incremento aleatorio, *Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei*, **10** (1929) 163–168.

[2] B. de Finetti, Sulla possibilita di valori eccezionali per una legge di incrementi aleatori, *Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei*, **10** (1929) 325–329.

[3] B. de Finetti, Integrazione delle funzioni ad incremento aleatorio, *Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei*, **10** (1929) 548–553.

[4] B. de Finetti, Le funzioni caratteristiche di legge istantanea, *Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei*, **12** (1930) 278–282.

[5] B. de Finetti, Le funzioni caratteristiche di legge istantanea dotate di valori eccezionali, *Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei*, **14** (1931) 259–265.

[6] B. V. Gnedenko, Alexander Iacovlevich Khinchin, *Proceedings of the 4th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, held at Statistical Laboratory, University California, June 20th- July 30, 1960, **II**, Contributions to Probability Theory, (1961) 1–16.

[42] G. M. Bawly

http://dx.doi.org/10.22108/MSCI.2021.130896.xxxx

[7] B. V. Gnedenko and A. N. Kolmogorov, *Limit distributions for sums of independent random variables*, Addison-Wesley, Cambridge (Mass), 1954, English translation from the Russian edition, G. I. T. T. L., Moscow, 1949.

[8] A. N. Kolmogorov, *Grundbegriffe der wahrscheinlichkeitsrechnung*, Julius Springer, Berlin, 1933, English translation by Chelsea, New York: Foundation of the Theory of Probability, 1950.

[9] P. Levy, *Calcul des probabilites*, Gauthier-Villars, Paris, 1925. [Reprinted in 2003 by Editions Jaques Gabay (Les Grands Classiques Gauthier-Villars)].

[10] P. Levy, Sur les integrales dont les elements sont des variables aleatoires independentes, *Ann. R. Scuola Norm. Pisa (Ser. II)*, **3** (1934) 337–366.

[11] P. Levy, *Theorie de la Addition des Variables Aleatoires*, 2nd edn. Gauthier-Villars, Paris, 1954 [1st edn, 1937] [eprinted in 2003 by Editions Jaques Gabay, Paris (Les Grands Classiques Gauthier–Villars)].

[12] S. V. Rogosin and F. Mainardi, *The legacy of A. Ya. Khintchine's work in probability theory*, Cambridge Scientific Publishers, 2010.

رامین کاظمی
گروه آمار، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره)، قزوین، ایران
r.kazemi@sci.ikiu.ac.ir

رامین کاظمی متولد شهریورماه ۱۳۵۷ در شهر دلفان از توابع استان لرستان است. وی در سال ۱۳۷۶ وارد مقطع کارشناسی رشته آمار دانشگاه رازی و در سال ۱۳۸۱ وارد مقطع کارشناسی ارشد رشته آمارریاضی در دانشگاه شهید بهشتی شد. در سال ۱۳۸۶ دوره دکتری در گرایش احتمال را در دانشگاه شهید بهشتی و تحت راهنمایی دکتر محمدقاسم وحیدی‌اصل آغاز و در سال ۱۳۹۰ از رساله خود دفاع کرد. حوزه‌ی پژوهشی او، درخت‌های تصادفی، ترکیبیات تحلیلی و تاریخ و فلسفه‌ی ریاضیات است. در حال حاضر، او استاد گروه آمار دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره) است.